

Laufband

Aufgabennummer: 2_029

Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3

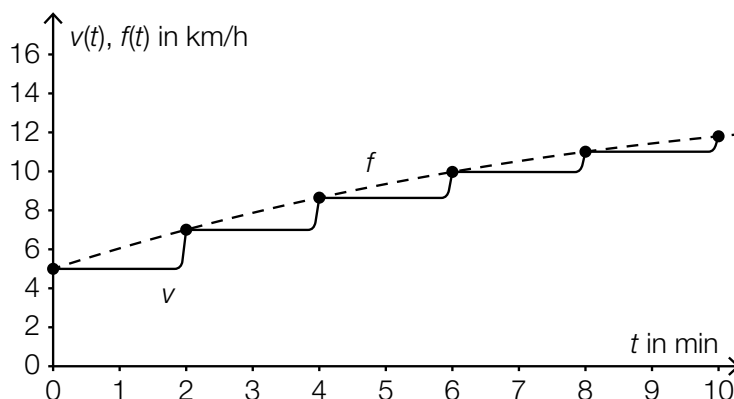
Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können.

Bei einem individuell erstellten, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbandgeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbandgeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit

$$f(t) = 0,0008 \cdot t^3 - 0,05 \cdot t^2 + 1,1 \cdot t + 5.$$

Die Laufbandgeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnungen wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbandgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!
Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

- b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

$$v_{\min} = \underline{\hspace{4cm}} \text{ km/h}$$

$$v_{\max} = \underline{\hspace{4cm}} \text{ km/h}$$

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten $t_{\min}$ und $t_{\max}$, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{\min}) \neq 0$ und $f'(t_{\max}) \neq 0$ gilt!

- c) Geben Sie den Wert von $v'(1)$ an und interpretieren Sie diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$$v'(1) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Beschreiben Sie anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall $[0; 30]$ verlaufen müsste!

- d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t) dt$ berechnet werden.

Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

- e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).

Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h .

	$t = 15 \text{ min}$	$t = 30 \text{ min}$	$t = 45 \text{ min}$	$t = 60 \text{ min}$
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k !

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo“ in min/km umschrieben. Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + \dots + f(28)) \approx 11,57$

Das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h.

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \dots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: $0,5 \text{ h} \cdot 11,57 \text{ km/h} = 5,785 \text{ km}$

b) $v_{\min} = 5 \text{ km/h}$
 $v_{\max} = 14,16 \text{ km/h}$

$t_{\min}$ und $t_{\max}$ sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f , weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

c) $v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt 0 m/s².

oder:

Das Laufband (die Läuferin/der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ min}$ gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2, t = 4, t = 6, \dots$) sehr hohe Werte annehmen.

d) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t) dt \approx 1,506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h = 60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:

$$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1,388 \text{ km}$$

⇒ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

e) $194 = k \cdot 80 \cdot 2,5$
 $k = 0,97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8