

Hohlspiegel

Aufgabennummer: 2_023

Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: a) AG 2.1, FA 1.8 b) FA 1.7, FA 1.8 c) AG 2.1, FA 1.2

☒ keine Hilfsmittel
erforderlich

☒ gewohnte Hilfsmittel
möglich

☐ besondere Technologie
erforderlich

In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenver-
spiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt M der
Kugel, der Scheitelpunkt S und der Brennpunkt F des Spiegels.

Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

Brennweite f des Spiegels: $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2}$ ($f > 0$)

Radius der Kugel: $\overline{MS} = 2 \cdot f$

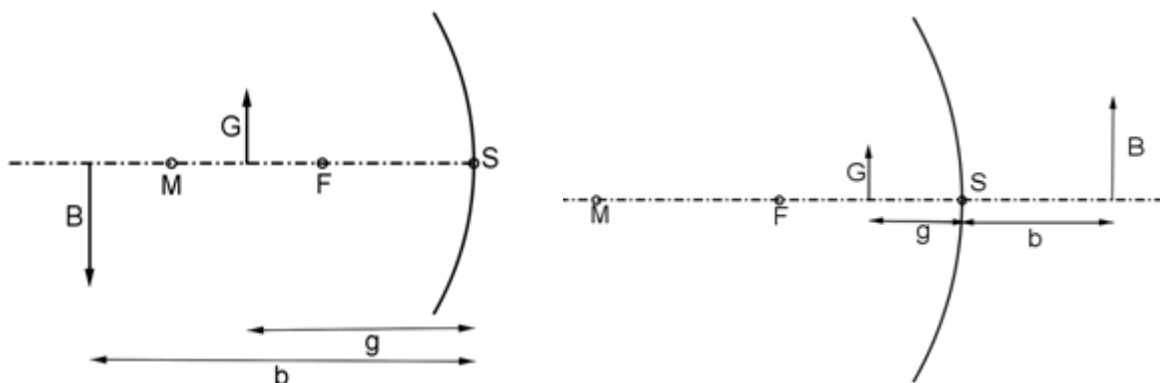
Die Entfernung eines Gegenstands G (mit der Höhe G) vom Scheitelpunkt S wird mit g ($g > 0$)
bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes B
(mit der Höhe B) vom Scheitel S mit b .

Das Vorzeichen von b hat dabei die folgenden Bedeutungen:

- $b > 0$: Es entsteht ein reelles Bild „vor“ dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen
werden kann.
- $b < 0$: Es entsteht ein virtuelles Bild „hinter“ dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:

- linke Grafik: reelles Bild B eines Gegenstandes G ($b > 0$)
- rechte Grafik: virtuelles Bild B eines Gegenstandes G ($b < 0$)



Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ und $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$. Daraus ergibt sich der Zusammenhang $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Der Quotient $\frac{B}{G}$ bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv ($g > 0$ und $b > 0$) und bei einem virtuellen Bild negativ ($g > 0$ und $b < 0$).

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie den Vergrößerungsfaktor $\frac{B}{G}$ für $f = 40$ cm und $g = 50$ cm an!

Geben Sie ein Intervall für die Gegenstandsweite g an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründen Sie Ihre Antwort durch eine mathematische Argumentation!

- b) Stellen Sie die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei konstanter Brennweite f dar! Betrachten Sie die Fälle $g = 2f$ sowie $g = f$ und geben Sie die jeweilige Auswirkung für b an!

Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von b ausgesagt werden, wenn $g > f$ ist und sich g der Brennweite f annähert? Tätigen Sie eine entsprechende Aussage und begründen Sie diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

- c) Leiten Sie aus den gegebenen Beziehungen $\frac{G}{B}$ die oben angeführte Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ her! Geben Sie die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ kann als Funktion in Abhängigkeit von g der Form $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$ betrachtet werden. Geben Sie die Werte der Parameter a und c sowie des Exponenten k für diesen Fall an!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{1}{b} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200} \rightarrow \text{Bildweite } 200 \text{ cm} = 2 \text{ m}$

$$\frac{B}{G} = \frac{200}{50} = 4 \rightarrow \text{vierfache Vergrößerung}$$

Bildweite negativ:

Intervall für g : $(0; f)$ bzw. Angabe des Intervalls durch: $0 < g < f$

Akzeptiert wird auch der Bezug zur ersten Fragestellung mit $f = 40$.

Intervall für g : $(0; 40)$ bzw. $0 < g < 40$

Begründung 1: Aus $b = \frac{g \cdot f}{g - f} < 0$ folgt $g < f$.

Begründung 2: Aus $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ folgt $g < f$, da der Kehrwert von b dann größer ist als der Kehrwert von f .

b) Funktion: $b(g) = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$b(2f) = 2f$; Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich groß und entsprechen dem Radius der Kugel. Erweiterung: Auch G und B sind gleich groß. $b(f)$ existiert nicht; der Nenner hat den Wert 0.

(Auch die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ ist als richtig zu werten.)

Annäherung von g an f mit $g > f$:

Der Ausdruck $\frac{f \cdot g}{g - f}$ ist positiv; der Zähler ist eine positive Zahl (auch: nähert sich dem Wert f^2), der Nenner ist positiv und nähert sich dem Wert 0, daher wird b immer größer (der Grenzwert ist unendlich – oder ähnliche Aussagen).

Anmerkungen: Wenn die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ verwendet wird, sind auch umgangssprachliche

Formulierungen wie „oben steht die positive Zahl 1, unten steht etwas Positives, das gegen 0 geht, daher ist der Grenzwert +1“ als richtig zu werten. Auch Argumente, bei denen teilweise oder immer „oben“ statt „Zähler“ und „unten“ statt „Nenner“ (oder Ähnliches) verwendet wird, sind als richtig zu werten.

c) Zwei mögliche Umformungen werden angeführt:

Variante 1:

$$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f}$$

$$\frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1 \quad | : g$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$$

Variante 2:

$$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \quad | \cdot (b \cdot f)$$

$$g \cdot f = b \cdot g - f \cdot b \quad | : (b \cdot g \cdot f)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$$

Daraus ergibt sich direkt der angegebene Zusammenhang.

$$\frac{1}{b}(g) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \Rightarrow a = -1, k = -1, c = \frac{1}{f}$$