Ejercicios resueltos de Selectividad

Física. Campo Gravitatorio

mentoor.es

Índice de contenido

Madrid, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria) **3**

Madrid, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria) **5**

Madrid, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria) **9**

Madrid, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria) **13**

Madrid, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria) **17**

Madrid, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria) **20**

Madrid, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria) **24**

Madrid, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria) **28**

Madrid, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria) **32**

Madrid, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria) **35**

Andalucía, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria) **38**

Andalucía, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria) **44**

Andalucía, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria) **50**

Andalucía, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria) **56**

Andalucía, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria) **62**

Andalucía, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria) **68**

Andalucía, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria) **75**

Andalucía, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria) **81**

Andalucía, Junio 2020 (Convocatoria ordinaria) **85**

Andalucía, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria) **90**

Comunidad Valenciana, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria) **95**

Comunidad Valenciana, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria) **97**

Comunidad Valenciana, Junio 2023 (Convocatoria aordinaria) **100**

Comunidad Valenciana, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria) **104**

Comunidad Valenciana, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria) **107**

Comunidad Valenciana, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria) **111**

Comunidad Valenciana, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria) **116**

Comunidad Valenciana, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria) **119**

Comunidad Valenciana, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria) **123**

Comunidad Valenciana, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria) **127**

Cataluña, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria) **130**

Cataluña, Septiembre 2024 (Convocatoria extraordinaria) **135**

Cataluña, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria) **137**

Cataluña, Septiembre 2023 (Convocatoria extraordinaria) **140**

Cataluña, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria) **143**

Cataluña, Septiembre 2022 (Convocatoria extraordinaria) **148**

Cataluña, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria) **150**

Cataluña, Septiembre 2021 (Convocatoria extraordinaria) **152**

Cataluña, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria) **154**

Cataluña, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria) **158**

Madrid, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 1. Opción A

La distancia del satélite Halimede a Neptuno, planeta alrededor del cual orbita, varía entre 12 y 21 millones de km. Se pide:

a) **Calcule el trabajo realizado por la atracción gravitatoria de Neptuno sobre Halimede en el tránsito del punto más próximo al más distante de la órbita.**

b) **Sabiendo que la energía mecánica de Halimede vale $-2,5 \cdot 10^{20}$ J, determine la velocidad máxima que alcanza en su órbita.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$; Masa de Halimede, $M_H = 1,60 \cdot 10^{15}$ kg; Masa de Neptuno, $M_N = 1,02 \cdot 10^{26}$ kg.

Solución:

a) **Calcule el trabajo realizado por la atracción gravitatoria de Neptuno sobre Halimede en el tránsito del punto más próximo al más distante de la órbita.**

Se tiene que el punto más próximo de la órbita es $r_p = 12 \cdot 10^9$ km, mientras que el más alejado es $r_a = 21 \cdot 10^9$ km. El trabajo realizado por la atracción gravitatoria se determina a partir del cambio de energía potencial del satélite, invirtiendo su signo:

$$\begin{aligned} W &= -\Delta E_P = -GM_N M_H \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right) \\ &= -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,02 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{15} \cdot \left(\frac{1}{12 \cdot 10^9} - \frac{1}{21 \cdot 10^9}\right) = -3,89 \cdot 10^{20}\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el trabajo realizado en este caso es $-3,89 \cdot 10^{20}$ J.

b) **Sabiendo que la energía mecánica de Halimede vale $-2,5 \cdot 10^{20}$ J, determine la velocidad máxima que alcanza en su órbita.**

Sabemos que la máxima energía cinética (o, equivalentemente, la velocidad máxima) se alcanza en el punto de menor energía potencial de la órbita, que se trata del más cercano al planeta. Entonces, teniendo en cuenta la expresión de la energía mecánica:

$$E_M = E_P + E_C = -\frac{GM_N M_H}{r_p} + \frac{1}{2} M_H v_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{GM_N}{r_p} + \frac{E_M}{M_H}\right)}.$$

Sustituyendo los datos y utilizando el valor de energía mecánica proporcionado por el enunciado:

$$v_{\max} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,02 \cdot 10^{26}}{12 \cdot 10^9} - \frac{2,5 \cdot 10^{20}}{1,6 \cdot 10^{15}}\right)} = 906\ \mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad máxima alcanzada es 906 m/s.

Pregunta 1. Opción B

Un satélite de 200 kg de masa se mueve en una órbita cerrada alrededor de la Tierra. En un determinado instante, es detectado a 630 km de altura, moviéndose a 9,92 km s^{-1} con velocidad perpendicular a la dirección radial.

a) **Compare la velocidad del satélite con la correspondiente a una órbita circular de la altura dada y, del resultado anterior, razone si la órbita es circular o elíptica.**
b) **Calcule los módulos del momento angular y de la aceleración del satélite en el instante señalado.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **Compare la velocidad del satélite con la correspondiente a una órbita circular de la altura dada y, del resultado anterior, razone si la órbita es circular o elíptica.**

Compararemos la velocidad proporcionada con la de una órbita circular para el radio dado. Según la segunda ley de Newton, en una órbita circular se cumple:

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^6}} = 7,54\,\mathrm{km/s}.$$

Dado que la velocidad observada excede la de una órbita circular correspondiente a ese radio, podemos concluir que la órbita no es circular. Al ser cerrada, esta órbita será necesariamente elíptica.

Por lo tanto, el satélite describe una órbita elíptica dado que su velocidad es mayor a la de una órbita circular para el radio dado.

b) **Calcule los módulos del momento angular y de la aceleración del satélite en el instante señalado.**

En el instante dado, la velocidad del satélite es perpendicular a la dirección radial. Entonces, el módulo del momento angular respecto al centro de la Tierra se calcula como

$$L = mrv = 200 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 9,92 \cdot 10^3 = 1,39 \cdot 10^{13}\,\mathrm{kg\ m^2\,s^{-1}}.$$

La aceleración que experimenta el satélite, debido a la fuerza gravitatoria a esa altura, se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$a = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{49 \cdot 10^{12}} = 8,13\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por ende, el módulo del momento angular es $\mathbf{1,39 \cdot 10^{13}\,kg\ m^2\,s^{-1}}$ y la aceleración es $\mathbf{8,13\,m/s^2}$.

Madrid, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 1. Opción A

Un satélite de comunicaciones orbita alrededor de la Tierra en una trayectoria elíptica cuyo apogeo se encuentra a 39700 km de altitud sobre la superficie de la Tierra. Si el satélite da una vuelta completa cada 12 h, determine:

a) **La altura sobre la superficie terrestre a la que se encontrará el satélite en el perigeo de su trayectoria y la relación entre sus velocidades en el perigeo y en el apogeo ($\mathbf{v_p/v_a}$).**
b) **La velocidad del satélite en el perigeo y la velocidad hasta la que habría que reducir al satélite para que pasase de una órbita elíptica a una órbita circular de radio igual a la distancia al perigeo.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $\mathbf{G = 6,67 \cdot 10^{-11}}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $\mathbf{M_T = 5,97 \cdot 10^{24}}$ kg; Radio de la Tierra, $\mathbf{R_T = 6,37 \cdot 10^6}$ m.

Solución:

a) **La altura sobre la superficie terrestre a la que se encontrará el satélite en el perigeo de su trayectoria y la relación entre sus velocidades en el perigeo y en el apogeo ($\mathbf{v_p/v_a}$).**

A partir de la Tercera Ley de Kepler, podemos calcular el semieje mayor de la órbita elíptica:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}a^3 \quad \Rightarrow \quad (12 \cdot 3600)^2 = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}a^3,$$

de donde obtenemos:

$$a = 2,66 \cdot 10^7 \,\text{m}.$$

Sabemos que el semieje mayor también se puede calcular como:

$$a = \frac{r_a}{2} + \frac{r_p}{2}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$2,66 \cdot 10^7 = \frac{6,37 \cdot 10^6 + 3,97 \cdot 10^7}{2} + \frac{6,37 \cdot 10^6 + h_p}{2},$$

y de aquí se deduce que la altura en el perigeo es:

$$h_p = 7,6 \cdot 10^5 \,\text{m} = 760 \,\text{km}.$$

En una órbita elíptica, se conserva el momento angular, es decir:

$$\vec{L}_a = \vec{L}_p,$$

donde

$$|\vec{L}_a| = mr_a v_a \sin(90°) = mr_a v_a \quad \text{y} \quad |\vec{L}_p| = mr_p v_p \sin(90°) = mr_p v_p.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$mr_a v_a = mr_p v_p,$$

y la relación entre las velocidades es

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{6,37 \cdot 10^6 + 3,97 \cdot 10^7}{6,37 \cdot 10^6 + 7,6 \cdot 10^5} = 6,46.$$

Por lo tanto, la altura sobre la superficie terrestre a la que se encontrará el satélite en el perigeo de su trayectoria es 760 km y la relación entre sus velocidades en el perigeo y en el apogeo es 6,46.

b) **La velocidad del satélite en el perigeo y la velocidad hasta la que habría que reducir al satélite para que pasase de una órbita elíptica a una órbita circular de radio igual a la distancia al perigeo.**

Ahora, consideremos que la energía mecánica se mantiene constante a lo largo de toda la órbita:

$$E_m^{\text{perigeo}} = E_m^{\text{apogeo}}.$$

Entonces, podemos escribir:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM_T}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM_T}{r_a},$$

Reemplazando la relación entre las velocidades:

$$\frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_p}{6,46}\right)^2 - \frac{GM_T}{r_a}.$$

Despejando v_p, se obtiene:

$$4,88 \cdot 10^{-1} v_p^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6 + 7,6 \cdot 10^5} - \frac{1}{6,37 \cdot 10^6 + 3,97 \cdot 10^7}\right).$$

Finalmente,

$$v_p = 9,84 \cdot 10^3 \,\text{m/s}.$$

Para una órbita circular, la relación entre la velocidad y el radio es:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM_T}{r^2}.$$

De esta forma, la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}.$$

Al reducir la velocidad del satélite hasta el valor necesario para tener una órbita circular con el radio del perigeo:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 7,6 \cdot 10^5}} = 7,47 \cdot 10^3 \,\text{m/s} = 7,47 \,\text{km/s}.$$

Por ende, la velocidad del satélite en el perigeo es $\mathbf{9,84 \cdot 10^3}$ m/s y la velocidad hasta la que habría que reducir al satélite para que pasase de una órbita elíptica a una órbita circular de radio igual a la distancia al perigeo es $\mathbf{7,47}$ km/s.

Pregunta 1. Opción B

Dos planetas de masas iguales orbitan en torno a una estrella de masa mucho mayor. El primero de los planetas tiene una órbita circular de radio $1,2 \cdot 10^{11}$ m y un período de 3 años. El segundo planeta sigue una órbita elíptica tal que la distancia más próxima a la estrella es de $1,0 \cdot 10^{11}$ m y la más lejana de $1,8 \cdot 10^{11}$ m.

a) **Determine la masa de la estrella y el período del segundo planeta.**

b) **Calcule la velocidad orbital del primer planeta y, sabiendo que su energía mecánica en su órbita circular es de $-3,8 \cdot 10^{30}$ J, halle la masa de los planetas.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $\mathbf{G = 6,67 \cdot 10^{-11}}$.

Solución:

a) **Determine la masa de la estrella y el período del segundo planeta.**

Para calcular la masa de la estrella, aprovechamos que el planeta 1 se mueve en una órbita circular. La ecuación que describe el movimiento es:

$$\frac{GM_E M_1}{r_1^2} = M_1 a_n = M_1 \frac{v^2}{r_1} = M_1 \frac{4\pi^2 r_1}{T^2}.$$

Despejando para la masa de la estrella M_E, obtenemos:

$$M_E = \frac{4\pi^2 r_1^3}{GT^2} = 1,14 \cdot 10^{29}\,\text{kg}.$$

Ahora, para determinar el período del planeta 2, usamos la Tercera Ley de Kepler. Necesitamos calcular el semieje mayor de la órbita elíptica del planeta, dado por:

$$a = \frac{r_{\text{afelio}} + r_{\text{perihelio}}}{2} = 1,4 \cdot 10^{11}\,\text{m}.$$

Sustituyendo este valor en la Ley de Kepler:

$$T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_E}} = 1,19 \cdot 10^8\,\text{s} = 3,78\,\text{años}.$$

Por lo tanto, la masa de la estrella es $1,14 \cdot 10^{29}$ kg y el período del segundo planeta es $3,78$ años.

b) **Calcule la velocidad orbital del primer planeta y, sabiendo que su energía mecánica en su órbita circular es de $-3,8 \cdot 10^{30}$ J, halle la masa de los planetas.**

Para obtener la velocidad orbital del planeta 1, usamos la relación entre el radio orbital y el período:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = 7,97 \cdot 10^3\,\text{m/s}.$$

Conociendo la energía mecánica del planeta 1, podemos encontrar su masa, considerando la siguiente expresión para la energía mecánica total:

$$E_{\text{m}}^1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 - \frac{GM_E M_1}{r_1}.$$

De la ecuación de la órbita, obtenemos la energía cinética:

$$M_1 \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{GM_E M_1}{r_1^2} \quad \Rightarrow \quad M_1 v_1^2 = \frac{GM_E M_1}{r_1}.$$

Sustituyendo esto en la expresión de la energía mecánica:

$$E_{\mathrm{m}}^{1} = -\frac{GM_E M_1}{2r_1}.$$

Despejando la masa M_1 del planeta:

$$M_1 = -\frac{2r_1 E_{\mathrm{m}}^{1}}{GM_E} = 1,2 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}.$$

Como se asume que ambos planetas tienen la misma masa, podemos concluir que $M_1 = M_2$.

Por ende, la velocidad orbital del primer planeta es $\mathbf{7,97 \cdot 10^{3}}$ m/s y la masa de cada planeta es $\mathbf{1,2 \cdot 10^{23}}$ kg.

Madrid, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 1. Opción A

Un satélite de la constelación OneWeb®, de 150 kg de masa, se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 1200 km sobre el nivel del mar. Determine:

a) **Las energías potencial gravitatoria y cinética que tiene el satélite en su órbita.**
b) **La energía que fue necesario comunicar al satélite para ponerlo en órbita desde la superficie de la Tierra.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **Las energías potencial gravitatoria y cinética que tiene el satélite en su órbita.**

La energía potencial gravitatoria se calcula mediante la expresión

$$E_p = -\frac{GMm}{r},$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la Tierra, m es la masa del satélite y r es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el satélite. Los valores de G, M y m son datos proporcionados en el enunciado, por lo que solo es necesario obtener r, el cual es igual a la suma del radio de la Tierra más la altura del satélite, es decir:

$$r = R_T + h.$$

De esta forma, la expresión para la energía potencial queda:

$$E_p = -\frac{GMm}{R_T + h}.$$

Sustituyendo los valores numéricos, obtenemos:

$$E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6,37 \cdot 10^6 + 1,2 \cdot 10^6} = -7,89 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

En cuanto a la energía cinética, se usa la fórmula:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Para calcular la velocidad, recordamos que el satélite está en una órbita circular, por lo que su velocidad será la velocidad orbital, que viene dada por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula de la energía cinética, obtenemos:

$$E_c = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R_T + h}.$$

Al sustituir los valores, tenemos:

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6,37 \cdot 10^6 + 1,2 \cdot 10^6} = 3,95 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la energía potencial es $-7,89 \cdot 10^9$ J y la energía cinética es $3,95 \cdot 10^9$ J.

b) La energía que fue necesario comunicar al satélite para ponerlo en órbita desde la superficie de la Tierra.

La energía total que tiene el satélite en órbita es la suma de la energía potencial y la energía cinética que obtuvimos anteriormente, es decir:

$$E_{\text{órbita}} = E_c + E_p = -3,95 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Antes de despegar, el satélite se encontraba en la superficie de la Tierra, por lo que su energía mecánica inicial estaba dada solo por la energía potencial gravitatoria, ya que no se estaba moviendo ($E_c = 0$ J). Así, la energía mecánica antes del despegue era:

$$E_{\text{inicial}} = -\frac{GMm}{R_T} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 150}{6,37 \cdot 10^6} = -9,38 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Por último, la energía que hemos tenido que suministrar al satélite es la diferencia entre la energía en órbita y la energía inicial:

$$\Delta E = E_{\text{órbita}} - E_{\text{inicial}} = -3,95 \cdot 10^9 - (9,38 \cdot 10^9) = 5,44 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

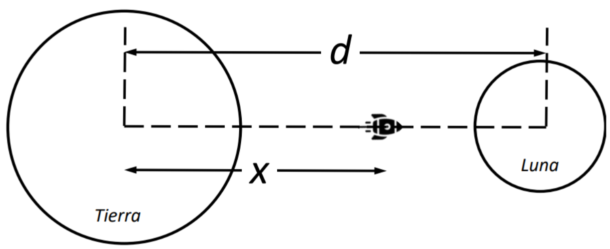
Por lo tanto, la energía de satelización es $\mathbf{5,44 \cdot 10^9}$ J.

Pregunta 1. Opción B

En la película *Space Cowboys* un amenazador satélite militar orbita alrededor de la Tierra a una altura de 1600 km sobre la superficie terrestre.

a) **Calcule la velocidad orbital del satélite y el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra. Desprecie en este apartado la interacción gravitatoria de la Luna.**
b) **Para evitar que el satélite caiga a la Tierra se decide impulsarlo hacia la Luna. Determine la distancia x al centro de la Tierra, tal y como se muestra en la figura, a la que tendrá que llegar el satélite, para que el efecto del campo gravitatorio lunar sea superior al del campo gravitatorio terrestre.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^3$ km; Masa de la Luna, $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg; Distancia de la Tierra a la Luna, $d = 3,84 \cdot 10^5$ km.



Solución:

a) **Calcule la velocidad orbital del satélite y el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra. Desprecie en este apartado la interacción gravitatoria de la Luna.**

La velocidad orbital de un satélite en órbita circular se calcula mediante la fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}},$$

donde $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\text{kg}^{-2}$ es la constante de gravitación universal, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ es la masa de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^3\,\text{km} = 6,37 \cdot 10^6\,\text{m}$ es el radio de la Tierra y $h = 1600\,\text{km} = 1,6 \cdot 10^6\,\text{m}$ es la altura del satélite sobre la superficie terrestre. Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 1,6 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{3,98 \cdot 10^{14}}{7,97 \cdot 10^6}} = 7,07 \cdot 10^3\,\text{m/s} = 7,07\,\text{km/s}.$$

Para calcular el tiempo que tarda en completar una órbita (período orbital), utilizamos la siguiente expresión:

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}.$$

Sustituyendo los valores:

$$T = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 1,6 \cdot 10^6)}{7,07 \cdot 10^3} = \frac{2\pi \cdot 7,97 \cdot 10^6}{7,07 \cdot 10^3} = 7083\,\text{s} = 1,97\,\text{h}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital del satélite es aproximadamente 7,07 km/s y el período orbital del satélite es de aproximadamente 7083 segundos, lo que equivale a 1,97 horas.

b) **Para evitar que el satélite caiga a la Tierra se decide impulsarlo hacia la Luna. Determine la distancia x al centro de la Tierra, tal y como se muestra en la figura, a la que tendrá que llegar el satélite, para que el efecto del campo gravitatorio lunar sea superior al del campo gravitatorio terrestre.**

Para que las fuerzas gravitatorias de la Tierra y la Luna se igualen, la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre el satélite debe ser igual a la fuerza gravitatoria ejercida por la Luna, es decir:

$$\frac{GM_T m}{x^2} = \frac{GM_L m}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_T}{x^2} = \frac{M_L}{(d-x)^2}$$

donde $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ es la masa de la Tierra, $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$ es la masa de la Luna, $d = 3,84 \cdot 10^5\,\text{km} = 3,84 \cdot 10^8\,\text{m}$ es la distancia entre la Tierra y la Luna y x es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el punto en el que la gravedad de la Luna iguala la gravedad de la Tierra. Despejamos x en la ecuación anterior:

$$\frac{M_T}{M_L} = \frac{(d-x)^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \frac{d-x}{x} \quad \Rightarrow \quad x\left(\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}+1\right) = d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}+1}.$$

Sustituyendo los valores de M_T, M_L y d:

$$x = \frac{3,84 \cdot 10^5}{\sqrt{\frac{5,97\cdot 10^{24}}{7,35\cdot 10^{22}}}+1} = 3,84 \cdot 10^4\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la distancia x desde el centro de la Tierra, en la que la atracción gravitatoria de la Luna iguala a la de la Tierra, es de 38,4 mil km.

Madrid, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 1. Opción A

El satélite *UPM-Sat2* se lanzó el día 3 de septiembre de 2020 a una órbita circular alrededor de la Tierra con un período de 5710 s. Sabiendo que el satélite tiene una masa de 50 kg, calcule:

a) **La altura a la que orbita y la energía que hubo que transmitirle para ponerlo en órbita desde la superficie de la Tierra.**
b) **La velocidad y la aceleración centrípeta en su órbita.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **La altura a la que orbita y la energía que hubo que transmitirle para ponerlo en órbita desde la superficie de la Tierra.**

El satélite orbita bajo la influencia de la fuerza gravitatoria, que se equilibra con la fuerza centrípeta necesaria para mantener la trayectoria circular. Esto nos permite igualar la fuerza gravitatoria a la fuerza centrípeta y despejar el radio de la órbita ($r_{\text{órbita}}$):

$$\frac{GM_T m_s}{r_{\text{órbita}}^2} = m_s \frac{4\pi^2 r_{\text{órbita}}^2}{T^2 r_{\text{órbita}}} \quad \Rightarrow \quad r_{\text{órbita}} = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}.$$

Sustituyendo los valores de G, M_T y T, se obtiene:

$$r_{\text{órbita}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 5710^2}{4\pi^2}} = 6,9 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Para encontrar la altura de la órbita, restamos el radio de la Tierra al radio de la órbita:

$$h = r_{\text{órbita}} - R_T = 6,90 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = 5,32 \cdot 10^5 \text{ m}.$$

La energía total necesaria para situar al satélite en órbita es la diferencia entre la energía mecánica en órbita y la energía en la superficie terrestre. La energía en la superficie es puramente potencial:

$$E_{\text{sup}} = -\frac{GM_T m_s}{R_T} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 50}{6,37 \cdot 10^6} = -3,13 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

En la órbita, la energía total es la suma de la energía cinética y potencial. La velocidad orbital se calcula mediante la aplicación de la Segunda Ley de Newton:

$$F_n = m_s \frac{v^2}{r_{\text{órbita}}} = \frac{GM_T m_s}{r_{\text{órbita}}^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_{\text{órbita}}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,9 \cdot 10^6}} = 7595,4 \text{ m/s}.$$

La energía cinética en órbita es:

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2} m_S v^2 = \frac{1}{2} m_s \frac{GM_T}{r_{\text{órbita}}}.$$

La energía potencial en órbita es:

$$E_{\text{p}} = -\frac{GM_T m}{r_{\text{órbita}}}.$$

Sumando ambas, la energía total en órbita es:

$$E_{\text{órbita}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = \frac{1}{2} m_s \frac{GM_T}{r_{\text{órbita}}} - -\frac{GM_T m}{r_{\text{órbita}}} = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m_s}{r_{\text{órbita}}} = -\frac{1}{2} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 50}{6,9 \cdot 10^6}$$
$$= -1,44 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

La energía que se debió suministrar para poner el satélite en órbita es la diferencia entre ambas energías:

$$\Delta E = E_{\text{órbita}} - E_{\text{sup}} = -1,44 \cdot 10^9 - (-3,13 \cdot 10^9) = 1,68 \cdot 10^9 \,\text{J}.$$

Por lo tanto, el satélite orbita a una altura de $\mathbf{5,32 \cdot 10^5}$ m y se le tuvo que transmitir una energía de $\mathbf{1,68 \cdot 10^9}$ J.

b) **La velocidad y la aceleración centrípeta en su órbita.**

La velocidad en la órbita ya se ha calculado anteriormente, siendo

$$v = 7,595 \,\text{m/s}.$$

Para calcular la aceleración centrípeta, usamos la fórmula:

$$a_c = \frac{v^2}{r_{\text{órbita}}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$a_c = \frac{7,595^2}{6,9 \cdot 10^6} = 8,36 \,\text{m/s}^2.$$

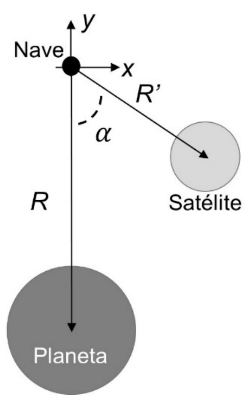
Por lo tanto, la velociada en la órbita es $\mathbf{7,595\,m/s}$ y la aceleración centrípeta es $\mathbf{8,36\,m/s^2}$.

Pregunta 1. Opción B

En su aproximación al planeta Fomalhaut II, el astronauta Rocannon avista Fomalhautillo, satélite natural de Fomalhaut II, según un ángulo $\alpha = 53,13°$ con respecto de la radial hacia el planeta (eje y). La fuerza total que estos dos cuerpos ejercen sobre Rocannon y su nave, cuya masa conjunta asciende a 8000 kg, vale en ese momento $\vec{F} = (9,5\vec{i} - 66,4\vec{j})$ N.

a) **¿A qué distancia R' se encuentra Rocannon del satélite?**
b) **¿A qué distancia R se encuentra Rocannon del planeta?**

Datos: Masa del planeta, $M = 4 \cdot 10^{23}$ kg; Masa del satélite, $M' = 2 \cdot 10^{20}$ kg; Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.



Solución:

a) **¿A qué distancia R' se encuentra Rocannon del satélite?**

Para determinar la distancia R', analizamos la componente x de la fuerza, que es ocasionada únicamente por el satélite. Esta componente se expresa como

$$F_x = \frac{GM'm}{R'^2} \sin\alpha.$$

Despejando para R', tenemos:

$$R' = \sqrt{\sin\alpha \frac{GM'm}{F_x}} = \sqrt{\sin 53,13 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{20} \cdot 8000}{9,5}} = 3 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la distancia R' a la que se encuentra Rocannon del satélite es $3 \cdot 10^6$ m.

b) **¿A qué distancia R se encuentra Rocannon del planeta?**

Para calcular R, consideramos la componente y de la fuerza, que se expresa como:

$$F_y = \frac{GM'm}{R'^2} \cos\alpha + \frac{GMm}{R^2}.$$

Ahora bien, se obtiene que

$$\frac{GMm}{R^2} = F_y - \frac{GM'm}{R'^2} \cos\alpha.$$

Al sustituir los valores conocidos:

$$\frac{GMm}{R^2} = 66,4 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{20} \cdot 8000}{(3,00 \cdot 10^6)^2} \cos 53,13 = 59,3.$$

Entonces,

$$R = \sqrt{\frac{GMm}{59,3}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{23} \cdot 8000}{59,3}} = 6 \cdot 10^7 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la distancia R a la que se encuentra Rocannon del planeta es $6 \cdot 10^7$ m.

Madrid, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 1. Opción A

Una partícula de masa 20 kg permanece fija en el origen de coordenadas.

a) **Calcule el campo gravitatorio generado por la masa en el punto (8, 6) m y la fuerza que experimentará una segunda partícula de masa 3 kg situada en dicho punto.**

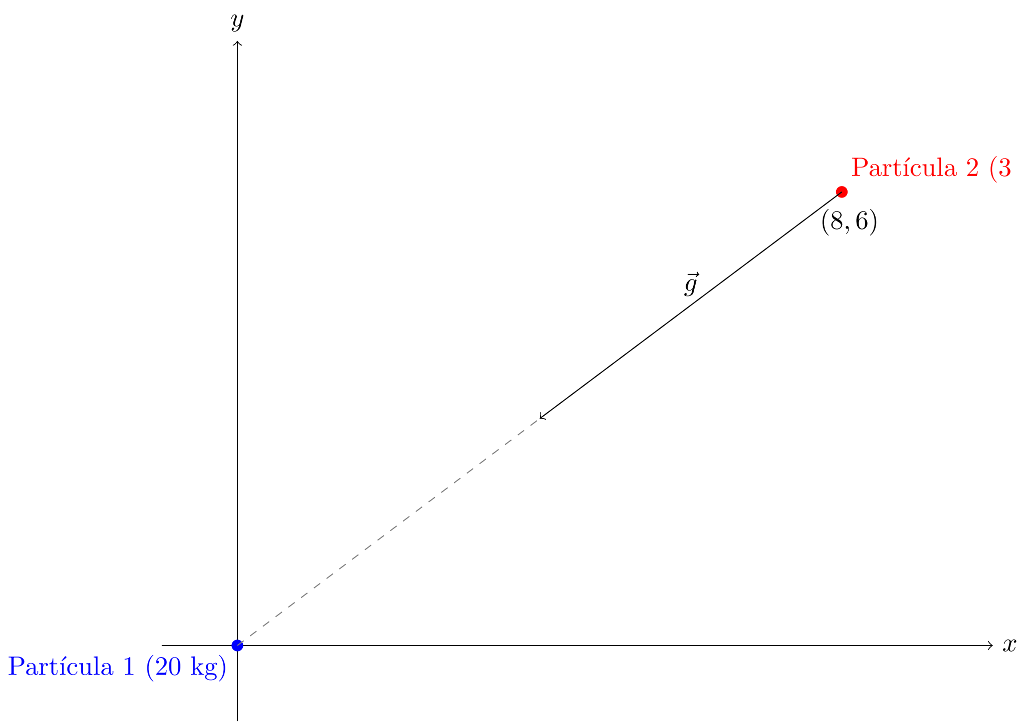
b) **Con el objetivo de alejar la segunda partícula, se le transmite una velocidad de $1,2 \cdot 10^{-5}$ m s^{-1} en la dirección de la recta que une ambas partículas. Halle el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **Calcule el campo gravitatorio generado por la masa en el punto (8, 6) m y la fuerza que experimentará una segunda partícula de masa 3 kg situada en dicho punto.**

Comenzamos representando la situación:



Para determinar el campo gravitatorio generado por la masa ubicada en el origen, utilizamos primero el Teorema de Pitágoras para calcular la distancia r entre la masa y el punto $(8, 6)$:

$$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,\text{m}.$$

El campo gravitatorio es un vector que apunta hacia el origen y está dado por:

$$\vec{g} = -g(\cos(\alpha)\,\vec{i} + \sin(\alpha)\,\vec{j}),$$

donde

$$\cos(\alpha) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \sin(\alpha) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Sabemos que la magnitud del campo gravitatorio es:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{10^2} = 1,33 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Entonces, el vector campo gravitatorio en el punto $(8,6)$ es:

$$\vec{g} = -1,33 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j}\right)\,\mathrm{m/s^2}.$$

Ahora, la fuerza gravitatoria que experimenta la partícula de masa 3 kg situada en el punto $(8,6)$ es:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = 3 \cdot \left(-1,33 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j}\right)\right) = -4,00 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j}\right)\,\mathrm{N}.$$

Por lo tanto, el vector campo gravitatorio en el punto $(8,6)$ es $-1,33 \cdot 10^{-11}\left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j}\right)$ m/s^2 y la fuerza gravitatoria que experimenta la partícula de masa 3 kg situada en el punto $(8,6)$ es $-4,00 \cdot 10^{-11}\left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j}\right)$ N.

b) **Con el objetivo de alejar la segunda partícula, se le transmite una velocidad de $1,2 \cdot 10^{-5}$ m s^{-1} en la dirección de la recta que une ambas partículas. Halle el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula.**

Sabemos que la energía mecánica se conserva, y la velocidad inicial de la partícula es en la dirección de la recta que une las dos partículas. La distancia final r_f se obtiene de la conservación de la energía:

$$E_c^0 + E_p^0 = E_p^f.$$

La energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1,2 \cdot 10^{-5})^2 = 2,16 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}.$$

El potencial gravitatorio inicial es

$$E_p^0 = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 3}{10} = -4,00 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}.$$

Al aplicar la conservación de la energía:

$$E_c + E_p^0 = -\frac{GMm}{r_f}.$$

Despejamos r_f:

$$r_f = \frac{-GMm}{E_c + U_0} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 3}{2,16 \cdot 10^{-10} - 4,00 \cdot 10^{-10}} = 21,72\,\mathrm{m}.$$

Dado que la velocidad iba en la dirección de la línea que une a las dos partículas, el vector posición en el punto más alejado es:

$$\vec{r}_f = r_f(\cos(\alpha)\,\vec{i} + \sin(\alpha)\,\vec{j}) = 21,72 \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j}\right) = (17,37, 13,03)\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula es $(17,37, 13,03)$ m.

Pregunta 1. Opción B

Marte posee la décima parte de la masa de la Tierra y la mitad de su diámetro.

a) **Encuentre la relación entre las velocidades de escape de Marte y de la Tierra desde sus respectivas superficies.**
b) **Suponga que un objeto se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, con una velocidad igual a la velocidad de escape de Marte. Si se desprecia el rozamiento, ¿qué altura máxima alcanzaría el objeto?**

Dato: Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **Encuentre la relación entre las velocidades de escape de Marte y de la Tierra desde sus respectivas superficies.**

La velocidad de escape se puede calcular mediante la expresión:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

donde M es la masa del planeta y R su radio. Si Marte tiene una masa que es una décima parte de la masa terrestre, es decir, $M_M = \frac{M_T}{10}$, y su radio es la mitad del radio terrestre, $R_M = \frac{R_T}{2}$, entonces al sustituir estos valores en la ecuación de la velocidad de escape obtenemos para Marte:

$$v_M = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2G\frac{M_T}{10}}{\frac{R_T}{2}}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{5R_T}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot v_T.$$

Por lo tanto, la relación entre la velocidad de escape de Marte y la de la Tierra es:

$$\boldsymbol{v_M = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot v_T}.$$

b) **Suponga que un objeto se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, con una velocidad igual a la velocidad de escape de Marte. Si se desprecia el rozamiento, ¿qué altura máxima alcanzaría el objeto?**

Dado que la fuerza gravitacional es conservativa, la energía mecánica total se conserva. En la altura máxima, la velocidad del objeto es nula, por lo que toda su energía es potencial. Al principio, el objeto tiene energía cinética y potencial, de modo que la conservación de la energía se puede expresar como

$$E_c + E_p^{R_T} = E_p^{r_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{r_{\max}}.$$

Sustituyendo la velocidad de escape de Marte $v_M = \sqrt{\frac{2GM_T}{5R_T}}$, la expresión se reduce a:

$$\frac{1}{5R_T} - \frac{1}{R_T} = -\frac{1}{r_{\max}}.$$

De aquí, despejamos $r_{\max}$:

$$r_{\max} = \frac{5}{4} \cdot R_T.$$

Finalmente, como el radio total es la suma del radio de la Tierra y la altura respecto a su superficie, tenemos que:

$$r_{\max} = R_T + h \quad \Rightarrow \quad h = r_{\max} - R_T = \frac{R_T}{4}.$$

Por lo tanto, la altura máxima que alcanza el objeto es $\boldsymbol{\frac{R_T}{4}}$.

Madrid, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 1. Opción A

El satélite *Sentinel-1*, que forma parte del programa Copernicus, ha suministrado imágenes muy útiles para el estudio de la erupción del volcán de La Palma en 2021. *Sentinel-1* tiene una masa de 2300 kg y se encuentra en una órbita circular a 700 km sobre la superficie terrestre.

a) **Deduzca la expresión que relaciona el periodo del satélite, T, con el radio de su órbita, r, la constante de Gravitación Universal, G, y la masa de la Tierra, M_T. Calcule el tiempo que tarda *Sentinel-1* en dar una vuelta completa en su órbita.**

b) **Deduzca la expresión de la energía mecánica total de un satélite de masa m en una órbita circular de radio r, expresándola en función de G, M_T, m y r. Obtenga la energía mecánica total del satélite *Sentinel-1*.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **Deduzca la expresión que relaciona el periodo del satélite, T, con el radio de su órbita, r, la constante de Gravitación Universal, G, y la masa de la Tierra, M_T. Calcule el tiempo que tarda *Sentinel-1* en dar una vuelta completa en su órbita.**

Cuando un satélite describe una órbita circular, la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta, siendo dichas fuerzas, respectivamente,

$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} \quad \text{y} \quad F_c = \frac{mv^2}{r}.$$

Igualando ambas fuerzas:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2}.$$

Simplificando la masa m y multiplicando ambos lados por r:

$$v^2 = \frac{GM_T}{r}.$$

La velocidad orbital también se relaciona con el periodo T según la Segunda Ley de Kepler:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_T}{r}.$$

Despejando T:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}},$$

que es la Tercera Ley de Kepler. Para calcular el periodo de *Sentinel-1*, sumamos el radio de la Tierra y la altura orbital:

$$r = R_T + h = (6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}) + (0{,}7 \cdot 10^6\,\text{m}) = 7{,}07 \cdot 10^6\,\text{m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(7{,}07 \cdot 10^6\,\text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3{,}53 \cdot 10^{21}\,\text{m}^3}{3{,}985 \cdot 10^{14}\,\text{m}^3\,\text{s}^{-2}}} = 5919{,}14\,\text{s}.$$

Por lo tanto, *Sentinel-1* tarda 5919,14 segundos en completar una órbita.

b) **Deduzca la expresión de la energía mecánica total de un satélite de masa m en una órbita circular de radio r, expresándola en función de G, M_T, m y r. Obtenga la energía mecánica total del satélite *Sentinel-1*.**

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}.$$

Como sabemos que $v^2 = \frac{GM_T}{r}$, sustituimos:

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_T}{r}\right) - \frac{GM_T m}{r} = \frac{GM_T m}{2r} - \frac{GM_T m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r}.$$

Entonces, la energía mecánica total es la mitad negativa de la energía potencial. Calculando para *Sentinel-1*:

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot 2300\,\mathrm{kg}}{7{,}07 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}} = -6{,}477 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}.$$

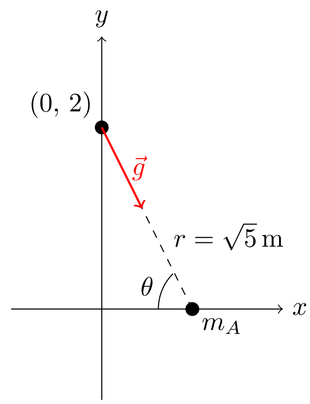
La energía mecánica total del satélite es $-6{,}477 \cdot 10^{10}$ J.

Pregunta 1. Opción B

Solución:

a) **¿Cuál es el valor de la masa m_B?**

Comenzamos con un sencillo dibujo que también nos serivrá para el siguiente apartado:



Para determinar la masa m_B, utilizamos el hecho de que el trabajo realizado por el campo gravitatorio es igual al negativo del cambio en la energía potencial gravitatoria:

$$W = -\Delta E_p = -[E_p(r_f) - E_p(r_0)].$$

La energía potencial gravitatoria entre dos masas es:

$$E_p(r) = -\frac{Gm_Am_B}{r}.$$

La partícula B se mueve desde el origen $(0,0)$ hasta el punto $(0,\,2)\,\mathrm{m}$. Primero, calculamos las distancias inicial y final entre las masas m_A y m_B:

– Distancia inicial (r_0) desde m_A en (1, 0) al origen:

$$r_0 = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1\,\mathrm{m}.$$

– Distancia final (r_f) desde m_A hasta el punto (0, 2):

$$r_f = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,\mathrm{m}.$$

Sustituyendo en la expresión del trabajo:

$$W = -\left[E_p(r_f) - E_p(r_0)\right] = -\left[-\frac{Gm_Am_B}{r_f} + \frac{Gm_Am_B}{r_0}\right] = Gm_Am_B\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Despejando m_B:

$$m_B = \frac{W}{Gm_A\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_0}\right)}.$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$m_B = \frac{-2{,}95\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}\cdot 2\,\mathrm{kg}\left(\frac{1}{\sqrt{5}\,\mathrm{m}} - \frac{1}{1\,\mathrm{m}}\right)} = 4\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto, la masa m_B es $4\,\mathrm{kg}$.

b) Calcule el valor del campo gravitatorio que crea la masa m_A en el punto $(0, 2)$ m.

Sabemos que la distancia r desde m_A en (1, 0) hasta el punto (0, 2) es

$$r = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,\mathrm{m}.$$

El módulo del campo gravitatorio es:

$$g = \frac{Gm_A}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{kg}}{(\sqrt{5}\,\mathrm{m})^2} = 2{,}668 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2}.$$

El campo gravitatorio es un vector dirigido hacia la masa m_A. Para encontrar sus componentes, calculamos primero:

$$\cos\theta = \frac{\Delta x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \sin\theta = \frac{\Delta y}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Las componentes del campo gravitatorio son:

$$g_x = -g\cos\theta = -2{,}668 \cdot 10^{-11} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1{,}192 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2},$$

$$g_y = -g\sin\theta = -2{,}668 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -2{,}384 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, el campo gravitatorio en el punto (0, 2) m es:

$$\boldsymbol{\vec{g} = g_x\,\vec{\imath} + g_y\,\vec{\jmath} = 1{,}192 \cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} - 2{,}384 \cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\ \mathrm{m/s^2}.}$$

Madrid, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 1. Opción A

Una masa puntual de 50 g se encuentra situada en la posición (8, 0) m del plano xy. Calcule:

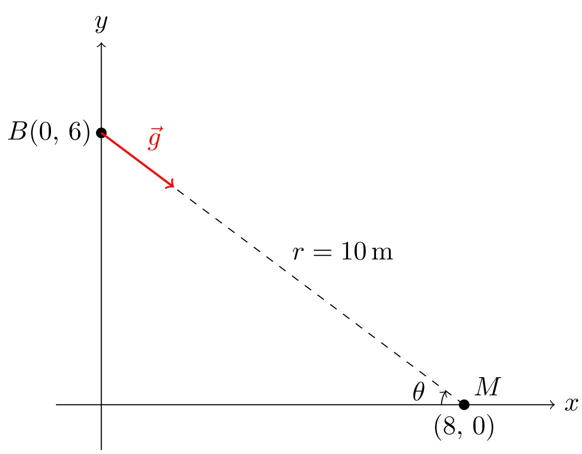
a) **El potencial gravitatorio y el campo gravitatorio en el punto (0, 6) m del plano debido a dicha masa.**
b) **El trabajo realizado por el campo al trasladar un objeto puntual de 20 g desde el punto (0, 6) m hasta el origen de coordenadas.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **El potencial gravitatorio y el campo gravitatorio en el punto (0, 6) m del plano debido a dicha masa.**

Comenzamos el ejercicio con una simple representación:



Primero, determinamos la distancia r entre la masa puntual y el punto donde queremos calcular el potencial y el campo gravitatorio. Usamos el Teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10\,\text{m}.$$

El Potencial gravitatorio V en el punto $(0, 6)$ m es:

$$V = -\frac{GM}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 0{,}05\,\text{kg}}{10\,\text{m}} = -3{,}335 \cdot 10^{-12}\,\text{J kg}^{-1}.$$

El Campo gravitatorio $\vec{g}$ en el punto $(0, 6)$ m es:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{0{,}05}{(10)^2}\vec{u}_r = -3{,}335 \cdot 10^{-13}\,\text{N kg}^{-1}\vec{u}_r,$$

donde $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección radial desde la masa hacia el punto $(0, 6)$ m. Calculamos el ángulo θ para determinar la dirección del campo:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \arctan\left(\frac{6-0}{0-8}\right) = \arctan\left(-\frac{6}{8}\right) \approx -36{,}87°.$$

Entonces, el campo gravitatorio apunta en la dirección de $\theta = -36{,}87°$ respecto al eje x negativo.

Por lo tanto, el potencial gravitatorio es $-3{,}335 \cdot 10^{-12}$ J kg^{-1} y el campo gravitatorio es $-3{,}335 \cdot 10^{-13}$ N kg$^{-1}\vec{u}_r$.

b) El trabajo realizado por el campo al trasladar un objeto puntual de 20 g desde el punto (0, 6) m hasta el origen de coordenadas.

El trabajo realizado por el campo gravitatorio es igual a la diferencia de energía potencial gravitatoria:

$$W = -\Delta E_p = -m\left(V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}\right) = -m\left(V(O) - V(B)\right).$$

Calculamos el potencial en el origen $(0,0)\,\text{m}$:

$$V(O) = -\frac{GM}{r_O}, \quad \text{donde} \quad r_O = \sqrt{(8-0)^2 + (0-0)^2} = 8\,\text{m}.$$

Entonces:

$$V(O) = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}05}{8} = -4{,}169 \cdot 10^{-12}\,\text{J kg}^{-1}.$$

Ya teníamos que $V(B) = V(0,6) = -3{,}335 \cdot 10^{-12}$ J kg^{-1}. Entonces, el trabajo es:

$$W = -0{,}02\,\text{kg}\left(-4{,}169 \cdot 10^{-12} - (-3{,}335 \cdot 10^{-12})\right) = -0{,}02 \cdot (-8{,}34 \cdot 10^{-13}) = 1{,}668 \cdot 10^{-14}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo al mover la masa de 20 g desde (0, 6) m hasta el origen es $\mathbf{1{,}668 \cdot 10^{-14}}$ J. Este trabajo es positivo, lo que indica que el campo gravitatorio realiza trabajo al acercar la masa al origen.

Pregunta 1. Opción B

Una sonda espacial de 3500 kg se encuentra en órbita circular alrededor de Saturno, realizando una revolución cada 36 horas. Calcule:

a) **La velocidad orbital y la energía mecánica que posee la sonda espacial.**
b) **La energía mínima necesaria que habría que suministrarle para que abandone el campo gravitatorio del planeta.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de Saturno, $M_s = 5,68 \cdot 10^{26}$ kg.

Solución:

a) **La velocidad orbital y la energía mecánica que posee la sonda espacial.**

Para determinar la velocidad orbital y la energía mecánica, primero es necesario encontrar el radio de la órbita (R). Utilizaremos la relación entre la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta que mantiene a la sonda en movimiento circular uniforme:

$$F_{\text{gravitatoria}} = F_{\text{centrípeta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{GM_s m}{R^2} = \frac{mv^2}{R},$$

donde G es la constante de gravitación universal, M_s es la masa de Saturno, m es la masa de la sonda, v es la velocidad orbital de la sonda y R es el radio de la órbita. Simplificando la expresión:

$$\frac{GM_s}{R} = v^2.$$

Sabemos que la velocidad orbital también se relaciona con el periodo orbital (T):

$$v = \frac{2\pi R}{T}.$$

Sustituyendo v en la ecuación anterior:

$$\frac{GM_s}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2.$$

Simplificando y despejando R:

$$GM_s = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2} \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{GM_s T^2}{4\pi^2}.$$

Entonces, el radio de la órbita es:

$$R = \left(\frac{GM_s T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Convertimos el periodo T a segundos:

$$T = 36\,\text{horas} \cdot 3600\,\frac{\text{s}}{\text{hora}} = 129600\,\text{s}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$R = \left(\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2})(5{,}68 \cdot 10^{26}\,\text{kg})(129600\,\text{s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 2{,}53 \cdot 10^8\,\text{m}.$$

Calculamos ahora de la velocidad orbital v:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(2{,}53 \cdot 10^8\,\text{m})}{129600\,\text{s}} = 12246{,}6\,\text{m/s}.$$

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria:

$$E_{\text{mec}} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_s m}{R}.$$

Sin embargo, para una órbita circular, se puede simplificar a:

$$E_{\text{mec}} = -\frac{GM_s m}{2R}.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_{\text{mec}} = -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11})(5{,}68 \cdot 10^{26})(3500)}{2 \cdot 2{,}53 \cdot 10^{8}} = -2{,}62 \cdot 10^{11}\ \text{J}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital de la sonda es aproximadamente 12462,6 m/s y su energía mecánica es $-2{,}62 \cdot 10^{11}$ J.

b) **La energía mínima necesaria que habría que suministrarle para que abandone el campo gravitatorio del planeta.**

Para que la sonda escape del campo gravitatorio de Saturno, su energía mecánica total debe ser al menos cero en el infinito. Entonces, la energía adicional necesaria es igual al valor absoluto de la energía mecánica actual de la sonda:

$$\Delta E = E_{\infty} - E_{\text{mec}} = 0 - (-2{,}62 \cdot 10^{11}\ \text{J}) = 2{,}62 \cdot 10^{11}\ \text{J}.$$

Por lo tanto, se requiere suministrar una energía mínima de $2{,}62 \cdot 10^{11}$ J para que la sonda escape del campo gravitatorio de Saturno.

Madrid, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 1. Opción A

Una nave espacial ha quedado atrapada en una órbita circular en torno a un planeta esférico desconocido. Los sistemas de navegación de la nave indican que su velocidad orbital es de 25000 km h^{-1} y que tarda 5 horas en dar una vuelta completa alrededor del planeta.

a) **Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.**
b) **Si la densidad del planeta es de 16150 kg m^{-3}, calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.**

La velocidad orbital de la nave es constante y la órbita es circular, por lo que se cumple:

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

donde v es la velocidad orbital de la nave, r es el radio de la órbita y T es el periodo orbital (tiempo que tarda en completar una vuelta). Despejamos r:

$$r = \frac{vT}{2\pi}.$$

Convertimos las unidades:

$$v = 25\,000\,\mathrm{km/h} = 25\,000\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{1\,000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}} = 25\,000\,000\,\mathrm{m/h},$$
$$T = 5\,\text{horas}.$$

Calculamos r:

$$r = \frac{25\,000\,000\,\mathrm{m/h} \cdot 5\,\mathrm{h}}{2\pi} = \frac{125\,000\,000\,\mathrm{m}}{2\pi} = 19\,894\,367\,\mathrm{m} = 1{,}989 \cdot 10^7\,\mathrm{m}.$$

Para una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria es proporcionada por la fuerza de gravedad:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r},$$

donde m es la masa de la nave (que se cancela) y G es la constante de gravitación universal. Despejamos M:

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{v^2 r}{G}.$$

Convertimos la velocidad a *metros por segundo*:

$$v = 25\,000\,000\,\mathrm{m/h} \cdot \frac{1\,\mathrm{h}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 6\,944{,}44\,\mathrm{m/s}.$$

Ahora, calculamos M:

$$M = \frac{(6\,944{,}44\,\mathrm{m/s})^2 \cdot 1{,}989 \cdot 10^7\,\mathrm{m}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2\,kg^{-2}}} = 1{,}439 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto, el radio de la órbita es $1{,}989 \cdot 10^7$ m y la masa del planeta es $1{,}439 \cdot 10^{24}$ kg.

b) **Si la densidad del planeta es de 16150 kg m^{-3}, calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.**

Primero calculamos el radio del planeta (R) usando la densidad (ρ). Suponiendo que el planeta es una esfera uniforme:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Rightarrow \quad R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}.$$

Sustituimos los valores:

$$R = \left(\frac{3 \cdot 1{,}439 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{4\pi \cdot 16\,150\,\text{kg/m}^3}\right)^{1/3} = 5968,6 \cdot 10^3\,\text{m} = 5968,6\,\text{km}.$$

Seguidamente, hallamos la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta (g). La aceleración de la gravedad en la superficie es:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Sustituimos los valores:

$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 1{,}439 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(5968,6 \cdot 10^3\,\text{m})^2} = 26,931\,\text{m/s}^2.$$

Por lo tanto, el radio del planeta es 5968,6 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 26,931 m/s^2.

Pregunta 1. Opción B

Una partícula de masa m se encuentra en el origen de coordenadas de un sistema de referencia (x, y). La componente x del campo gravitatorio creado por la partícula en el punto $(2, 2)$ m es $-1,18 \cdot 10^{-11}$ N kg^{-1}.

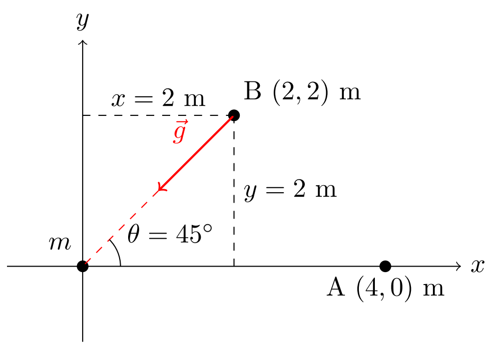
a) **Calcule el valor de la masa m.**
b) **¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa $M = 5$ kg desde el punto $(4, 0)$ m al punto $(2, 2)$ m?**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **Calcule el valor de la masa m.**

En primer lugar, representamos la información dada en el enunciado:



La expresión del campo gravitatorio ($\vec{g}$) creado por una masa puntual m es:

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u}_r,$$

donde:
- G es la constante de gravitación universal,
- r es la distancia desde la masa al punto donde se calcula el campo,
- $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de r.

En coordenadas cartesianas, el vector $\vec{u}_r$ desde el origen al punto (x, y) es:

$$\vec{u}_r = x\vec{i} + y\vec{j},$$

y su magnitud es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La componente x del campo gravitatorio viene dada por

$$g_x = -\frac{Gm}{r^2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{g_x r^2}{Gcos\theta} = -\frac{(-1{,}18 \cdot 10^{-11})(2^2 + 2^2)}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \cos(45°)} = 2,0015\,\text{kg}.$$

Por lo tanto, la masa m es $2,0015$ kg.

b) **¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa $M = 5$ kg desde el punto $(4, 0)$ m al punto $(2, 2)$ m?**

El potencial gravitatorio (V) creado por una masa m en un punto a una distancia r es:

$$V = -\frac{Gm}{r}.$$

Punto A: $(4,0)\,\mathrm{m}$

$$r_A = \sqrt{4^2+0^2} = 4\,\mathrm{m},$$

$$V_A = -\frac{Gm}{4}.$$

Punto B: $(2,2)\,\mathrm{m}$

$$r_B = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m},$$

$$V_B = -\frac{Gm}{2\sqrt{2}}.$$

El trabajo realizado por el campo gravitatorio al mover una masa M desde el punto A al punto B es:

$$W = -M(V_B - V_A).$$

Sustituyendo los valores:

$$W = M\left(-\frac{Gm}{2\sqrt{2}} - \left(-\frac{Gm}{4}\right)\right) = M\left(\frac{Gm}{4} - \frac{Gm}{2\sqrt{2}}\right).$$

Sabemos que $m \approx 2{,}0\,\mathrm{kg}$ (del apartado anterior), $M = 5\,\mathrm{kg}$ y $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2kg^{-2}}$. Entonces,

$$W = -5\cdot\left(\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2{,}0}{4} - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2{,}0}{2\cdot 1{,}4142}\right) = 6{,}91\cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo que realiza el campo gravitatorio es aproximadamente $6{,}91\cdot 10^{-11}$ J.

Madrid, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 1. Opción A

Un satélite sigue una órbita circular sincrónica (es decir, del mismo período que el de rotación del planeta) de radio $1,59 \cdot 10^5$ km en torno a un planeta de masa $1,90 \cdot 10^{27}$ kg. Calcule:

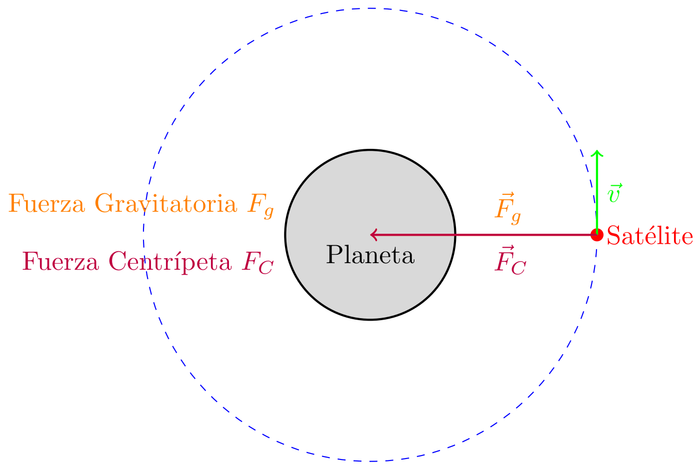
a) **La velocidad del satélite en la órbita.**
b) **El periodo de rotación del planeta sobre su eje.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **La velocidad del satélite en la órbita.**

Para mantener una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en movimiento circular debe ser igual a la fuerza gravitatoria que lo atrae hacia el planeta:



Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\frac{m_s v^2}{r} = G\frac{m_s m_p}{r^2},$$

donde:

- m_s es la masa del satélite,
- v es la velocidad orbital del satélite,
- r es el radio de la órbita,
- G es la constante de gravitación universal,
- m_p es la masa del planeta.

Simplificando la ecuación, cancelamos m_s de ambos lados:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_p}{r}}.$$

Sustituyendo los valores proporcionados:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}90 \cdot 10^{27}}{1,59 \cdot 10^8}} = 28231{,}96\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad del satélite en la órbita es 28231,96 m/s.

b) El periodo de rotación del planeta sobre su eje.

Dado que el periodo de rotación del satélite coincide con el periodo de rotación del planeta, podemos relacionar el periodo (T) con la velocidad orbital mediante la fórmula:

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Utilizando los valores calculados anteriormente:

$$T = \frac{2\pi \cdot 1,59 \cdot 10^8}{28231{,}96} = 35386{,}36\,\mathrm{s} = 9{,}83\,\mathrm{horas}.$$

Por lo tanto, el periodo de rotación del planeta sobre su eje es aproximadamente 9,83 horas.

Pregunta 1. Opción B

Se tiene un planeta de masa $1,95 \cdot 10^{25}$ kg y radio 5500 km. Determine:

a) **El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.**
b) **La velocidad de escape desde la superficie del planeta.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2kg^{-2}.

Solución:

a) **El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.**

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$g = \frac{G \cdot M}{R_p^2},$$

donde:
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2kg^{-2} es la constante de gravitación universal,
- $M = 1,95 \cdot 10^{25}$ kg es la masa del planeta,
- $R_p = 5500\,\text{km} = 5,5 \cdot 10^6$ m es el radio del planeta.

Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{(5,5 \cdot 10^6)^2} = 42,9967\,\text{m/s}^2.$$

Por lo tanto, el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es $\mathbf{43,0\,m/s^2}$.

b) **La velocidad de escape desde la superficie del planeta.**

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debe tener un cuerpo para liberarse de la atracción gravitatoria de un planeta sin necesidad de propulsión adicional. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R_p}}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{5,5 \cdot 10^6}} = 21747,73\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de escape desde la superficie del planeta es $\mathbf{21\,747,73\,m/s}$.

Madrid, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 1. Opción A

Calisto (el tercer satélite con mayor masa del sistema solar), que posee una densidad de $1,83\,\mathrm{g\ cm^{-3}}$ y un radio de 2410 km, da una revolución alrededor del planeta Júpiter cada 16,89 días.

a) **Calcule la masa del satélite y la aceleración de la gravedad en su superficie.**
b) **Obtenga la energía cinética y la energía mecánica de Calisto en su órbita circular alrededor del planeta.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de Júpiter, $M_{\mathrm{Jup}} = 1,90 \cdot 10^{27}$ kg.

Solución:

a) **Calcule la masa del satélite y la aceleración de la gravedad en su superficie.**

La masa (m_c) de Calisto se determina utilizando la fórmula de la densidad:

$$\rho = \frac{m_c}{V} \quad \Rightarrow \quad m_c = \rho \cdot V,$$

donde:
- $\rho = 1{,}83\,\mathrm{g/cm^3} = 1{,}83 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$,
- V es el volumen de Calisto, que para una esfera se calcula como:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

con $R = 2410\,\mathrm{km} = 2{,}410 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

Calculando el volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi(2{,}410 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^3 = 5{,}85 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^3}.$$

Entonces, la masa es:

$$m_c = 1{,}83 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 5{,}85 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^3} = 1{,}07 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}.$$

La aceleración gravitatoria (g) en la superficie de Calisto se calcula mediante la fórmula:

$$g = \frac{G m_c}{R^2},$$

donde:
- $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2kg^{-2}}$,
- $m_c = 1{,}07 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$,
- $R = 2{,}410 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

Sustituyendo los valores:

$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}07 \cdot 10^{23}}{(2{,}410 \cdot 10^6)^2} = 1{,}23\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, la masa de Calisto es $1{,}07 \cdot 10^{23}$ kg y la aceleración gravitatoria en su superficie es $1{,}23\,\mathrm{m/s^2}$.

b) Obtenga la energía cinética y la energía mecánica de Calisto en su órbita circular alrededor del planeta.

La velocidad orbital se obtiene a partir de la fuerza centrípeta que iguala a la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m_c v^2}{r_t} = \frac{G M_{\text{Jup}} m_c}{r_t^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G M_{\text{Jup}}}{r_t}},$$

donde r_t es la distancia total desde el centro de Júpiter a Calisto. Primero, calculamos r_t. Sabemos que la revolución completa de Calisto alrededor de Júpiter toma $T = 16{,}89\,\text{días}$. Convertimos este tiempo a segundos:

$$T = 16{,}89\,\text{días} \cdot 24\,\text{h/día} \cdot 3600\,\text{s/h} = 1{,}459{,}296 \cdot 10^5\,\text{s}.$$

Utilizamos la tercera Ley de Kepler adaptada para órbitas circulares:

$$r_t = \left(\frac{G M_{\text{Jup}} T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Sustituyendo los valores:

$$r_t = \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}90 \cdot 10^{27} \cdot (1{,}459{,}296 \cdot 10^5)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 1{,}90 \cdot 10^9\,\text{m}.$$

Ahora, calculamos la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}90 \cdot 10^{27}}{1{,}90 \cdot 10^9}} = 8167\,\text{m/s}.$$

La energía cinética se calcula como:

$$E_c = \frac{1}{2} m_c v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}07 \cdot 10^{23}\,\text{kg} \cdot (8167\,\text{m/s})^2 = 3{,}58 \cdot 10^{30}\,\text{J}.$$

La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria. Para órbitas circulares, se puede expresar directamente como:

$$E_m = -\frac{1}{2} \frac{G M_{\text{Jup}} m_c}{r_t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}90 \cdot 10^{27} \cdot 1{,}07 \cdot 10^{23}}{1{,}90 \cdot 10^9} = -3{,}58 \cdot 10^{30}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, la energía cinética de Calisto es $3{,}58 \cdot 10^{30}$ J y la energía mecánica es $-3{,}58 \cdot 10^{30}$ J.

Pregunta 1. Opción B

Se tiene un planeta de masa $1,95 \cdot 10^{25}$ kg y radio 5500 km. Determine:

a) **El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.**
b) **La velocidad de escape desde la superficie del planeta.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2kg^{-2}.

Solución:

a) **El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.**

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$g = \frac{G \cdot M}{R_p^2},$$

donde:
– $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2kg^{-2}}$ es la constante de gravitación universal,
– $M = 1,95 \cdot 10^{25}$ kg es la masa del planeta,
– $R_p = 5500\,\mathrm{km} = 5,5 \cdot 10^6$ m es el radio del planeta.
Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$g = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{(5,5 \cdot 10^6)^2} = 42,9967\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es $\mathbf{43,0\,m/s^2}$.

b) **La velocidad de escape desde la superficie del planeta.**

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debe tener un cuerpo para liberarse de la atracción gravitatoria de un planeta sin necesidad de propulsión adicional. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R_p}}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{5,5 \cdot 10^6}} = 21747,73\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de escape desde la superficie del planeta es $\mathbf{21\,747,73\,m/s}$.

Andalucía, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta A. Opción 1

a) **Razone si son verdaderos los siguientes enunciados:**
   i. **El trabajo total realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica.**
   ii. **Siempre que actúen fuerzas no conservativas la energía mecánica varía.**

b) **Un bloque de masa 150 kg desliza por una superficie horizontal con rozamiento. El bloque se mueve hacia la derecha con velocidad inicial de 3 m/s. Sobre el bloque actúa una fuerza de módulo 20 N dirigida hacia la izquierda y que forma un ángulo de 30° sobre la horizontal, recorriendo 25 m hasta detenerse.**
   i. **Realice un esquema de las fuerzas ejercidas sobre el bloque.**
   ii. **Calcule las variaciones de energía cinética, potencial y mecánica del bloque en el trayecto descrito.**
   iii. **Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas aplicadas sobre el bloque.**

Dato: $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$

Solución:

a) **Razone si son verdaderos los siguientes enunciados:**
   i. **El trabajo total realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica.**

Las fuerzas no conservativas, como el rozamiento o la resistencia del aire, realizan trabajo que no se almacena en forma de energía potencial mecánica. Según el principio de conservación de la energía, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica del sistema:

$$W_{\text{nc}} = \Delta E_{\text{mecánica}} = \Delta E_{\text{cinética}} + \Delta E_{\text{potencial}}.$$

Por lo tanto, el enunciado es verdadero.

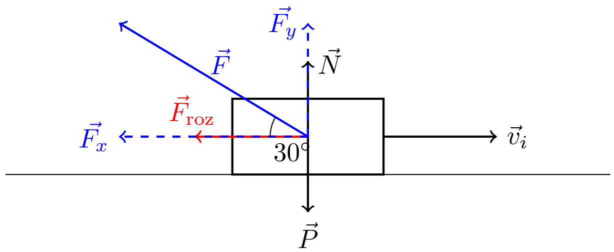
   ii. **Siempre que actúen fuerzas no conservativas la energía mecánica varía.**

Aunque actúen fuerzas no conservativas, la energía mecánica del sistema no necesariamente varía si el trabajo neto realizado por estas fuerzas es cero. Por ejemplo, si un objeto se mueve a velocidad constante sobre una superficie horizontal con rozamiento (fuerza no conservativa), la fuerza de tracción aplicada equilibra exactamente la fuerza de rozamiento. Como no hay aceleración, la energía cinética permanece constante y, al estar en una superficie horizontal, la energía potencial gravitatoria también es constante. Por lo tanto, la energía mecánica no varía.

Por lo tanto, el enunciado es falso.

b) **Un bloque de masa 150 kg desliza por una superficie horizontal con rozamiento. El bloque se mueve hacia la derecha con velocidad inicial de 3 m/s. Sobre el bloque actúa una fuerza de módulo 20 N dirigida hacia la izquierda y que forma un ángulo de 30° sobre la horizontal, recorriendo 25 m hasta detenerse.**
   i. **Realice un esquema de las fuerzas ejercidas sobre el bloque.**

El esquema pedido es:



Por lo tanto, en el esquema se muestran todas las fuerzas actuando sobre el bloque.

ii. Calcule las variaciones de energía cinética, potencial y mecánica del bloque en el trayecto descrito.

La energía cinética inicial es:

$$E_{\text{c,i}} = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(150\,\text{kg})(3\,\text{m/s})^2 = 675\,\text{J}$$

La energía cinética final es $E_{\text{c,f}} = 0$ J, pues el bloque se detiene. Entonces, la variación de energía cinética es:

$$\Delta E_{\text{c}} = E_{\text{c,f}} - E_{\text{c,i}} = 0\,\text{J} - 675\,\text{J} = -675\,\text{J}.$$

En cuanto a la variación de energía potencial gravitatoria, como el movimiento es horizontal y no hay cambio en la altura:

$$\Delta E_{\text{p}} = 0\,\text{J}.$$

Así, la variación de energía mecánica es:

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta E_{\text{c}} + \Delta E_{\text{p}} = -675\,\text{J} + 0\,\text{J} = -675\,\text{J}.$$

Por lo tanto, las variaciones pedidas son:
- $\boldsymbol{\Delta E_{\text{c}} = -675\,\text{J}}$**,**
- $\boldsymbol{\Delta E_{\text{p}} = 0\,\text{J}}$**,**
- $\boldsymbol{\Delta E_{\text{mec}} = -675\,\text{J}}$**.**

iii. Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas aplicadas sobre el bloque.

Las fuerzas que realizan trabajo sobre el bloque son la fuerza aplicada ($\vec{F}$) y la fuerza de rozamiento ($\vec{F}_{\text{roz}}$). La fuerza normal ($\vec{N}$) y el peso ($\vec{P}$) son perpendiculares al desplazamiento y, por ende, no realizan trabajo.

Para el cálculo del trabajo de la fuerza aplicada ($\vec{F}$), primero, descomponemos la fuerza en sus componentes (notemos que la componente del eje vertical no efectuará ningún trabajo):

$$F_x = F\cos(150^\circ) = F\cos(180^\circ - 30^\circ) = -F\cos(30^\circ) = -20\,\text{N}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -17.32\,\text{N},$$

$$F_y = F\sin(150^\circ) = F\sin(30^\circ) = 20\,\text{N}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 10\,\text{N}.$$

El trabajo realizado por $\vec{F}$ es:

$$W_F = F_x\Delta x = (-17.32\,\text{N})(25\,\text{m}) = -433\,\text{J}.$$

Para el cálculo del trabajo de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{\text{roz}}$, debemos tener en cuenta que

$$\Delta E_{\text{mec}} = W_{\text{nc}} = W_F + W_{\text{roz}}.$$

Despejamos W_{roz}:

$$W_{\text{roz}} = \Delta E_{\text{mec}} - W_F = (-675\,\text{J}) - (-433\,\text{J}) = -242\,\text{J}.$$

También podemos calcular la fuerza de rozamiento F_{roz}:

$$W_{\text{roz}} = F_{\text{roz}}\Delta x \cos(180°) = -F_{\text{roz}}\Delta x.$$

Despejamos F_{roz}:

$$-242\,\text{J} = -F_{\text{roz}}(25\,\text{m}) \quad \Rightarrow \quad F_{\text{roz}} = \frac{242\,\text{J}}{25\,\text{m}} = 9.68\,\text{N}.$$

Por lo tanto, los trabajos realizados son:
* **Trabajo de la fuerza aplicada: $\boldsymbol{W_F = -433\,\text{J}}$,**
* **Trabajo de la fuerza de rozamiento: $\boldsymbol{W_{\text{roz}} = -242\,\text{J}}$,**
* **Trabajo del peso y la normal: $\boldsymbol{W_P = W_N = 0\,\text{J}}$.**

Pregunta A. Opción 2

a) **i. Deduzca razonadamente la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta.**

ii. La masa y el radio de la Tierra son 81 y 3,67 veces la masa y el radio de la Luna, respectivamente. ¿Qué relación existe entre las velocidades de escape desde las superficies de la Tierra y la Luna? Razone su respuesta.

b) **Se desea poner alrededor de Júpiter un satélite artificial en órbita circular estacionaria (igual periodo que el planeta). Un día en Júpiter es 0,41 veces el día terrestre y la masa de Júpiter es 318 veces la de la Tierra.**

i. Determine el radio orbital alrededor de Júpiter.

ii. La relación que existe entre los radios orbitales de dos satélites que orbitan estacionariamente alrededor de la Tierra y de Júpiter.

Datos: $\boldsymbol{G = 6,67 \cdot 10^{-11}}$ **N m^{2}kg^{-2}**; $\boldsymbol{M_{\text{Júpiter}} = 1,9 \cdot 10^{27}}$ **kg**; $\boldsymbol{T_{\text{Tierra}} = 24\,\text{h}}$

Solución:

a) **i. Deduzca razonadamente la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta.**

La velocidad de escape es la velocidad mínima necesaria que debe tener un cuerpo de masa m para escapar del campo gravitatorio de un planeta de masa M y radio R, sin necesidad de aplicar energía adicional una vez lanzado. Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica y considerando que en el infinito tanto la energía cinética como la potencial gravitatoria son cero, tenemos:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}.$$

La energía mecánica inicial es la suma de la energía cinética inicial y la energía potencial gravitatoria en la superficie del planeta:

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}mv_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}.$$

La energía mecánica final en el infinito es cero:

$$E_{\text{final}} = 0.$$

Igualando ambas energías:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0.$$

Despejando v_{escape}:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{escape}}^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{escape}}^2 = \frac{2G \cdot M}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R}}.$$

Por lo tanto, la expresión de la velocidad de escape es $\boldsymbol{v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R}}}$**.**

ii. La masa y el radio de la Tierra son 81 y 3,67 veces la masa y el radio de la Luna, respectivamente. ¿Qué relación existe entre las velocidades de escape desde las superficies de la Tierra y la Luna? Razone su respuesta.

La velocidad de escape depende de la masa y el radio del planeta:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}.$$

Por lo tanto, la relación entre las velocidades de escape de la Tierra y la Luna es:

$$\frac{v_{\text{escape Tierra}}}{v_{\text{escape Luna}}} = \sqrt{\frac{M_{\text{Tierra}}/R_{\text{Tierra}}}{M_{\text{Luna}}/R_{\text{Luna}}}} = \sqrt{\frac{M_{\text{Tierra}} \cdot R_{\text{Luna}}}{M_{\text{Luna}} \cdot R_{\text{Tierra}}}}.$$

Dado que $M_{\text{Tierra}} = 81\, M_{\text{Luna}}$ y $R_{\text{Tierra}} = 3{,}67\, R_{\text{Luna}}$:

$$\frac{v_{\text{escape Tierra}}}{v_{\text{escape Luna}}} = \sqrt{\frac{81\, M_{\text{Luna}} \cdot R_{\text{Luna}}}{M_{\text{Luna}} \cdot 3{,}67\, R_{\text{Luna}}}} = \sqrt{\frac{81}{3{,}67}} \approx 4{,}7.$$

Por lo tanto, la velocidad de escape desde la Tierra es aproximadamente 4,7 veces mayor que la de la Luna.

b) **Se desea poner alrededor de Júpiter un satélite artificial en órbita circular estacionaria (igual periodo que el planeta). Un día en Júpiter es 0,41 veces el día terrestre y la masa de Júpiter es 318 veces la de la Tierra.**

i. **Determine el radio orbital alrededor de Júpiter.**

Primero, calculamos el periodo de rotación de Júpiter:

$$T_{\text{Júpiter}} = 0{,}41 \cdot T_{\text{Tierra}} = 0{,}41 \cdot 24\,\text{h} = 9{,}84\,\text{h}.$$

Convertimos el periodo a segundos:

$$T_{\text{Júpiter}} = 9{,}84 \cdot 3600\,\text{s} = 35\,424\,\text{s}.$$

Aplicamos la tercera Ley de Kepler para órbitas circulares:

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2\, R^3}{G\, M}.$$

Despejando R:

$$R^3 = \frac{G\, M\, T^2}{4\,\pi^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{G\, M\, T^2}{4\,\pi^2}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$R = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27}\,\text{kg} \cdot (35\,424\,\text{s})^2}{4\,\pi^2}} = 1{,}59 \cdot 10^8\,\text{m}.$$

Por lo tanto, el radio orbital alrededor de Júpiter es $1{,}59 \cdot 10^8$ m.

Por lo tanto, la solución es....

ii. **La relación que existe entre los radios orbitales de dos satélites que orbitan estacionariamente alrededor de la Tierra y de Júpiter.**

Usando la tercera Ley de Kepler:

$$R^3 = \frac{G\, M\, T^2}{4\,\pi^2}.$$

La relación entre los radios orbitales es:

$$\frac{R^3_{\text{Júpiter}}}{R^3_{\text{Tierra}}} = \frac{M_{\text{Júpiter}}\, T^2_{\text{Júpiter}}}{M_{\text{Tierra}}\, T^2_{\text{Tierra}}}.$$

Dado que $M_{\text{Júpiter}} = 318\,M_{\text{Tierra}}$ y $T_{\text{Júpiter}} = 0{,}41\,T_{\text{Tierra}}$:

$$\frac{R^3_{\text{Júpiter}}}{R^3_{\text{Tierra}}} = \frac{318\,M_{\text{Tierra}} \cdot (0{,}41\,T_{\text{Tierra}})^2}{M_{\text{Tierra}} \cdot (T_{\text{Tierra}})^2} = \frac{318 \cdot 0{,}1681\,M_{\text{Tierra}}\,T^2_{\text{Tierra}}}{M_{\text{Tierra}}\,T^2_{\text{Tierra}}} = 53{,}478.$$

Entonces,

$$\frac{R_{\text{Júpiter}}}{R_{\text{Tierra}}} = \sqrt[3]{53{,}478} \approx 3{,}77.$$

Por lo tanto, el radio orbital alrededor de Júpiter es aproximadamente 3,77 veces el de la Tierra.

Andalucía, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta A. Opción 1

a) **Nuestra galaxia vecina, Andrómeda, tiene una masa de 1,5 veces la masa de la Vía Láctea. A escala galáctica, ambas se pueden considerar como dos masas puntuales.**
   i. **Justifique razonadamente si existe algún punto entre las galaxias donde se anule el campo gravitatorio originado por ambas. En caso afirmativo, determine la relación entre las distancias de ese punto a cada galaxia.**
   ii. **¿Se anula el potencial gravitatorio en algún punto entre ambas galaxias? Justifique su respuesta.**

b) **Se sitúa una masa puntual de 3 kg en el punto $A(0,-2)$ m y otra de 2 kg en el punto $B(3,0)$ m. Calcule:**
   i. **el campo gravitatorio en el origen de coordenadas, ayudándose de un esquema**
   ii. **el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.**

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}

Solución:

a) **Nuestra galaxia vecina, Andrómeda, tiene una masa de 1,5 veces la masa de la Vía Láctea. A escala galáctica, ambas se pueden considerar como dos masas puntuales.**
   i. **Justifique razonadamente si existe algún punto entre las galaxias donde se anule el campo gravitatorio originado por ambas. En caso afirmativo, determine la relación entre las distancias de ese punto a cada galaxia.**

Para que el campo gravitatorio neto se anule en un punto entre las dos galaxias, los campos gravitatorios generados por cada galaxia deben ser iguales en magnitud y opuestos en dirección.

Sea M_1 la masa de la Vía Láctea y $M_2 = 1{,}5\,M_1$ la masa de Andrómeda. Supongamos que la distancia entre ambas galaxias es d. Sea x la distancia desde la Vía Láctea hasta el punto donde se anula el campo, entonces la distancia desde Andrómeda hasta ese punto es $(d-x)$.
El campo gravitatorio generado por una masa puntual es:

$$g = G\,\frac{M}{r^2}.$$

Para que los campos se anulen:

$$G\,\frac{M_1}{x^2} = G\,\frac{M_2}{(d-x)^2}.$$

Simplificando G y sustituyendo $M_2 = 1{,}5\,M_1$:

$$\frac{M_1}{x^2} = \frac{1{,}5\,M_1}{(d-x)^2}.$$

Cancelamos M_1:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1{,}5}{(d-x)^2}.$$

Tomamos raíces cuadradas en ambos lados:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1{,}5}}{d-x}.$$

Despejamos x:

$$\frac{d-x}{x} = \sqrt{1{,}5} \quad \Rightarrow \quad d-x = x\,\sqrt{1{,}5} \quad \Rightarrow \quad x\left(1+\sqrt{1{,}5}\right) = d.$$

Por lo tanto, la relación entre las distancias es:

$$\frac{x}{d} = \frac{1}{1+\sqrt{1{,}5}}, \qquad \frac{d-x}{d} = \frac{\sqrt{1{,}5}}{1+\sqrt{1{,}5}}.$$

Por lo tanto, la solución es que sí existe un punto entre las galaxias donde el campo gravitatorio se anula, y la relación entre las distancias al punto es:

$$\boldsymbol{\frac{x}{d} = \frac{1}{1+\sqrt{1{,}5}}}.$$

ii. ¿Se anula el potencial gravitatorio en algún punto entre ambas galaxias? Justifique su respuesta.

El potencial gravitatorio es una magnitud escalar y se define como:

$$V = -G\,\frac{M}{r}.$$

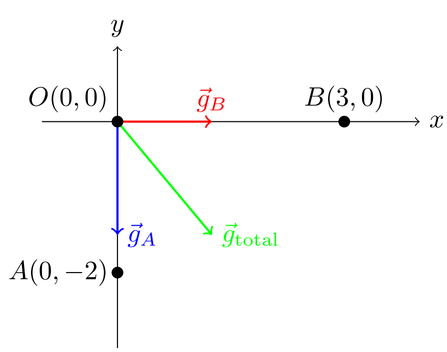
Al ser escalas negativas, al sumar los potenciales de ambas galaxias siempre obtendremos un valor negativo mayor en magnitud. No es posible que la suma de dos valores negativos dé cero.

Por lo tanto, la solución es que no existe un punto entre ambas galaxias donde el potencial gravitatorio se anule, ya que siempre será negativo.

b) Se sitúa una masa puntual de 3 kg en el punto $A(0,-2)$ m y otra de 2 kg en el punto $B(3,0)$ m. Calcule:

i. el campo gravitatorio en el origen de coordenadas, ayudándose de un esquema.

El esquema pedido es:



Calculamos el campo gravitatorio en el origen debido a cada masa.

Campo debido a la masa en A:

Distancia r_A:

$$r_A = \sqrt{(0-0)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{0+4} = 2\,\text{m}.$$

Dirección del campo (desde A hacia O):

$$\vec{r}_A = \frac{(0-0,\,0-(-2))}{r_A} = \left(0,\,\frac{2}{2}\right) = (0,1).$$

Campo gravitatorio:

$$\vec{g}_A = -G\,\frac{m_A}{r_A^2}\vec{r}_A = -\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}\right)\cdot\frac{3\,\text{kg}}{(2\,\text{m})^2}\cdot(0,1) = \left(0,-5{,}0025\cdot 10^{-11}\,\text{N kg}^{-1}\right).$$

Campo debido a la masa en B:

Distancia r_B:

$$r_B = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+0} = 3\,\text{m}.$$

Dirección del campo (desde B hacia O):

$$\vec{r}_B = \frac{(0-3,\, 0-0)}{r_B} = \left(\frac{-3}{3},\, 0\right) = (-1, 0).$$

Campo gravitatorio:

$$\vec{g}_B = -G\,\frac{m_B}{r_B^2}\vec{r}_B = -\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}\right) \cdot \frac{2\,\text{kg}}{(3\,\text{m})^2} \cdot (-1, 0) = \left(1{,}4822 \cdot 10^{-11}\,\text{N kg}^{-1}, 0\right).$$

Campo gravitatorio total en el origen:

$$\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = \left(1{,}4822 \cdot 10^{-11},\, -5{,}0025 \cdot 10^{-11}\right)\ \text{N kg}^{-1}.$$

Por lo tanto, el campo gravitatorio en el origen es:

$$\boldsymbol{\vec{g}_{\text{total}} = \left(1{,}4822 \cdot 10^{-11},\, -5{,}0025 \cdot 10^{-11}\right)\ \text{N kg}^{-1}.}$$

ii. el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.

Potencial debido a la masa en A:

$$V_A = -G\,\frac{m_A}{r_A} = -\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}\right) \cdot \frac{3\,\text{kg}}{2\,\text{m}} = -1{,}0005 \cdot 10^{-10}\,\text{J kg}^{-1}.$$

Potencial debido a la masa en B:

$$V_B = -G\,\frac{m_B}{r_B} = -\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}\right) \cdot \frac{2\,\text{kg}}{3\,\text{m}} = -4{,}4467 \cdot 10^{-11}\,\text{J kg}^{-1}.$$

Potencial gravitatorio total en el origen:

$$V_{\text{total}} = V_A + V_B = -1{,}0005 \cdot 10^{-10}\,\text{J kg}^{-1} - 4{,}4467 \cdot 10^{-11}\,\text{J kg}^{-1} = -1{,}4452 \cdot 10^{-10}\,\text{J kg}^{-1}.$$

Por lo tanto, el potencial gravitatorio en el origen es:

$$\boldsymbol{V_{\text{total}} = -1{,}4452 \cdot 10^{-10}\,\text{J kg}^{-1}.}$$

Pregunta A. Opción 2

a) **Razone si son verdaderos los siguientes enunciados:**
  i. **Si sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas, su energía mecánica aumenta.**
  ii. **Si sólo actúan fuerzas de rozamiento en sentido contrario al desplazamiento, la energía mecánica de una partícula aumenta.**

b) **Una masa de 5 kg se lanza hacia abajo por un plano inclinado sin rozamiento de 15° respecto de la horizontal con velocidad inicial de $3\,\mathrm{m\ s^{-1}}$. Tras recorrer 2 m a lo largo del plano inclinado llega a una superficie horizontal con rozamiento. Cuando ha recorrido 2 m sobre la superficie horizontal, su velocidad es de $1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$.**
  i. **Represente un diagrama de las fuerzas sobre la masa en cada superficie.**
  ii. **Utilizando consideraciones energéticas, calcule el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en el recorrido descrito.**
  iii. **Calcule el coeficiente de rozamiento en el tramo horizontal.**

Dato: $g = 9{,}8\,\mathrm{m\ s^{-2}}$

Solución:

a) **Razone si son verdaderos los siguientes enunciados:**
  i. **Si sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas, su energía mecánica aumenta.**

Cuando sólo actúan fuerzas conservativas sobre una partícula, la energía mecánica ($E_m = E_c + E_p$) se conserva, es decir, permanece constante a lo largo del movimiento. Las fuerzas conservativas transforman energía potencial en cinética y viceversa sin pérdida total de energía.

Por lo tanto, la afirmación es falsa, ya que la energía mecánica permanece constante, no aumenta.

  ii. **Si sólo actúan fuerzas de rozamiento en sentido contrario al desplazamiento, la energía mecánica de una partícula aumenta.**

Las fuerzas de rozamiento son fuerzas no conservativas que realizan trabajo negativo cuando actúan en sentido contrario al desplazamiento. Este trabajo negativo reduce la energía cinética de la partícula y, por tanto, disminuye su energía mecánica total.

Por lo tanto, la afirmación es falsa, ya que la energía mecánica disminuye debido al trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento.

b) **Una masa de 5 kg se lanza hacia abajo por un plano inclinado sin rozamiento de 15° respecto de la horizontal con velocidad inicial de $3\,\mathrm{m\ s^{-1}}$. Tras recorrer 2 m a lo largo del plano inclinado llega a una superficie horizontal con rozamiento. Cuando ha recorrido 2 m sobre la superficie horizontal, su velocidad es de $1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$.**
  i. **Represente un diagrama de las fuerzas sobre la masa en cada superficie.**

Diagrama de fuerzas en el plano inclinado sin rozamiento:

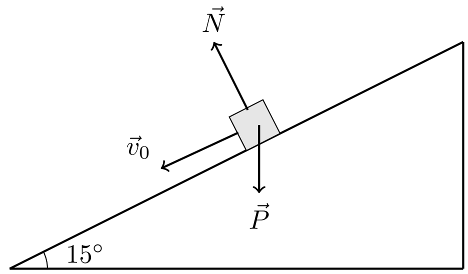
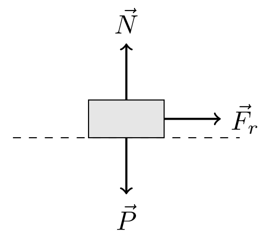


Diagrama de fuerzas en la superficie horizontal con rozamiento:



ii. Utilizando consideraciones energéticas, calcule el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en el recorrido descrito.

Calculamos la energía mecánica inicial y final para determinar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.
Altura descendida en el plano inclinado:

$$\Delta h = L \cdot \sin\theta = 2\,\text{m} \cdot \sin 15^\circ = 2\,\text{m} \cdot 0{,}2588 = 0{,}5176\,\text{m}.$$

Energía inicial (E_i):

$$E_i = E_{p_i} + E_{p_i} = \frac{1}{2} m v_i^2 + m g h_i.$$

Tomando $h_i = 0{,}5176\,\text{m}$ y $v_i = 3\,\text{m s}^{-1}$:

$$E_i = \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{kg} \cdot (3\,\text{m s}^{-1})^2 + 5\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m s}^{-2} \cdot 0{,}5176\,\text{m} = 47{,}896\,\text{J}.$$

Energía final (E_f):

$$E_f = E_{p_f} + E_{p_f} = \frac{1}{2} m v_f^2 + m g h_f.$$

Tomando $h_f = 0\,\text{m}$ y $v_f = 1\,\text{m s}^{-1}$:

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{kg} \cdot (1\,\text{m s}^{-1})^2 + 0 = 2{,}5\,\text{J}.$$

Trabajo realizado por la fuerza de rozamiento (W_{F_r}):

$$W_{F_r} = E_f - E_i = 2{,}5\,\text{J} - 47{,}896\,\text{J} = -45{,}396\,\text{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es $\boldsymbol{W_{F_r} = -45{,}40\,\text{J}}$.

iii. Calcule el coeficiente de rozamiento en el tramo horizontal.

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es:

$$W_{F_r} = -F_r \cdot d = -\mu N \cdot d,$$

donde:
* $F_r = \mu N$ es la fuerza de rozamiento,
* $N = mg$ es la normal en la superficie horizontal,
* $d = 2\,\mathrm{m}$ es la distancia recorrida en la superficie horizontal.

Despejamos μ:

$$\mu = -\frac{W_{F_r}}{mgd}.$$

Sustituimos los valores:

$$\mu = -\frac{-45{,}396\,\mathrm{J}}{5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\ s^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{m}} = 0{,}4632.$$

Por lo tanto, el coeficiente de rozamiento es $\boldsymbol{\mu = 0{,}463}$.

Andalucía, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta A. Opción 1

a) Un satélite de masa m orbita a una altura h sobre un planeta de masa M y radio R.
i. Deduzca la expresión de la velocidad orbital del satélite y exprese el resultado en función de M, R y h.
ii. ¿Cómo cambia su velocidad si la masa del planeta se duplica? ¿Y si se duplica la masa del satélite?
b) Un cuerpo de 5 kg desciende con velocidad constante desde una altura de 15 m por un plano inclinado con rozamiento que forma 30° con respecto a la horizontal. Sobre el cuerpo actúa una fuerza de 20 N paralela al plano y dirigida en sentido ascendente.
i. Realice un esquema con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.
ii. Determine razonadamente el trabajo realizado por cada una de las fuerzas hasta que el cuerpo llega al final del plano.

Dato: $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$

Solución:

a) Un satélite de masa m orbita a una altura h sobre un planeta de masa M y radio R.
i. Deduzca la expresión de la velocidad orbital del satélite y exprese el resultado en función de M, R y h.

Para deducir la expresión de la velocidad orbital, aplicamos la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal. La fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite es:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{(R+h)^2}.$$

Esta fuerza proporciona la aceleración centrípeta necesaria para el movimiento circular uniforme del satélite:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{R+h}.$$

Igualando ambas expresiones:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{(R+h)^2} = m \cdot \frac{v^2}{R+h}.$$

Simplificando m y $R+h$:

$$G \cdot \frac{M}{R+h} = v^2.$$

Despejando v:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R+h}}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital del satélite es $v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R+h}}$.

ii. ¿Cómo cambia su velocidad si la masa del planeta se duplica? ¿Y si se duplica la masa del satélite?

De la expresión de la velocidad orbital obtenida:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R+h}}.$$

Observamos que v depende de M pero no de m.

Si la masa del planeta se duplica ($M' = 2M$):

$$v' = \sqrt{G \cdot \frac{2M}{R+h}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{G \cdot \frac{M}{R+h}} = \sqrt{2} \cdot v.$$

Es decir, la velocidad orbital aumenta en un factor $\sqrt{2}$.

Si la masa del satélite se duplica ($m' = 2m$):

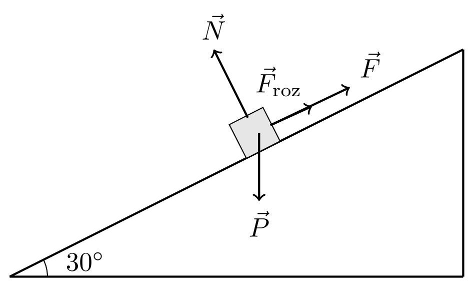
$$v' = \sqrt{G \cdot \frac{2M}{R+h}} = v,$$

pues, como la expresión de v no depende de m, entonces la velocidad orbital v no cambia.

Por lo tanto, al duplicar la masa del planeta, la velocidad orbital aumenta en $\sqrt{2}$ veces, y al duplicar la masa del satélite, la velocidad no cambia.

b) Un cuerpo de 5 kg desciende con velocidad constante desde una altura de 15 m por un plano inclinado con rozamiento que forma 30° con respecto a la horizontal. Sobre el cuerpo actúa una fuerza de 20 N paralela al plano y dirigida en sentido ascendente.

i. Realice un esquema con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.



Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

* El peso $\vec{P}$, dirigido verticalmente hacia abajo.
* La fuerza normal $\vec{N}$, perpendicular al plano inclinado.
* La fuerza de rozamiento $\vec{F}_{\text{roz}}$, paralela al plano y opuesta al movimiento.
* La fuerza externa $\vec{F} = 20\,\text{N}$, paralela al plano y dirigida hacia arriba.

Por lo tanto, las fuerzas que actúan son $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{roz}}$ y $\vec{F}$, como se muestra en el esquema.

ii. Determine razonadamente el trabajo realizado por cada una de las fuerzas hasta que el cuerpo llega al final del plano.

Dado que el cuerpo desciende desde una altura de 15 m, calculamos la longitud del plano inclinado ℓ:

$$h = \ell \cdot \sin 30° \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{h}{\sin 30°} = \frac{15\,\text{m}}{0{,}5} = 30\,\text{m}.$$

Como el cuerpo desciende con velocidad constante, la aceleración es cero, por lo que la suma de las fuerzas paralelas al plano es cero:

$$\sum F_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad P \cdot \sin 30° - F - F_{\text{roz}} = 0.$$

Despejando la fuerza de rozamiento:

$$F_{\text{roz}} = P \cdot \sin 30° - F = m \cdot g \cdot \sin 30° - F.$$

Sustituyendo:

$$F_{\text{roz}} = 5\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}5 - 20\,\text{N} = (24{,}5\,\text{N}) - 20\,\text{N} = 4{,}5\,\text{N}.$$

El trabajo realizado por el peso W_P es:

$$W_P = P \cdot l \cdot \cos 60^\circ = 5\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 30\,\text{m} \cdot \cos 60^\circ = 735\,\text{J}.$$

El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ es:

$$W_F = F \cdot \ell \cdot \cos 180^\circ = 20\,\text{N} \cdot 30\,\text{m} \cdot (-1) = -600\,\text{J}.$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento W_{roz} es:

$$W_{\text{roz}} = F_{\text{roz}} \cdot \ell \cdot \cos 180^\circ = 4{,}5\,\text{N} \cdot 30\,\text{m} \cdot (-1) = -135\,\text{J}.$$

La fuerza normal es perpendicular al desplazamiento, por lo que su trabajo es cero:

$$W_N = N \cdot \ell \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Por lo tanto, los trabajos realizados son: $\boldsymbol{W_P = 735\,\text{J}}$, $\boldsymbol{W_F = -600\,\text{J}}$, $\boldsymbol{W_{\text{roz}} = -135\,\text{J}}$ y $\boldsymbol{W_N = 0\,\text{J}}$.

Pregunta A. Opción 2

a) **i. Escriba la expresión del potencial gravitatorio creado por una masa puntual M, indicando las magnitudes que aparecen en la misma.**
   ii. Razone el signo del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una masa m, inicialmente en reposo en las proximidades de M, se desplaza por acción del campo gravitatorio.

b) **Recientemente la NASA envió la nave ORION-Artemis a las proximidades de la Luna. Sabiendo que la masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna y la distancia entre sus centros es $3,84 \cdot 10^5$ km:**
   i. Calcule en qué punto, entre la Tierra y la Luna, la fuerza ejercida por ambos cuerpos sobre la nave es cero.
   ii. Determine la energía potencial de la nave en ese punto sabiendo que su masa es de 5000 kg.

Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ **kg**

Solución:

a) **i. Escriba la expresión del potencial gravitatorio creado por una masa puntual M, indicando las magnitudes que aparecen en la misma.**

El potencial gravitatorio V_g creado por una masa puntual M a una distancia r es:

$$V_g = -G \cdot \frac{M}{r},$$

donde:
* V_g es el potencial gravitatorio en joules por kilogramo (J/kg),
* G es la constante de gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$,
* M es la masa puntual que genera el campo gravitatorio, medida en kilogramos (kg),
* r es la distancia desde el centro de la masa M hasta el punto donde se calcula el potencial, medida en metros (m).

Por lo tanto, la expresión del potencial gravitatorio es $V_g = -G \cdot (M/r)$, donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa puntual y r es la distancia al punto considerado.

ii. Razone el signo del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una masa m, inicialmente en reposo en las proximidades de M, se desplaza por acción del campo gravitatorio.

La fuerza gravitatoria es atractiva y siempre apunta hacia la masa M. Cuando la masa m se desplaza hacia M, el desplazamiento y la fuerza tienen la misma dirección y sentido. El trabajo W realizado por una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de un desplazamiento $\vec{d}$ es:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento. En este caso, $\theta = 0°$, por lo que $\cos 0° = 1$ y:

$$W = F \cdot d > 0,$$

pues F y d son positivos al ser módulos de vectores. Además, dado que la energía potencial gravitatoria se define como:

$$E_{\mathrm{p,g}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r},$$

al acercarse m a M, r disminuye, por lo que $E_{\text{p,g}}$ se vuelve más negativa. La variación de energía potencial es:

$$\Delta E_{\text{p,g}} = E_{\text{p,g, final}} - E_{\text{p,g, inicial}} < 0.$$

Por el principio de conservación de la energía:

$$W = -\Delta E_{\text{p,g}} > 0,$$

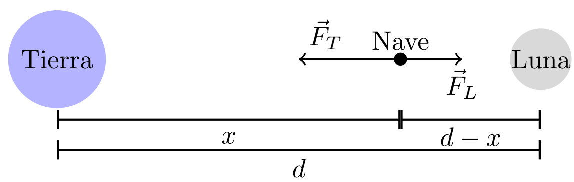
comprobando de otra forma que el trabajo es positivo

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es positivo cuando m se acerca a M, ya que la fuerza gravitatoria realiza trabajo al desplazar la masa m hacia la masa M.

b) **Recientemente la NASA envió la nave ORION-Artemis a las proximidades de la Luna. Sabiendo que la masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna y la distancia entre sus centros es $3,84 \cdot 10^5$ km:**

i. **Calcule en qué punto, entre la Tierra y la Luna, la fuerza ejercida por ambos cuerpos sobre la nave es cero.**

Sean $d = 3{,}84 \cdot 10^5\,\text{km} = 3{,}84 \cdot 10^8\,\text{m}$ la distancia entre la Tierra y la Luna, y x la distancia desde el centro de la Tierra hasta el punto donde la fuerza neta sobre la nave es cero.



La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la nave es:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{x^2}.$$

La fuerza gravitatoria ejercida por la Luna sobre la nave es:

$$F_L = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(d-x)^2}.$$

En el punto donde las fuerzas se equilibran:

$$F_T = F_L.$$

Como $M_T = 81 \cdot M_L$, entonces:

$$G \cdot \frac{81\, M_L \cdot m}{x^2} = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(d-x)^2}.$$

Simplificando G, M_L y m:

$$\frac{81}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}.$$

Tomando raíces cuadradas:

$$\frac{9}{x} = \frac{1}{d-x}.$$

Despejando x:

$$x = \frac{9d}{10} = \frac{9}{10} \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\,\text{m} = 3{,}456 \cdot 10^8\,\text{m}.$$

Por lo tanto, el punto donde la fuerza neta es cero está a $3{,}456 \cdot 10^8$ m de la Tierra.

ii. Determine la energía potencial de la nave en ese punto sabiendo que su masa es de 5000 kg.

La energía potencial gravitatoria total $E_{\mathrm{p,g}}$ en ese punto es la suma de las energías potenciales debidas a la Tierra y a la Luna:

$$E_{\mathrm{p,g}} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{x} - G \cdot \frac{M_L \cdot m}{d - x}.$$

Sabemos que:

* $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$,
* $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$,
* $M_L = \frac{M_T}{81} = \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{81} = 7{,}3827 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$,
* $m = 5000\,\mathrm{kg}$,
* $x = 3{,}456 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$,
* $d - x = 3{,}84 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m} - 3{,}456 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m} = 3{,}84 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m}$.

Calculamos cada término:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{p,g}} &= -G \cdot m \left(\frac{M_T}{x} + \frac{M_L}{d - x} \right) = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2} \cdot 5000\,\mathrm{kg} \left(\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{3{,}456 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}} + \frac{7{,}3827 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{3{,}84 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m}} \right) \\ &= -6{,}413 \cdot 10^{9}\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía potencial de la nave en ese punto es aproximadamente $-6{,}41 \cdot 10^{9}$ J.

Andalucía, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta A. Opción 1

a) **Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape desde la órbita es la cuarta parte de la velocidad de escape desde la superficie terrestre.**
   i. **Deduzca la relación que existe entre el radio de la órbita y el radio terrestre.**
   ii. **Determine la relación entre la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre y en la órbita del satélite.**

b) **Un planeta tiene un radio de 5000 km y la gravedad en su superficie es $8,2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Este planeta orbita en torno a una estrella que tiene una masa de $8 \cdot 10^{31}$ kg. Determine:**
   i. **la masa del planeta.**
   ii. **la velocidad de escape desde su superficie.**
   iii. **el radio de la órbita en la que la energía mecánica del planeta tiene un valor de $-8,15 \cdot 10^{33}$ J.**

Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

Solución:

a) **Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape desde la órbita es la cuarta parte de la velocidad de escape desde la superficie terrestre.**
   i. **Deduzca la relación que existe entre el radio de la órbita y el radio terrestre.**

La velocidad de escape desde una distancia r al centro de la Tierra es:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{r}},$$

Donde:
* v_{escape} es la velocidad de escape,
* G es la constante de gravitación universal,
* M_T es la masa de la Tierra,
* r es la distancia desde el centro de la Tierra.

Según el enunciado:

$$v_{\text{escape, órbita}} = \frac{1}{4} v_{\text{escape, superficie}}.$$

Sustituimos las expresiones de las velocidades de escape:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}.$$

Simplificando:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{R_T}.$$

Despejando R:

$$R = 16 \cdot R_T.$$

Por lo tanto, el radio de la órbita es 16 veces el radio terrestre: $R = 16 \cdot R_T$.

ii. Determine la relación entre la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre y en la órbita del satélite.

La aceleración de la gravedad en la superficie terrestre es:

$$g_T = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}.$$

La aceleración de la gravedad en la órbita es:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{R^2}.$$

La relación entre ambas aceleraciones es:

$$\frac{g_T}{g} = \frac{\frac{G \cdot M_T}{R_T^2}}{\frac{G \cdot M_T}{R^2}} = \left(\frac{R}{R_T}\right)^2.$$

Como $R = 16 \cdot R_T$:

$$\frac{g_T}{g} = \left(\frac{16 \cdot R_T}{R_T}\right)^2 = 16^2 = 256.$$

Entonces,

$$g = \frac{g_T}{256}.$$

Por lo tanto, la aceleración de la gravedad en la órbita es 256 veces menor que en la superficie terrestre.

b) **Un planeta tiene un radio de 5000 km y la gravedad en su superficie es $8,2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Este planeta orbita en torno a una estrella que tiene una masa de $8 \cdot 10^{31}$ kg. Determine:**

i. la masa del planeta.

La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es:

$$g_p = \frac{G \cdot M_p}{R_p^2}.$$

Despejando M_p:

$$M_p = \frac{g_p \cdot R_p^2}{G}.$$

Convertimos el radio a metros:

$$R_p = 5000\,\mathrm{km} = 5 \cdot 10^6\,\mathrm{m}.$$

Sustituimos los valores:

$$M_p = \frac{8{,}2\,\mathrm{m/s^2} \cdot (5 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}} = 3{,}075 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto, la masa del planeta es $3{,}075 \cdot 10^{24}$ kg.

ii. la velocidad de escape desde su superficie.

La velocidad de escape es:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_p}{R_p}}.$$

Sustituimos los valores:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \cdot 3{,}075 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{5 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}}} = 9050{,}28\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de escape desde la superficie del planeta es 9050,28 m/s.

iii. el radio de la órbita en la que la energía mecánica del planeta tiene un valor de $-8,15 \cdot 10^{33}$ J.

La energía mecánica en una órbita es:

$$E_{\text{mec}} = -\frac{G \cdot M_s \cdot M_p}{2 \cdot R}.$$

Despejamos R:

$$R = -\frac{G \cdot M_s \cdot M_p}{2 \cdot E_{\text{mec}}}.$$

Sustituimos los valores:

$$R = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \cdot 8 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}075 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot (-8{,}15 \cdot 10^{33}\,\mathrm{J})} = 1{,}006 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, el radio de la órbita es $1{,}006 \cdot 10^{12}$ m.

Pregunta A. Opción 2

a) **Una masa puntual m se encuentra en las inmediaciones de otra masa puntual M. Razone cómo se modifica la energía potencial gravitatoria cuando:**
   i. **las dos masas se acercan.**
   ii. **aumenta el valor de la masa m.**

b) **Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos $A(0,2)$ y $B(2,0)$ m. Determine razonadamente:**
   i. **el valor de la intensidad del campo gravitatorio en el punto $C(0,0)$ m.**
   ii. **el potencial gravitatorio en el mismo punto.**
   iii. **el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para desplazar una masa de 3 kg desde C hasta el punto $D(2,2)$ m. Justifique el resultado obtenido.**

Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

Solución:

a) **Una masa puntual m se encuentra en las inmediaciones de otra masa puntual M. Razone cómo se modifica la energía potencial gravitatoria cuando:**
   i. **las dos masas se acercan.**

La energía potencial gravitatoria entre dos masas puntuales viene dada por:

$$E_{\mathrm{p,g}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R},$$

donde:
* G es la constante de gravitación universal,
* M y m son las masas,
* R es la distancia entre las masas.

Al acercarse las masas, R disminuye, por lo que el denominador se hace más pequeño y el valor absoluto de $E_{\mathrm{p,g}}$ aumenta. Sin embargo, como la energía potencial gravitatoria es negativa, esto significa que $E_{\mathrm{p,g}}$ se vuelve más negativa.

Por lo tanto, al acercarse las masas, la energía potencial gravitatoria disminuye (se hace más negativa).

   ii. **aumenta el valor de la masa m.**

Si aumentamos la masa m, el producto $M \cdot m$ aumenta, por lo que la energía potencial gravitatoria:

$$E_{\mathrm{p,g}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R},$$

se hace más negativa.

Por lo tanto, al aumentar la masa m, la energía potencial gravitatoria disminuye (se hace más negativa).

b) **Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos $A(0,2)$ y $B(2,0)$ m. Determine razonadamente:**
   i. **el valor de la intensidad del campo gravitatorio en el punto $C(0,0)$ m.**

Utilizamos el principio de superposición para calcular el campo gravitatorio total en C:

$$\vec{g}(C) = \vec{g}_A(C) + \vec{g}_B(C).$$

La distancia de A a C es $r_A = 2$ m. Entonces,

$$g_A = G \cdot \frac{m}{r_A^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \cdot \frac{5\,\mathrm{kg}}{(2\,\mathrm{m})^2} = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2}.$$

La dirección de $\vec{g}_A(C)$ es desde C hacia A, es decir, en el eje y positivo. Por otro lado, la distancia de B a C es $r_B = 2$ m. Entonces,

$$g_B = G \cdot \frac{m}{r_B^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{(2)^2} = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m/s^2}.$$

La dirección de $\vec{g}_B(C)$ es desde C hacia B, es decir, en el eje x positivo. El campo gravitatorio total en C es:

$$\vec{g}(C) = g_B\,\vec{\imath} + g_A\,\vec{\jmath} = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} + 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio en C es $\vec{g}(C) = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} + 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}\,\mathrm{m/s^2}$.

ii. el potencial gravitatorio en el mismo punto.

El potencial gravitatorio es un escalar y se puede sumar directamente:

$$V(C) = V_A(C) + V_B(C),$$

donde:

$$V_A(C) = -G \cdot \frac{m}{r_A} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{2} = -1{,}6675 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg},$$
$$V_B(C) = -G \cdot \frac{m}{r_B} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{2} = -1{,}6675 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg}.$$

Entonces,

$$V(C) = V_A(C) + V_B(C) = -1{,}6675 \cdot 10^{-10} + (-1{,}6675 \cdot 10^{-10}) = -3{,}335 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg}.$$

Por lo tanto, el potencial gravitatorio en C es $V(C) = -3{,}335 \cdot 10^{-10}$ J/kg.

iii. el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para desplazar una masa de 3 kg desde C hasta el punto $D(2,2)$ m. Justifique el resultado obtenido.

El trabajo realizado por las fuerzas gravitatorias es:

$$W = -\Delta E_{\mathrm{p,g}} = -m\,(V(D) - V(C)) = -m\Delta V.$$

Calculamos el potencial en D:

$$r_{AD} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-2)^2} = 2\,\mathrm{m},$$
$$V_A(D) = -G \cdot \frac{m}{r_{AD}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{2} = -1{,}6675 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg},$$
$$r_{BD} = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} = 2\,\mathrm{m},$$
$$V_B(D) = -G \cdot \frac{m}{r_{BD}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{2} = -1{,}6675 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg}.$$

Entonces,

$$V(D) = V_A(D) + V_B(D) = -1{,}6675 \cdot 10^{-10} + (-1{,}6675 \cdot 10^{-10}) = -3{,}335 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg}.$$

Como $V(D) = V(C)$, entonces $\Delta V = 0$ y:

$$W = -m\Delta V = -3\,\text{kg} \cdot 0 = 0.$$

Se puede comprobar que los puntos C y D están en una superficie equipotencial, por lo que no se realiza trabajo al mover una masa entre ellos en ausencia de otras fuerzas.

Por lo tanto, el trabajo realizado es cero porque $V(D) = V(C)$ y no hay cambio en la energía potencial gravitatoria.

Andalucía, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta A. Opción 1

a) **i. Defina los conceptos de energía cinética, energía potencial y energía mecánica e indique la relación que existe entre ellas cuando sólo actúan fuerzas conservativas.**
   ii. Explique razonadamente cómo se modifica dicha relación si intervienen además fuerzas no conservativas

b) **Sobre un cuerpo de 3 kg, que está inicialmente en reposo sobre un plano horizontal, actúa una fuerza de 12 N paralela al plano. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,2. Determine, mediante consideraciones energéticas:**
   i. el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento tras recorrer el cuerpo una distancia de 10 m.
   ii. la velocidad del cuerpo después de recorrer los 10 m.

Dato: $g = 9,8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Solución:

a) **i. Defina los conceptos de energía cinética, energía potencial y energía mecánica e indique la relación que existe entre ellas cuando sólo actúan fuerzas conservativas.**

La energía cinética es la energía que posee un objeto debido a su movimiento. Se calcula mediante la expresión:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2,$$

donde m es la masa del objeto y v su velocidad.

La energía potencial es la energía que posee un objeto debido a su posición o configuración en un campo de fuerzas. Existen diferentes tipos de energía potencial:

* *Energía potencial gravitatoria*: asociada a la posición de un objeto en un campo gravitatorio, calculada como:

$$E_\mathrm{p,g} = m \cdot g \cdot h,$$

donde g es la aceleración de la gravedad y h la altura respecto a un nivel de referencia.

* *Energía potencial elástica*: relacionada con la deformación de un resorte o elemento elástico:

$$E_\mathrm{p,e} = \frac{1}{2}\, k \cdot x^2,$$

donde k es la constante elástica y x la deformación del resorte.

La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial de un sistema:

$$E_\mathrm{mec} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}.$$

Cuando sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva. Es decir:

$$E_\mathrm{mec}^\mathrm{inicial} = E_\mathrm{mec}^\mathrm{final} \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{c}^\mathrm{inicial} + E_\mathrm{p}^\mathrm{inicial} = E_\mathrm{c}^\mathrm{final} + E_\mathrm{p}^\mathrm{final}.$$

Por lo tanto, cuando sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica total del sistema permanece constante.

ii. Explique razonadamente cómo se modifica dicha relación si intervienen además fuerzas no conservativas

Si intervienen fuerzas no conservativas (como la fuerza de rozamiento), la energía mecánica no se conserva, ya que parte de ella se transforma en otras formas de energía, como calor. En este caso, la relación se modifica según el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas:

$$E_{\text{mec}}^{\text{inicial}} = E_{\text{mec}}^{\text{final}} + W_{\text{nc}},$$

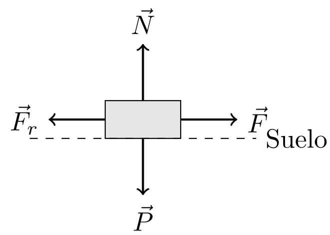
donde W_{nc} es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

Por lo tanto, la energía mecánica disminuye o aumenta en función del trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

b) **Sobre un cuerpo de 3 kg, que está inicialmente en reposo sobre un plano horizontal, actúa una fuerza de 12 N paralela al plano. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,2. Determine, mediante consideraciones energéticas:**

i. **el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento tras recorrer el cuerpo una distancia de 10 m.**

Observamos que:



Primero, calculamos la fuerza normal N mediante la Segunda Ley de Newton (en el eje y):

$$N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P = m \cdot g = 3\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 = 29{,}4\,\text{N}.$$

La fuerza de rozamiento es:

$$F_{\text{r}} = \mu \cdot N = 0{,}2 \cdot 29{,}4\,\text{N} = 5{,}88\,\text{N}.$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento al desplazarse $d = 10\,\text{m}$ es:

$$W_{\text{r}} = F_{\text{r}} \cdot d \cdot \cos 180^\circ = 5{,}88\,\text{N} \cdot 10\,\text{m} \cdot (-1) = -58{,}8\,\text{J}.$$

Nótese que el ángulo es 180° porque la fuerza de rozamiento se opone al movimiento.

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es $-58{,}8\,\text{J}$.

ii. **la velocidad del cuerpo después de recorrer los 10 m.**

El trabajo realizado por la fuerza aplicada $F = 12\,\text{N}$ es:

$$W_{\text{F}} = F \cdot d \cdot \cos 0^\circ = 12\,\text{N} \cdot 10\,\text{m} \cdot 1 = 120\,\text{J}.$$

El trabajo neto realizado sobre el cuerpo es la suma de los trabajos individuales:

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{F}} + W_{\text{r}} = 120\,\text{J} - 58{,}8\,\text{J} = 61{,}2\,\text{J}.$$

Aplicando el teorema del trabajo y la energía cinética:

$$W_{\text{neto}} = \Delta E_{\text{c}} = E_{\text{c,f}} - E_{\text{c,i}} = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 - 0,$$

ya que el cuerpo parte del reposo ($v_0 = 0$).
Despejamos v:

$$61{,}2\,\mathrm{J} = \frac{1}{2} \cdot 3\,\mathrm{kg} \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2 \cdot 61{,}2\,\mathrm{J}}{3\,\mathrm{kg}} = 40{,}8\,\mathrm{m^2/s^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{40{,}8\,\mathrm{m^2/s^2}} = 6{,}39\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad del cuerpo después de recorrer 10 m es aproximadamente 6,39 m/s.

Pregunta A. Opción 2

a) **En una determinada región del espacio existen dos puntos A y B en los que el potencial gravitatorio es el mismo.**
   i. **¿Podemos concluir que los campos gravitatorios en A y en B son iguales?**
   ii. **¿Cuál sería el trabajo realizado por el campo gravitatorio al desplazar una masa m desde A hasta B?**

b) **Dos masas de 2 y 4 kg se sitúan en los puntos A(2,0) m y B(0,3) m, respectivamente.**
   i. **Determine el campo y el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.**
   ii. **Calcule el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para trasladar una tercera masa de 1 kg desde el origen de coordenadas hasta el punto C(2,3) m.**

Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

Solución:

a) **En una determinada región del espacio existen dos puntos A y B en los que el potencial gravitatorio es el mismo.**
   i. **¿Podemos concluir que los campos gravitatorios en A y en B son iguales?**

Aunque el potencial gravitatorio es el mismo en los puntos A y B, esto no implica que los campos gravitatorios sean iguales en esos puntos. El potencial gravitatorio es una magnitud escalar que depende de la posición, pero el campo gravitatorio es un vector que depende tanto de la magnitud como de la dirección. El campo gravitatorio es el gradiente del potencial gravitatorio:

$$\vec{g} = -\nabla V,$$

por lo que dos puntos con el mismo potencial pueden tener campos gravitatorios diferentes si el gradiente del potencial es distinto en cada punto.

Por lo tanto, no podemos concluir que los campos gravitatorios en A y B sean iguales.

   ii. **¿Cuál sería el trabajo realizado por el campo gravitatorio al desplazar una masa m desde A hasta B?**

El trabajo realizado por una fuerza conservativa, como el campo gravitatorio, al mover una masa desde A hasta B es:

$$W = -m\left(V_B - V_A\right).$$

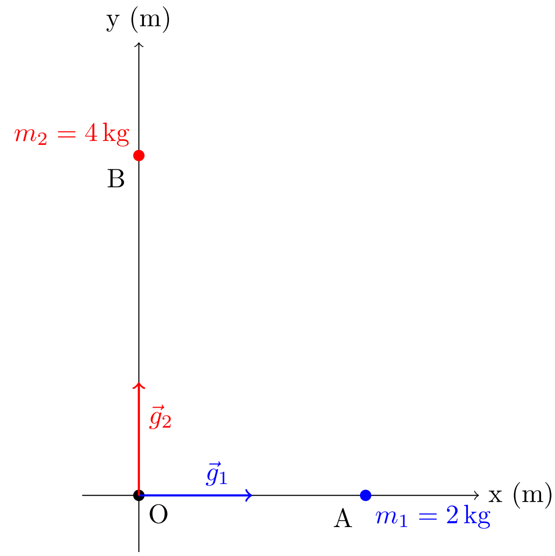
Dado que $V_B = V_A$, entonces:

$$W = -m(V_B - V_A) = -m \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado es cero ya que tienen el mismo potencial.

b) **Dos masas de 2 y 4 kg se sitúan en los puntos A(2,0) m y B(0,3) m, respectivamente.**
   i. **Determine el campo y el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.**

Tenemos la siguiente situación:



Cálculo del campo gravitatorio en el origen debido a la masa en A:

La masa $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ está en el punto A(2,0) m. La distancia desde el origen hasta A es:

$$r_1 = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = 2\,\mathrm{m}.$$

El vector unitario desde la masa hacia el origen es:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(-2,0)}{2} = (-1,0) = -\vec{i}.$$

El campo gravitatorio en el origen debido a m_1 es:

$$\vec{g}_1 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 = -G \cdot \frac{2}{(2)^2} \cdot (-\vec{i}) = G \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{i} = 3{,}335 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i}\,\mathrm{N/kg}.$$

Cálculo del campo gravitatorio en el origen debido a la masa en B:

La masa $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$ está en el punto B(0,3) m. La distancia desde el origen hasta B es:

$$r_2 = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2} = 3\,\mathrm{m}.$$

El vector unitario desde la masa hacia el origen es:

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(0,-3)}{3} = (0,-1) = -\vec{j}.$$

El campo gravitatorio en el origen debido a m_2 es:

$$\vec{g}_2 = -G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 = -G \cdot \frac{4}{(3)^2} \cdot (-\vec{j}) = G \cdot \frac{4}{9} \cdot \vec{j} = 2{,}964 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\,\mathrm{N/kg}.$$

Entonces,

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 3{,}335 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 2{,}964 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\,\mathrm{N/kg}.$$

El módulo del campo gravitatorio es:

$$|\vec{g}| = \sqrt{\left(3{,}335 \cdot 10^{-11}\right)^2 + \left(2{,}964 \cdot 10^{-11}\right)^2} = 4{,}46 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N/kg}.$$

Cálculo del potencial gravitatorio en el origen:

El potencial gravitatorio es escalar y se suma directamente. Potencial debido a m_1:

$$V_1 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{2} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{J/kg}.$$

Potencial debido a m_2:

$$V_2 = -G \cdot \frac{m_2}{r_2} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4}{3} = -8{,}89 \cdot 10^{-11}\,\text{J/kg}.$$

Entonces,

$$V = V_1 + V_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11} + (-8{,}89 \cdot 10^{-11}) = -1{,}556 \cdot 10^{-10}\,\text{J/kg}.$$

Por lo tanto, el campo gravitatorio en el origen es $\vec{g} = 3{,}335 \cdot 10^{-11}\,\vec{\imath} + 2{,}964 \cdot 10^{-11}\,\vec{\jmath}$N/kg y el potencial gravitatorio es $V = -1{,}556 \cdot 10^{-10}$ J/kg.

ii. Calcule el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para trasladar una tercera masa de 1 kg desde el origen de coordenadas hasta el punto C(2,3) m.

La distancia desde m_1 hasta C(2,3) es:

$$r_1' = \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = 3\,\text{m}.$$

Así, el potencial debido a m_1 en C es:

$$V_1' = -G \cdot \frac{m_1}{r_1'} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{3} = -4{,}44 \cdot 10^{-11}\,\text{J/kg}.$$

La distancia desde m_2 hasta C(2,3) es:

$$r_2' = \sqrt{(2-0)^2 + (3-3)^2} = 2\,\text{m}.$$

Y el potencial debido a m_2 en C es:

$$V_2' = -G \cdot \frac{m_2}{r_2'} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4}{2} = -1{,}334 \cdot 10^{-10}\,\text{J/kg}.$$

Entonces, el potencial total en C es:

$$V_C = V_1' + V_2' = -4{,}44 \cdot 10^{-11} + (-1{,}334 \cdot 10^{-10}) = -1{,}778 \cdot 10^{-10}\,\text{J/kg}.$$

El trabajo realizado al mover una masa $m = 1\,\text{kg}$ desde el origen hasta el punto C es:

$$W = -m\,(V_C - V_O) = -1 \cdot \left(-1{,}778 \cdot 10^{-10} - (-1{,}556 \cdot 10^{-10})\right) = 2{,}22 \cdot 10^{-11}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado es $2{,}22 \cdot 10^{-11}$ J.

Andalucía, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta A. Opción 1

a) **Deduzca la expresión de la energía mecánica de un satélite de masa m que orbita a una altura h de la superficie de un planeta de masa M y radio R. Exprese el resultado en función de m, M, R y h.**

b) **Un bloque de 2 kg asciende con una velocidad inicial de $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal hasta detenerse momentáneamente. A continuación, el bloque desciende hasta llegar al punto de partida. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,2. Determine mediante consideraciones energéticas:**
   i. la altura máxima a la que llega el bloque.
   ii. la velocidad con la que regresa el bloque al punto de partida.

Dato: $g = 9,8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Solución:

a) **Deduzca la expresión de la energía mecánica de un satélite de masa m que orbita a una altura h de la superficie de un planeta de masa M y radio R. Exprese el resultado en función de m, M, R y h.**

La energía mecánica (E_{mec}) de un satélite en órbita es la suma de su energía cinética (E_{c}) y su energía potencial gravitatoria (E_{p}):

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}}.$$

La energía cinética (E_{c}) es:

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}mv^2,$$

donde v es la velocidad orbital del satélite. Para un satélite en órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria para mantener la órbita es proporcionada por la fuerza gravitatoria:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}.$$

Simplificando:

$$v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{R+h}.$$

Entonces, la energía cinética es:

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{GM}{R+h} = \frac{GMm}{2(R+h)}.$$

La energía potencial gravitatoria (E_{p}) es:

$$E_{\text{p}} = -\frac{GMm}{r},$$

donde G es la constante de gravitación universal y r es la distancia desde el centro del planeta hasta el satélite. Dado que el satélite está a una altura h sobre la superficie del planeta de radio R, la distancia r es:

$$r = R + h.$$

Así,

$$E_{\text{mec}} = \frac{GMm}{2(R+h)} - \frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{2(R+h)}.$$

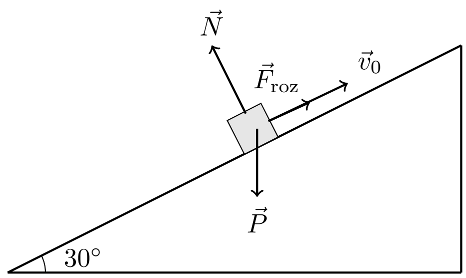
Por lo tanto, la energía mecánica del satélite es $\boldsymbol{E_{\text{mec}} = -\dfrac{GMm}{2(R+h)}}$.

b) Un bloque de 2 kg asciende con una velocidad inicial de $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal hasta detenerse momentáneamente. A continuación, el bloque desciende hasta llegar al punto de partida. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,2. Determine mediante consideraciones energéticas:

i. la altura máxima a la que llega el bloque.

Tenemos que:

* Masa del bloque: $m = 2\,\mathrm{kg}$.
* Velocidad inicial: $v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$.
* Ángulo del plano: $\theta = 30°$.
* Coeficiente de rozamiento: $\mu = 0{,}2$.
* Aceleración debido a la gravedad: $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.



La energía cinética inicial es:

$$E_{\mathrm{c,i}} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{kg}\cdot(8\,\mathrm{m/s})^2 = 64\,\mathrm{J}.$$

La energía potencial en la máxima altura es:

$$E_{\mathrm{p,f}} = mgh.$$

La fuerza de rozamiento (F_r) es:

$$F_\mathrm{r} = \mu\cdot N = \mu\cdot mg\cos\theta = 0{,}2\cdot 2\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\cdot\cos 30° = 3{,}39\,\mathrm{N}.$$

El trabajo realizado por el rozamiento al ascender hasta la altura h es:

$$W_\mathrm{r} = -F_\mathrm{r}\cdot d,$$

donde d es la distancia recorrida por el bloque en el plano inclinado. Relacionamos d con h usando el ángulo θ:

$$h = d\sin\theta \quad\Rightarrow\quad d = \frac{h}{\sin\theta}.$$

Entonces,

$$W_\mathrm{r} = -F_\mathrm{r}\cdot\frac{h}{\sin\theta}.$$

Aplicando el principio de la conservación de la energía mecánica:

$$E_{\mathrm{c,i}} + E_{\mathrm{p,i}} + W_\mathrm{r} = E_{\mathrm{c,f}} + E_{\mathrm{p,f}},$$

donde $E_{\mathrm{p,i}} = 0$ (el bloque parte del suelo) y $E_{\mathrm{c,f}} = 0$ (el bloque se detiene momentáneamente). Así,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - F_\mathrm{r}\cdot\frac{h}{\sin\theta} = mgh.$$

$$64\,\mathrm{J} - 3{,}39\,\mathrm{N}\cdot\frac{h}{0{,}5} = 2\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\cdot h.$$

$$64\,\mathrm{J} - 6{,}78\,\mathrm{N} \cdot h = 19{,}6\,\mathrm{J} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{64}{26{,}38} = 2{,}43\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la altura máxima a la que llega el bloque es 2,43 m.

ii. la velocidad con la que regresa el bloque al punto de partida.

Consideramos el descenso del bloque desde la altura máxima $h = 2{,}43\,\mathrm{m}$ hasta el punto de partida. La energía potencial inicial en la altura máxima es:

$$E_{\mathrm{p,i}} = mgh = 2\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 2{,}43\,\mathrm{m} = 47{,}63\,\mathrm{J}.$$

La energía cinética final al llegar al punto de partida resulta:

$$E_{\mathrm{c,f}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

El trabajo realizado por el rozamiento durante el descenso es:

$$W_{\mathrm{r}} = -F_{\mathrm{r}} \cdot d,$$

donde d es la distancia recorrida en el plano inclinado durante el descenso:

$$d = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{2{,}43\,\mathrm{m}}{0{,}5} = 4{,}86\,\mathrm{m}.$$

Así,

$$W_{\mathrm{r}} = -3{,}39\,\mathrm{N} \cdot 4{,}86\,\mathrm{m} = -16{,}48\,\mathrm{J}.$$

Aplicando el principio de la conservación de la energía mecánica:

$$E_{\mathrm{p,i}} + W_{\mathrm{r}} = E_{\mathrm{c,f}}.$$

$$47{,}63\,\mathrm{J} - 16{,}48\,\mathrm{J} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot v^2.$$

$$31{,}15\,\mathrm{J} = v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{31{,}15} = 5{,}58\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad con la que regresa el bloque al punto de partida es aproximadamente 5,58 m/s.

Pregunta A. Opción 2

a) Dos cuerpos de masas m y $2m$ están separados una distancia d. Razone, con la ayuda de un esquema, si se anula el campo o el potencial gravitatorio en algún punto del segmento que los une.

b) Dos masas iguales de 2 kg están situadas en los puntos A(1,0) m y B(-1,0) m.

i. Calcule la fuerza gravitatoria sobre una tercera masa M de 1 kg situada en el punto C(0,1) m.

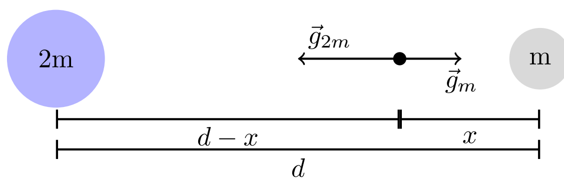
ii. Determine el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando la masa M se desplaza hasta el origen de coordenadas.

Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Solución:

a) Dos cuerpos de masas m y $2m$ están separados una distancia d. Razone, con la ayuda de un esquema, si se anula el campo o el potencial gravitatorio en algún punto del segmento que los une.

Tenemos que:



El *campo gravitatorio* es una magnitud vectorial que depende de la dirección y magnitud de las fuerzas ejercidas por las masas. Por otro lado, el *potencial gravitatorio* es una magnitud escalar que se suma algebraicamente sin considerar la dirección.

Aplicando el *principio de superposición*, el campo gravitatorio total en un punto P a una distancia x de la masa m es:

$$\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_m + \vec{g}_{2m},$$

donde

$$\vec{g}_m = G \cdot \frac{m}{x^2} \cdot \vec{\imath}, \qquad \vec{g}_{2m} = -G \cdot \frac{2m}{(d-x)^2} \cdot \vec{\imath}.$$

Buscamos un punto x donde el campo gravitatorio total se anule:

$$\vec{g}_m + \vec{g}_{2m} = 0.$$

$$G \cdot \frac{m}{x^2} \cdot \vec{\imath} - G \cdot \frac{2m}{(d-x)^2} \cdot \vec{\imath} = 0.$$

$$\frac{m}{x^2} = \frac{2m}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \frac{2}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d-x}{x} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{1+\sqrt{2}}.$$

El potencial gravitatorio total en un punto P es la suma de los potenciales individuales:

$$V_{\text{total}} = V_m + V_{2m},$$

donde

$$V_m = -G \cdot \frac{m}{x}, \qquad V_{2m} = -G \cdot \frac{2m}{d-x}.$$

Como el potencial es una magnitud escalar, nunca se anula en ningún punto del segmento que une las dos masas.

Por lo tanto, el campo gravitatorio se anula para $x = \frac{d}{1+\sqrt{2}}$ y no existe ningún punto en el segmento que une las dos masas donde se anule el potencial gravitatorio.

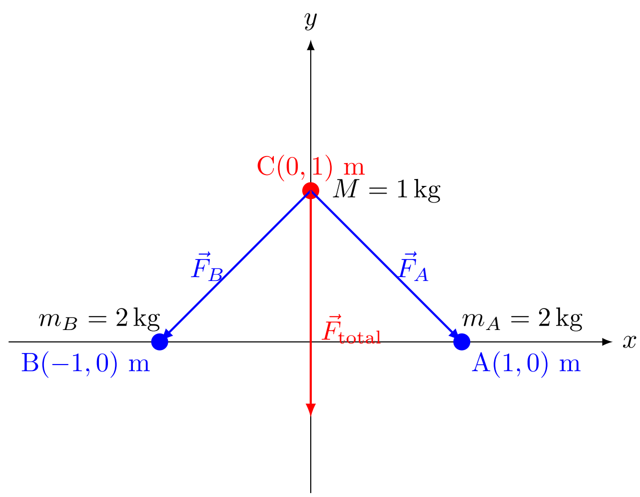
b) **Dos masas iguales de 2 kg están situadas en los puntos A(1,0) m y B(-1,0) m.**

i. **Calcule la fuerza gravitatoria sobre una tercera masa M de 1 kg situada en el punto C(0,1) m.**

Tenemos que:

∗ Masa de cada punto: $m = 2\,\text{kg}$.
∗ Masa de M: $M = 1\,\text{kg}$.
∗ Constante gravitacional: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}$.
∗ Posiciones:

$$A(1,0)\,\text{m}, \quad B(-1,0)\,\text{m}, \quad C(0,1)\,\text{m}.$$



La fuerza gravitatoria de la masa en A sobre M es:

$$\vec{F}_A = -G \cdot \frac{mM}{r_A^2} \cdot \vec{r}_A,$$

donde r_A es la distancia entre A y C, y $\vec{r}_A$ es el vector unitario desde A hacia C:

$$r_A = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,\text{m}, \qquad \vec{r}_A = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_A &= -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 1}{(\sqrt{2})^2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\text{N} \\
&= 4{,}72 \cdot 10^{-11}\vec{\imath} - 4{,}72 \cdot 10^{-11}\vec{\jmath}\,\text{N}.
\end{aligned}$$

La fuerza gravitatoria de la masa en B sobre M es:

$$\vec{F}_B = -G \cdot \frac{mM}{r_B^2} \cdot \vec{r}_B,$$

donde r_B es la distancia entre B y C, y $\vec{r}_B$ es el vector unitario desde B hacia C:

$$r_B = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,\text{m} \qquad \vec{r}_B = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{F}_B &= -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2\cdot 1}{(\sqrt{2})^2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\mathrm{N}\\ &= -4{,}72\cdot 10^{-11}\vec{\imath} - 4{,}72\cdot 10^{-11}\vec{\jmath}\,\mathrm{N}.\end{aligned}$$

La fuerza gravitatoria total sobre M es:

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = 4{,}72\cdot 10^{-11}\vec{\imath} - 4{,}72\cdot 10^{-11}\vec{\jmath} - 4{,}72\cdot 10^{-11}\vec{\imath} - 4{,}72\cdot 10^{-11}\vec{\jmath} = -9{,}44\cdot 10^{-11}\vec{\jmath}\,\mathrm{N}.$$

Por lo tanto, la fuerza gravitatoria sobre la masa M en el punto $C(0,1)$ m es $\vec{F}_{\text{total}} = -9{,}44\cdot 10^{-11}\vec{\jmath}\,\mathrm{N}$.

ii. Determine el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando la masa M se desplaza hasta el origen de coordenadas.

Sabemos que el trabajo viene dado por:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Dado que la fuerza gravitatoria es conservativa, el trabajo realizado depende solo de las posiciones inicial y final:

$$W = E_{p,C} - E_{p,O},$$

donde E_p es la energía potencial gravitatoria:

$$E_p = -G\cdot\frac{mM}{r},$$

con r siendo la distancia entre las masas. Se tiene entonces que

$$E_{p,C} = -G\cdot\frac{m_A M}{r_{AC}} - G\cdot\frac{m_B M}{r_{BC}},$$

donde:

$$\begin{aligned} r_{AC} &= \sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{m},\\ r_{BC} &= \sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

Así,

$$E_{p,C} = -G\cdot\frac{2\cdot 1}{\sqrt{2}} - G\cdot\frac{2\cdot 1}{\sqrt{2}} = -2G\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 2G\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -4G\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4G}{\sqrt{2}} = -1{,}88\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}.$$

Además,

$$E_{p,O} = -G\cdot\frac{m_A M}{r_{AO}} - G\cdot\frac{m_B M}{r_{BO}},$$

donde:

$$\begin{aligned} r_{AO} &= \sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2} = 1\,\mathrm{m},\\ r_{BO} &= \sqrt{(-1-0)^2+(0-0)^2} = 1\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$E_{p,O} = -G\cdot\frac{2\cdot 1}{1} - G\cdot\frac{2\cdot 1}{1} = -4G = -2{,}668\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}.$$

El trabajo realizado es:

$$W = E_{p,C} - E_{p,O} = \left(-1{,}88 \cdot 10^{-10}\right) - \left(-2{,}668 \cdot 10^{-10}\right) = 7{,}8 \cdot 10^{-11}\ \text{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al desplazar la masa M desde el punto $C(0,1)$ m hasta el origen es $7{,}8 \cdot 10^{-11}$ J.

Andalucía, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta A. Opción 1

a) **Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura h con una energía cinética igual a la potencial en dicho punto, tomando como origen de energía potencial el suelo. Explique razonadamente, utilizando consideraciones energéticas:**
   i. **La relación entre la altura inicial y la altura máxima que alcanza el cuerpo.**
   ii. **La relación entre la velocidad inicial y la velocidad con la que llega al suelo.**

b) **Un cuerpo de masa 2 kg desliza por una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento 0,2 con una velocidad inicial de $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Cuando ha recorrido 5 m sobre el plano horizontal, comienza a subir por un plano inclinado sin rozamiento que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Utilizando consideraciones energéticas, determine:**
   i. **La velocidad con la que comienza a subir el cuerpo por el plano inclinado.**
   ii. **La distancia que recorre por el plano inclinado hasta alcanzar la altura máxima.**

Dato: $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Solución:

a) **Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura h con una energía cinética igual a la potencial en dicho punto, tomando como origen de energía potencial el suelo. Explique razonadamente, utilizando consideraciones energéticas:**
   i. **La relación entre la altura inicial y la altura máxima que alcanza el cuerpo.**

En el punto de lanzamiento (A), la energía cinética es igual a la energía potencial:

$$E_c(A) = E_p(A) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh,$$

donde v_0 es la velocidad inicial. Aplicamos la ley de conservación de la energía mecánica teniendo en cuenta que en el punto más alto (B), la velocidad es cero y toda la energía es potencial:

$$E_{\text{mec}}(A) = E_{\text{mec}}(B) \quad \Rightarrow \quad E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) \quad \Rightarrow \quad E_c(A) + E_p(A) = E_p(B).$$

Sustituyendo la relación inicial:

$$2E_p(A) = E_p(B) \quad \Rightarrow \quad 2mgh = mgh_{\text{max}} \quad \Rightarrow \quad h_{\text{max}} = 2h.$$

Por lo tanto, la altura máxima es el doble de la altura inicial.

   ii. **La relación entre la velocidad inicial y la velocidad con la que llega al suelo.**

Aplicamos nuevamente la conservación de la energía mecánica. Al regresar al suelo (C), la energía potencial es cero y toda la energía es cinética:

$$E_{\text{mec}}(A) = E_{\text{mec}}(C) \quad \Rightarrow \quad mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_C^2.$$

Sustituyendo la relación inicial:

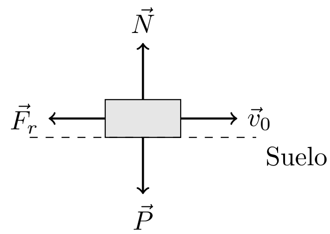
$$2\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \Rightarrow \quad 2v_0^2 = v_C^2 \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{2}v_A.$$

Por lo tanto, la velocidad con la que llega al suelo es $\sqrt{2}v_A$.

b) **Un cuerpo de masa 2 kg desliza por una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento 0,2 con una velocidad inicial de $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Cuando ha recorrido 5 m sobre el plano horizontal, comienza a subir por un plano inclinado sin rozamiento que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Utilizando consideraciones energéticas, determine:**

i. **La velocidad con la que comienza a subir el cuerpo por el plano inclinado.**

Las fuerzas (y velocidad inicial) que actúan en el tramo horizontal son:



Calculamos el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en el tramo horizontal. La fuerza de rozamiento es:

$$F_{\mathrm{roz}} = \mu \cdot N = \mu \cdot P = \mu \cdot mg = 0{,}2 \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 3{,}92\,\mathrm{N}.$$

El trabajo realizado por la rozadura al recorrer $d = 5\,\mathrm{m}$ es:

$$W_{\mathrm{roz}} = F_{\mathrm{roz}} \cdot d \cdot \cos 180^\circ = 3{,}92\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot (-1) = -19{,}6\,\mathrm{J}.$$

Aplicamos la conservación de la energía mecánica considerando el trabajo de la fricción:

$$W_{\mathrm{roz}} = E_{\mathrm{c}}(B) - E_{\mathrm{c}}(A),$$

donde A es el punto incial y B el punto donde comienza el plano inclinado. En el punto A:

$$E_{\mathrm{c}}(A) = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot (6\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 = 36\,\mathrm{J}.$$

En el punto B (inicio del plano inclinado):

$$E_{\mathrm{mec}}(B) = \frac{1}{2} m v_B^2.$$

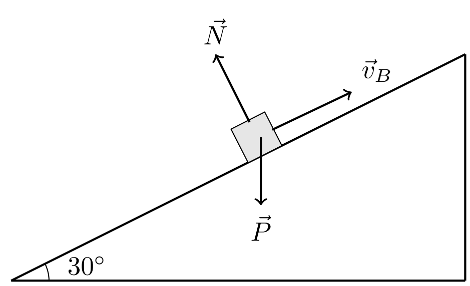
Sustituyendo:

$$W_{\mathrm{roz}} = E_{\mathrm{c}}(B) - E_{\mathrm{c}}(A) \quad \Rightarrow \quad -19{,}6\,\mathrm{J} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot v_B^2 - 36\,\mathrm{J} \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{36 - 19,6} = 4,05\mathrm{m/s}^{-1}.$$

Por lo tanto, la velocidad con la que comienza a subir el cuerpo por el plano inclinado es $4{,}05\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

ii. **La distancia que recorre por el plano inclinado hasta alcanzar la altura máxima.**

En el plano inclinado sin rozamiento, toda la energía cinética inicial se convierte en energía potencial.



Aplicamos la conservación de la energía:

$$E_{\text{mec}}(B) = E_{\text{mec}}(C),$$

donde el punto B es donde comienza el plano inclinado y el punto C es donde se detiene el cuerpo. En el punto B:

$$E_{\text{mec}}(B) = E_{\text{c}}(B) + E_{\text{p}}(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{kg} \cdot (4{,}05\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2 = 16{,}4\,\text{J}.$$

En el punto C (altura máxima):

$$E_{\text{mec}}(C) = E_{\text{c}}(C) + E_{\text{p}}(C) = 0 + mgh_{\text{max}} = mgh_{\text{max}}.$$

Sustituyendo:

$$16{,}4\,\text{J} = 2\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \cdot h_{\text{max}} \quad \Rightarrow \quad h_{\text{max}} = \frac{16{,}4}{19{,}6} = 0{,}8367\,\text{m}.$$

La distancia recorrida por el plano inclinado hasta alcanzar la altura máxima se relaciona con h_{max} mediante:

$$h_{\text{max}} = \Delta s \cdot \sin 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{h_{\text{max}}}{\sin 30^\circ} = \frac{0{,}8367\,\text{m}}{0{,}5} = 1{,}673\,\text{m}.$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por el plano inclinado hasta alcanzar la altura máxima es de 1,673 m.

Pregunta A. Opción 2

a) Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Si en un punto del espacio cerca de dos masas el campo gravitatorio es nulo, también lo será el potencial gravitatorio".

b) Dos masas $m_1 = 10\,\text{kg}$ y $m_2 = 10\,\text{kg}$ se encuentran situadas en los puntos $A(0,0)$ m y $B(0,2)$ m, respectivamente.

i. Dibuje el campo gravitatorio debido a las dos masas en el punto $C(1,1)$ m y determine su valor.

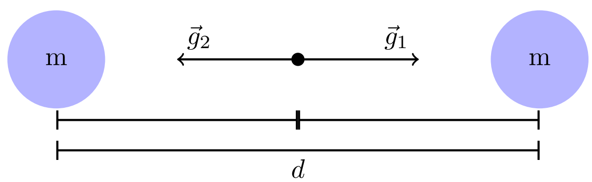
ii. Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando una tercera masa $m_3 = 1\,\text{kg}$ se desplaza desde el punto $D(1,0)$ m hasta el punto $C(1,1)$ m.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}$

Solución:

a) Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Si en un punto del espacio cerca de dos masas el campo gravitatorio es nulo, también lo será el potencial gravitatorio".

La afirmación es falsa. Consideremos dos masas iguales situadas en puntos distintos. En el punto medio entre ellas, el campo gravitatorio resultante es nulo debido a que las contribuciones de ambas masas se cancelan mutuamente:



Sin embargo, el potencial gravitatorio en ese punto no es necesariamente nulo, ya que el potencial es una cantidad escalar y se suma algebraicamente. Por el principio de superposición:

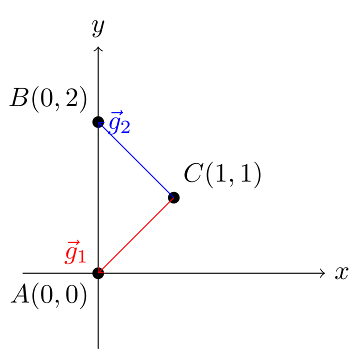
$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2 = -G\frac{m}{d/2} - G\frac{m}{d/2} = -4G\frac{m}{d} \neq 0.$$

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

b) Dos masas $m_1 = 10\,\text{kg}$ y $m_2 = 10\,\text{kg}$ se encuentran situadas en los puntos $A(0,0)$ m y $B(0,2)$ m, respectivamente.

i. Dibuje el campo gravitatorio debido a las dos masas en el punto $C(1,1)$ m y determine su valor.

Observamos gráficamente lo siguiente:



El campo gravitatorio en el punto $C(1,1)$ m debido a cada masa se calcula usando la fórmula:

$$\vec{g} = -G\frac{m}{r^2}\vec{r},$$

donde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ es la constante de gravitación universal, m es la masa, r es la distancia al punto C, y $\vec{r}$ es el vector unitario en la dirección de r.
Para la masa m_1 en $A(0,0)$:

$$r_{AC} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{m},$$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_{AC}^2} \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = -G\frac{10}{2} \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = -\frac{10G}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Para la masa m_2 en $B(0,2)$:

$$r_{BC} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{m},$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_{BC}^2} \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = -G\frac{10}{2} \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = -\frac{10G}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Calculando los componentes:

$$\vec{g}_1 = -\frac{10 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3{,}335 \cdot 10^{-10} \cdot (0{,}7071, 0{,}7071)\,\mathrm{N/kg},$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{10 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -3{,}335 \cdot 10^{-10} \cdot (0{,}7071, -0{,}7071)\,\mathrm{N/kg}.$$

Sumando los campos gravitatorios:

$$\begin{aligned}\vec{g}_{\text{total}} &= \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -3{,}335 \cdot 10^{-10} \cdot (0{,}7071, 0{,}7071) + (-3{,}335 \cdot 10^{-10} \cdot (0{,}7071, -0{,}7071))\,\mathrm{N/kg}\\ &= -3{,}335 \cdot 10^{-10} \cdot (2 \cdot 0{,}7071, 0) = -4{,}721 \cdot 10^{-10}\,\vec{i}\,\mathrm{N/kg}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo gravitatorio total en el punto $C(1,1)\,\mathrm{m}$ es $\vec{g} = -4{,}721 \cdot 10^{-10}\,\vec{i}\,\mathrm{N/kg}$.

ii. Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria cuando una tercera masa $m_3 = 1\,\mathrm{kg}$ se desplaza desde el punto $D(1,0)\,\mathrm{m}$ hasta el punto $C(1,1)\,\mathrm{m}$.

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria se calcula como:

$$W = m_3 \cdot (V_C - V_D),$$

donde V_C y V_D son los potenciales gravitatorios en los puntos C y D, respectivamente.
Calculamos el potencial en $C(1,1)\,\mathrm{m}$:

$$V_C = V_{AC} + V_{BC},$$

$$V_{AC} = -G\frac{m_1}{r_{AC}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = -4{,}721 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg},$$

$$V_{BC} = -G\frac{m_2}{r_{BC}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = -4{,}721 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg}.$$

Entonces,

$$V_C = -4{,}721 \cdot 10^{-10} + (-4{,}721 \cdot 10^{-10}) = -9{,}441 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg}.$$

Calculamos el potencial en $D(1,0)\,\mathrm{m}$:

$$V_D = V_{AD} + V_{BD},$$

$$r_{AD} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1\,\mathrm{m},$$

$$V_{AD} = -G\frac{m_1}{r_{AD}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{1} = -6{,}67 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg},$$
$$r_{BD} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}\,\mathrm{m},$$
$$V_{BD} = -G\frac{m_2}{r_{BD}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} = -2{,}981 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg}.$$

Entonces,

$$V_D = -6{,}67 \cdot 10^{-10} + (-2{,}981 \cdot 10^{-10}) = -9{,}651 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J/kg}.$$

Calculamos el trabajo:

$$W = m_3 \cdot (V_C - V_D) = 1 \cdot (-9{,}441 \cdot 10^{-10} - (-9{,}651 \cdot 10^{-10})) = -2{,}1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es $W = -2{,}1 \cdot 10^{-10}$ J. Este trabajo no es espontáneo y es realizado por una fuerza externa al campo gravitatorio.

Andalucía, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta A. Opción 1

a) **Razone si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si un planeta tiene el doble de masa y la mitad del radio que otro planeta, su velocidad de escape será el doble".**

b) **Conociendo la gravedad y la velocidad de escape en la superficie de Marte, calcule:**

  i. **El radio de Marte.**

  ii. **La masa de Marte.**

Datos: $g_{\text{Marte}} = 3{,}7\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; $v_{\text{escape}} = 5 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

Solución:

a) **Razone si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si un planeta tiene el doble de masa y la mitad del radio que otro planeta, su velocidad de escape será el doble".**

La velocidad de escape se calcula mediante la fórmula:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Si un planeta tiene el doble de masa ($2M$) y la mitad del radio ($\frac{R}{2}$) que otro planeta, su velocidad de escape será:

$$v'_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2G \cdot 2M}{\frac{R}{2}}} = \sqrt{\frac{4GM}{\frac{R}{2}}} = \sqrt{\frac{8GM}{R}} = \sqrt{4 \cdot \frac{2GM}{R}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 2v_{\text{escape}}.$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

b) **Conociendo la gravedad y la velocidad de escape en la superficie de Marte, calcule:**

  i. **El radio de Marte.**

Sabemos que la gravedad en la superficie está dada por:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

La velocidad de escape está dada por:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Para eliminar M, despejamos de la primera ecuación:

$$M = \frac{gR^2}{G}.$$

Insertamos esta expresión en la segunda ecuación:

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2G \cdot \frac{gR^2}{G}}{R}} = \sqrt{2gR}.$$

Despejamos R:

$$R = \frac{v_{\text{escape}}^2}{2g}.$$

Sustituyendo los valores:

$$R = \frac{(5 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2 \cdot 3{,}7\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 3{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, el radio de Marte es $\mathbf{3{,}378 \cdot 10^6}$ m.

ii. La masa de Marte.

Utilizamos nuevamente la fórmula de la gravedad:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Despejamos M:

$$M = \frac{gR^2}{G}.$$

Usando el radio calculado previamente:

$$M = \frac{3{,}7\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (3{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}} = 6{,}33 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto, la masa de Marte es $\mathbf{6{,}33 \cdot 10^{23}}$ kg.

Pregunta A. Opción 2

a) **Discuta razonadamente la veracidad de las siguientes frases:**
   i. **El trabajo realizado por una fuerza conservativa para desplazar un cuerpo es nulo si la trayectoria es cerrada.**
   ii. **En el descenso de un objeto por un plano inclinado con rozamiento, la disminución de su energía potencial se corresponde con el aumento de su energía cinética.**

b) **Un objeto de 2 kg, inicialmente en reposo, asciende por un plano inclinado de 30° respecto a la horizontal debido a la acción de una fuerza de 30 N paralela a dicho plano. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,1. Determine:**
   i. **Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre el objeto y calcule sus módulos.**
   ii. **Mediante consideraciones energéticas, determine la variación de energía cinética, potencial y mecánica cuando el objeto ha ascendido una altura de 1,5 m.**

Dato: $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Solución:

a) **Discuta razonadamente la veracidad de las siguientes frases:**
   i. **El trabajo realizado por una fuerza conservativa para desplazar un cuerpo es nulo si la trayectoria es cerrada.**

Una fuerza conservativa, por definición, tiene un trabajo que depende únicamente de los puntos inicial y final de la trayectoria. Matemáticamente, el trabajo realizado por una fuerza conservativa $\vec{F}$ al desplazar un cuerpo desde el punto A hasta el punto B está dado por:

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B),$$

donde E_p representa la energía potencial asociada a la fuerza $\vec{F}$. Si la trayectoria es cerrada, es decir, el punto final B coincide con el punto inicial A, entonces:

$$W_{A\to A} = E_p(A) - E_p(A) = 0.$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

   ii. **En el descenso de un objeto por un plano inclinado con rozamiento, la disminución de su energía potencial se corresponde con el aumento de su energía cinética.**

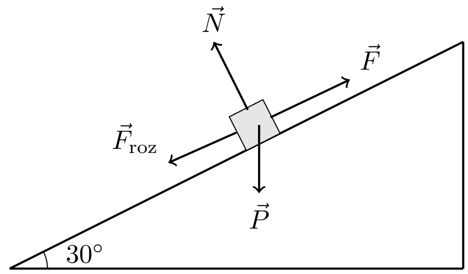
Consideremos un objeto descendiendo por un plano inclinado con rozamiento. La energía potencial disminuye debido a la altura perdida en el plano, mientras que la energía cinética tiende a aumentar por el movimiento. Sin embargo, la presencia del rozamiento implica que parte de la energía mecánica se disipa en forma de calor, lo que significa que no toda la disminución de la energía potencial se convierte en energía cinética.

Por lo tanto, la afirmación es falsa, ya que no se considera la energía perdida por rozamiento.

b) **Un objeto de 2 kg, inicialmente en reposo, asciende por un plano inclinado de 30° respecto a la horizontal debido a la acción de una fuerza de 30 N paralela a dicho plano. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,1. Determine:**
   i. **Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre el objeto y calcule sus módulos.**

Las fuerzas que actúan sobre el objeto son:
1. Peso ($\vec{P}$): Actúa verticalmente hacia abajo y tiene módulo $P = m \cdot g$.
2. Fuerza normal ($\vec{N}$): Perpendicular al plano inclinado.

3. Fuerza de rozamiento ($\vec{F}_{\text{roz}}$): Paralela al plano inclinado y opuesta al movimiento.
4. Fuerza aplicada ($\vec{F}$): Paralela al plano inclinado y dirigida hacia arriba.



Calculamos los módulos de las fuerzas:

$$P = m \cdot g = 2\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m}\,\text{s}^{-2} = 19{,}6\,\text{N},$$

$$N = P \cdot \cos 30^\circ = 19{,}6\,\text{N} \cdot \cos 30^\circ = 16{,}97\,\text{N},$$

$$F_{\text{roz}} = \mu \cdot N = 0{,}1 \cdot 16{,}97\,\text{N} = 1{,}697\,\text{N},$$

Por lo tanto, los módulos de las fuerzas son:

$$\boldsymbol{P = 19{,}6\,\text{N}},$$
$$\boldsymbol{N = 16{,}97\,\text{N}},$$
$$\boldsymbol{F_{\text{roz}} = 1{,}697\,\text{N}},$$
$$\boldsymbol{F = 30\,\text{N}}.$$

ii. Mediante consideraciones energéticas, determine la variación de energía cinética, potencial y mecánica cuando el objeto ha ascendido una altura de 1,5 m.

Calculamos la variación de energía potencial:

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h = 2\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \cdot 1{,}5\,\text{m} = 29{,}4\,\text{J}.$$

Calculamos la distancia recorrida en el plano inclinado:

$$h = d \cdot \sin 30^\circ \quad \Rightarrow \quad d = \frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{1{,}5\,\text{m}}{0{,}5} = 3\,\text{m}.$$

La fuerza neta es:

$$F_{\text{total}} = F - F_{\text{roz}} - P_x = 30\,\text{N} - 1,697\,\text{N} - 9,8\,\text{N} = 18,503\,\text{N}.$$

Por el Teorema de las Fuerzas Vivas, se tiene que:

$$W_{F_{\text{total}}} = \Delta E_c \quad \Rightarrow \quad \Delta E_c = F_{\text{total}} \cdot d = 18,503\,\text{N} \cdot 3\,\text{m} = 55,509\,\text{J}.$$

La variación de la energía mecánica es:

$$\Delta E_{\text{mecánica}} = 29{,}4\,\text{J} + 55,509\,\text{J} = 84{,}909\,\text{J}.$$

Por lo tanto, las variaciones de energía son:

$$\boldsymbol{\Delta E_{\text{potencial}} = 29{,}4\,\text{J}},$$
$$\boldsymbol{\Delta E_{\text{cinética}} = 55,509\,\text{J}},$$
$$\boldsymbol{\Delta E_{\text{mecánica}} = 84{,}909\,\text{J}}.$$

Andalucía, Junio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 1

a) **i. ¿Puede ser nulo el campo gravitatorio en alguna región del espacio cercano a dos partículas sabiendo que la masa de una de ellas es el doble que la de la otra?**
ii. ¿Y el potencial gravitatorio?
Razone las respuestas apoyándose en un esquema.

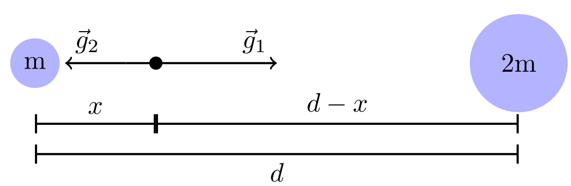
b) **Dos masas de 2 kg y 5 kg se encuentran situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente. Calcule:**
i. El potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.
ii. El trabajo necesario para desplazar una masa de 10 kg desde el origen de coordenadas al punto (4,3) m y comente el resultado obtenido.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

Solución:

a) **i. ¿Puede ser nulo el campo gravitatorio en alguna región del espacio cercano a dos partículas sabiendo que la masa de una de ellas es el doble que la de la otra?**

El campo gravitatorio es una magnitud vectorial. Consideremos dos masas, m y $2m$, separadas por una distancia d:



Existe un punto en el espacio entre ellas donde los campos gravitatorios se anulan mutuamente. Aplicando el principio de superposición:

$$G \cdot \frac{m}{x^2} = G \cdot \frac{2m}{(d-x)^2}.$$

Cancelando términos comunes y resolviendo para x:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{2}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad (d-x)^2 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad d - x = \sqrt{2}x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{1+\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, el campo gravitatorio puede ser nulo en una región del espacio cercano a las dos partículas.

ii. ¿Y el potencial gravitatorio?

El potencial gravitatorio es una magnitud escalar. Para dos masas, m y $2m$, el potencial total en cualquier punto es la suma algebraica de los potenciales individuales:

$$V = -G \cdot \frac{m}{x} - G \cdot \frac{2m}{d-x}.$$

Como ambos términos son negativos, nunca se anulan entre sí. Entonces, el potencial gravitatorio nunca es nulo en ninguna región del espacio.

Por lo tanto, el potencial gravitatorio no puede ser nulo en ninguna región del espacio cercano a las dos partículas.

b) **Dos masas de 2 kg y 5 kg se encuentran situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente. Calcule:**

i. **El potencial gravitatorio en el origen de coordenadas.**

Aplicamos el principio de superposición para calcular el potencial gravitatorio en el origen:

$$V = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2},$$

donde

$$r_1 = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3\,\text{m} \quad \text{y} \quad r_2 = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4\,\text{m}.$$

Entonces,

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{3} - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{4} = -1{,}28 \cdot 10^{-10}\,\text{J/kg}.$$

Por lo tanto, el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas es $\boldsymbol{V \approx -1{,}28 \cdot 10^{-10}}$ J/kg.

ii. **El trabajo necesario para desplazar una masa de 10 kg desde el origen de coordenadas al punto (4,3) m y comente el resultado obtenido.**

Como el campo gravitatorio es conservativo, el trabajo realizado es igual a la variación de la energía potencial:

$$W = -\Delta E_\text{p} = -m \cdot (V_f - V_i).$$

Calculamos el potencial en el punto final $(4, 3)$:

$$V_f = -G \cdot \frac{m_1}{r_1'} - G \cdot \frac{m_2}{r_2'},$$

donde

$$r_1' = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4\,\text{m} \quad \text{y} \quad r_2' = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3\,\text{m}.$$

Entonces,

$$V_f = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{4} - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{3} = -1{,}45 \cdot 10^{-10}\,\text{J/kg}.$$

El potencial inicial en el origen es $V_i = -1{,}28 \cdot 10^{-10}$ J/kg. Así,

$$W = -10 \cdot (-1{,}45 \cdot 10^{-10} - (-1{,}28 \cdot 10^{-10})) \cdot 10\,\text{kg} = 1{,}7 \cdot 10^{-10}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo necesario es $\boldsymbol{W = 1{,}7 \cdot 10^{-10}}$ J. El trabajo es positivo, lo que indica que las fuerzas del campo gravitatorio realizan el trabajo al mover la masa desde un punto de mayor potencial hacia uno de menor potencial.

Ejercicio 5

a) **¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética es igual a la disminución de energía potencial? Justifique la respuesta.**

b) **Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m s^{-1}. El coeficiente de rozamiento es 0,2.**

   i. **Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano.**

   ii. **Determine, mediante consideraciones energéticas la altura máxima que alcanza el cuerpo.**

   iii. **Determine, mediante consideraciones energéticas la velocidad con la que vuelve al punto de partida.**

Dato: $g = 9{,}8\,\mathrm{m\ s^{-2}}$

Solución:

a) **¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética es igual a la disminución de energía potencial? Justifique la respuesta.**

El Teorema del Trabajo y la Energía Cinética establece que el trabajo de todas las fuerzas sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética:

$$W_{\text{Total}} = \Delta E_{\text{c}}$$

Además, el trabajo de una fuerza conservativa está relacionado con la variación de la energía potencial:

$$W_{\text{conservativa}} = -\Delta E_{\text{p}}.$$

Si actúan fuerzas conservativas y no conservativas, podemos expresar:

$$W_{\text{Total}} = W_{\text{conservativa}} + W_{\text{no conservativa}} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\text{c}} = -\Delta E_{\text{p}} + W_{\text{no conservativa}}.$$

Si $W_{\text{no conservativa}} = 0$, entonces

$$\Delta E_{\text{c}} = -\Delta E_{\text{p}}.$$

En este caso, el aumento de energía cinética coincide con la disminución de energía potencial. Sin embargo, si $W_{\text{no conservativa}} \neq 0$, entonces la relación $\Delta E_{\text{c}} = -\Delta E_{\text{p}}$ no se cumple.

Por lo tanto, el aumento de energía cinética es igual a la disminución de energía potencial sólo cuando no actúan fuerzas no conservativas.

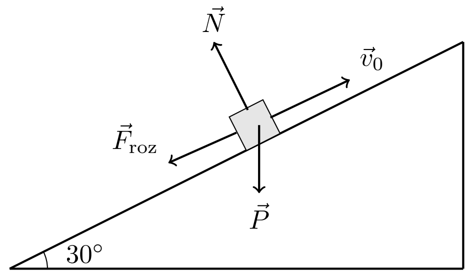
b) **Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m s^{-1}. El coeficiente de rozamiento es 0,2.**

   i. **Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano.**

   Los esquemas de las fuerzas (y velocidad inicial) son:

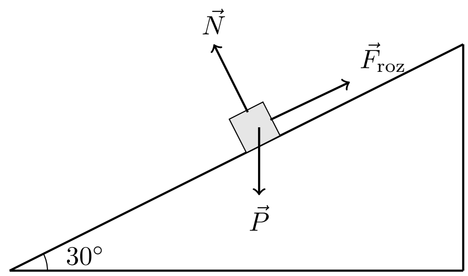
   <u>Cuando sube:</u>

   * *Peso (P)*: Actúa verticalmente hacia abajo.
   * *Fuerza normal ($\vec{N}$)*: Perpendicular al plano inclinado.
   * *Fuerza de rozamiento ($\vec{F}_{roz}$)*: Opuesta al movimiento, dirigida hacia abajo por el plano.
   * *Velocidad inicial ($\vec{v}_0$)*: Dirección hacia arriba por el plano.



Cuando baja:

* *Peso (P)*: Actúa verticalmente hacia abajo.
* *Fuerza normal ($\vec{N}$)*: Perpendicular al plano inclinado.
* *Fuerza de rozamiento ($\vec{F}_{roz}$)*: Opuesta al movimiento, dirigida hacia arriba por el plano.



Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo varían dependiendo de la dirección del movimiento.

ii. Determine, mediante consideraciones energéticas la altura máxima que alcanza el cuerpo.

Aplicamos el principio de conservación de la energía considerando el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (rozamiento):

$$\Delta E_{\text{c}} + \Delta E_{\text{p}} = W_{\text{no conservativa}}.$$

En la subida, la energía cinética disminuye y la energía potencial aumenta. El trabajo de la fuerza de rozamiento es negativo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - F_{\text{roz}}d = mgh,$$

donde

$$F_{\text{roz}} = \mu \cdot N = \mu \cdot mg\cos\theta \quad \text{y} \quad d = \frac{h}{\sin\theta}.$$

Reemplazando:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \mu mg\cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta}.$$

Factorizando mh:

$$\frac{1}{2}v_0^2 = gh\left(1 + \mu \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Resolviendo para h:

$$h = \frac{\frac{1}{2}v_0^2}{g\,(1 + \mu\cot\theta)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 5^2}{9{,}8\cdot(1 + 0{,}2\cdot\cot 30^\circ)} = 0{,}95\,\text{m}.$$

Por lo tanto, la altura máxima que alcanza el cuerpo es $h = 0{,}95$ m.

iii. Determine, mediante consideraciones energéticas la velocidad con la que vuelve al punto de partida.

Cuando el cuerpo desciende, recupera la energía potencial y debe vencer nuevamente el trabajo de rozamiento. Aplicamos la conservación de la energía:

$$\Delta E_{\mathrm{c}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = W_{\text{no conservativa}}.$$

En la bajada, la energía potencial disminuye y la energía cinética aumenta. El trabajo de la fuerza de rozamiento es negativo:

$$mgh - F_{\mathrm{roz}} d = \frac{1}{2} m v_{\text{final}}^2.$$

Reemplazando F_{roz} y d como en la parte anterior:

$$9,8 \cdot 0,95 - 0,2 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,95 = \frac{1}{2} v_{\text{final}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{final}} = \sqrt{12{,}16} = 3{,}49\,\mathrm{m\ s^{-1}}.$$

Por lo tanto, la velocidad con la que vuelve al punto de partida es $v = 3{,}49$ m s^{-1}.

Andalucía, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 1

a) **Defina el concepto de energía mecánica de una partícula y explique cómo varía si sobre ella actúa una fuerza:**
   i. **Conservativa.**
   ii. **No conservativa.**

b) **Un bloque de 5 kg de masa desliza, partiendo del reposo, por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal desde una altura de 10 m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es de 0,2.**
   i. **Represente en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque durante la bajada.**
   ii. **Determine el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en ese desplazamiento.**
   iii. **Calcule mediante consideraciones energéticas la velocidad con la que llega a la base del plano inclinado.**

Dato: $\boldsymbol{g = 9{,}8\,\mathrm{m\ s^{-2}}}$

Solución:

a) **Defina el concepto de energía mecánica de una partícula y explique cómo varía si sobre ella actúa una fuerza:**
   i. **Conservativa.**

La energía mecánica de una partícula es la suma de su energía cinética (E_c) y su energía potencial (E_p):

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}}.$$

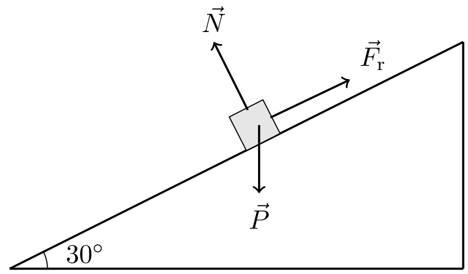
Cuando actúa una fuerza conservativa sobre la partícula, la energía mecánica se conserva. Esto significa que aunque la energía cinética y la energía potencial puedan intercambiarse, la suma total permanece constante. Un ejemplo de fuerza conservativa es la fuerza de la gravedad. En ausencia de rozamiento, al lanzar un objeto hacia arriba, su energía cinética disminuye mientras que su energía potencial aumenta, manteniendo constante la energía mecánica total.

   ii. **No conservativa.**

Si actúa una fuerza no conservativa, como la fuerza de rozamiento, la energía mecánica de la partícula disminuye progresivamente. Esto se debe a que las fuerzas no conservativas realizan trabajo que transforma parte de la energía mecánica en otras formas de energía, como el calor, lo que resulta en una pérdida de energía mecánica. Por ejemplo, al deslizar un objeto sobre una superficie rugosa, la energía mecánica se va disipando hasta que el objeto se detiene.

b) **Un bloque de 5 kg de masa desliza, partiendo del reposo, por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal desde una altura de 10 m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es de 0,2.**
   i. **Represente en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque durante la bajada.**

A continuación se presenta un esquema de las fuerzas que actúan sobre el bloque mientras desciende por el plano inclinado:



Descripción de las fuerzas:

* Peso ($\vec{P}$): Fuerza gravitatoria que actúa verticalmente hacia abajo.
* Fuerza Normal ($\vec{N}$): Fuerza perpendicular al plano inclinado que ejerce el plano sobre el bloque.
* Fuerza de Rozamiento ($\vec{F_r}$): Fuerza que actúa en sentido opuesto al movimiento, paralela al plano inclinado.

ii. Determine el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en ese desplazamiento.

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento se calcula mediante la fórmula:

$$W_r = \vec{F_r} \cdot d \cdot \cos\theta,$$

donde:

* $\vec{F_r}$ es la magnitud de la fuerza de rozamiento,
* d es el desplazamiento a lo largo del plano inclinado,
* θ es el ángulo entre la fuerza de rozamiento y el desplazamiento.

Primero, determinamos el desplazamiento d. Dado que el bloque desciende desde una altura $h = 10\,\mathrm{m}$ por un plano inclinado de ángulo 30°, el desplazamiento se calcula como:

$$d = \frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{10\,\mathrm{m}}{0{,}5} = 20\,\mathrm{m}.$$

La fuerza normal N está dada por:

$$N = m \cdot g \cdot \cos 30^\circ = 5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot \cos 30^\circ = 42{,}49\,\mathrm{N}.$$

La fuerza de rozamiento F_r es:

$$F_r = \mu \cdot N = 0{,}2 \cdot 42{,}49\,\mathrm{N} = 8{,}498\,\mathrm{N}.$$

El ángulo θ entre la fuerza de rozamiento y el desplazamiento es 180°, ya que actúan en sentidos opuestos. Por lo tanto:

$$W_r = 8{,}498\,\mathrm{N} \cdot 20\,\mathrm{m} \cdot \cos 180^\circ = 8{,}498 \cdot 20 \cdot (-1) = -169{,}96\,\mathrm{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es $\boldsymbol{W_r = -169{,}96\,\mathrm{J}}$.

iii. Calcule mediante consideraciones energéticas la velocidad con la que llega a la base del plano inclinado.

Aplicamos el principio de conservación de la energía, considerando el trabajo realizado por fuerzas no conservativas:

$$E_{\mathrm{m\ inicial}} + W_{\mathrm{nc}} = E_{\mathrm{m\ final}},$$

donde:

* $E_{\mathrm{m\ inicial}} = m \cdot g \cdot h$ es la energía potencial inicial,

* $W_{\text{nc}} = W_r$ es el trabajo realizado por fuerzas no conservativas (rozamiento),
* $E_{\text{m final}} = \frac{1}{2}m \cdot v^2$ es la energía cinética final.

Reorganizando la ecuación:

$$m \cdot g \cdot h + W_r = \frac{1}{2}m \cdot v^2.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$5\,\text{kg}\cdot 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 10\,\text{m} + (-169{,}96\,\text{J}) = \frac{1}{2}\cdot 5\,\text{kg}\cdot v^2 \quad\Rightarrow\quad 320{,}04\,\text{J} = \frac{1}{2}\cdot 5\,\text{kg}\cdot v^2 \quad\Rightarrow\quad 320{,}04\,\text{J} = 2{,}5\,\text{kg}\cdot v^2.$$

Despejamos v:

$$v^2 = \frac{320{,}04\,\text{J}}{2{,}5\,\text{kg}} = 128{,}016\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{128{,}016} = 11{,}32\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Por lo tanto, la velocidad con la que el bloque llega a la base del plano inclinado es $\boldsymbol{v = 11{,}32\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Ejercicio 5

a) **Dos satélites describen órbitas circulares alrededor de un mismo planeta de masa M y radio R. El primero orbita con radio $4R$ y el segundo $9R$.**
   i. **Deduzca la expresión de la velocidad orbital.**
   ii. **Determine la relación entre las velocidades orbitales de ambos satélites.**

b) **Un satélite de 500 kg de masa orbita en torno a la Tierra a una velocidad de 6300 m s^{-1}. Calcule:**
   i. **El radio de la órbita del satélite.**
   ii. **El peso del satélite en la órbita.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

Solución:

a) **Dos satélites describen órbitas circulares alrededor de un mismo planeta de masa M y radio R. El primero orbita con radio $4R$ y el segundo $9R$.**
   i. **Deduzca la expresión de la velocidad orbital.**

Para deducir la expresión de la velocidad orbital de un satélite que describe una órbita circular alrededor de un planeta, aplicamos la segunda ley de Newton en su forma de equilibrio de fuerzas centrípeta y gravitatoria:

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{gravitatoria}}.$$

La fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en órbita está dada por:

$$F_{\text{centrípeta}} = \frac{mv^2}{r},$$

donde m es la masa del satélite, v es la velocidad orbital y r es el radio de la órbita. a fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite es:

$$F_{\text{gravitatoria}} = \frac{GMm}{r^2},$$

donde G es la constante de gravitación universal y M es la masa del planeta. Igualando ambas fuerzas:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}.$$

Cancelamos m y multiplicamos ambos lados por r:

$$v^2 = \frac{GM}{r}.$$

Finalmente, despejamos la velocidad orbital v:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Por lo tanto, la solución es $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

   ii. **Determine la relación entre las velocidades orbitales de ambos satélites.**

Denotemos por v_1 y v_2 las velocidades orbitales de los satélites que orbitan a radios $r_1 = 4R$ y $r_2 = 9R$ respectivamente. Según la expresión deducida anteriormente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \sqrt{\frac{GM}{4R}} \quad \text{y} \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = \sqrt{\frac{GM}{9R}}.$$

Queremos encontrar la relación v_1/v_2:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{4R}}}{\sqrt{\frac{GM}{9R}}} = \sqrt{\frac{9R}{4R}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital del primer satélite es $\frac{3}{2}$ veces la del segundo satélite, es decir, $v_1 = \frac{3}{2}v_2$.

b) **Un satélite de 500 kg de masa orbita en torno a la Tierra a una velocidad de 6300 m s^{-1}. Calcule:**

i. **El radio de la órbita del satélite.**

Utilizamos la expresión de la velocidad orbital deducida anteriormente:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}},$$

donde $v = 6300\,\text{m s}^{-1}$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\text{kg}^{-2}$ y $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$. Despejamos r:

$$v^2 = \frac{GM_T}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{GM_T}{v^2}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(6300\,\text{m s}^{-1})^2} = 1{,}005 \cdot 10^7\,\text{m}.$$

Por lo tanto, el radio de la órbita del satélite es $r = 1{,}005 \cdot 10^7$ m.

ii. **El peso del satélite en la órbita.**

El peso de un objeto en la órbita está dado por la fuerza gravitatoria que actúa sobre él:

$$F = \frac{GM_T m}{r^2},$$

donde $m = 500\,\text{kg}$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\text{kg}^{-2}$, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ y $r = 1{,}006 \cdot 10^7\,\text{m}$ (calculado anteriormente). Sustituyendo los valores:

$$F = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{(1{,}006 \cdot 10^7)^2} = 1{,}97 \cdot 10^3\,\text{N}.$$

Por lo tanto, el peso del satélite en la órbita es $F = 1{,}97 \cdot 10^3$ N.

Comunidad Valenciana, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 1

Define la velocidad de escape de un planeta y deduce su expresión. ¿Cuánto cambia dicha velocidad si se duplica la masa del cuerpo que escapa? Justifica la respuesta.

Solución:

La velocidad de escape de un planeta es la velocidad mínima que debe alcanzar un objeto para escapar de la influencia gravitatoria del planeta sin necesidad de propulsión adicional. Es la velocidad necesaria para que el objeto alcance una energía cinética igual a la energía potencial gravitatoria negativa en la superficie del planeta.

Consideremos un objeto de masa m en la superficie de un planeta de masa M y radio R. La energía potencial gravitatoria E_p del objeto respecto al centro del planeta es:

$$E_p = -\frac{GMm}{R}.$$

La energía cinética E_c necesaria para escapar es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2.$$

Para que el objeto escape, la energía cinética debe igualar la magnitud de la energía potencial:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 = \frac{GMm}{R}.$$

Simplificando y resolviendo para v_{esc}:

$$v_{\text{esc}}^2 = \frac{2GM}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Por lo tanto, la expresión de la velocidad de escape es:

$$\boldsymbol{v_{\textbf{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.}$$

Impacto de Duplicar la Masa del Cuerpo que Escapa:

Es importante notar que la expresión de la velocidad de escape $v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ no depende de la masa m del cuerpo que intenta escapar. La velocidad de escape depende únicamente de la masa M y el radio R del cuerpo del cual se escapa.

Por lo tanto, si se duplica la masa del cuerpo que escapa, la velocidad de escape del planeta no cambia; permanece igual.

Cuestión 2

Un satélite artificial se encuentra a una altura de 500 km sobre la superficie de un planeta. El campo gravitatorio en la superficie del planeta es de 8 m/s^2, ¿cuál es la aceleración de la gravedad a la altura a la que se encuentra el satélite artificial? ¿A qué altura sobre la superficie del planeta el valor de la aceleración de la gravedad se reduce a la mitad del valor en su superficie?

Dato: radio del planeta, $R = 5000$ km

Solución:

Cálculo de la Aceleración de la Gravedad a una Altura de 500 km:

La aceleración de la gravedad a una altura h sobre la superficie de un planeta está dada por la ley de gravitación universal:

$$g(h) = g \cdot \left(\frac{R}{R+h}\right)^2,$$

donde:

- $g = 8\,\text{m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta,
- $R = 5000\,\text{km} = 5{,}000{,}000\,\text{m}$ es el radio del planeta,
- $h = 500\,\text{km} = 500{,}000\,\text{m}$ es la altura del satélite sobre la superficie.

Sustituyendo los valores:

$$g(500\,\text{km}) = 8 \cdot \left(\frac{5{,}000{,}000}{5{,}000{,}000 + 500{,}000}\right)^2 = 8 \cdot \left(\frac{5{,}000{,}000}{5{,}500{,}000}\right)^2 = 6{,}6\,\text{m/s}^2.$$

Por lo tanto, la aceleración de la gravedad a una altura de 500 km es 6,6 m/s^2.

Cálculo de la Altura para Reducir la Gravedad a la Mitad:

Queremos encontrar la altura h' tal que:

$$g(h') = \frac{g}{2}.$$

Usando la fórmula de la aceleración de la gravedad a una altura h':

$$\frac{g}{2} = g \cdot \left(\frac{R}{R+h'}\right)^2.$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{R}{R+h'}\right)^2.$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R}{R+h'}.$$

Despejando h':

$$R + h' = R \cdot \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad h' = R \cdot (\sqrt{2} - 1).$$

Sustituyendo $R = 5000\,\text{km}$:

$$h' = 5000 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2071\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la altura sobre la superficie del planeta donde la aceleración de la gravedad se reduce a la mitad es 2071 km.

Comunidad Valenciana, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 1

La tercera ley de Kepler establece la relación entre el radio orbital r de un planeta y su periodo T. Si la órbita alrededor del Sol se considera circular, esta relación viene dada por $T^2 = Cr^3$, donde C es una constante. Deduce razonadamente esta relación, explicando en qué principio o ley física te basas y escribe la expresión de C en función de otras magnitudes. ¿Depende el periodo de la masa del planeta? Justifica la respuesta.

Solución:

Para deducir la relación $T^2 = Cr^3$, nos basamos en la Ley de Gravitación Universal de Newton y en la dinámica del movimiento circular uniforme. La fuerza gravitatoria entre el Sol (masa M) y un planeta (masa m) es:

$$F_{\text{grav}} = G\frac{M \cdot m}{r^2}.$$

La fuerza centrípeta necesaria para que el planeta describa una órbita circular de radio r es:

$$F_{\text{cent}} = m\frac{v^2}{r}.$$

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta:

$$F_{\text{grav}} = F_{\text{cent}} \quad \Rightarrow \quad G\frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Simplificamos m en ambos lados:

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}.$$

Multiplicamos ambos lados por r:

$$G\frac{M}{r} = v^2.$$

La velocidad orbital v se relaciona con el período T:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

$$G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad GMT^2 = 4\pi^2 r^3 \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3.$$

Entonces, la constante C es:

$$C = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Observamos que la masa del planeta m no aparece en la expresión final de T^2. Por lo tanto, el período T **no depende** de la masa del planeta, sino únicamente de la masa del Sol M y del radio orbital r.

Por lo tanto, la solución es $C = \frac{4\pi^2}{GM}$ y el período T no depende de la masa del planeta.

Problema 1

Un satélite de masa m se mueve con velocidad $v = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$ en una órbita circular de radio $r = 4 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ alrededor de un planeta de masa M. La energía cinética del satélite es $E_c = 2 \cdot 10^{18}\,\mathrm{J}$. Calcula:

a) **Las masas M del planeta y m del satélite.**
b) **La energía potencial y la energía mecánica del satélite en su órbita. Calcula también la energía mínima que será necesario aportar para que se aleje indefinidamente del planeta desde la órbita en que se encuentra.**

Dato: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2/kg^2}$

Solución:

a) **Las masas M del planeta y m del satélite.**

La energía cinética del satélite es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Despejamos m:

$$m = \frac{2E_c}{v^2}.$$

Sustituimos los valores dados:

$$m = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{18}\,\mathrm{J}}{(5 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s})^2} = 1,6 \cdot 10^7\,\mathrm{kg}.$$

En una órbita circular, la fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Simplificamos m y r:

$$\frac{GM}{r} = v^2.$$

Despejamos M:

$$M = \frac{v^2 r}{G}.$$

Sustituimos los valores:

$$M = \frac{(5 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s})^2 \cdot 4 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2/kg^2}} = 1,49925 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto, la masa del satélite es $m = 1,6 \cdot 10^7\,\mathrm{kg}$ y la masa del planeta es $M = 1,5 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

b) **La energía potencial y la energía mecánica del satélite en su órbita. Calcula también la energía mínima que será necesario aportar para que se aleje indefinidamente del planeta desde la órbita en que se encuentra.**

La energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{GMm}{r}.$$

Sustituimos los valores:

$$E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2/kg^2} \cdot 1,5 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot 1,6 \cdot 10^7\,\mathrm{kg}}{4 \cdot 10^8\,\mathrm{m}} = -4,002 \cdot 10^{18}\,\mathrm{J}.$$

La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la potencial:

$$E_{\text{mec}} = E_c + E_p = 2 \cdot 10^{18}\,\text{J} - 4,002 \cdot 10^{18}\,\text{J} = -2,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}.$$

Para que el satélite se aleje indefinidamente, su energía mecánica debe ser al menos cero. Por lo tanto, debemos aportar una energía adicional igual en magnitud a la energía mecánica negativa actual:

$$E_{\text{adicional}} = -E_{\text{mec}} = 2,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, la energía potencial es $E_p = -4,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}$, la energía mecánica es $E_{\text{mec}} = -2,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}$, y se necesita aportar una energía mínima de $2,002 \cdot 10^{18}\,\text{J}$ para que el satélite escape del planeta.

Comunidad Valenciana, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 1

Deduce razonadamente la expresión del periodo de un planeta en una órbita circular alrededor del Sol, en función del radio de la órbita y de la masa del Sol. Suponiendo que las órbitas de la Tierra y Urano son circulares, de radios $r_T = 1,5 \cdot 10^{11}$ m y $r_U = 2,9 \cdot 10^{12}$ m respectivamente, calcula el periodo orbital de Urano en años terrestres. Utiliza exclusivamente los datos del enunciado.

Solución:

Para deducir la relación entre el periodo orbital T de un planeta y el radio de su órbita r, consideramos que el movimiento es circular uniforme. Según el segundo principio de la dinámica de Newton, la fuerza gravitatoria F_g que actúa sobre el planeta es igual a la fuerza centrípeta F_c necesaria para mantener el movimiento circular:

$$F_g = F_c.$$

La fuerza gravitatoria está dada por:

$$F_g = \frac{G \cdot M_S \cdot M_P}{r^2},$$

y la fuerza centrípeta por:

$$F_c = \frac{M_P \cdot v^2}{r},$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal,
- M_S es la masa del Sol,
- M_P es la masa del planeta,
- v es la velocidad orbital del planeta.

Igualando las dos expresiones:

$$\frac{G \cdot M_S \cdot M_P}{r^2} = \frac{M_P \cdot v^2}{r}$$

Simplificando M_P y multiplicando ambos lados por r:

$$\frac{G \cdot M_S}{r} = v^2.$$

La velocidad orbital v está relacionada con el periodo T mediante:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Sustituyendo v en la ecuación anterior:

$$\frac{G \cdot M_S}{r} = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)^2.$$

Desarrollando la expresión:

$$\frac{G \cdot M_S}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}.$$

Despejando T^2:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_S}.$$

Entonces, la expresión del periodo orbital es

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_S}}.$$

Sin embargo, podemos relacionar el periodo de Urano T_U con el de la Tierra T_T usando las proporciones de sus radios (dividiendo sus respectivas expresiones para el periodo y simplificando):

$$\frac{T_U^2}{T_T^2} = \frac{r_U^3}{r_T^3}$$

Dado que el periodo de la Tierra T_T es 1 año, se simplifica a:

$$T_U = \sqrt{\frac{r_U^3}{r_T^3}}.$$

Sustituyendo los valores dados:

$$T_U = \sqrt{\frac{(2,9 \cdot 10^{12}\ \text{m})^3}{(1,5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3}} = 85\ \text{años}.$$

Por lo tanto, la expresión del periodo orbital es

$$\boldsymbol{T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_S}}},$$

y el periodo orbital de Urano es aproximadamente 85 años terrestres.

Problema 1

El satélite Sentinel 1 se utiliza para la monitorización del suelo terrestre por teledetección. Tiene una masa $m = 2200$ kg y completa 14,5 órbitas circulares alrededor de la Tierra cada día.

a) **Deduce la relación entre el radio de la órbita, la masa de la Tierra y la velocidad angular del Sentinel 1. Calcula la altura a la que se encuentra orbitando.**
b) **Calcula la velocidad orbital, la energía cinética y la energía mecánica del Sentinel 1.**

Dato: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²; masa de la Tierra, $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra, $R = 6370$ km.

Solución:

a) **Deduce la relación entre el radio de la órbita, la masa de la Tierra y la velocidad angular del Sentinel 1. Calcula la altura a la que se encuentra orbitando.**

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en órbita circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r,$$

donde:
- G es la constante de gravitación universal,
- M es la masa de la Tierra,
- m es la masa del satélite,
- r es el radio de la órbita,
- ω es la velocidad angular del satélite.

Simplificando la masa m:

$$\frac{GM}{r^2} = \omega^2 r.$$

Reordenando para obtener la relación entre r, M y ω:

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}.$$

El satélite completa $n = 14{,}5$ órbitas al día. El periodo orbital (T) es:

$$T = \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Número de órbitas}} = \frac{24 \cdot 3600 \text{ s}}{14{,}5} = \frac{86400 \text{ s}}{14{,}5} = 5965{,}5172 \text{ s}.$$

La velocidad angular ω es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5965{,}5172 \text{ s}} = 0{,}0010532 \text{ rad/s}.$$

Despejamos r de la relación anterior:

$$r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$r^3 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(0{,}0010532 \text{ rad/s})^2} = \frac{4{,}002 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2}{1{,}1092 \cdot 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{s}^2} = 3{,}6068 \cdot 10^{20} \text{ m}^3$$

Calculamos r:

$$r = \sqrt[3]{3{,}6068 \cdot 10^{20} \text{ m}^3} = 7,113 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

La altura h sobre la superficie terrestre es:

$$h = r - R = 7113 \text{ km} - 6370 \text{ km} = 743 \text{ km}.$$

Por lo tanto, la altura a la que orbita el satélite es 743 km sobre la superficie terrestre.

b) Calcula la velocidad orbital, la energía cinética y la energía mecánica del Sentinel 1.

La velocidad orbital (v) es:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{7113000\ \text{m}}} = 7500,4\ \text{m/s}.$$

La energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 2200\ \text{kg} \cdot (7500,4\ \text{m/s})^2 = 6,19 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

La energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 2200\ \text{kg}}{7113000\ \text{m}} = -1,25 \cdot 10^{11}.$$

La energía mecánica total es:

$$E_{\text{mec}} = E_c + E_p = -6,19 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital es aproximadamente 7500,4 m/s, la energía cinética es $\mathbf{6{,}19 \cdot 10^{10}}$ J y la energía mecánica total es $\mathbf{-6{,}19 \cdot 10^{10}}$ J.

Comunidad Valenciana, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 1

Deduce la expresión del periodo de un satélite que sigue una órbita circular alrededor de un planeta, en función de la masa de este y del radio de la órbita. Alrededor del planeta, de masa M, orbitan dos satélites de igual masa m y radios orbitales r_1 y r_2, siendo $r_2 > r_1$. Discute cuál de los dos satélites orbitará con mayor periodo. Razona también cuál de los dos satélites tendrá menor energía potencial gravitatoria.

Solución:

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en órbita circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Simplificando m y multiplicando ambos lados por r:

$$\frac{GM}{r} = v^2.$$

La velocidad orbital v se relaciona con el periodo T por:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2.$$

Despejando T:

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}.$$

Entonces, el periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}},$$

que es la *Tercera Ley de Kepler* para órbitas circulares. Vemos que como $T \propto r^{3/2}$, entonces al aumentar el radio orbital, el periodo aumenta. Dado que $r_2 > r_1$, se cumple que:

$$T_2 > T_1.$$

Así, el satélite que orbita a mayor distancia (r_2) tiene un periodo mayor. La energía potencial gravitatoria de un satélite es:

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

Como E_p es inversamente proporcional a r, al aumentar r, la energía potencial gravitatoria es mayor (menos negativa). Por lo tanto, el satélite con menor r (r_1) tiene una energía potencial más negativa, es decir, menor energía potencial gravitatoria.

Por lo tanto, el periodo de un satélite en órbita circular es $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$. Además, el satélite con mayor radio orbital (r_2) tiene un periodo mayor, mientras que el satélite con menor radio orbital (r_1) tiene menor energía potencial gravitatoria.

Problema 1

En enero de 2023 el telescopio espacial James Webb descubrió su primer exoplaneta, el LHS 475b. Dicho planeta gira en una órbita circular alrededor de una estrella de masa $M = 5,4 \cdot 10^{29}$ kg. Además, se sabe que tarda 2 días terrestres en describir una órbita.

a) **Calcula la distancia a la que se encuentra el planeta del centro de la estrella. Primero deduce razonadamente la expresión simbólica que relaciona dicha distancia con las otras magnitudes conocidas (M y el periodo orbital).**

b) **En la superficie del planeta la aceleración de la gravedad es de 9,2 m/s^2 y la velocidad de escape es de 10,8 km/s. Deduce la expresión de dicha velocidad de escape y calcula el valor de la masa y del radio del planeta.**

Dato: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2 kg^{-2}

Solución:

a) **Calcula la distancia a la que se encuentra el planeta del centro de la estrella. Primero deduce razonadamente la expresión simbólica que relaciona dicha distancia con las otras magnitudes conocidas (M y el periodo orbital).**

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener al planeta en órbita circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Simplificamos m y uno de los factores r:

$$\frac{GM}{r} = v^2.$$

La velocidad orbital v se relaciona con el periodo T mediante:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Sustituimos v en la ecuación anterior:

$$\frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2.$$

Simplificamos:

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}.$$

Multiplicamos ambos lados por r:

$$GM = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}.$$

Despejamos r:

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}.$$

Entonces, la distancia r es:

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Convertimos el periodo T a segundos:

$$T = 2 \text{ días} \cdot 24 \ \frac{\text{h}}{\text{día}} \cdot 3600 \ \frac{\text{s}}{\text{h}} = 172800 \text{ s}.$$

Sustituimos los valores:

$$r = \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N·m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 5,4 \cdot 10^{29} \text{ kg} \cdot (172800 \text{ s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 3,01 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia del planeta al centro de la estrella es $3,01 \cdot 10^9$ m.

b) **En la superficie del planeta la aceleración de la gravedad es de 9,2 m/s^2 y la velocidad de escape es de 10,8 km/s. Deduce la expresión de dicha velocidad de escape y calcula el valor de la masa y del radio del planeta.**

La *velocidad de escape* v_e se expresa como:

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm}{R}},$$

donde m es la masa del planeta y R es el radio del planeta. La *aceleración de la gravedad* en la superficie del planeta es:

$$g = \frac{Gm}{R^2}.$$

Despejamos m de la segunda ecuación:

$$m = \frac{gR^2}{G}.$$

Sustituimos m en la expresión de v_e:

$$v_e = \sqrt{\frac{2G\left(\frac{gR^2}{G}\right)}{R}} = \sqrt{2gR}.$$

Despejamos R:

$$v_e^2 = 2gR \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v_e^2}{2g}.$$

Sustituimos los valores (convirtiendo v_e a m/s):

$$v_e = 10,8 \text{ km/s} = 10.800 \text{ m/s}$$

Entonces,

$$R = \frac{(10800 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,2 \text{ m/s}^2} = \frac{116640000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{18,4 \text{ m/s}^2} = 6340869,565 \text{ m} = 6,34 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Calculamos la masa m. Usamos la ecuación:

$$m = \frac{gR^2}{G}.$$

Sustituimos los valores:

$$m = \frac{9,2 \text{ m/s}^2 \cdot (6,34 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\text{kg}^{-2}} = 5,543 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Por lo tanto, la masa del planeta es $5,54 \cdot 10^{24}$ kg y su radio es $6,34 \cdot 10^6$ m.

Comunidad Valenciana, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 1

Deduce razonadamente la expresión de la velocidad de un satélite que gira alrededor de un planeta en una órbita circular y también la de la velocidad mínima necesaria para que se aleje indefinidamente desde la órbita en la que se encuentra. Supongamos que un satélite orbita a una distancia r de un planeta y se propulsa instantáneamente, de forma que su velocidad pasa a ser 1,5 veces la velocidad orbital, ¿continuará dicho planeta en alguna órbita o se alejará indefinidamente del planeta? Justifica la respuesta.

Solución:

Primero, deducimos la expresión de la velocidad orbital de un satélite que gira alrededor de un planeta en una órbita circular. La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular:

$$F_{\text{gravitatoria}} = F_{\text{centrípeta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v_{\text{orb}}^2}{r},$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal ($G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$),
- M es la masa del planeta,
- m es la masa del satélite,
- r es la distancia entre el satélite y el centro del planeta,
- v_{orb} es la velocidad orbital del satélite.

Despejando v_{orb}:

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

Esta es la expresión de la velocidad orbital de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta.

Ahora, deducimos la expresión de la velocidad mínima necesaria para que el satélite se aleje indefinidamente desde la órbita en la que se encuentra, es decir, la *velocidad de escape*. La energía potencial gravitatoria a una distancia r es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

La energía cinética necesaria es:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{esc}}^2.$$

En el infinito, la energía potencial y cinética son cero:

$$E_p(\infty) = 0, \quad E_c(\infty) = 0.$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_p(r) + E_c(r) = E_p(\infty) + E_c(\infty) \quad \Rightarrow \quad -\frac{G \cdot M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{esc}}^2 = 0 + 0.$$

Despejando v_{esc}:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{esc}}^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}}^2 = \frac{2G \cdot M}{r} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}.$$

Esta es la expresión de la velocidad de escape desde una distancia r.

Ahora, consideramos que el satélite incrementa instantáneamente su velocidad a:

$$v = 1{,}5 \cdot v_{\text{orb}}.$$

Queremos determinar si con esta nueva velocidad el satélite continuará en alguna órbita o se alejará indefinidamente del planeta. Compararemos la nueva velocidad del satélite con la velocidad de escape:

$$\frac{v}{v_{\text{esc}}} = \frac{1{,}5 \cdot v_{\text{orb}}}{v_{\text{esc}}}.$$

Sustituyendo las expresiones de v_{orb} y v_{esc}:

$$\frac{v}{v_{\text{esc}}} = \frac{1{,}5 \cdot \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}}{\sqrt{\dfrac{2G \cdot M}{r}}}.$$

Simplificando:

$$\frac{v}{v_{\text{esc}}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{2}}.$$

Calculando el valor numérico:

$$\frac{v}{v_{\text{esc}}} = \frac{1{,}5}{1{,}4142} \approx 1{,}0607.$$

Como $\frac{v}{v_{\text{esc}}} > 1$, la velocidad del satélite es mayor que la velocidad de escape.

Por lo tanto, la velocidad orbital es $v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$, la velocidad de escape es $v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}$ y el satélite se alejará indefinidamente del planeta.

Problema 1

Un planeta de radio $R_P = 5000$ km que tiene una intensa actividad volcánica, emite fragmentos en las erupciones que pueden llegar a orbitar circularmente a una altura $h = 400$ km, donde el campo gravitatorio del planeta vale $g = 7$ m/s^2.

a) **Deduce las expresiones de la velocidad orbital y de la energía mecánica de un fragmento de masa $m = 2$ kg que se encuentra en dicha órbita y calcula también sus valores numéricos.**
b) **Calcula el campo gravitatorio en la superficie del planeta y la velocidad con la que el fragmento ha sido emitido desde dicha superficie.**

Solución:

a) **Deduce las expresiones de la velocidad orbital y de la energía mecánica de un fragmento de masa $m = 2$ kg que se encuentra en dicha órbita y calcula también sus valores numéricos.**

Consideremos un planeta de radio $R_P = 5000$ km $= 5 \cdot 10^6$ m con una aceleración gravitatoria en la órbita de $g = 7$ m/s^2. Los fragmentos emitidos tienen una masa $m = 2$ kg y orbitan a una altura $h = 400$ km $= 4 \cdot 10^5$ m sobre la superficie del planeta.

La velocidad orbital v_{orb} de un fragmento en una órbita circular está dada por la relación entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{gravitatoria}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v_{\text{orb}}^2}{r} = m \cdot g,$$

donde:
- m es la masa del fragmento (2 kg),
- v_{orb} es la velocidad orbital,
- $r = R_P + h = 5 \cdot 10^6 \text{ m} + 4 \cdot 10^5 \text{ m} = 5,4 \cdot 10^6$ m es la distancia desde el centro del planeta hasta el fragmento,
- g es la aceleración gravitatoria en la órbita (7 m/s^2).

Simplificando la ecuación:

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{7 \text{ m/s}^2 \cdot 5,4 \cdot 10^6 \text{ m}} = \sqrt{37,8 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 6147 \text{ m/s}.$$

La energía mecánica total E_m de un fragmento en órbita circular es la suma de su energía cinética E_c y su energía potencial gravitatoria E_p:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_{\text{orb}}^2 - \frac{G M_P m}{r}.$$

Sin embargo, utilizando la relación $g = \frac{GM_P}{r^2}$, podemos expresar GM_P en función de g y R_P:

$$GM_P = g \cdot r^2.$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\text{orb}}^2 - \frac{g \cdot r^2 \cdot m}{r}.$$

Sabemos que $v_{\text{orb}}^2 = g \cdot r$, por lo que:

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot r - \frac{g \cdot r^2 \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot g \cdot r - g \cdot m \cdot r = -\frac{1}{2} m \cdot g \cdot r.$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 7 \text{ m/s}^2 \cdot 5,4 \cdot 10^6 \text{ m} = -3,78 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital del fragmento es 6147 m/s y su energía mecánica es $E_m = -3,78 \cdot 10^7$ J.

b) **Calcula el campo gravitatorio en la superficie del planeta y la velocidad con la que el fragmento ha sido emitido desde dicha superficie.**

La aceleración gravitatoria en la superficie del planeta g_0 está relacionada con la aceleración gravitatoria en la órbita g por:

$$g = \frac{GM_P}{r^2} \quad \text{y} \quad g_0 = \frac{GM_P}{R_P^2}.$$

Entonces,

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_P^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad g_0 = g \cdot \left(\frac{r}{R_P}\right)^2$$

Sustituyendo los valores:

$$g_0 = 7 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{5,4 \cdot 10^6 \text{ m}}{5 \cdot 10^6 \text{ m}}\right)^2 = 8,16 \text{ m/s}^2.$$

Para calcular la velocidad con la que el fragmento debe ser emitido desde la superficie del planeta v_e, consideramos la conservación de la energía mecánica. Al emitir el fragmento desde la superficie con velocidad v_e, su energía mecánica en la superficie es:

$$E_{\text{superficie}} = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GM_P m}{R_P}.$$

En la órbita, la energía mecánica es:

$$E_{\text{órbita}} = -\frac{1}{2}mgr.$$

Igualando las energías (asumiendo que no hay pérdida de energía durante el trayecto):

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GM_P m}{R_P} = -\frac{1}{2}mgr.$$

Simplificando y despejando v_e:

$$\frac{1}{2}v_e^2 - \frac{GM_P}{R_P} = -\frac{1}{2}gr \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_e^2 = \frac{GM_P}{R_P} - \frac{1}{2}gr.$$

Utilizando $GM_P = g \cdot r^2$:

$$\frac{1}{2}v_e^2 = \frac{g \cdot r^2}{R_P} - \frac{1}{2}gr \quad \Rightarrow \quad v_e^2 = 2 \cdot \frac{g \cdot r^2}{R_P} - gr.$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$v_e^2 = 2 \cdot 7 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{(5,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{5 \cdot 10^6 \text{ m}} - 7 \text{ m/s}^2 \cdot 5,4 \cdot 10^6 \text{ m} = 43,848 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \Rightarrow \quad v_e = 6621,78 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, el campo gravitatorio en la superficie del planeta es $8,16$ m/s^2 y la velocidad con la que el fragmento ha sido emitido desde dicha superficie es $6621,78$ m/s.

Comunidad Valenciana, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 1

El potencial gravitatorio en un punto situado a una distancia r del centro de un planeta es $V = -9,1 \cdot 10^8$ J/kg. La intensidad de campo en la superficie del planeta es $g_0 = 26$ m/s^2 y el radio del planeta es $R = 7 \cdot 10^4$ km. Deduce una relación que proporcione la distancia r en función de V, R y g_0 y calcula el valor de r.

Solución:

Tenemos que:

- Potencial gravitatorio en un punto: $V = -9,1 \cdot 10^8$ J/kg
- Intensidad de campo en la superficie del planeta: $g_0 = 26$ m/s^2
- Radio del planeta: $R = 7 \cdot 10^4$ km $= 7 \cdot 10^7$ m

La definición del potencial gravitatorio V en un punto a una distancia r del centro de un planeta es:

$$V = -\frac{G \cdot M}{r},$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal.
- M es la masa del planeta,
- r es la distancia desde el centro del planeta hasta el punto considerado.

En la superficie del planeta, la intensidad del campo gravitatorio g_0 está relacionada con la masa del planeta y su radio mediante:

$$g_0 = \frac{G \cdot M}{R^2}.$$

Despejamos $G \cdot M$ de la ecuación anterior:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2.$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación del potencial gravitatorio:

$$V = -\frac{g_0 \cdot R^2}{r}.$$

Despejamos r en función de V, R y g_0:

$$r = -\frac{g_0 \cdot R^2}{V}.$$

Dado que el potencial gravitatorio V es negativo, la expresión se simplifica a:

$$r = \frac{g_0 \cdot R^2}{|V|}.$$

Sustituyendo los valores proporcionados:

$$r = \frac{26 \text{ m/s}^2 \cdot (7 \cdot 10^7 \text{ m})^2}{9,1 \cdot 10^8 \text{ J/kg}} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

Por lo tanto, $r = \dfrac{g_0 \cdot R^2}{|V|}$ y la distancia r es $1,4 \cdot 10^8$ m.

Cuestión 2

Deduce la relación entre la energía mecánica de un satélite y el radio de su órbita circular alrededor de un planeta. Dos satélites, A y B, de igual masa siguen órbitas circulares, uno con energía mecánica $E_A = -4 \cdot 10^{10}$ J y otro con $E_B = -2 \cdot 10^{10}$ J. Razona cuál de los dos satélites tiene mayor energía cinética y cuál se encuentra más lejos del planeta.

Solución:

Consideremos un satélite de masa m que orbita circularmente alrededor de un planeta de masa M y radio r. Las fuerzas que actúan sobre el satélite son la fuerza centrípeta necesaria para mantener la órbita y la fuerza gravitatoria que actúa como dicha fuerza centrípeta:

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{gravitatoria}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2},$$

donde v es la velocidad orbital del satélite y G es la constante de gravitación universal ($G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$). Simplificando la ecuación:

$$v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

La energía cinética del satélite en órbita es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{G \cdot M}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r}.$$

La energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

La energía mecánica total del satélite es la suma de su energía cinética y su energía potencial gravitatoria:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r}.$$

De esta relación, observamos que la energía mecánica total E_m es inversamente proporcional al radio r de la órbita circular:

$$E_m \propto -\frac{1}{r}.$$

Dado que los satélites A y B tienen la misma masa y siguen órbitas circulares, podemos comparar sus energías mecánicas para determinar las diferencias en sus energías cinéticas y radios de órbita:

$$E_m = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r}.$$

De esta relación, vemos que una mayor energía mecánica negativa ($|E_m|$ más grande) corresponde a un radio r menor. Es decir, cuanto más negativo es E_m, más cerca está el satélite del planeta.

- Satélite A:

$$E_A = -4 \cdot 10^{10}\ \text{J} \quad \Rightarrow \quad -4 \cdot 10^{10}\ \text{J} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r_A} \quad \Rightarrow \quad r_A = \frac{G \cdot M \cdot m}{8 \cdot 10^{10}\ \text{J}}.$$

- Satélite B:

$$E_B = -2 \cdot 10^{10}\ \text{J} \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot 10^{10}\ \text{J} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r_B} \quad \Rightarrow \quad r_B = \frac{G \cdot M \cdot m}{4 \cdot 10^{10}\ \text{J}}.$$

Observamos que $r_A < r_B$ ya que $\frac{G \cdot M \cdot m}{8 \cdot 10^{10}} < \frac{G \cdot M \cdot m}{4 \cdot 10^{10}}$ (el satélite A se encuentra más cerca del planeta que el satélite B.). La energía cinética E_c de cada satélite está relacionada con su energía mecánica E_m mediante:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{G \cdot M}{r} = -E_m.$$

Para cada satélite:

- Satélite A:
$$E_{c,A} = -E_A = 4 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$
- Satélite B:
$$E_{c,B} = -E_B = 2 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

Entonces, el satélite A tiene una mayor energía cinética que el satélite B.

Por lo tanto, la energía mecánica de un satélite en órbita circular es inversamente proporcional al radio de su órbita, y el satélite A tiene una mayor energía cinética y se encuentra más cerca del planeta, mientras que el satélite B tiene una menor energía cinética y se encuentra más lejos del planeta.

Problema 1

Una sonda espacial de masa 800 kg se coloca en órbita circular de radio 6500 km alrededor de Venus. Si la energía cinética de la sonda es de $2 \cdot 10^{10}$ J :

a) **Deduce la expresión de la velocidad orbital de la sonda y calcula la masa de Venus.**
b) **Si Venus es un planeta esférico de densidad $\rho = 5,24$ g/cm^3 obtén la altura, en kilómetros, a la que hay que situar un cuerpo para que la fuerza de atracción gravitatoria que realiza Venus sobre este cuerpo sea un 36% menor que la ejercida en su superficie.**

Dato: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Solución:

Tenemos los siguientes datos:

- Masa de la sonda: $m = 800$ kg.
- Radio de la órbita: $r = 6500$ km $= 6,5 \cdot 10^6$ m.
- Energía cinética de la sonda: $E_c = 2 \cdot 10^{10}$ J.
- Constante de gravitación universal: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.
- Densidad de Venus: $\rho = 5,24$ g/cm$^3 = 5240$ kg/m^3.

a) **Deduce la expresión de la velocidad orbital de la sonda y calcula la masa de Venus.**

En una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria para mantener la sonda en órbita es proporcionada por la fuerza gravitatoria ejercida por Venus:

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{gravitatoria}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{r^2},$$

donde:
- m es la masa de la sonda (800 kg),
- v es la velocidad orbital de la sonda,
- r es el radio de la órbita ($6,5 \cdot 10^6$ m),
- G es la constante de gravitación universal ($6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2),
- M_V es la masa de Venus que queremos calcular.

Simplificando la ecuación:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_V}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_V}{r}}.$$

Utilizamos la relación entre la energía cinética y la velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

Despejamos v:

$$v^2 = \frac{2E_c}{m} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{10} \text{ J}}{800 \text{ kg}}} = 7071 \text{ m/s}.$$

A partir de la expresión de la velocidad orbital:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_V}{r}.$$

Despejamos M_V:

$$M_V = \frac{v^2 \cdot r}{G}.$$

Sustituyendo los valores calculados y conocidos:

$$M_V = \frac{(7071 \text{ m/s})^2 \cdot 6,5 \cdot 10^6 \text{ m}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 4,875 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Por lo tanto, la velocidad orbital de la sonda es 7071 m/s y la masa de Venus es $4,875 \cdot 10^{24}$ kg.

b) Si Venus es un planeta esférico de densidad $\rho = 5,24$ g/cm^3 obtén la altura, en kilómetros, a la que hay que situar un cuerpo para que la fuerza de atracción gravitatoria que realiza Venus sobre este cuerpo sea un 36% menor que la ejercida en su superficie.

Sabemos que la masa M_V de un planeta esférico está relacionada con su densidad ρ y su radio R mediante:

$$M_V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Despejamos R:

$$R = \left(\frac{3M_V}{4\pi\rho}\right)^{1/3}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$R = \left(\frac{3 \cdot 4,875 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi \cdot 5240 \text{ kg/m}^3}\right)^{1/3} = 6,07 \cdot 10^6 \text{ m} = 6070 \text{ km}.$$

Queremos que la fuerza gravitatoria a una altura h sea un 36% menor que la fuerza en la superficie. Es decir:

$$F_h = 0,64 \cdot F_0.$$

Sabemos que la fuerza gravitatoria es:

$$F = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{r^2},$$

donde:
- r es la distancia desde el centro de Venus hasta el cuerpo ($r = R + h$),
- $F_0 = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{R^2}$ es la fuerza en la superficie,
- $F_h = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{(R+h)^2} = 0,64 \cdot \frac{G \cdot M_V \cdot m}{R^2}$.

Simplificando la igualdad:

$$\frac{1}{(R+h)^2} = 0,64 \cdot \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad (R+h)^2 = \frac{R^2}{0,64} = \frac{R^2}{0,64} = \frac{R^2 \cdot 100}{64} = \frac{25R^2}{16}.$$

Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados:

$$R + h = \frac{5R}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5R}{4} - R = \frac{R}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{6070 \text{ km}}{4} = 1517,5 \text{ km}.$$

Por lo tanto, la altura a la que hay que situar un cuerpo para que la fuerza de atracción gravitatoria sea un 36% menor que en la superficie es $h \approx 1518$ km.

Comunidad Valenciana, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 1

Un cuerpo que se encuentra en un campo gravitatorio se mueve entre dos puntos A y B de una superficie equipotencial. ¿Qué trabajo realiza la fuerza gravitatoria para mover el cuerpo entre A y B? Si la energía potencial del cuerpo en B es de -800 J y seguidamente pasa del punto B a un punto C, donde su energía potencial es de -1000 J, discute si su energía cinética es mayor en B o en C.

Solución:

Datos proporcionados:

- Energía potencial en el punto B: $E_p(B) = -800$ J.
- Energía potencial en el punto C: $E_p(C) = -1000$ J.

Una superficie equipotencial es aquella en la que el potencial gravitatorio tiene el mismo valor en todos sus puntos. Por lo tanto, en una superficie equipotencial, el potencial gravitatorio en A es igual al de B:

$$V_A = V_B.$$

Dado que la energía potencial gravitatoria E_p está relacionada con el potencial V por:

$$E_p = m \cdot V,$$

donde m es la masa del cuerpo, y como $V_A = V_B$, entonces:

$$E_p(A) = E_p(B).$$

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, lo que implica que el trabajo realizado por esta fuerza al mover un cuerpo entre dos puntos depende únicamente de los potenciales en esos puntos. El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria W_c se relaciona con la variación de la energía potencial:

$$W_c = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A)) = -(0) = 0 \text{ J}.$$

La energía potencial cambia de B a C:

$$\Delta E_p = E_p(C) - E_p(B) = -1000 \text{ J} - (-800 \text{ J}) = -200 \text{ J}.$$

Aplicando la relación entre el trabajo realizado por una fuerza conservativa y la variación de energía potencial:

$$W_c = -\Delta E_p = -(-200 \text{ J}) = +200 \text{ J}.$$

En ausencia de fuerzas no conservativas, la energía mecánica total se conserva:

$$\Delta E_{\text{mecánica}} = \Delta E_c + \Delta E_p = 0,$$

donde:

$$\Delta E_c = E_c(C) - E_c(B).$$

Sustituyendo:

$$E_c(C) - E_c(B) + (-200 \text{ J}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_c(C) = E_c(B) + 200 \text{ J}.$$

La energía cinética en el punto C es mayor que en el punto B en 200 J. Así, el cuerpo tiene una energía cinética mayor en C que en B.

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al mover el cuerpo entre A y B es cero. y la energía cinética del cuerpo es mayor en el punto C que en el punto B.

Problema 1

La masa del planeta K2-72 es $2,21$ veces la masa de la Tierra y su radio es $1,29$ veces el radio de la Tierra.

a) **¿Cuál es el valor de la intensidad de campo gravitatorio en la superficie de K2-72? ¿Cuál es la fuerza gravitatoria que K2-72 ejerce sobre una persona de 70 kg en reposo sobre su superficie?**
b) **Determina la distancia desde el centro de K2-72 para la cual la intensidad de campo gravitatorio es $0,16$ veces el valor en su superficie. Deduce y calcula la velocidad que tendría un satélite en órbita circular a dicha distancia.**

Dato: campo gravitatorio de la Tierra en su superficie, $g_0 = 9,8$ m/s^2; radio terrestre, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m

Solución:

a) **¿Cuál es el valor de la intensidad de campo gravitatorio en la superficie de K2-72? ¿Cuál es la fuerza gravitatoria que K2-72 ejerce sobre una persona de 70 kg en reposo sobre su superficie?**

La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta se calcula mediante la fórmula:

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2},$$

donde:
- $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2 es la constante de gravitación universal,
- M es la masa del planeta,
- R es el radio del planeta.

Dado que la masa de K2-72 es $2,21$ veces la masa de la Tierra ($M_{\text{Tierra}} = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg) y su radio es $1,29$ veces el radio de la Tierra ($R_{\text{Tierra}} = 6,37 \cdot 10^6$ m), tenemos:

$$M_{\text{K2-72}} = 2,21 \cdot M_{\text{Tierra}} = 2,21 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 1,31837 \cdot 10^{25} \text{ kg},$$

$$R_{\text{K2-72}} = 1,29 \cdot R_{\text{Tierra}} = 1,29 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} = 8,2113 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la gravedad:

$$g_{\text{K2-72}} = \frac{6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,31837 \cdot 10^{25} \text{ kg}}{(8,2113 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 13,04 \text{ m/s}^2.$$

Entonces, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de K2-72 es $13,04$ m/s^2. Ahora, la fuerza gravitatoria que K2-72 ejerce sobre una persona de 70 kg en reposo sobre su superficie se calcula mediante:

$$F = m \cdot g,$$

donde $m = 70$ kg y $g = 13,04$ m/s^2:

$$F = 70 \text{ kg} \cdot 13,04 \text{ m/s}^2 = 912,8 \text{ N}.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de K2-72 es $13,04$ m/s^2 y la fuerza gravitatoria que K2-72 ejerce sobre una persona de 70 kg en reposo sobre su superficie es $912,8$ N.

b) **Determina la distancia desde el centro de K2-72 para la cual la intensidad de campo gravitatorio es $0,16$ veces el valor en su superficie. Deduce y calcula la velocidad que tendría un satélite en órbita circular a dicha distancia.**

Queremos determinar la distancia r desde el centro de K2-72 tal que la intensidad del campo gravitatorio a esa distancia sea $0,16$ veces el valor en su superficie:

$$g(r) = 0,16 \cdot g_{\text{K2-72}}.$$

La intensidad del campo gravitatorio a una distancia r de un cuerpo de masa M es:

$$g(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}.$$

Así, tenemos:

$$\frac{G \cdot M}{r^2} = 0,16 \cdot \frac{G \cdot M}{R^2}.$$

Cancelando $G \cdot M$ en ambos lados:

$$\frac{1}{r^2} = 0,16 \cdot \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{R^2}{0,16} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{0,16}} = \frac{R}{0,4} = 2,5 \cdot R,$$

donde $R = R_{\text{K2-72}} = 8,2113 \cdot 10^6$ m. Entonces,

$$r = 2,5 \cdot 8,2113 \cdot 10^6 \text{ m} = 2,0528 \cdot 10^7 \text{ m}.$$

A continuación, calculamos la velocidad que tendría un satélite en órbita circular a dicha distancia. La velocidad orbital se calcula mediante:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N.} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,31837 \cdot 10^{25} \text{ kg}}{2,0528 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 6,55 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, la distancia desde el centro de K2-72 para la cual la intensidad de campo gravitatorio es $\mathbf{0,16}$ veces el valor en su superficie es $\mathbf{2,05 \cdot 10^7}$ m y la velocidad que tendría un satélite en órbita circular a dicha distancia es aproximadamente $\mathbf{6,55 \cdot 10^3}$ m/s.

Comunidad Valenciana, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 1

Explica qué se entiende por fuerza conservativa y su relación con el concepto de energía potencial. ¿Es lo mismo la energía potencial gravitatoria que el potencial gravitatorio? ¿En qué unidades del SI se mide cada una de estas dos magnitudes? Justifica las respuestas a partir de sus definiciones.

Solución:

Una *fuerza conservativa* es aquella fuerza cuyo trabajo realizado sobre una partícula que se mueve de un punto A a un punto B es independiente de la trayectoria seguida entre estos dos puntos. Es decir, el trabajo realizado solo depende de las posiciones inicial y final de la partícula, no de cómo se mueve entre ellas. Matemáticamente, para una fuerza $\vec{F}$ conservativa, se cumple que

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

es independiente de la trayectoria. La relación entre una fuerza conservativa y la *energía potencial* (E_p) es directa. Para una fuerza conservativa, existe una función escalar llamada energía potencial tal que el trabajo realizado por la fuerza conservativa al mover una partícula desde A hasta B está dado por la diferencia de energía potencial en esos puntos:

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B).$$

Por lo tanto, la energía potencial permite calcular el trabajo realizado por fuerzas conservativas sin necesidad de conocer la trayectoria exacta.

No es lo mismo *energía potencial gravitatoria* que *potencial gravitatorio.*

- *Energía Potencial Gravitatoria (E_p):* Es la energía asociada a una masa m en un campo gravitatorio creado por otra masa M. Se calcula mediante la fórmula:

$$E_p = -\frac{G\cdot M\cdot m}{r},$$

  donde:
  - $G = 6,674\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2 es la constante de gravitación universal,
  - M es la masa que crea el campo gravitatorio,
  - m es la masa de la partícula que experimenta el campo,
  - r es la distancia entre las masas.
- *Potencial Gravitatorio (V):* Es la energía potencial por unidad de masa en un punto dentro de un campo gravitatorio. Se define como:

$$V = \frac{U}{m} = -\frac{G\cdot M}{r}$$

  Nótese que V representa la energía potencial que una unidad de masa tendría en ese punto del campo gravitatorio.

Las diferencias clave son:

- La *energía potencial gravitatoria* E_p depende de la masa m que se encuentra en el campo gravitatorio.
- El *potencial gravitatorio* V es una propiedad del campo gravitatorio mismo y es independiente de la masa de la partícula que se coloca en él.

Sus unidades en el Sistema Internacional (SI) son:

- *Energía Potencial Gravitatoria (E_p):* Se mide en *Julios (J)*. Un julio es igual a un Newton por metro (1 J = 1 N $\cdot$ m).

- *Potencial Gravitatorio (V):* Se mide en *Julios por kilogramo (J/kg)*. Esta unidad refleja que es una energía potencial por unidad de masa.

La distinción entre energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio se fundamenta en sus definiciones y en su dependencia de la masa. La energía potencial gravitatoria E_p está directamente relacionada con la interacción entre dos masas, mientras que el potencial gravitatorio V describe la energía potencial por unidad de masa en un punto específico del campo gravitatorio creado por una masa M. Las unidades reflejan esta diferencia: U se mide en Julios, una unidad de energía, mientras que V se mide en Julios por kilogramo, indicando que es una energía potencial por cada kilogramo de masa.

Por lo tanto, aunque están relacionadas, no son lo mismo y cada una tiene un uso específico en el análisis de campos gravitatorios y energía en sistemas físicos.

Problema 1

La Estación Espacial Internacional tiene una masa $m = 4 \cdot 10^5$ kg y describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura sobre su superficie $h = 400$ km.

a) **Calcula las energías potencial, cinética y mecánica de la Estación en su movimiento por dicha órbita.**
b) **Calcula la energía que se debe aportar a la estación para que se sitúe en una órbita en la que su energía mecánica sea $E = -2 \cdot 10^{12}$ J. Calcula su velocidad en dicha órbita.**

Datos: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; masa de la Tierra, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra, $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m

Solución:

a) **Calcula las energías potencial, cinética y mecánica de la Estación en su movimiento por dicha órbita.**

Primero, calculamos el radio orbital de la estación:

$$r = R_T + h = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} + 400 \cdot 10^3 \text{ m} = 6,8 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

La energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ kg}}{6,8 \cdot 10^6 \text{ m}} = -2,3541 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

La energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Primero, calculamos la velocidad orbital usando la fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,8 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7672,6 \text{ m/s}.$$

Ahora, calculamos la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot (7.672,6 \text{ m/s})^2 = 1,17676 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

La energía mecánica es:

$$E_m = E_c + E_p = 1,17676 \cdot 10^{13} \text{ J} + (-2,3541 \cdot 10^{13} \text{ J}) = -1,17734 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

Por lo tanto, las energías son:
- **Energía potencial: $E_p = -2,3541 \cdot 10^{13}$ J.**
- **Energía cinética: $E_k = 1,17676 \cdot 10^{13}$ J.**
- **Energía mecánica: $E_m = -1,17734 \cdot 10^{13}$ J.**

b) **Calcula la energía que se debe aportar a la estación para que se sitúe en una órbita en la que su energía mecánica sea $E = -2 \cdot 10^{12}$ J. Calcula su velocidad en dicha órbita.**

La energía que se debe aportar es la diferencia entre las energías mecánicas final e inicial:

$$W = \Delta E = E_{m_f} - E_{m_i} = (-2 \cdot 10^{12} \text{ J}) - (-1,17734 \cdot 10^{13} \text{ J}) = 9,7734 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

Entonces, se debe aportar $W = 9,7734 \cdot 10^{12}$ J.

Ahora, calculamos el radio de la nueva órbita usando la relación:

$$E_m = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}.$$

Despejamos r:

$$r = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot E_m}.$$

Sustituimos los valores:

$$r = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot 4 \cdot 10^{5}\ \mathrm{kg}}{2 \cdot (-2 \cdot 10^{12}\ \mathrm{J})} = 40,02 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}.$$

La velocidad en la nueva órbita es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{40,02 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}}} = 3162,3\ \mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la energía que se debe aportar es $W = 9,7734 \cdot 10^{12}$ J, y la velocidad en la nueva órbita es $v = 3162,3$ m/s.

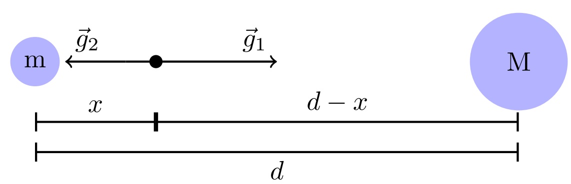
Comunidad Valenciana, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 1

Entre un cuerpo de masa m y otro de masa $M > m$ (ambas puntuales) existe solo la Campo Gravitatorio. ¿Es la fuerza gravitatoria que ejerce M sobre m mayor que la que ejerce m sobre M? ¿Es la aceleración de ambos cuerpos igual en módulo? ¿Y en dirección y sentido? Razona adecuadamente las respuestas.

Solución:

Para analizar las preguntas planteadas, consideremos dos cuerpos puntuales de masas m y M, donde $M > m$, separados por una distancia r. Solo actúa el campo gravitatorio entre ellos:



Según la *Ley de la Gravitación Universal* de Newton, la fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales está dada por:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2},$$

donde:

- F es la magnitud de la fuerza gravitatoria,
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 es la constante de gravitación universal,
- m y M son las masas de los cuerpos,
- r es la distancia entre los centros de las dos masas.

Además, según la *Tercera Ley de Newton* (Ley de Acción y Reacción): "Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza de igual magnitud y en sentido opuesto sobre el cuerpo A". Aplicando esto a las masas m y M, se tiene:

$$\vec{F}_{M\to m} = -\vec{F}_{m\to M}.$$

Esto implica que:

$$|\vec{F}_{M\to m}| = |\vec{F}_{m\to M}|.$$

Entonces, la fuerza gravitatoria que ejerce M sobre m es igual en magnitud a la que ejerce m sobre M.

Respecto a las aceleraciones de ambos cuerpos, aplicamos la *Segunda Ley de Newton* ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$) a cada uno de los cuerpos, Para la masa m:

$$\vec{F}_{M\to m} = m \cdot \vec{a}_m.$$

Para la masa M:

$$\vec{F}_{m\to M} = M \cdot \vec{a}_M.$$

Dado que $|\vec{F}_{M\to m}| = |\vec{F}_{m\to M}|$, se tiene:

$$m \cdot |\vec{a}_m| = M \cdot |\vec{a}_M|.$$

Despejando las aceleraciones:

$$|\vec{a}_m| = \frac{M}{m} \cdot |\vec{a}_M|.$$

Como $M > m$, se concluye que:

$$|\vec{a}_m| > |\vec{a}_M|.$$

Es decir, la aceleración del cuerpo de masa m es mayor en módulo que la aceleración del cuerpo de masa M. En cuanto a la dirección y sentido de las aceleraciones, observamos que:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{F}_{M\to m}}{m} \quad \text{y} \quad \vec{a}_M = \frac{\vec{F}_{m\to M}}{M}.$$

Como $\vec{F}_{M\to m} = -\vec{F}_{m\to M}$, las aceleraciones serán:

$$\vec{a}_m = -\frac{\vec{F}_{m\to M}}{m} \quad \text{y} \quad \vec{a}_M = \frac{\vec{F}_{m\to M}}{M}.$$

Esto implica que las aceleraciones de ambos cuerpos son opuestas en dirección y sentido.

Por lo tanto, la fuerza gravitatoria que ejerce M sobre m es igual en magnitud a la que ejerce m sobre M, pero las aceleraciones de los cuerpos no son iguales en módulo debido a sus diferencias de masa. Las aceleraciones son opuestas en dirección y sentido.

Problema 1

Syncom 3 fue un satélite de telecomunicaciones de masa 40 kg, que describía órbitas circulares a una altura de 35800 km sobre la superficie terrestre.

a) **Deduce la expresión de la velocidad orbital de un satélite y calcula el valor en este caso, así como el periodo de la órbita (en horas).**
b) **Calcula las energías potencial y cinética del satélite en su movimiento por dicha órbita. Calcula la energía que se debe aportar al satélite para que se sitúe en una órbita en la que su energía mecánica sea $E = -9,5 \cdot 10^7$ J.**

Datos: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²; masa de la Tierra, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra, $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m

Solución:

a) **Deduce la expresión de la velocidad orbital de un satélite y calcula el valor en este caso, así como el periodo de la órbita (en horas).**

Para determinar la velocidad orbital v de un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra, igualamos la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite con la fuerza centrípeta necesaria para mantener la órbita:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r},$$

donde:
- G es la constante de gravitación universal,
- M_T es la masa de la Tierra,
- m es la masa del satélite,
- r es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el satélite,
- v es la velocidad orbital del satélite.

Simplificando la ecuación, la masa m se cancela:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}.$$

Primero, determinamos la distancia r desde el centro de la Tierra hasta Syncom 3:

$$r = R_T + h = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} + 3,58 \cdot 10^7 \text{ m} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}.$$

Sustituyendo los valores en la fórmula de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4,22 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 3079,51 \text{ m/s}.$$

El periodo T de una órbita circular se relaciona con la velocidad orbital v y la distancia r mediante la siguiente expresión:

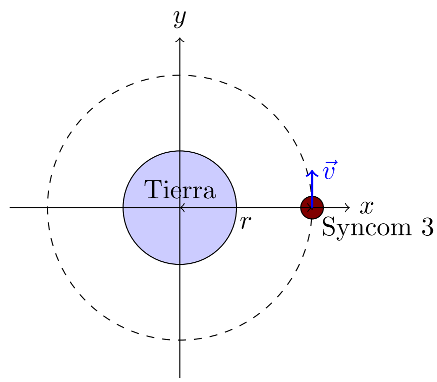
$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Sustituyendo los valores calculados:

$$T = \frac{2\pi \cdot 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}}{3079,51 \text{ m/s}} = 86101,5 \text{ s}.$$

Convertimos el periodo a horas:

$$T = \frac{86101,5 \text{ s}}{3600 \text{ s/hora}} = 23,92 \text{ horas}.$$



Por lo tanto, la velocidad orbital de Syncom 3 es $3079,51$ m/s y su periodo orbital es de $23,92$ horas.

b) **Calcula las energías potencial y cinética del satélite en su movimiento por dicha órbita. Calcula la energía que se debe aportar al satélite para que se sitúe en una órbita en la que su energía mecánica sea $E = -9,5 \cdot 10^7$ J.**

La energía potencial gravitatoria U de un satélite en órbita circular está dada por:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 40 \text{ kg}}{4,22 \cdot 10^7 \text{ m}} = -3,798 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

La energía cinética E_c del satélite en órbita se calcula mediante:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 40 \text{ kg} \cdot (3079,51 \text{ m/s})^2 = 1,897 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

La energía mecánica total E_m del satélite en órbita es la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_m = E_c + E_p = 1,897 \cdot 10^8 \text{ J} - 3,798 \cdot 10^8 \text{ J} = -1,901 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Queremos que la energía mecánica final E_{final} sea:

$$E_{\text{final}} = -9,5 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

La energía inicial es:

$$E_{\text{inicial}} = -1,901 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

La energía que se debe aportar ΔE es la diferencia entre la energía final y la energía inicial:

$$\Delta E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = -9,5 \cdot 10^7 \text{ J} - (-1,901 \cdot 10^8 \text{ J}) = 1,901 \cdot 10^8 \text{ J} - 9,5 \cdot 10^7 \text{ J} = 9,52 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la solución es:

- **La energía potencial gravitatoria del satélite en su órbita es $E_p = -3,798 \cdot 10^8$ J.**
- **La energía cinética del satélite es $E_c = 1,897 \cdot 10^8$ J.**
- **La energía mecánica total del satélite es $E_m = -1,901 \cdot 10^8$ J.**
- **Para que la energía mecánica del satélite sea $E = -9,5 \cdot 10^7$ J, se debe aportar una energía adicional (cinética) de $\Delta E = 9,52 \cdot 10^7$ J.**

Comunidad Valenciana, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 1

Escribe la expresión del trabajo de una fuerza y su relación con la energía potencial si la fuerza es conservativa. Un satélite gira alrededor de la Tierra siguiendo una órbita circular. Razona qué trabajo realiza la fuerza gravitatoria cuando el satélite recorre un cuarto de la órbita. ¿Y si recorre una órbita completa?

Solución:

El campo gravitatorio es un campo conservativo, por lo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos A y B depende únicamente de las posiciones inicial y final, y no de la trayectoria seguida. La expresión del trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ al desplazarse desde el punto A hasta el punto B se define como:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Para una fuerza gravitatoria, la fuerza ejercida sobre una masa puntual m debido a la Tierra con masa M está dada por:

$$\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{r},$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal,
- r es la distancia entre los centros de masa de la Tierra y el satélite,
- $\vec{r}$ es el vector unitario en la dirección radial.

Sustituyendo $\vec{F}$ en la expresión del trabajo:

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G\frac{M \cdot m}{r^2}\right) dr = -GMm\int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B} = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right).$$

La energía potencial gravitatoria E_p está relacionada con el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria:

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB}, \quad \text{donde} \quad E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}.$$

Ahora, consideremos el caso de un satélite que gira alrededor de la Tierra siguiendo una órbita circular. En una órbita circular, el radio r es constante, es decir, $r_A = r_B = r$. Por lo tanto, la expresión del trabajo se simplifica:

$$W_{A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) = 0 \text{ J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es cero tanto al recorrer un cuarto de la órbita como al completar una órbita completa.

Problema 1

El proyecto Starlink ha colocado en órbita circular alrededor de la Tierra unos 300 satélites para comunicaciones, que son fácilmente visibles desde la superficie de la Tierra. Sabiendo que la velocidad de uno de dichos satélites es de $7,6$ km/s:

a) **Calcula la altura h a la que se encuentra desde la superficie terrestre (en kilómetros).**
b) **¿Cuántas órbitas circulares completas describe el satélite en un día?**

Datos: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; masa de la Tierra, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra, $R_T = 6400$ km

Solución:

a) **Calcula la altura h a la que se encuentra desde la superficie terrestre (en kilómetros).**

La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria. Dado que el movimiento del satélite es circular uniforme, según el segundo principio de la dinámica de Newton, podemos escribir:

$$F_g = m \cdot a_c,$$

donde:

$$F_g = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \quad \text{y} \quad a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Igualando las dos expresiones:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Simplificando m y una de las r:

$$\frac{G \cdot M_T}{r} = v^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{G \cdot M_T}{v^2},$$

donde r es la distancia desde el centro de la Tierra al satélite. La altura h sobre la superficie terrestre se obtiene restando el radio de la Tierra R_T:

$$r = R_T + h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{G \cdot M_T}{v^2} - R_T.$$

Sustituyendo los datos proporcionados:

$$v = 7{,}6\,\text{km/s} = 7{,}6 \cdot 10^3\,\text{m/s},$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2, \quad M_T = 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad R_T = 6{,}4 \cdot 10^6\,\text{m}.$$

Calculamos h:

$$h = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(7{,}6 \cdot 10^3\,\text{m/s})^2} - 6{,}4 \cdot 10^6\,\text{m} = 529\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la altura h a la que se encuentra el satélite desde la superficie terrestre es de 529 km.

b) **¿Cuántas órbitas circulares completas describe el satélite en un día?**

Para determinar el número de órbitas que realiza el satélite en un día, primero calculamos el período T de una órbita completa. Utilizamos la relación entre la velocidad v, el período T y el radio de la órbita r:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v},$$

donde:

$$r = R_T + h = 6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 5{,}29 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = 6{,}929 \cdot 10^6\,\mathrm{m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$T = \frac{2\pi \cdot 6{,}929 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{7{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}} = 5{,}728 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 1{,}59\,\mathrm{horas}.$$

Para determinar el número de órbitas en un día (24 horas):

$$n = \frac{24\,\mathrm{horas}}{1{,}59\,\mathrm{horas}} = 15{,}1.$$

Por lo tanto, el satélite describe aproximadamente 15 órbitas circulares completas en un día.

Cataluña, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Problema 1

BepiColombo és una missió espacial que té per objectiu l'exploració de Mercuri. La missió va ser llançada l'any 2018, i hi arribarà el 2025. Un cop allà, posarà en òrbita dos satèl·lits al voltant del planeta. Un dels satèl·lits és el Mercury Planetary Orbiter (MPO), construït per l'Agència Espacial Europea, que orbitarà al voltant de Mercuri amb un radi orbital mitjà de 3 360 km.

a) **Considereu un satèl·lit que fa una òrbita circular al voltant de Mercuri. Deduïu l'expressió de la velocitat orbital del satèl·lit en funció del radi orbital i la massa de Mercuri (indiqueu clarament en quins principis o lleis físiques us baseu per fer la vostra deducció). Amb aquesta expressió, calculeu la velocitat orbital del satèl·lit MPO mentre orbita al voltant de Mercuri. Calculeu quantes voltes haurà fet al planeta al cap d'un any terrestre.**

b) **A partir de l'expressió general de l'energia mecànica, obtingueu la seva equació per al cas particular d'un satèl·lit en òrbita circular (cal que l'equació final només estigui expressada en funció de G, el radi orbital i les masses del satèl·lit i del planeta). Una vegada el satèl·lit MPO estigui orbitant al voltant de Mercuri, encara tindrà combustible per a poder fer maniobres. Considereu que el combustible disponible pot proporcionar una energia de $4,5 \times 10^9$ J. Determineu el valor màxim que podria tenir la massa del MPO per tal que amb l'energia disponible pogués escapar del camp gravitatori de Mercuri.**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.
Massa de Mercuri, $M_M = 3,285 \times 10^{23}$ **kg.**
Any terrestre = 365,25 dies.

Solución:

a) **Considereu un satèl·lit que fa una òrbita circular al voltant de Mercuri. Deduïu l'expressió de la velocitat orbital del satèl·lit en funció del radi orbital i la massa de Mercuri (indiqueu clarament en quins principis o lleis físiques us baseu per fer la vostra deducció). Amb aquesta expressió, calculeu la velocitat orbital del satèl·lit MPO mentre orbita al voltant de Mercuri. Calculeu quantes voltes haurà fet al planeta al cap d'un any terrestre.**

Para determinar la velocidad orbital v de un satélite que realiza una órbita circular alrededor de Mercurio, utilizamos la *Ley de Gravitación Universal* de Newton y la *Segunda Ley de Newton.* Tenemos los siguientes datos:

- Constante de gravitación universal: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.
- Masa de Mercurio: $M_M = 3,285 \cdot 10^{23}$ kg.
- Radio orbital del satélite MPO: $r = 3\,360\ \mathrm{km} = 3,36 \cdot 10^6$ m.
- Duración de un año terrestre: $t_{\text{año}} = 365,25$ días.

Según la *Ley de Gravitación Universal*, la fuerza gravitatoria F_g que actúa sobre el satélite es:

$$F_g = \frac{G \cdot M_M \cdot m}{r^2},$$

donde m es la masa del satélite. Por otro lado, la *segunda ley de Newton* establece que la fuerza neta que actúa sobre el satélite es igual a la masa del satélite por su aceleración centrípeta a_c:

$$F = m \cdot a_c.$$

Dado que el satélite realiza un movimiento circular uniforme, la aceleración centrípeta se expresa como:

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Igualando las dos expresiones de la fuerza:

$$\frac{G \cdot M_M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Simplificando m y una potencia de r:

$$\frac{G \cdot M_M}{r} = v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_M}{r}}.$$

Entonces,

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 3,285 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{3,36 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}}} = 2,55 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

Para obtener el número de orbitas en un año terrestre, priemro calculamos el período orbital T del satélite:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 3,360 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}{2,55 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}} = 8,28 \cdot 10^3\ \mathrm{s}.$$

Convertimos la duración de un año terrestre a segundos:

$$t_{\text{año}} = 365,25\ \text{días} \cdot 24\ \text{h/día} \cdot 3600\ \text{s/h} = 3,16 \cdot 10^7\ \text{s}.$$

Finalmente, calculamos el número de órbitas N:

$$N = \frac{t_{\text{año}}}{T} = \frac{3,16 \cdot 10^7\ \mathrm{s}}{8,28 \cdot 10^3\ \mathrm{s}} = 3816\ \text{órbitas}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital del satélite MPO es $v = 2{,}55 \cdot 10^3$ m/s y dará aproximadamente 3816 órbitas alrededor de Mercurio al cabo de un año terrestre.

b) **A partir de l'expressió general de l'energia mecànica, obtingueu la seva equació per al cas particular d'un satèl·lit en òrbita circular (cal que l'equació final només estigui expressada en funció de G, el radi orbital i les masses del satèl·lit i del planeta). Una vegada el satèl·lit MPO estigui orbitant al voltant de Mercuri, encara tindrà combustible per a poder fer maniobres. Considereu que el combustible disponible pot proporcionar una energia de $4,5 \times 10^9$ J. Determineu el valor màxim que podria tenir la massa del MPO per tal que amb l'energia disponible pogués escapar del camp gravitatori de Mercuri.**

Para determinar la masa máxima que podría tener el satélite MPO para escapar del campo gravitatorio de Mercurio con una energía disponible de $4,5 \cdot 10^9$ J, debemos tener en cuenta que la expresión general de la energía mecánica es:

$$E_m = E_c + E_p,$$

donde E_c es la energía cinética y E_p es la energía potencial gravitatoria. Para una órbita circular, estas energías se expresan como:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \qquad E_p = -\frac{GM_M m}{r}.$$

Así, la energía mecánica total es:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_M m}{r}.$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad orbital $v = \sqrt{\frac{GM_M}{r}}$:

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_M}{r}\right) = \frac{GM_M m}{2r} = -\frac{GM_M m}{r}.$$

Entonces,

$$E_m = \frac{GM_M m}{2r} - \frac{GM_M m}{r} = -\frac{GM_M m}{2r}.$$

Para que el satélite escape del campo gravitatorio de Mercurio, la energía mecánica total debe ser al menos cero. Por lo tanto, el incremento de energía necesario es:

$$\Delta E_m = -E_m = \frac{GM_M m}{2r}.$$

Dado que el combustible disponible puede proporcionar una energía de $4,5 \cdot 10^9$ J:

$$\Delta E_m = 4,5 \cdot 10^9 \text{ J} = \frac{GM_M m}{2r}.$$

Despejando la masa máxima $m_{\text{máx}}$:

$$m_{\text{máx}} = \frac{2r\Delta E_m}{GM_M}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$m_{\text{máx}} = \frac{2 \cdot 3,360 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 4,5 \cdot 10^9 \text{ J}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 3,285 \cdot 10^{23} \text{ kg}} = 1,38 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

Por lo tanto, la masa máxima que podría tener el satélite MPO para escapar del campo gravitatorio de Mercurio, utilizando la energía disponible del combustible, es $m_{\text{máx}} = 1{,}38 \cdot 10^3$ kg.

Problema 2

Al laboratori dissenyem un experiment amb dues masses que fan moviments independents. La primera massa és de 0, 5 kg i penja d'una molla vertical. La segona massa es troba subjectada a un disc vertical que gira a una velocitat angular de 6, 41 rad/s i el centre d'aquesta massa és a una distància de 19 cm del centre del disc. Ambdues masses s'il·luminen lateralment i s'observa que les seves ombres segueixen exactament el mateix moviment harmònic simple. Per a aconseguir-ho, deixem anar des de baix la massa de la molla just a $t = 0$ s, moment en què la massa del disc també passa pel punt més baix de la rotació.

a) **Escriviu l'equació de la posició vertical de les ombres respecte al temps. Trobeu la constant elàstica de la molla i l'energia mecànica del moviment harmònic simple.**

b) **Calculeu l'equació de la velocitat i l'energia cinètica respecte al temps de la massa que penja de la molla. Representeu en la quadrícula adjunta l'energia mecànica, l'energia potencial i l'energia cinètica en funció de la posició vertical per a la massa que penja de la molla.**

Solución:

a) **Escriviu l'equació de la posició vertical de les ombres respecte al temps. Trobeu la constant elàstica de la molla i l'energia mecànica del moviment harmònic simple.**

Primero, consideramos la posición vertical de la sombra de la masa que cuelga del resorte. Esta posición puede describirse como la componente vertical del vector posición de la masa respecto al centro del disco, que varía con el tiempo debido al movimiento armónico simple. La ecuación de la posición vertical es:

$$y(t) = A\cos(\theta) = A\cos(\omega t + \phi_0),$$

donde:
- $A = 0,19$ m es la amplitud del movimiento, que coincide con el radio,
- $\omega = 6{,}41$ rad/s es la velocidad angular,
- ϕ_0 es la fase inicial.

Dado que en $t = 0$ s la posición es $-A$, tenemos:

$$y(0) = -A = A\cos(\phi_0) \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi_0) = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \pi \text{ rad}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la posición queda:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \pi) = -A\cos(\omega t).$$

Sustituyendo los valores:

$$y(t) = -0{,}19 \text{ m} \cdot \cos(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t).$$

Para calcular la constante elástica del resorte, recordamos que la relación entre la velocidad angular ω, la constante elástica k y la masa m es:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad k = \omega^2 \cdot m.$$

Sustituyendo los valores:

$$k = (6{,}41 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}5 \text{ kg} = 20{,}54 \text{ N/m}.$$

La energía mecánica E_m en un movimiento armónico simple está dada por:

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 20{,}54 \text{ N/m} \cdot (0{,}19 \text{ m})^2 = 0{,}371 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la posición es $y(t) = -0{,}19 \text{ m} \cdot \cos(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t)$, la constante elástica del resorte es 20,54 N/m y la energía mecánica es 0,371 J.

b) **Calculeu l'equació de la velocitat i l'energia cinètica respecte al temps de la massa que penja de la molla. Representeu en la quadrícula adjunta l'energia mecànica, l'energia potencial i l'energia cinètica en funció de la posició vertical per a la massa que penja de la molla.**

La velocidad $v(t)$ es la derivada de la posición $y(t)$ respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-0{,}19 \text{ m} \cdot \cos(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t)\right] = 0{,}19 \text{ m} \cdot 6{,}41 \text{ rad/s} \cdot \sin(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t).$$

Simplificando:

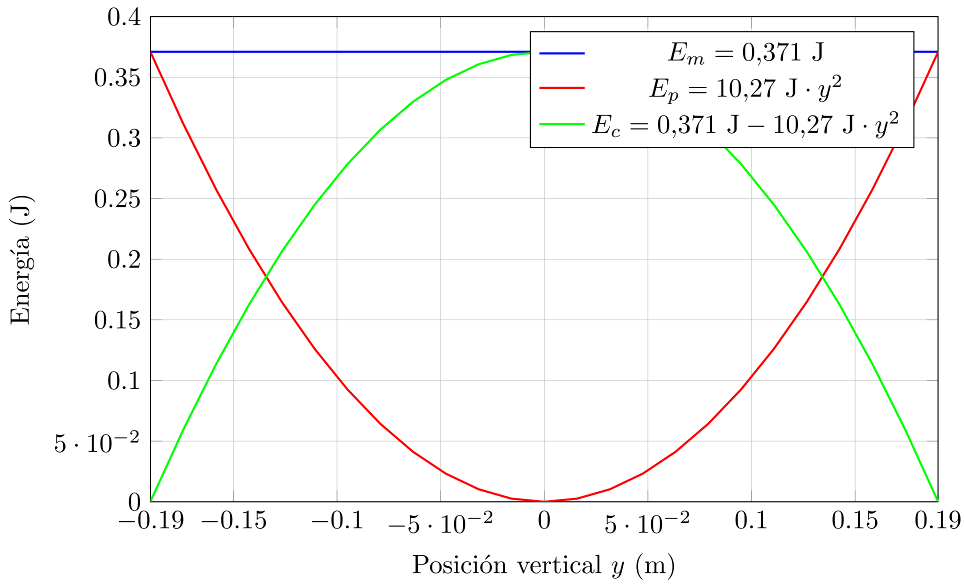
$$v(t) = 1{,}218 \text{ m/s} \cdot \sin(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t).$$

La energía cinética E_c está dada por:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \text{ kg} \cdot (1{,}218 \text{ m/s} \cdot \sin(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t))^2 = 0{,}371 \text{ J} \cdot \sin^2(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t).$$

Las gráficas de la energía mecánica E_m, la energía potencial E_p y la energía cinética E_c en función de la posición vertical y son las siguientes:

- *Energía mecánica:* $E_m = 0{,}371$ J.
- *Energía potencial:* $E_p = \frac{1}{2}ky^2 = 10{,}27 \text{ J} \cdot y^2$.
- *Energía cinética:* $E_c = E_m - E_p = 0{,}371 \text{ J} - 10{,}27 \text{ J} \cdot y^2$.



Por lo tanto, la velocidad es $v(t) = 1{,}218 \text{ m/s} \cdot \sin(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t)$ y la energía cinética es $E_c(t) = 0{,}371 \text{ J} \cdot \sin^2(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t)$.

Cataluña, Septiembre 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 1

Els sistemes planetaris tendeixen a formar-se en ressonància. Això vol dir que, quan un planeta completa n òrbites, el planeta veí en completa m, en què n i m són nombres enters. El novembre de 2023 la revista Nature publicava el descobriment de sis planetes que orbitaven en ressonància al voltant de l'estrella HD110067.

a) **Suposem que aquesta estrella té la massa del Sol i que els planetes tenen òrbites circulars. El sisè planeta, el més exterior, té un període de $54,7$ dies. Calculeu la distància entre el planeta i l'estrella. Representeu l'estrella i el planeta, dibuixeu el vector d'acceleració normal i calculeu-ne el mòdul.**

b) **El cinquè planeta completa 4 òrbites en el mateix temps que el sisè planeta en completa 3 (relació 4 : 3). Calculeu el radi de l'òrbita del cinquè planeta i la seva energia mecànica suposant que la seva massa és $2,5$ vegades la terrestre.**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ $\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}$.
Massa de la Terra, $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ **kg.**
Massa del Sol, $M_S = 1,98 \times 10^{30}$ **kg.**

Solución:

a) **Suposem que aquesta estrella té la massa del Sol i que els planetes tenen òrbites circulars. El sisè planeta, el més exterior, té un període de $54,7$ dies. Calculeu la distància entre el planeta i l'estrella. Representeu l'estrella i el planeta, dibuixeu el vector d'acceleració normal i calculeu-ne el mòdul.**

El sexto planeta tiene un período orbital de $T = 54.7\,\text{d}$. Primero, convertimos el periodo a segundos:

$$T = 54,7 \text{ días} \cdot 24 \, \frac{\text{h}}{\text{día}} \cdot 3600 \, \frac{\text{s}}{\text{h}} = 4\,725\,120 \text{ s}.$$

Usamos la ley de gravitación universal y el movimiento circular uniforme:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot \omega^2 \cdot r,$$

donde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Despejando r:

$$r^3 = \frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}.$$

Dado que la estrella tiene la masa del Sol, $M = M_S = 1,98 \cdot 10^{30}$ kg, y $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Calculamos r:

$$r^3 = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2) \cdot (1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}) \cdot (4\,725\,120 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 7,482 \cdot 10^{25} \text{ m}^3.$$

Entonces, la distancia es:

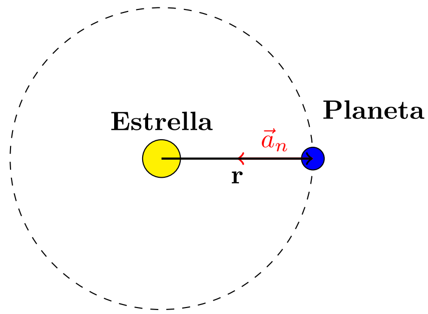
$$r = \sqrt[3]{7,482 \cdot 10^{25}} \text{ m} = 4,23 \cdot 10^8 \text{ km}.$$

El módulo de la aceleración normal es:

$$a_n = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}.$$

Calculamos:

$$a_n = \frac{4\pi^2 \cdot (4,23 \cdot 10^{11}\ \text{m})}{(4\,725\,120\ \text{s})^2} = 7,48 \cdot 10^{-2}\ \text{m/s}^2.$$



Por lo tanto, la distancia es $4,23 \cdot 10^8$ km y la aceleración normal del planeta es $a_n = 7,48 \cdot 10^{-2}$ m/s².

b) **El cinquè planeta completa 4 òrbites en el mateix temps que el sisè planeta en completa 3 (relació 4 : 3). Calculeu el radi de l'òrbita del cinquè planeta i la seva energia mecànica suposant que la seva massa és 2,5 vegades la terrestre.**

Dado que el quinto planeta completa 4 órbitas en el mismo tiempo que el sexto planeta completa 3, tenemos:

$$4 \cdot T_5 = 3 \cdot T_6 \implies T_5 = \frac{3}{4} \cdot T_6.$$

Entonces:

$$T_5 = \frac{3}{4} \cdot 4\,725\,120\ \text{s} = 3\,543\,840\ \text{s}.$$

Usamos la tercera ley de Kepler:

$$\left(\frac{T_5}{T_6}\right)^2 = \left(\frac{r_5}{r_6}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{r_5}{r_6}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{16} = \left(\frac{r_5}{r_6}\right)^3.$$

Despejamos r_5:

$$r_5 = r_6 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{1/3} = 4,23 \cdot 10^{11}\ \text{m} \cdot 0,825 = 3,49 \cdot 10^{11}\ \text{m}.$$

La masa del quinto planeta es:

$$m = 2,5 \cdot M_T = 2,5 \cdot 5,98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} = 1,495 \cdot 10^{25}\ \text{kg}.$$

La energía mecánica es:

$$E_m = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r_5}.$$

Sustituimos los valores:

$$E_m = -\frac{(6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2) \cdot (1,98 \cdot 10^{30}\ \text{kg}) \cdot (1,495 \cdot 10^{25}\ \text{kg})}{2 \cdot 3,49 \cdot 10^{11}\ \text{m}} = -2,83 \cdot 10^{33}\ \text{J}.$$

Por lo tanto, el radio de la órbita del quinto planeta es $r_5 = 3,49 \cdot 10^{11}$ m y su energía mecánica es $E_m = -2,83 \cdot 10^{33}$ J.

Cataluña, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Problema 1

Els dos satèl·lits de Mart, Fobos i Deimos, porten el nom dels fills bessons d'Afrodita i Ares. En la mitologia romana, Ares, déu de la guerra, s'identifica amb Mart. Els dos satèl·lits tenen forma irregular, però els podem aproximar a una esfera de diàmetre 22, 2 km per a Fobos i de 12, 6 km per a Deimos. Per tant, comparats amb la Lluna, que té un diàmetre de 3 475 km, són petits. El radi orbital mitjà (distància entre els centres dels dos objectes) de Fobos al voltant de Mart és de 9 377 km i el seu període de revolució és de 7 hores, 39 minuts i 14 segons. Sabent que el radi orbital mitjà de Deimos és de 23 460 km, determineu a partir d'aquestes dades:

a) **La massa de Mart i la intensitat del camp gravitatori que Mart crea a la seva superfície.**
b) **El període de revolució de Deimos al voltant de Mart i la seva energia mecànica.**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.
Massa de Fobos, $M_{\text{Fobos}} = 1,10 \times 10^{16}$ **kg.**
Massa de Deimos, $M_{\text{Deimos}} = 2,00 \times 10^{15}$ **kg.**
Radi de Mart, $R_{\text{Mart}} = 3\,390$ **km.**
Nota: Considereu que els dos satèl·lits descriuen una trajectòria circular al voltant de Mart.

Solución:

a) **La massa de Mart i la intensitat del camp gravitatori que Mart crea a la seva superfície.**

Primero, convertimos el período orbital de Fobos a segundos:

$$T = 7\ \text{h} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} + 39\ \text{min} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} + 14\ \text{s} = 25\,200\ \text{s} + 2\,340\ \text{s} + 14\ \text{s} = 27\,554\ \text{s}.$$

Calculamos la velocidad angular orbital de Fobos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{27\,554\ \text{s}} = 2{,}28 \cdot 10^{-4}\ \text{rad/s}.$$

Según la ley de gravitación universal, el módulo de la fuerza gravitatoria sobre Fobos debido a Marte es:

$$F = G \cdot \frac{M_{\text{Marte}} \cdot M_{\text{Fobos}}}{r^2}.$$

Por otro lado, según la segunda ley de Newton, la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular uniforme es:

$$F = M_{\text{Fobos}} \cdot a_{\text{c}} = M_{\text{Fobos}} \cdot \omega^2 r.$$

Igualando ambas expresiones:

$$G \cdot \frac{M_{\text{Marte}} \cdot M_{\text{Fobos}}}{r^2} = M_{\text{Fobos}} \cdot \omega^2 r.$$

Simplificamos M_{Fobos}:

$$G \cdot \frac{M_{\text{Marte}}}{r^2} = \omega^2 r.$$

Despejamos la masa de Marte:

$$M_{\text{Marte}} = \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G}.$$

Sustituimos los valores (convirtiendo las distancias a metros):
– $\omega = 2{,}28 \cdot 10^{-4}$ rad/s,
– $r = 9\,377$ km $= 9{,}377 \cdot 10^6$ m,
– $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.
Calculamos:

$$M_{\text{Marte}} = \frac{(2{,}28 \cdot 10^{-4}\ \text{rad/s})^2 \cdot (9{,}377 \cdot 10^6\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}.$$

Ahora, calculamos la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Marte. La aceleración gravitatoria es:

$$g = G \cdot \frac{M_{\text{Marte}}}{R^2_{\text{Marte}}},$$

con $R_{\text{Marte}} = 3\,390$ km $= 3{,}390 \cdot 10^6$ m. Calculamos:

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{(3{,}390 \cdot 10^6\ \text{m})^2} = 3{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Por lo tanto, la masa de Marte es $M_{\text{Marte}} = 6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg y la intensidad del campo gravitatorio en su superficie es $g = 3{,}72$ m/s^2.

b) El període de revolució de Deimos al voltant de Mart i la seva energia mecànica.

Utilizamos la relación entre la velocidad angular y el radio orbital para satélites en órbita circular:

$$\omega = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{Marte}}}{r^3}},$$

con $r = 23\,460$ km $= 23{,}460 \cdot 10^6$ m y $M_{\text{Marte}} = 6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg. Calculamos:

$$\omega = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{(23{,}460 \cdot 10^6\ \text{m})^3}} = 5{,}76 \cdot 10^{-5}\ \text{rad/s}.$$

El período es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5{,}76 \cdot 10^{-5}\ \text{rad/s}} = 1{,}09 \cdot 10^5\ \text{s}.$$

Convertimos el período a horas:

$$T_{\text{horas}} = \frac{1{,}09 \cdot 10^5\ \text{s}}{3600\ \text{s/h}} = 30{,}3\ \text{horas}.$$

Ahora, calculamos la energía mecánica de Deimos en su órbita alrededor de Marte. La energía mecánica es:

$$E_{\text{m}} = -\frac{G \cdot M_{\text{Marte}} \cdot M_{\text{Deimos}}}{2r}.$$

Sustituimos $M_{\text{Deimos}} = 2{,}00 \cdot 10^{15}$ kg y $r = 23{,}460 \cdot 10^6$ m:

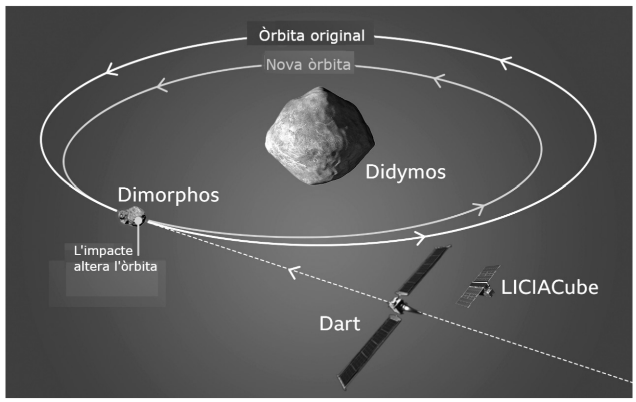
$$E_{\text{m}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg} \cdot 2{,}00 \cdot 10^{15}\ \text{kg}}{2 \cdot 23{,}460 \cdot 10^6\ \text{m}} = -1{,}83 \cdot 10^{21}\ \text{J}.$$

Por lo tanto, el período de revolución de Deimos es $T = 1{,}09 \cdot 10^5$ s (aproximadamente 30,3 horas) y su energía mecánica es $E_\mathrm{m} = -1{,}83 \cdot 10^{21}$ J.

Cataluña, Septiembre 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 1

El mes de novembre del 2021, la NASA va llançar la missió DART (Double Asteroid Redirection Test). Aquesta missió té per objectiu canviar l'òrbita de Dimorphos, un petit asteroide que orbita al voltant de Didymos, que és un asteroide més gran.



a) **A partir de la llei de la gravitació universal, trobeu l'expressió de la intensitat del camp gravitatori que crea un objecte astronòmic esfèric de massa M i radi R a la seva superfície. El diàmetre de Didymos és de 781 m i la seva densitat és de 2 146 kg/m^3. Calculeu el valor de la intensitat del camp gravitatori que crea Didymos a la seva superfície. Si Dimorphos té una massa de $4,42 \times 10^{10}$ kg i el radi orbital mitjà (distància entre els centres dels dos objectes) és d'1, 12 km, calculeu el mòdul de la força gravitatòria mitjana entre Didymos i Dimorphos.**

b) **L'objectiu de la missió DART és colpejar Dimorphos, de tal manera que orbiti en una nova òrbita de radi menor, com s'indica en la figura anterior. Deduïu, a partir de principis fonamentals, l'expressió de la velocitat orbital d'un satèl·lit en funció del radi de l'òrbita. Argumenteu si Dimorphos orbitarà a més velocitat a la nova òrbita o a l'òrbita original.**

Dada:
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ **N m^2 kg^{-2}.**
Nota: Considereu que les òrbites són circulars i que els dos asteroides són esfèrics.

Solució:

a) **A partir de la llei de la gravitació universal, trobeu l'expressió de la intensitat del camp gravitatori que crea un objecte astronòmic esfèric de massa M i radi R a la seva superfície. El diàmetre de Didymos és de 781 m i la seva densitat és de 2 146 kg/m^3. Calculeu el valor de la intensitat del camp gravitatori que crea Didymos a la seva superfície. Si Dimorphos té una massa de $4,42 \times 10^{10}$ kg i el radi orbital mitjà (distància entre els centres dels dos objectes) és d'1, 12 km, calculeu el mòdul de la força gravitatòria mitjana entre Didymos i Dimorphos.**

La fuerza gravitatoria ejercida por una masa M sobre un objeto de masa m a una distancia r es:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

La intensidad del campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) en ese punto es:

$$g = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}.$$

En la superficie del objeto esférico, $r = R$, por lo que la expresión de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie es:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}.$$

Tenemos los siguientes datos:
- Diámetro de Didymos: $D = 781$ m.
- Radio de Didymos: $R = \frac{D}{2} = \frac{781 \text{ m}}{2} = 390{,}5$ m.
- Densidad de Didymos: $\rho = 2\,146$ kg/m^3.

El volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Entonces, la masa es:

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Sustituyendo los valores:

$$M = 2\,146 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3}\pi (390{,}5 \text{ m})^3 = 5{,}365 \cdot 10^{11} \text{ kg}.$$

QUeremos hallar la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Didymos. Utilizamos la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}365 \cdot 10^{11} \text{ kg}}{(390{,}5 \text{ m})^2} = 2{,}35 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ahora, buscamos calcular el módulo de la fuerza gravitatoria entre Didymos y Dimorphos. Se tiene que:
- Masa de Dimorphos: $m = 4{,}42 \cdot 10^{10}$ kg.
- Distancia entre centros (radio orbital): $r = 1{,}12$ km $= 1{,}120$ m.

Utilizamos la ley de gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Sustituimos los valores:

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}365 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot 4{,}42 \cdot 10^{10} \text{ kg}}{(1{,}120 \text{ m})^2} = 1{,}26 \cdot 10^{6} \text{ N}.$$

Por lo tanto la intensidad del campo gravitatorio que Didymos crea en su superficie es $g = 2{,}35 \cdot 10^{-4}$ m/s^2 y el módulo de la fuerza gravitatoria entre Didymos y Dimorphos es $F = 1{,}26 \cdot 10^{6}$ N.

b) **L'objectiu de la missió DART és colpejar Dimorphos, de tal manera que orbiti en una nova òrbita de radi menor, com s'indica en la figura anterior. Deduïu, a partir de principis fonamentals, l'expressió de la velocitat orbital d'un satèl·lit en funció del radi de l'òrbita. Argumenteu si Dimorphos orbitarà a més velocitat a la nova òrbita o a l'òrbita original.**

Para un satélite de masa m orbitando alrededor de un cuerpo de masa M en una órbita circular de radio r, la fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria:

$$F_{\text{gravitatoria}} = F_{\text{centrípeta}} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Simplificamos m en ambos lados:

$$G \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}.$$

Multiplicamos ambos lados por r:

$$G \cdot \frac{M}{r} = v^2.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}.$$

De la expresión anterior, observamos que:

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Es decir, la velocidad orbital es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio orbital.

Si el radio de la órbita disminuye (es decir, r se hace más pequeño), entonces $\sqrt{r}$ disminuye y, por lo tanto, la velocidad orbital v aumenta.

Por lo tanto, después de ser impactado por la misión DART y entrar en una órbita de radio menor, Dimorphos orbitará a una mayor velocidad que en la órbita original.

Cataluña, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Problema 1

a) **Un satèlit descriu una trajectòria circular de radi R al voltant d'una massa central. El temps que triga a donar-hi una volta sencera és T. Deduïu l'expressió per a calcular la intensitat del camp gravitatori, g, creat per la massa central en els punts de l'òrbita del satèl·lit en funció dels paràmetres R i T. Considereu que la Lluna descriu una òrbita circular al voltant de la Terra amb una distància entre centres de 384×10^6 m i amb un període de $27,3$ dies. Fent ús només d'aquestes dues dades i de l'expressió trobada anteriorment, calculeu la intensitat del camp gravitatori als punts de l'òrbita de la Lluna.**

b) **Deduïu l'expressió de l'energia cinètica mínima necessària perquè un coet de massa m pugui escapar d'un objecte astronòmic de massa M i radi R. Quantes vegades més gran és l'energia cinètica mínima perquè el coet pugui escapar de la Terra respecte de l'energia mínima que necessita per a escapar de la Lluna? (Només podeu fer servir les dades donades tot seguit.)**

Dades:
$M_{\text{Terra}} = 81,3 \times M_{\text{Lluna}}$.
$R_{\text{Terra}} = 3,67 \times R_{\text{Lluna}}$.

Solució:

a) **Un satèlit descriu una trajectòria circular de radi R al voltant d'una massa central. El temps que triga a donar-hi una volta sencera és T. Deduïu l'expressió per a calcular la intensitat del camp gravitatori, g, creat per la massa central en els punts de l'òrbita del satèl·lit en funció dels paràmetres R i T. Considereu que la Lluna descriu una òrbita circular al voltant de la Terra amb una distància entre centres de 384×10^6 m i amb un període de $27,3$ dies. Fent ús només d'aquestes dues dades i de l'expressió trobada anteriorment, calculeu la intensitat del camp gravitatori als punts de l'òrbita de la Lluna.**

Para un satélite que describe una trayectoria circular uniforme, la fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_{\text{g}} = F_{\text{c}} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Simplificando y eliminando la masa m:

$$g = \frac{v^2}{R},$$

donde v es la velocidad orbital del satélite. La velocidad orbital puede relacionarse con el período T mediante:

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

Sustituyendo en la expresión de g:

$$g = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio es:

$$g = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

En este caso, se tiene que:

$$R = 384 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$T = 27,3 \text{ días} = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 2{,}358720 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

Sustituyendo en la expresión de g:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 384 \cdot 10^6 \text{ m}}{(2{,}358720 \cdot 10^6 \text{ s})^2} = 2{,}72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio es $g = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$ y, en el caso propuesto, tiene un valor de $2{,}72 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

b) **Deduïu l'expressió de l'energia cinètica mínima necessària perquè un coet de massa m pugui escapar d'un objecte astronòmic de massa M i radi R. Quantes vegades més gran és l'energia cinètica mínima perquè el coet pugui escapar de la Terra respecte de l'energia mínima que necessita per a escapar de la Lluna? (Només podeu fer servir les dades donades tot seguit.)**

La energía cinética mínima necesaria para escapar de la influencia gravitatoria de un objeto astronómico es la energía requerida para superar la energía potencial gravitatoria. Esto se conoce como la energía de escape, E_{esc}. Aplicando el principio de la conservación de la energía mecánica, podemos deducir que

$$E_{\text{esc}} = \frac{GMm}{R},$$

donde:
- G es la constante de gravitación universal,
- M es la masa del objeto astronómico,
- R es el radio del objeto astronómico,
- m es la masa del cohete.

Dado que:

$$M_{\text{Tierra}} = 81{,}3 \cdot M_{\text{Luna}},$$

$$R_{\text{Tierra}} = 3{,}67 \cdot R_{\text{Luna}},$$

la energía de escape de la Tierra respecto a la Luna es:

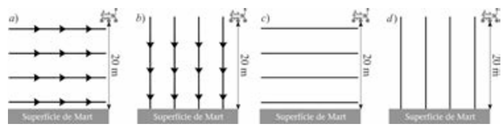
$$\frac{E_{\text{esc,Tierra}}}{E_{\text{esc,Luna}}} = \frac{\dfrac{GM_{\text{Tierra}}m}{R_{\text{Tierra}}}}{\dfrac{GM_{\text{Luna}}m}{R_{\text{Luna}}}} = \frac{M_{\text{Tierra}}}{M_{\text{Luna}}} \cdot \frac{R_{\text{Luna}}}{R_{\text{Tierra}}} = 81{,}3 \cdot \frac{1}{3{,}67} = 22{,}1.$$

Por lo tanto, la energía cinética mínima necesaria para escapar de la Tierra es 22,1 veces mayor que la necesaria para escapar de la Luna.

Problema 6

El juliol del 2020 la NASA va posar en marxa una missió espacial que, entre altres tasques, havia de fer arribar el vehicle d'exploració Perseverance a la superfície de Mart. El 18 de febrer de 2021 va tenir lloc l'aterratge del vehicle. En la darrera etapa d'aquest procés complex d'aterratge, una grua fa baixar d'una manera controlada el vehicle des d'una altura de $20,0$ m per sobre de la superfície de Mart. Durant tot aquest recorregut, la intensitat del camp gravitatori es pot considerar uniforme.

a) **El valor absolut de la diferència de potencial gravitatori entre la superfície del planeta i un punt elevat $20,0$ m per sobre de la superfície és $74,4$ J/kg. A partir de la diferència de potencial, determineu el mòdul de la intensitat del camp gravitatori a la superfície de Mart. Quin dels esquemes següents (a, b, c o d) representa les línies equipotencials a la superfície de Mart? Situeu en el diagrama triat la línia de menor potencial (V_{baix}) i la de major potencial (V_{alt}). Justifiqueu totes les respostes.**



b) **Si durant aquesta darrera etapa, el vehicle fa un descens de $20,0$ m a una velocitat constant, quin treball ha fet la grua? Podeu negligir el treball fet per les forces de fregament.**

Dada:
Massa del vehicle, $m = 1\,025$ kg.

Solució:

a) **El valor absolut de la diferència de potencial gravitatori entre la superfície del planeta i un punt elevat $20,0$ m per sobre de la superfície és $74,4$ J/kg. A partir de la diferència de potencial, determineu el mòdul de la intensitat del camp gravitatori a la superfície de Mart. Quin dels esquemes següents (a, b, c o d) representa les línies equipotencials a la superfície de Mart? Situeu en el diagrama triat la línia de menor potencial (V_{baix}) i la de major potencial (V_{alt}). Justifiqueu totes les respostes.**

Sabemos que la diferencia de potencial gravitatorio en un campo gravitatorio uniforme se calcula como:

$$|\Delta V| = g \cdot d,$$

donde:
- $|\Delta V|$ es el valor absoluto de la diferencia de potencial gravitatorio (J/kg),
- g es la intensidad del campo gravitatorio (m/s^2),
- d es la distancia vertical entre los dos puntos (m).

Despejando g:

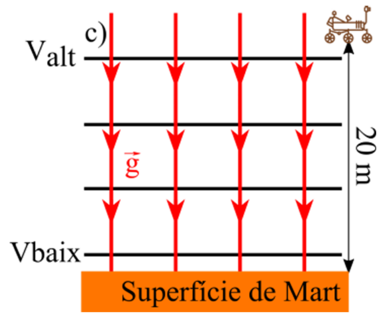
$$g = \frac{|\Delta V|}{d}.$$

Sustituyendo los valores dados:

$$g = \frac{74,4 \text{ J/kg}}{20,0 \text{ m}} = 3,72 \text{ m/s}^2.$$

Las líneas equipotenciales son superficies donde el potencial gravitatorio es constante. En un campo gravitatorio uniforme, como el que se considera en este problema, las líneas equipotenciales son planos horizontales y paralelos entre sí. Además, las líneas de campo gravitatorio son perpendiculares a las superficies equipotenciales y apuntan en la dirección en la que el potencial disminuye. Observando los esquemas proporcionados, el esquema que muestra líneas equipotenciales horizontales es el **esquema c)**.

En un campo gravitatorio, el potencial gravitatorio es mayor en los puntos más elevados y disminuye al acercarse a la superficie del planeta. Por lo tanto:
- La línea equipotencial a mayor altura corresponde a un potencial más alto (V_{alto}).
- La línea equipotencial más cercana a la superficie corresponde a un potencial más bajo (V_{bajo}).



Recordemos que las líneas equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo gravitatorio. En un campo gravitatorio uniforme, las líneas de campo son verticales y apuntan hacia abajo. El potencial gravitatorio disminuye en la dirección del campo gravitatorio.

Por lo tanto, el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Marte es $g = 3,72$ m/s^2 y el esquema correcto es el c).

b) Si durant aquesta darrera etapa, el vehicle fa un descens de 20,0 m a una velocitat constant, quin treball ha fet la grua? Podeu negligir el treball fet per les forces de fregament.

Tenemos que el vehículo desciende $d = 20,0$ m a velocidad constante, por lo que la aceleración es cero. Además, la fuerza neta sobre el vehículo es cero: la fuerza de la grúa ($F_{\text{grúa}}$) equilibra el peso (P):
- Peso: $P = m \cdot g$.
- Fuerza de la grúa: $F_{\text{grúa}}$.

El trabajo realizado por una fuerza constante es:

$$W = F \cdot d \cdot \cos\theta,$$

donde:
- F es la magnitud de la fuerza,
- d es el desplazamiento,
- θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

En este caso:
- $F = F_{\text{grúa}} = m \cdot g$,
- $d = 20,0$ m,
- $\theta = 180°$ (la fuerza de la grúa es hacia arriba y el desplazamiento hacia abajo).

Entonces,

$$W_{\text{grúa}} = F_{\text{grúa}} \cdot d \cdot \cos(180°) = (m \cdot g) \cdot d \cdot (-1).$$

Sustituyendo los valores:

$$W_{\text{grúa}} = -(1\,025 \text{ kg}) \cdot (3,72 \text{ m/s}^2) \cdot (20,0 \text{ m}) = -76\,230 \text{ J}.$$

El trabajo realizado por la grúa es negativo, lo que indica que la fuerza de la grúa realiza un trabajo en sentido opuesto al desplazamiento. La grúa aplica una fuerza hacia arriba para controlar el descenso y mantener la velocidad constante, contrarrestando parcialmente el peso.

Por lo tanto, el trabajo realizado por la grúa es $\boldsymbol{W_{\text{grúa}} = -76\,230}$ J.

Cataluña, Septiembre 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 1

El març del 2021 es va llançar el primer nanosatèl·lit de la Generalitat de Catalunya a l'espai. Els nanosatèl·lits tenen com a funció millorar les comunicacions, controlar els cabals dels cursos d'aigua i prevenir incendis. També contribueixen a la recerca i realització de missions espacials més àgils i econòmiques. Aquests nanosatèl·lits acostumen a orbitar a uns 500 km d'altura (distància respecte a la superfície de la Terra).

a) **Suposant que l'òrbita d'un d'aquests nanosatèl·lits és circular, a partir de la llei de la gravitació universal deduïu-ne l'expressió de la velocitat orbital en funció del radi orbital. Calculeu també la velocitat i el període orbitals d'aquests nanosatèl·lits.**

b) **Partint de la llei de la conservació de l'energia mecànica (negligiu la força de fregament), deduïu l'expressió de la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita un satèl·lit en funció del radi orbital. Calculeu la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita el nanosatèl·lit a 500 km d'altura.**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.
Massa de la Terra, $M_{\text{Terra}} = 5,98 \times 10^{24}$ **kg.**
Radi de la Terra, $R_{\text{Terra}} = 6\,370$ **km.**

Solución:

a) **Suposant que l'òrbita d'un d'aquests nanosatèl·lits és circular, a partir de la llei de la gravitació universal deduïu-ne l'expressió de la velocitat orbital en funció del radi orbital. Calculeu també la velocitat i el període orbitals d'aquests nanosatèl·lits.**

Vamos a deducir la expresión de la velocidad orbital. Según la ley de la gravitación universal de Newton, la fuerza gravitatoria que actúa sobre un satélite de masa m orbitando a una distancia r de la masa de la Tierra M se expresa como:

$$F_{\mathrm{g}} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}.$$

Por otro lado, para un movimiento circular uniforme, la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en órbita es:

$$F_{\mathrm{c}} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

En equilibrio, estas dos fuerzas son iguales:

$$F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{c}} \implies \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Simplificando y despejando la velocidad orbital v:

$$\frac{G \cdot M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

Calculamos el radio de la órbita:

$$r = R_{\text{Tierra}} + h = 6{,}370 \cdot 10^6 \text{ m} + 5{,}00 \cdot 10^5 \text{ m} = 6{,}870 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6{,}87 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}} = 7{,}62 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

El período orbital se calcula mediante la fórmula:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot 6{,}87 \cdot 10^6 \text{ m}}{7{,}62 \cdot 10^3 \text{ m/s}} \approx \frac{4{,}31 \cdot 10^7 \text{ s}}{7{,}62 \cdot 10^3} = 5{,}66 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Convertimos a horas:

$$T = \frac{5{,}66 \cdot 10^3 \text{ s}}{3{,}600 \text{ s/h}} = 1{,}57 \text{ h}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital es $v = 7{,}62{\cdot}10^3$ m/s y el período orbital es $T = 1{,}57$ horas.

b) **Partint de la llei de la conservació de l'energia mecànica (negligiu la força de fregament), deduïu l'expressió de la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita un satèl·lit en funció del radi orbital. Calculeu la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita el nanosatèl·lit a 500 km d'altura.**

Vamos a deducir la expresión de la velocidad de lanzamiento. Partiendo de la ley de conservación de la energía mecánica, donde se desprecia la fuerza de fricción, la energía mecánica total en la superficie de la Tierra debe ser igual a la energía mecánica en la órbita:

$$E_{\text{mecánica, superficie}} = E_{\text{mecánica, órbita}} \quad \Rightarrow \quad E_{c,\text{superficie}} + E_{p,\text{superficie}} = E_{c,\text{órbita}} + E_{p,\text{órbita}}.$$

En la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitatoria es:

$$E_{p,\text{superficie}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R_{\text{Tierra}}}.$$

En la órbita circular, la energía cinética es:

$$E_{c,\text{órbita}} = \frac{1}{2} m v_{\text{órbita}}^2.$$

Y la energía potencial gravitatoria es:

$$E_{p,\text{órbita}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

La energía mecánica en la órbita es:

$$E_{\text{mecánica, órbita}} = \frac{1}{2} m v_{\text{órbita}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

Igualando las energías:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R_{\text{Tierra}}} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

Simplificando y despejando v:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{R_{\text{Tierra}}} - \frac{1}{r} \right)}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \left(\frac{2}{6{,}370 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{6{,}870 \cdot 10^6 \text{ m}} \right)} = 8{,}2 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}.$$

Por lo tanto, la velocidad de lanzamiento necesaria para poner en órbita el nanosatélite a 500 km de altura es $v_{\text{lanzamiento}} = 8{,}2 \cdot 10^3$ m/s.

Cataluña, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Problema 1

Gràcies a les valuoses dades sobre les posicions dels astres que Tycho Brahe va recollir al llarg de la seva vida, Johannes Kepler va poder formular les seves famoses tres lleis.

a) **Deduïu la tercera llei de Kepler a partir de la segona llei de Newton i de la llei de gravitació universal, suposant que els planetes descriuen moviments circulars uniformes.**

b) **A partir de les dades de la taula, determineu la massa del Sol.**

Planeta	**Radi de l'òrbita (10^9 m)**	**Període (anys)**
Mercuri	$57,90$	$0,2408$
Venus	$108,2$	$0,6152$
Terra	$149,6$	$1,000$
Mart	$228,0$	$1,881$

Dada:
$\boldsymbol{G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}}$.

Solución:

a) **Deduïu la tercera llei de Kepler a partir de la segona llei de Newton i de la llei de gravitació universal, suposant que els planetes descriuen moviments circulars uniformes.**

La tercera ley de Kepler establece que el cuadrado del período orbital T de un planeta es directamente proporcional al cubo del radio de su órbita r, es decir:

$$T^2 \propto r^3.$$

Supongamos que los planetas se mueven en órbitas circulares uniformes alrededor del Sol. La aceleración centrípeta a_c necesaria para mantener al planeta en su órbita está dada por:

$$a_\mathrm{c} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

donde v es la velocidad orbital y ω es la frecuencia angular. La velocidad orbital v puede expresarse en función del período T:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Por lo tanto, la aceleración centrípeta se convierte en:

$$a_\mathrm{c} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r.$$

Según la ley de gravitación universal de Newton, la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre el planeta es:

$$F = G\frac{M_\mathrm{Sol} m}{r^2},$$

donde G es la constante de gravitación universal, M_Sol es la masa del Sol y m es la masa del planeta. La segunda ley de Newton establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración:

$$F = ma.$$

Por lo tanto, la aceleración centrípeta también puede expresarse como:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM_\mathrm{Sol}}{r^2}.$$

Igualando las dos expresiones de la aceleración centrípeta:

$$\frac{GM_{\text{Sol}}}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r.$$

Simplificando:

$$GM_{\text{Sol}} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}.$$

De donde se deduce la tercera ley de Kepler para órbitas circulares:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Sol}}} r^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_{\text{Sol}}}{4\pi^2}.$$

Por lo tanto, la tercera ley de Kepler se deduce como,

$$\boldsymbol{T^2 \propto r^3},$$

donde el período orbital T al cuadrado es proporcional al cubo del radio de la órbita r.

b) A partir de les dades de la taula, determineu la massa del Sol.

Utilizamos la expresión deducida en la parte a):

$$M_{\text{Sol}} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

Tomemos los datos de la Tierra:

$$r = 149{,}6 \cdot 10^9 \text{ m}, \quad T = 1{,}000 \text{ años}.$$

Convertimos el período T a segundos:

$$T = 1{,}000 \text{ años} = 1{,}000 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}15576 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

Sustituyendo en la fórmula:

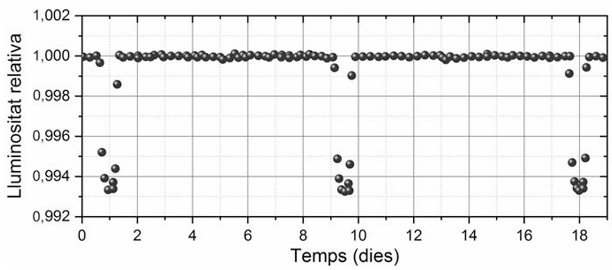
$$M_{\text{Sol}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (149{,}6 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2} \cdot (3{,}15576 \cdot 10^7 \text{ s})^2} = 1{,}99 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Por lo tanto, la solución es $M_{\text{Sol}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Cataluña, Septiembre 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 1

Un dels mètodes emprats per a detectar exoplanetes (planetes extrasolars) és l'observació del trànsit planetari, un fenomen astronòmic que s'esdevé quan un planeta passa per davant de l'estel al voltant del qual orbita i que es percep des de la Terra per la disminució de la llum de l'estel. El gràfic següent mostra la variació de lluminositat provocada pel trànsit d'un planeta que descriu una òrbita circular al voltant d'un estel. Aquest estel té una massa pràcticament idèntica a la massa del Sol. Considereu que la constant de Kepler d'aquest sistema és igual a la del Sistema Solar.



a) **Calculeu el període i el radi de l'òrbita.**
b) **Determineu el mòdul de la velocitat i l'acceleració centrípeta del planeta.**

Dada: Radi orbital mitjà de la Terra = $1,00$ ua = $1,50 \times 10^{11}$ m.

Solución:

a) **Calculeu el període i el radi de l'òrbita.**

A partir del gráfico, observamos que el tiempo total de un ciclo completo de tránsito es de $2T = 17$ días:

$$T = \frac{17 \text{ días}}{2} = 8{,}5 \text{ días}.$$

Convertimos los días a segundos:

$$T = 8{,}5 \text{ días} \cdot 24 \ \frac{\text{h}}{\text{día}} \cdot 3600 \ \frac{\text{s}}{\text{h}} = 7{,}344 \cdot 10^5 \text{ s}.$$

La tercera ley de Kepler establece que para dos cuerpos que orbitan alrededor de un centro común, se cumple:

$$\frac{r_{\text{orb}}^3}{T^2} = \frac{r_{\text{Tierra}}^3}{T_{\text{Tierra}}^2}.$$

Dado que la constante de Kepler es la misma y la masa de la estrella es igual a la del Sol, podemos expresar:

$$r_{\text{orb}} = r_{\text{Tierra}} \left(\frac{T}{T_{\text{Tierra}}} \right)^{2/3}.$$

Consideramos que el período orbital de la Tierra $T_{\text{Tierra}} = 365{,}25$ días $= 3{,}156 \cdot 10^7$ s.
Sustituyendo los valores:

$$r_{\text{orb}} = 1{,}50 \cdot 10^{11} \text{ m} \left(\frac{7{,}344 \cdot 10^5 \text{ s}}{3{,}156 \cdot 10^7 \text{ s}} \right)^{2/3} = 1{,}226 \cdot 10^{10} \text{ m}.$$

Por lo tanto, el periodo es $7{,}34 \cdot 10^5$ s y el radio de la órbita es $1{,}226 \cdot 10^{10}$ m.

b) **Determineu el mòdul de la velocitat i l'acceleració centrípeta del planeta.**

La velocidad orbital está dada por:

$$v_{\text{orb}} = \frac{2\pi r_{\text{orb}}}{T}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$v_{\text{orb}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}226 \cdot 10^{10} \text{ m}}{7{,}344 \cdot 10^5 \text{ s}} = 1{,}05 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

La aceleración centrípeta está dada por:

$$a_{\text{cent}} = \frac{v_{\text{orb}}^2}{r_{\text{orb}}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$a_{\text{cent}} = \frac{(1{,}05 \cdot 10^5 \text{ m/s})^2}{1{,}226 \cdot 10^{10} \text{ m}} = 0{,}895 \text{ m/s}^2.$$

Por lo tanto, la velocidad es $1{,}05 \cdot 10^5$ m/s y la aceleración centrípeta es $0{,}895$ m/s^2.

Cataluña, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Problema 3

La sonda solar Parker (en anglès, Parker Solar Probe) és una nau espacial en òrbita al voltant del Sol que té com a objectiu acostar-se molt a la superfície solar. La gràfica següent mostra com varia la distància de la nau respecte al Sol al llarg dels primers 1 000 dies de missió i indica els instants A, B i C. Les unitats emprades per a mesurar la distància a la superfície del Sol són radis solars, R_S.

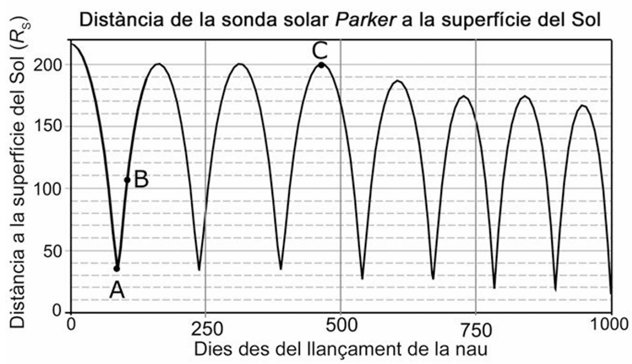


Figure 1: Font: `http://parkersolarprobe.jhuapl.edu`

a) **Observeu a la gràfica els moments de màxim acostament al Sol de cada òrbita i determineu quantes voltes completes ha fet la nau al voltant del Sol en aquests 1 000 dies. Quant mesura l'eix major de l'òrbita entre els moments A i C? (Doneu el resultat en radis solars.)**

b) **Representeu esquemàticament el Sol i l'òrbita de la nau entre els moments A i C. Indiqueu sobre el dibuix les posicions corresponents a A, B i C. Situeu la nau en la posició B i dibuixeu en aquest instant els vectors velocitat i acceleració de la nau (no cal calcular-ne els mòduls). En quina posició la velocitat de la nau és màxima? Justifiqueu la resposta i indiqueu el principi físic en què us baseu.**

Solución:

a) **Observeu a la gràfica els moments de màxim acostament al Sol de cada òrbita i determineu quantes voltes completes ha fet la nau al voltant del Sol en aquests 1 000 dies. Quant mesura l'eix major de l'òrbita entre els moments A i C? (Doneu el resultat en radis solars.)**

De la gráfica proporcionada, se observa que durante los primeros 1 000 días de misión, la sonda Parker ha completado 7 órbitas completas alrededor del Sol. Cada órbita completa corresponde a un ciclo completo de acercamiento y alejamiento del Sol.

Observando la gráfica, los momentos de máximo acercamiento al Sol (pericentro) y máximo alejamiento (apocentro) se identifican como puntos A y C, respectivamente. La distancia mínima al Sol en el pericentro es de $35\, R_S$ y la distancia máxima en el apocentro es de $200\, R_S$. Además, considerando el diámetro del Sol, que es $2\, R_S$, la longitud total del eje mayor de la órbita se calcula de la siguiente manera:

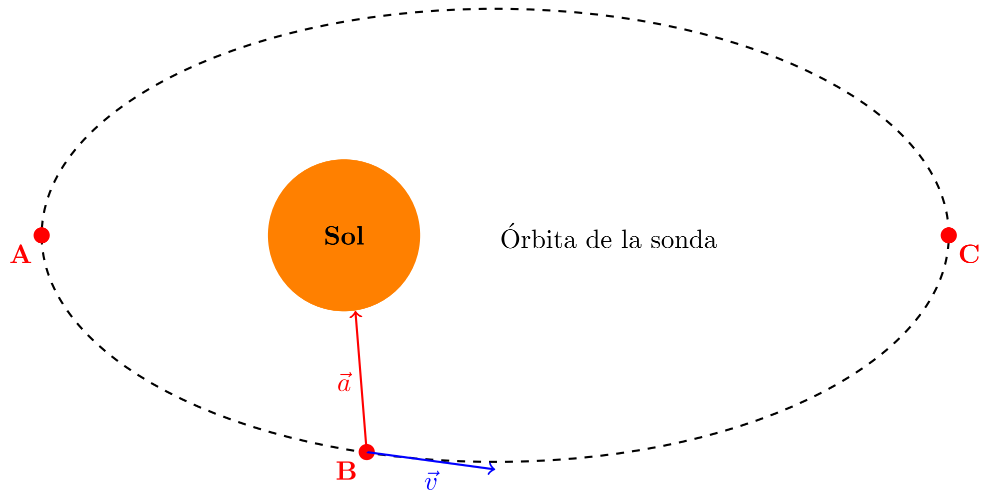
$$\begin{aligned}\text{Longitud del eje mayor} &= \text{Distancia máxima} + \text{Distancia mínima} + \text{Diámetro del Sol} \\ &= 200\, R_S + 35\, R_S + 2\, R_S = 237\, R_S.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es:

- **La sonda Parker ha completado 7 órbitas completas alrededor del Sol en los primeros 1 000 días de misión.**
- **La longitud del eje mayor de la órbita entre los momentos A y C es 237 R_S.**

b) **Representeu esquemàticament el Sol i l'òrbita de la nau entre els moments A i C. Indiqueu sobre el dibuix les posicions corresponents a A, B i C. Situeu la nau en la posició B i dibuixeu en aquest instant els vectors velocitat i acceleració de la nau (no cal calcular-ne els mòduls). En quina posició la velocitat de la nau és màxima? Justifiqueu la resposta i indiqueu el principi físic en què us baseu.**

Representación esquemática de la órbita:



La velocidad de la nave es máxima en el punto más cercano al Sol, es decir, en el pericentro (punto A). Esto se debe al principio de *conservación de la energía mecánica*. En una órbita elíptica, cuando la nave se acerca al Sol, la energía potencial gravitatoria disminuye (se vuelve más negativa) y, para conservar la energía mecánica total, la energía cinética debe aumentar, lo que resulta en una mayor velocidad. Además, según la *segunda ley de Kepler* (ley de las áreas), la línea que une una nave y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales, lo que implica que la velocidad es mayor cuando la nave está más cerca del Sol.

Por lo tanto, la solución es:

- **En el esquema, se observa la órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos. Las posiciones A, B y C corresponden a diferentes puntos de la órbita, siendo A el pericentro (punto más cercano) y C el apocentro (punto más alejado).**
- **En la posición B, ubicada en el punto medio de la órbita, se muestran los vectores velocidad ($\vec{v}$) y aceleración ($\vec{a}$) de la nave.**
- **La velocidad de la nave es máxima en la posición A, el pericentro, debido a la conservación de la energía mecánica y a la segunda ley de Kepler.**

Problema 6

El 1971 l'astronauta David Scott, de la missió Apollo 15, va fer l'experiment següent a la superfície de la Lluna: en una mà hi tenia una ploma de falcó de 30 g de massa i a l'altra mà hi tenia un martell d'alumini d'1, 32 kg. Els va deixar anar alhora des de la mateixa altura i va comprovar la predicció de Galileu segons la qual en caiguda lliure els dos objectes havien d'arribar simultàniament a terra. Concretament, tots dos objectes van trigar 1, 1 s a recórrer els 100 cm que els separaven del terra.

a) **A partir de l'experiment de David Scott, calculeu la intensitat del camp gravitatori a la superfície de la Lluna i la massa de la Lluna.**
b) **Calculeu el període orbital de la Lluna al voltant de la Terra.**

Dades:
$\boldsymbol{G = 6,67 \times 10^{-11}}$ **N·m²/kg².**
$\boldsymbol{M_{\text{Terra}} = 5,98 \times 10^{24}}$ **kg.**
Distància Terra-Lluna $\boldsymbol{= 3,84 \times 10^{8}}$ **m.**
$\boldsymbol{R_{\text{Lluna}} = 1,74 \times 10^{6}}$ **m.**

Solución:

a) **A partir de l'experiment de David Scott, calculeu la intensitat del camp gravitatori a la superfície de la Lluna i la massa de la Lluna.**

Para determinar la intensidad del campo gravitatorio (g) en la superficie de la Luna, utilizamos la ecuación del movimiento de caída libre:

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

donde $s = 1$ m es la distancia recorrida y $t = 1,1$ s es el tiempo de caída. Despejando g:

$$g = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{(1,1 \text{ s})^2} = 1,65 \text{ m/s}^2.$$

Ahora, para calcular la masa de la Luna (M_{Lluna}), usamos la ley de gravitación universal:

$$g = \frac{GM_{\text{Lluna}}}{R_{\text{Lluna}}^2}.$$

Despejando M_{Lluna}:

$$M_{\text{Lluna}} = \frac{gR_{\text{Lluna}}^2}{G},$$

donde $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2 es la constante de gravitación universal y $R_{\text{Lluna}} = 1,74 \cdot 10^6$ m es el radio de la Luna. Sustituyendo los valores:

$$M_{\text{Lluna}} = \frac{1,65 \text{ m/s}^2 \cdot (1,74 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N·m}^2/\text{kg}^2} = 7,50 \cdot 10^{22} \text{ kg}.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna es $\boldsymbol{1,65}$ **m/s²** **y la masa de la Luna es** $\boldsymbol{7,50 \cdot 10^{22}}$ **kg.**

b) **Calculeu el període orbital de la Lluna al voltant de la Terra.**

Para calcular el período orbital (T) de la Luna alrededor de la Tierra, utilizamos la tercera ley de Kepler combinada con la ley de gravitación universal:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{\text{Terra}}}},$$

donde:
- $r = 3,84 \cdot 10^8$ m es la distancia entre la Tierra y la Luna,
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2 es la constante de gravitación universal,
- $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra.

Sustituyendo los valores:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(3,84 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} = 2,37 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

Convertimos segundos a días:

$$T = \frac{2,37 \cdot 10^6 \text{ s}}{86400 \text{ s/día}} = 27,4 \text{ días}.$$

Por lo tanto, el período orbital de la Luna alrededor de la Tierra es de 27, 4 días.

Cataluña, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 1

La trajectòria de la Terra al voltant del Sol és una òrbita el·líptica; aquest fet fa que la distància des de la Terra al Sol no sigui la mateixa en totes les èpoques de l'any. El periheli, la distància més curta entre la Terra i el Sol, és de $1,471 \times 10^8$ km. La Terra passa pel periheli durant els primers dies del mes de gener de cada any. La velocitat de la Terra al periheli és de $30,75$ km/s. L'afeli és la posició més allunyada del Sol. Quan la Terra es troba a l'afeli, la seva velocitat orbital és de $28,76$ km/s.

a) **Dibuixeu una òrbita clarament el·líptica (no cal que sigui l'òrbita real) on s'indiqui la posició del Sol i la de la Terra un dia d'hivern de l'hemisferi nord. Utilitzant arguments basats en l'energia, justifiqueu per què la velocitat de la Terra és mínima a l'afeli. Quina és la distància de la Terra al Sol a l'afeli?**

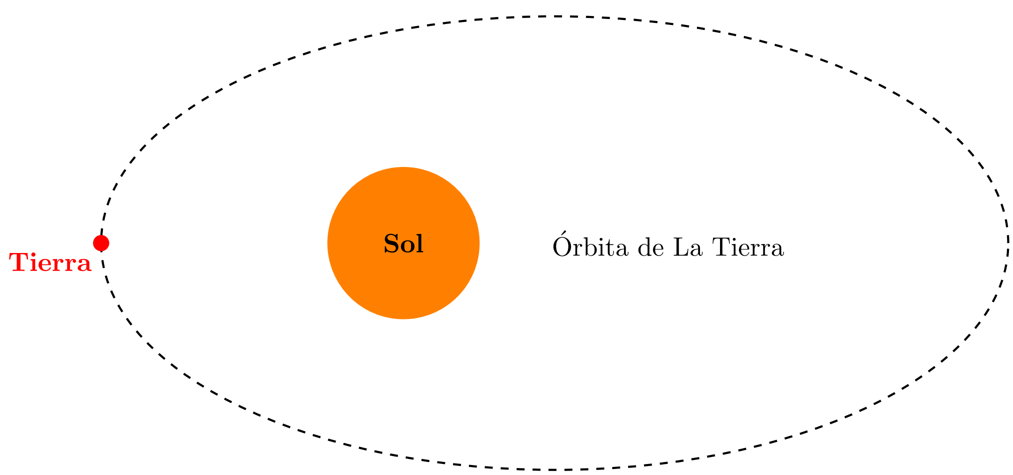
b) **Quina intensitat de camp gravitatori genera el Sol a la seva superfície? Quin és el pes d'una massa de $10,0$ kg a la superfície del Sol?**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
$M_{\text{Terra}} = 5,97 \times 10^{24}$ kg.
$M_{\text{Sol}} = 1,99 \times 10^{30}$ kg.
$R_{\text{Sol}} = 6,96 \times 10^5$ km.

Solución:

a) **Dibuixeu una òrbita clarament el·líptica (no cal que sigui l'òrbita real) on s'indiqui la posició del Sol i la de la Terra un dia d'hivern de l'hemisferi nord. Utilitzant arguments basats en l'energia, justifiqueu per què la velocitat de la Terra és mínima a l'afeli. Quina és la distància de la Terra al Sol a l'afeli?**

Primero, representamos la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol con un diagrama:



La energía mecánica total de la Tierra en su órbita alrededor del Sol se conserva, ya que la única fuerza que actúa es la fuerza gravitatoria, que es una fuerza conservativa. La energía mecánica (E_m) es la suma de la energía cinética (E_c) y la energía potencial gravitatoria (E_p):

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} M_{\text{Tierra}} v^2 - \frac{G M_{\text{Sol}} M_{\text{Tierra}}}{r} = \text{cte.},$$

donde:

– M_{Tierra} es la masa de la Tierra,
– v es la velocidad orbital de la Tierra,
– G es la constante de gravitación universal,
– M_{Sol} es la masa del Sol,
– r es la distancia entre la Tierra y el Sol.

En el afelio, la distancia r es máxima, lo que implica que el término de la energía potencial gravitatoria es menos negativo (máximo). Como la energía mecánica total se mantiene constante, si la energía potencial es máxima en el afelio, la energía cinética debe ser mínima. Por lo tanto, la velocidad de la Tierra es mínima en el afelio. Utilizando la conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}M_{\text{Tierra}}v_a^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Tierra}}}{r_a} = \frac{1}{2}M_{\text{Tierra}}v_p^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Tierra}}}{r_p}.$$

Simplificamos eliminando M_{Tierra} de ambos lados:

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}}{r_a} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}}{r_p}.$$

Despejamos r_a:

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{1}{2}v_p^2 = \frac{GM_{\text{Sol}}}{r_a} - \frac{GM_{\text{Sol}}}{r_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(v_a^2 - v_p^2) = GM_{\text{Sol}}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_p} + \frac{v_a^2 - v_p^2}{2GM_{\text{Sol}}}.$$

Finalmente, calculamos r_a:

$$r_a = \left(\frac{1}{r_p} + \frac{v_a^2 - v_p^2}{2GM_{\text{Sol}}}\right)^{-1}.$$

Sustituyendo los valores:

$$r_a = \left(\frac{1}{1,471 \cdot 10^{11}\ \text{m}} + \frac{(2,876 \cdot 10^4\ \text{m/s})^2 - (3,075 \cdot 10^4\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}\right)^{-1} = 1,57 \cdot 10^{11}\ \text{m}.$$

Por lo tanto, la distancia de la Tierra al Sol en el afelio es de $1,57 \cdot 10^{11}$ m.

b) Quina intensitat de camp gravitatori genera el Sol a la seva superfície? Quin és el pes d'una massa de 10, 0 kg a la superfície del Sol?

La intensidad del campo gravitatorio (g_S) generado por el Sol en su superficie se calcula mediante la ley de gravitación universal:

$$g_S = \frac{GM_{\text{Sol}}}{R_{\text{Sol}}^2},$$

donde:
– $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2,
– $M_{\text{Sol}} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg,
– $R_{\text{Sol}} = 6,96 \cdot 10^5$ km $= 6,96 \cdot 10^8$ m.

Sustituyendo los valores:

$$g_S = \frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(6,96 \cdot 10^8\ \text{m})^2} = 2,74 \cdot 10^2\ \text{m/s}^2.$$

El peso (P) se calcula mediante la fórmula:

$$P = m \cdot g_S \quad \Rightarrow \quad P = 10,0 \text{ kg} \cdot 274 \text{ m/s}^2 = 2,740 \text{ N}.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del Sol es de 274 m/s^2 y el peso de una masa de 10,0 kg en la superficie del Sol es de 2,740 N.