

Saturn-V-Rakete

Aufgabennummer: 2_025

Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3

☐ keine Hilfsmittel
erforderlich

☐ gewohnte Hilfsmittel
möglich

☒ besondere Technologie
erforderlich

Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen“. Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht.

Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US-amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.

Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2,9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2,24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0,0000000283 \cdot t^5 - 0,00000734 \cdot t^4 + 0,000872 \cdot t^3 - 0,00275 \cdot t^2 + 2,27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

- a) Berechnen Sie die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Geben Sie an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

- b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründen Sie, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“ berechnet werden kann!

- c) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_1 , für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0) + v(160)}{2}$. Interpretieren Sie t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!
- d) Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Geben Sie die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

- e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

Deuten Sie das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreiben Sie, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

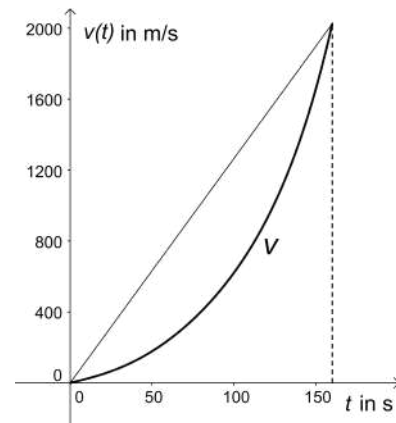
Begründen Sie anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird!

Möglicher Lösungsweg

a) $a(0) = v'(0) = 2,27 \text{ m/s}^2$
 $a(160) = v'(160) = 40,83 \text{ m/s}^2$

Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührungpunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall $[0 \text{ s}; 160 \text{ s}]$ ist.

Weitere mögliche Begründung:
 Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in $[0; 160]$ ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.



b) $s(160) = \int_0^{160} v(t) dt \approx 93\,371$

zurückgelegter Weg nach 160 s: 93 371 m

$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

c) $v(0) = 0 \text{ m/s}; v(160) \approx 2\,022 \text{ m/s}$
 $v(t_1) = 1\,011 \Rightarrow t_1 \approx 125 \text{ s}$

Die Geschwindigkeit ist nach 125 s halb so groß wie nach 160 s.

d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
 $\frac{2,24}{2,9} \approx 0,77$
 Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

- e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
 r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.

Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel

- a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0)$: $[2,2 \text{ m/s}^2; 2,3 \text{ m/s}^2]$
Toleranzintervall für $a(160)$: $[40 \text{ m/s}^2; 42 \text{ m/s}^2]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.
- b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: $[93\,000 \text{ m}; 94\,000 \text{ m}]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.
- c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1 .
Toleranzintervall: $[124 \text{ s}; 126 \text{ s}]$
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.
- d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: $[77 \text{ } \%; 78 \text{ } \%]$
- e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.