

Baumwachstum

Aufgabennummer: 2_010

Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die nachstehende Tabelle enthält Messwerte des Umfangs eines bestimmten Baumstamms in Abhängigkeit von seinem Alter.

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370

Dieser Zusammenhang kann durch eine Wachstumsfunktion u modelliert werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

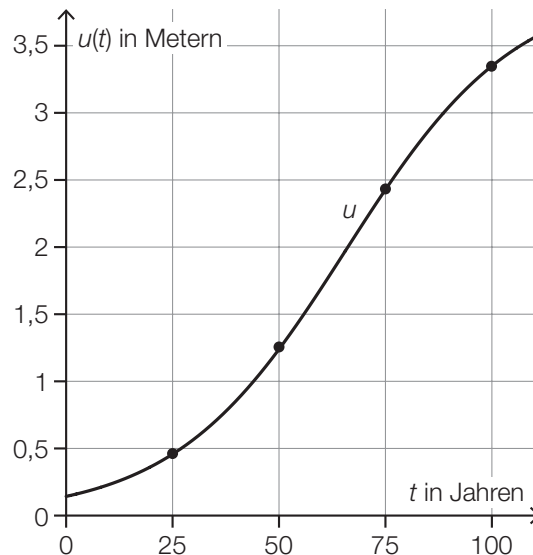
Aufgabenstellung:

- a) Für die ersten 50 Jahre soll die Zunahme des Umfangs mit einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden.
- 1) Geben Sie a und b so an, dass f mit den in der obigen Tabelle angegebenen Werten für ein Alter von 25 und 50 Jahren übereinstimmt.
- $a =$ _____
- $b =$ _____
- 2) Begründen Sie rechnerisch, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen ist.
- b) 1) Interpretieren Sie den Differenzenquotient von u im Zeitraum von 50 bis 75 Jahren unter Angabe des konkreten Wertes im gegebenen Sachzusammenhang.

Es gilt: $u'(50) = 0,043$.

- 2) Interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) In der nachstehenden Abbildung sind die Messwerte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung denjenigen Zeitpunkt t_0 ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat.

$t_0 =$ _____ Jahre

- 2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist.

- d) Für die Wachstumsfunktion u gilt: $u(t) = \frac{3,95}{1 + 26,65 \cdot e^{-0,06 \cdot t}}$.

Der Umfang des Baumstamms nähert sich entsprechend dieser Wachstumsfunktion einem bestimmten Wert $u_{\max}$.

- 1) Geben Sie $u_{\max}$ an.

$u_{\max} =$ _____ Meter

Lösungserwartung

a1) $0,462 = a \cdot b^{25}$

$1,256 = a \cdot b^{50}$

$\Rightarrow a = 0,1699\dots$

$b = 1,0408\dots$

a2) $f(75) = 0,1699\dots \cdot 1,0408\dots^{75} = 3,4145\dots$

Der Funktionswert weicht stark vom Wert in der Tabelle ab. Aus diesem Grund ist dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen.

b1) $\frac{u(75) - u(50)}{75 - 50} = \frac{2,465 - 1,256}{25} = 0,048\dots$

Die durchschnittliche Zunahme zwischen 50 und 75 Jahren beträgt rund 0,05 m pro Jahr.

b2) Die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 50$ beträgt 0,043 m pro Jahr.

c1) $t_0 = 65$ Jahre

c2) $u''(t) = 0$

d1) $u_{\max} = 3,95$ Meter

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte.

a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

c1) Ein Punkt für das richtige Ablesen.

Toleranzintervall: [55; 75]

c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

d1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.