Total number of printed pages—8

2/11

23T-MATH

(NEW COURSE)

2013

# MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions.*

## NEW COURSE

নতুন পাঠ্যক্ৰম

1. Answer the following questions :

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : 1×10=10

(a) Given that $R=\{(a, b) \mid 3 \text{ divides } a-b\}$ is an equivalence relation in the set of integers $\mathbb{Z}$. What is the number of partitions of $\mathbb{Z}$?

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{Z}$ অত $R=\{(a, b) \mid a-b,\ 3 \text{ ৰে বিভাজ্য}\}$ এটা সমতুল্য সম্বন্ধ। $\mathbb{Z}$ অৰ বিভাগৰ সংখ্যা কিমান?

(b) Write down the domain of the function $cosec^{-1}$.

$cosec^{-1}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ লিখা।

(c) If $A$ is a square matrix of order 3 such that $|adj\ A|=36$, then what is the value of $|A^T|$?

যদি $A$ এটা 3 ঘাতৰ বৰ্গমৌলকক্ষ, যত $|adj\ A|=36$, তেন্তে $|A^T|$ ৰ মান কিমান হ'ব?

Contd.

Downloaded from JobAssam.in

(c) If $A = [5+i]$ then what is the value of $|A|$ ?

যদি $A = [5+i]$ , তেন্তে $|A|$ ৰ মান কি?

(d) If $\omega$ is the cube root of unity, what is the value of the one root of the equation

$$\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$$

যদি $\omega$ এটা একক কাল্পনিক ঘনমূল হয় তেনেহলে $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$ সমীকৰণৰ এটা মূল কি হ'ব?

(e) What is the equation of the normal at the point $(x_0, y_0)$ if $\frac{dy}{dx}$ at this point does not exist ?

$(x_0, y_0)$ বিন্দুত অভিলম্বৰ সমীকৰণ কি হ'ব যদিহে সেই বিন্দুত $\frac{dy}{dx}$ স্থিত নহয় ?

(f) What is the value of $\frac{d}{dx}([x])$, if $x \in (6, 7)$, where $[x]$ denotes the greatest integer $\leq x$ ?

যদি $x \in (6, 7)$, তেন্তে $\frac{d}{dx}([x])$ ৰ মান কিমান, য'ত $[x]$ হ'ল বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা $\leq x$ ?

(g) What is the projection vector of $\bar{a}$ along $\bar{b}$ ?

$\bar{b}$ ৰ দিশত $\bar{a}$ ৰ প্ৰক্ষেপ ভেক্টৰটো কিমান হব?

(h) What is the distance of the point $(1, -2, 3)$ from $z$-axis ?

$z$- অক্ষৰ পৰা $(1, -2, 3)$ বিন্দুৰ দূৰত্ব কিমান?

(i) Can a vector have direction angles as $45^\circ$, $60^\circ$, $120^\circ$ ?

এটা ভেক্টৰৰ দিশাংক কোণ $45^\circ$, $60^\circ$, $120^\circ$ হব পাৰেনে?

2. Show that the intersection of two equivalence relations in a set is again an equivalence relation in the set. 4

দেখুওৱা যে এটা সংহতিৰ ওপৰত দুটা সমতুল্য সম্বন্ধৰ ছেদন পুনৰ সেই সংহতিটোত এটা সমতুল্য সম্বন্ধ।



Downloaded from JobAssam.in

3. Show that (দেখুওৱা যে) 4

$$tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)+\frac{1}{2}cos^{-1}x=\frac{\pi}{4}\ ;\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le 1$$

**OR (অথবা)**

Find $x$, if ( $x$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা, যদি) $sin^{-1}x+sin^{-1}2x=\pi/3$.

4. Using the properties of determinant, Prove that 4

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}=1+a^2+b^2+c^2$$

নিৰ্ণায়কৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}=1+a^2+b^2+c^2$$

5. Show that $f(x)=|x-3|$ is a continuous function but it is not differentiable at $x=3$. 4

দেখুওৱা যে $f(x)=|x-3|$ , $x=3$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অবকলনীয় নহয়।

**OR (অথবা)**

If $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ find $\frac{dy}{dx}$ using parametric co-ordinates.

প্ৰাচলিক স্থানাংক ব্যৱহাৰ কৰি $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ৰ পৰা $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

6. Find $\frac{dy}{dx}$, if 2+2=4

(i) $y=\sqrt{tan\sqrt{x}}$

(ii) $y=sin^{-1}\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$



Downloaded from JobAssam.in

... মান উলিওৱা, যদি

(i) $y = \sqrt{\tan \sqrt{x}}$

(ii) $y = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$

7. Integrate : $\int (\sin^{-1} x)^2 \, dx$

অনুকলন কৰা : $\int (\sin^{-1} x)^2 \, dx$

8. Evaluate *any one* of the following :

যিকোনো এটাৰ মান উলিওৱা :

(i) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$

(ii) $\int_1^2 \frac{1}{x(x^4+1)} dx$

9. Answer *any two* of the following : $4\times2=$

তলৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Solve : $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \; ; \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

সমাধান কৰা : $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \; ; \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

(b) Find the particular solution of the differential equation $(1+e^{2x})dy + (1+y^2)e^x dx = 0$ given that $y = 1$ when $x = 0$.

$(1+e^{2x})dy + (1+y^2)e^x dx = 0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ বিশেষ সমাধান উলিওৱা, যদি দিয়া থাকে যে $y = 1$ যেতিয়া $x = 0$.

(c) Solve the differential equation $(x^2 + xy)dy = (x^2 + y^2)dx$

$(x^2 + xy)dy = (x^2 + y^2)dx$ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

10. Give the geometrical interpretation of $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$ and find the area o a parallelogram having diagonals given by the vectors $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$; $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$ ৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া আৰু $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$; $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ক হোৱা সামান্তৰিকটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

*OR (অথবা)*

Find the value of $\lambda$ if the scalar product of the vector $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ with a unit vector alon the sum of the vectors $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ and $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ is equal to unity.

$\lambda$ ৰ মান উলিওৱা, যত $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ আৰু $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টৰ দুটাৰ যোগফলৰ দিশৰ একক ভেক্টৰ। সৈতে $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণফল একৰ সমান হয়।

11. Find the shortest distance between the lines given by

$\vec{r}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(-2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})$ and

$\vec{r}=(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+\mu(3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ 4

$\vec{r}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(-2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})$ আৰু

$\vec{r}=(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+\mu(3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰাঁ।

12. Find the probability distribution of the number of heads from the tossing of a fair coin thrice. 4

এটা মুদ্ৰা তিনিবাৰ টছ কৰোঁতে পোৱা মুণ্ড সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বন্টন নিৰ্ণয় কৰা।

*OR (অথবা)*

Let $X$ denote the sum of the numbers obtained when two fair dice are rolled. Find the variance of $X$.

দুটা নিখুঁত পাশা টচ্ কৰি পোৱা সংখ্যা দুটাৰ সমষ্টি $X$ হ'লে, $X$ৰ প্ৰসৰণ উলিওৱা।

13. If $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\frac{x}{2}\\ \tan\frac{x}{2} & 0\end{bmatrix}$ then prove that $(I+A)=(I-A)\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$. 6

যদি $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\frac{x}{2}\\ \tan\frac{x}{2} & 0\end{bmatrix}$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $(I+A)=(I-A)\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$

## OR (অথবা)

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Find $AB$ and use this to solve the following system of equations :

$$x - y = 3$$
$$2x + 3y + 4z = 17$$
$$y + 2z = 7$$

ধৰা $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $AB$ উলিওৱা আৰু পূৰণফলটো ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালীটো সমাধান কৰা :

$$x - y = 3$$
$$2x + 3y + 4z = 17.$$
$$y + 2z = 7$$

14. Answer (a) or [(b) and (c)]

(a) অথবা [(b) আৰু (c)] ৰ উত্তৰ দিয়া 6

(a) Prove that the curves $x = y^2$ and $xy = k$ cut at right angles if $8k^2 = 1$.

প্ৰমাণ কৰা যে $x = y^2$ আৰু $xy = k$ বক্ৰ দুডালে সমকোণত কটাকটি কৰে যদিহে $8k^2 = 1$ হয়।

(b) Find two positive numbers whose sum is 16 and the sum of whose cubes is minimum.

দুটা ধনাত্মক সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা যাৰ যোগফল 16 হয় আৰু সিহঁতৰ ঘনৰ যোগফল লঘিষ্ঠ হয়। 3

(c) Show that $y = log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ is an increasing function of $x$ throughout its domain. 3

দেখুওৱা যে $y = log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ ফলনটো আদিক্ষেত্ৰৰ সকলো $x$ ৰ বাবে বৰ্দ্ধমান ফলন।

15. Evaluate by expressing $\int_0^1 \left(2 - 3x + x^2\right) dx$ as the limit of a sum. 6

যোগফলৰ চৰম মান হিচাপে প্ৰকাশ কৰি $\int_0^1 \left(2 - 3x + x^2\right) dx$ ৰ মান উলিওৱা।

16. Find the Cartesian equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=4$ and $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=-3$ and also passing through the point $(1, -1, 1)$. 6

$(1, -1, 1)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=4$ আৰু $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=-3$ সমতল দুখনে কটাকটি কৰা বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

*OR (অথবা)*

Show that the lines $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{5}$ and $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{5}$ are coplanar. Find also the equation of the plane.

দেখুওৱা যে $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{5}$ আৰু $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{5}$ ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় আৰু লগতে সমতলখনৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

17. Using integration, find the area of the region bounded by the triangle whose vertices are $(-1, 0)$ $(1, 3)$ and $(3, 2)$. 6

অনুকল ব্যৱহাৰ কৰি $(-1, 0)$ $(1, 3)$ আৰু $(3, 2)$ বিন্দুৰে আগুৰা ত্ৰিভুজ ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

*OR (অথবা)*

Find the area lying above the $x$-axis and enclosed by the circle $x^2+y^2=8x$ and the parabola $y^2=4x$.

$x$ অক্ষৰ ওপৰ ফালে $y^2=4x$ অধিবৃত্ত আৰু $x^2+y^2=8x$ বৃত্তই আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

18. A manufacturer of furniture makes two products : Chairs and tables. Processing of the products is done on two machines $A$ and $B$. A chair requires 2 hours on machine $A$ and 6 hours on machine $B$. A table requires 5 hours on machine $A$ and 2 hours on machine $B$. There are 16 hours of time available on machine $A$ and 22 hours on machine $B$. If the profit gained by the manufacturer from a chair and a table are Rs. 3 and Rs. 5 respectively, how many pieces of each of chairs and tables must be produced in order that the profit gained becomes maximum? 6



Downloaded from JobAssam.in

প্ৰস্তুতকৰ্তা এজনে দুই ধৰণৰ সামগ্ৰী — চকী আৰু মেজ দুটা মেচিন $A$ আৰু $B$ ৰ সহায়ত তৈয়াৰ কৰে। চকী তৈয়াৰ কৰিবলৈ $A$ মেচিনৰ 2 ঘণ্টা আৰু মেচিন $B$ ৰ 6 ঘণ্টাৰ প্ৰয়োজন। এখন মেজ প্ৰস্তুত কৰিবলৈ মেচিন $A$ ৰ 5 ঘণ্টা আৰু মেচিন $B$ ৰ 2 ঘণ্টাৰ প্ৰয়োজন। মেচিন $A$ ৰ বাবে 16 ঘণ্টা আৰু $B$ মেচিনৰ 22 ঘণ্টা সময় মজুত আছে। যদি প্ৰস্তুতকৰ্তাজনে এখন চকী আৰু এখন মেজত ক্ৰমে 3 টকা আৰু 5 টকা লাভ কৰে, তেন্তে চকী আৰু মেজ কিমানখন প্ৰস্তুত কৰিব লাগিব যাতে লাভৰ পৰিমাণ সৰ্ব্বোচ্চ হয়?

19. Suppose there are four boxes $A$, $B$, $C$ and $D$ containing coloured marbles as given below-

| Box | Marble Colour | | |
|---|---|---|---|
| | Red | White | Black |
| $A$ | 1 | 6 | 3 |
| $B$ | 6 | 2 | 2 |
| $C$ | 8 | 1 | 1 |
| $D$ | 0 | 6 | 4 |

One of the boxes has been selected at random and a single marble is drawn from it. If the marble is red, what is the probability that it was drawn from (i) box $A$? (ii) Box $B$? (iii) box $C$? 6

তলত উল্লেখ কৰা ধৰণে চাৰিটা বাকচ $A$, $B$, $C$ আৰু $D$ ত ৰঙীন মাৰ্বল থকা বুলি ধৰা হ'ল।

| বাকচ | মাৰ্বলৰ ৰং | | |
|---|---|---|---|
| | ৰঙা | বগা | কলা |
| $A$ | 1 | 6 | 3 |
| $B$ | 6 | 2 | 2 |
| $C$ | 8 | 1 | 1 |
| $D$ | 0 | 6 | 4 |

বাকচবিলাকৰ এটা যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল আৰু এটা মাৰ্বল এই বাকচটোৰ পৰা লোৱা হ'ল। যদি মাৰ্বলটো ৰঙা হয়, তেন্তে ই (i) বাকচ $A$ (ii) বাকচ $B$ (iii) বাকচ $C$ ৰ পৰা নিৰ্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

*OR (অথবা)*

From a lot of 30 bulbs which include 6 defective, a sample of 4 bulbs is drawn at random with replacement. Find the probability distribution of the number of defective bulbs.

30টা বাল্বৰ এটা থুপত 6টা বেয়া বাল্ব আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে থুপটোৰ পৰা 4টা বাল্ব পুনৰ্স্থাপন কৰাকৈ লোৱা হ'ল। বেয়া বাল্বৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন উলিওৱা।

——— × ———



Downloaded from JobAssam.in