Ejercicios resueltos de Selectividad

Matemáticas. Estadística y Probabilidad

mentoor.es

Índice de contenido

Madrid, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}, P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) **Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.**

b) **Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.**

Solución:

a) **Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.**

Datos: $P(\overline{A}) = 11/20 \implies P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 11/20 = 9/20$.
$P(A|B) - P(B|A) = 1/24$.
$P(A \cap \overline{B}) = 3/10$.
Usamos la fórmula de la probabilidad del suceso A menos la intersección:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$\frac{3}{10} = \frac{9}{20} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{20} - \frac{3}{10} = \frac{9}{20} - \frac{6}{20} = \frac{3}{20}.$$

Ahora usamos la segunda ecuación dada y las definiciones de probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

y

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{24}$$

Sustituimos los valores de $P(A \cap B)$ y $P(A)$:

$$\frac{3/20}{P(B)} - \frac{3/20}{9/20} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{3}{20P(B)} - \frac{3}{9} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{3}{20P(B)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

Despejamos el término con $P(B)$:

$$\frac{3}{20P(B)} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

Ahora despejamos $P(B)$:

$$P(B) = \frac{3}{20} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{20} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{3}{20}} \text{ y } \boldsymbol{P(B) = \frac{2}{5}}}$$

b) **Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.** Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

Como A y C son independientes, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$. Sustituimos en la fórmula de la unión:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C)$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C)(1 - P(A))$$

Sustituimos los valores conocidos $P(A \cup C) = 14/25$ y $P(A) = 9/20$:

$$\frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C)\left(1 - \frac{9}{20}\right)$$

$$\frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C)\left(\frac{11}{20}\right)$$

Despejamos $P(C)$:

$$P(C)\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{14}{25} - \frac{9}{20}$$

Calculamos la resta de fracciones (mcm = 100):

$$\frac{14 \times 4}{100} - \frac{9 \times 5}{100} = \frac{56 - 45}{100} = \frac{11}{100}$$

Entonces:

$$P(C)\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{11}{100}$$

$$P(C) = \frac{11}{100} \div \frac{11}{20} = \frac{11}{100} \times \frac{20}{11} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(C) = \frac{1}{5}}}$$

Ejercicio 4. Opción B

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.**

b) **Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.**

Sean A el resultado del dado Azul y R el del dado Rojo. $A, R \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hay $6 \times 6 = 36$ resultados equiprobables.
Sea S la puntuación.
Si A es par ($A \in \{2, 4, 6\}$), $S = A + 2R$.
Si A es impar ($A \in \{1, 3, 5\}$), $S = A + R$.

Probabilidad de S=10:
Para A par:
Si A=2, $2R = 8 \implies R = 4$. Par (2,4).
Si A=4, $2R = 6 \implies R = 3$. Par (4,3).
Si A=6, $2R = 4 \implies R = 2$. Par (6,2).
Para A impar: $A + R = 10$.
Si A=1, $R = 9$ (Imposible).
Si A=3, $R = 7$ (Imposible).
Si A=5, $R = 5$. Par (5,5)
Hay 4 casos favorables para S=10: (2,4), (4,3), (6,2), (5,5). $P(S = 10) = 4/36 = 1/9$.
Probabilidad de S impar:
Para A par: $S = A(\text{par}) + 2R(\text{par})$. La suma siempre es par. No hay casos.
Para A impar: $S = A(\text{impar}) + R$. S es impar si R es par ($R \in \{2, 4, 6\}$).
Si A=1, R puede ser 2, 4, 6. Pares (1,2), (1,4), (1,6). (3 casos)
Si A=3, R puede ser 2, 4, 6. Pares (3,2), (3,4), (3,6). (3 casos)
Si A=5, R puede ser 2, 4, 6. Pares (5,2), (5,4), (5,6). (3 casos)
Hay 9 casos favorables para S impar. $P(S \text{ impar}) = 9/36 = 1/4$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(S = 10) = \frac{1}{9}. \quad P(S \text{ es impar}) = \frac{1}{4}.}}$$

b) **Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.**

Probabilidad $P(A\ par|S = 8)$:
Usamos $P(E|F) = P(E \cap F)/P(F)$.
Necesitamos los casos donde S=8:
A par ($A + 2R = 8$): (2,3), (4,2), (6,1). (3 casos)
A impar ($A + R = 8$): (3,5), (5,3). (2 casos)
Total de casos para S=8 es 3+2=5. $P(S = 8) = 5/36$. Casos donde S=8 y A es par: Son los 3 casos (2,3), (4,2), (6,1).
$P(A \text{ par} \cap S = 8) = 3/36$.
$P(A \text{ par}|S = 8) = \frac{3/36}{5/36} = \frac{3}{5}$.
Probabilidad $P(R\ impar|S\ par)$: Usamos $P(E|F) = P(E \cap F)/P(F)$. $P(S \text{ par}) = 1 - P(S \text{ impar}) = 1 - 1/4 = 3/4$. (Hay 27 casos donde S es par). Necesitamos los casos donde S es par y R es impar ($R \in \{1, 3, 5\}$):
A par ($S = A + 2R$ siempre es par): (2,1), (2,3), (2,5); (4,1), (4,3), (4,5); (6,1), (6,3), (6,5). (9 casos)
A impar ($S = A + R$ es par si R es impar): (1,1), (1,3), (1,5); (3,1), (3,3), (3,5); (5,1), (5,3), (5,5). (9 casos)
Total de casos donde S es par y R es impar es 9+9=18.

$$P(R \text{ impar} \cap S \text{ par}) = 18/36 = 1/2$$

$$P(R \text{ impar}|S \text{ par}) = \frac{P(R \text{ impar} \cap S \text{ par})}{P(S \text{ par})} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \text{ par}|S = 8) = \frac{3}{5}}. \quad \boldsymbol{P(R \text{ impar}|S \text{ par}) = \frac{2}{3}}.}$$

Madrid, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0.4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0.2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0.3$ y $P(C|A_3) = 0.6$. Con estos datos se pide:

a) **Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0.25$.**
b) **Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0.25$.**

Datos: $P(A_1) = 0.4, P(A_2) = 0.4, P(A_3) = 0.2$. A_1, A_2, A_3 forman una partición.
$P(B|A_1) = 0.25 \implies P(B|A_2) = 0.25$ y $P(B|A_3) = 2(0.25) = 0.5$.
Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

$$P(B) = (0.25)(0.4) + (0.25)(0.4) + (0.5)(0.2) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(B) = 0.3}}$$

b) **Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.**

Datos: C independiente de $A_1 \implies P(C \cap A_1) = P(C)P(A_1) = 0.4P(C)$.

$$P(C|A_2) = 0.3 \implies P(C \cap A_2) = P(C|A_2)P(A_2) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$P(C|A_3) = 0.6 \implies P(C \cap A_3) = P(C|A_3)P(A_3) = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(C) = P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) + P(C \cap A_3)$$

$$P(C) = 0.4P(C) + 0.12 + 0.12$$

$$P(C) - 0.4P(C) = 0.24 \implies 0.6P(C) = 0.24 \implies P(C) = 0.24/0.6 = 0.4$$

Independencia de C y A_2: ¿Es $P(C \cap A_2) = P(C)P(A_2)$?

$$P(C \cap A_2) = 0.12$$

$$P(C)P(A_2) = (0.4)(0.4) = 0.16$$

Como $0.12 \neq 0.16$, los sucesos C y A_2 no son independientes.

$$\boxed{\boldsymbol{P(C) = 0.4}\textbf{. C y } \boldsymbol{A_2} \textbf{ NO son independientes.}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quien friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25% de sus lanzamientos y Benito en el 30%, se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.**

b) **Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.**

$p_A = 0.25$ (Acierto A), $q_A = 0.75$ (Fallo A).
$p_B = 0.30$ (Acierto B), $q_B = 0.70$ (Fallo B).
El juego se decide tras 3 lanzamientos si uno tiene 3 aciertos y el otro 0.
Sea $X_A(n)$ aciertos de A en n lanzamientos, $X_B(n)$ aciertos de B en n lanzamientos.
Caso 1: A gana en 3 lanzamientos ($X_A(3) = 3$ y $X_B(3) = 0$).
$P(X_A(3) = 3) = \binom{3}{3} p_A^3 q_A^0 = (0.25)^3$.
$P(X_A(3) = 3) = \binom{3}{3} p_A^3 q_A^0 = (0.25)^3$.
$P(X_B(3) = 0) = \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 = (0.70)^3$.

$$P(\text{Caso 1}) = (0.25)^3 (0.70)^3$$

Caso 2: B gana en 3 lanzamientos ($X_A(3) = 0$ y $X_B(3) = 3$).
$P(X_A(3) = 0) = \binom{3}{0} p_A^0 q_A^3 = (0.75)^3$
$P(X_B(3) = 3) = \binom{3}{3} p_B^3 q_B^0 = (0.30)^3$.
$P(X_B(3) = 0) = \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 = (0.70)^3$.

$$P(\text{Caso 2}) = (0.75)^3 (0.30)^3$$

Probabilidad total:

$$P = (0.25)^3 (0.70)^3 + (0.75)^3 (0.30)^3$$

$$P = (0.015625)(0.343) + (0.421875)(0.027) \approx 0.005359 + 0.011391 \approx 0.01675$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(}\text{Decidido antes del } 4^{\text{o}} \text{ lanz.}\boldsymbol{)} \approx \mathbf{0.01675}}$$

b) **Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.**

Sea Y_A el número de fallos de Antonio en $n = 60$ lanzamientos.
Probabilidad de fallo $q_A = 0.75$. $Y_A \sim B(n = 60, p = 0.75)$.
Se pide $P(Y_A \geq \frac{2}{3} \times 60) = P(Y_A \geq 40)$.
Aproximamos por Normal $Y_A' \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\mu = np = 60 \times 0.75 = 45$.
$\sigma^2 = np(1 - p) = 60 \times 0.75 \times 0.25 = 11.25$.
$\sigma = \sqrt{11.25} \approx 3.354$.
$Y_A' \sim N(45, 11.25)$.
Aplicamos corrección por continuidad: $P(Y_A \geq 40) \approx P(Y_A' \geq 39.5)$.

Estandarizamos: $Z = \frac{Y'_A - \mu}{\sigma}$. $P(Y'_A \geq 39.5) = P\left(Z \geq \frac{39.5-45}{3.354}\right) \approx P(Z \geq -1.64)$. $P(Z \geq -1.64) = P(Z \leq 1.64)$.
Usando la tabla N(0,1): $P(Z \leq 1.64) \approx 0.9495$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633

$$\boxed{\boldsymbol{P(Y_A \geq 40) \approx 0.9495}}$$

Madrid, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

Se tiene un suceso A de probabilidad $\boldsymbol{P(A) = 0.3}$.

a) **Un suceso B de probabilidad $\boldsymbol{P(B) = 0.5}$ es independiente de A. Calcule $\boldsymbol{P(A \cup B)}$.**
b) **Otro suceso C cumple $\boldsymbol{P(C|A) = 0.5}$. Determine $\boldsymbol{P(A \cap \overline{C})}$.**
c) **Si se tiene un suceso D tal que $\boldsymbol{P(A|D) = 0.2}$ y $\boldsymbol{P(D|A) = 0.5}$, calcule $\boldsymbol{P(D)}$.**

Solución:

a) **Un suceso B de probabilidad $\boldsymbol{P(B) = 0.5}$ es independiente de A. Calcule $\boldsymbol{P(A \cup B)}$.**
$P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$. A y B independientes $\implies P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.3)(0.5) = 0.15$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.15 = 0.65$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B) = 0.65}}$$

b) **Otro suceso C cumple $\boldsymbol{P(C|A) = 0.5}$. Determine $\boldsymbol{P(A \cap \overline{C})}$.** $P(A \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap C)$.
$P(C|A) = P(A \cap C)/P(A) \implies P(A \cap C) = P(C|A)P(A) = (0.5)(0.3) = 0.15$. $P(A \cap \overline{C}) = 0.3 - 0.15 = 0.15$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap \overline{C}) = 0.15}}$$

c) **Si se tiene un suceso D tal que $\boldsymbol{P(A|D) = 0.2}$ y $\boldsymbol{P(D|A) = 0.5}$, calcule $\boldsymbol{P(D)}$.** $P(A \cap D) = P(D|A)P(A) = (0.5)(0.3) = 0.15$. $P(A|D) = P(A \cap D)/P(D) \implies 0.2 = 0.15/P(D)$. $P(D) = 0.15/0.2 = 15/20 = 3/4 = 0.75$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(D) = 0.75}}$$

Ejercicio 4. Opción B

La longitud de la sardina del Pacífico (Sardinops sagax) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) **Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?**
b) **Hallar una longitud $\boldsymbol{t < 175}$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.**
c) **En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?**

Solución:

a) **¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?**

$X \sim N(\mu = 175, \sigma = 25.75)$. Calidad si $X > 160$ mm. $Z = (X - \mu)/\sigma$. $P(X > 160) = P(Z > (160 - 175)/25.75) = P(Z > -15/25.75) \approx P(Z > -0.58)$. $P(Z > -0.58) = P(Z < 0.58) \approx 0.7190$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599

Porcentaje: 71.90%.

$\boxed{\textbf{El porcentaje de sardinas de calidad es del 71.90\%.}}$

b) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.

Buscamos t tal que $P(t < X < 175) = 0.18$.

$$P(\frac{t - 175}{25.75} < Z < \frac{175 - 175}{25.75}) = P(z_t < Z < 0) = 0.18$$

$$\Phi(0) - \Phi(z_t) = 0.18 \implies 0.5 - \Phi(z_t) = 0.18 \implies \Phi(z_t) = 0.32$$

Buscamos z'' tal que $\Phi(z'') = 1 - 0.32 = 0.68$. En la tabla, $z'' \approx 0.47$.

Como $\Phi(z_t) < 0.5$, z_t es negativo. $z_t = -z'' \approx -0.47$. $\frac{t-175}{25.75} = -0.47 \implies t = 175 - 0.47(25.75) \approx 175 - 12.1025 \approx 162.8975$.

$\boxed{\textbf{La longitud es } t \approx \textbf{162.9} \text{ mm.}}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Pequeña si $X < 150$ mm.

$$p = P(X < 150) = P(Z < (150 - 175)/25.75) = P(Z < -25/25.75) \approx P(Z < -0.97)$$

$$P(Z < -0.97) = 1 - P(Z \leq 0.97) \approx 1 - 0.8340 = 0.166$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,64
0,4	~~0,6554~~	~~0,6591~~	~~0,6628~~	~~0,6664~~	~~0,6700~~	~~0,6736~~	~~0,67~~
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,71
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Sea Y = número de sardinas pequeñas en un lote de $n = 10$. $Y \sim B(10, 0.166) P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$.

$$P(Y = 0) = \binom{10}{0}(0.166)^0(1 - 0.166)^{10} = (0.834)^{10} \approx 0.1628$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - 0.1628 \approx 0.8372$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(Y \geq 1) \approx 0.8372}}$$

Madrid, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.
b) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Solución:

a) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0.625 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = 0.625 \cdot P(B)$$

Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sustituimos los valores conocidos y la expresión para $P(A \cap B)$:

$$0.65 = 0.5 + P(B) - (0.625 \cdot P(B))$$

$$0.65 - 0.5 = P(B)(1 - 0.625)$$

$$0.15 = P(B)(0.375)$$

$$P(B) = \frac{0.15}{0.375} = \frac{150}{375} = \frac{30}{75} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Ahora calculamos $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = 0.625 \cdot P(B) = 0.625 \cdot 0.4 = 0.25$$

$$\boxed{P(B) = 0.4 \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = 0.25}$$

b) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Calculamos $P(A|A \cup B)$:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

Dado que $A \subseteq (A \cup B)$, la intersección $A \cap (A \cup B)$ es simplemente A.

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.5}{0.65} = \frac{50}{65} = \frac{10}{13}$$

Calculamos $P(A \cap B|A \cup B)$:

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

Dado que $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$, la intersección $(A \cap B) \cap (A \cup B)$ es $A \cap B$.

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.25}{0.65} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(A|A \cup B) = \frac{10}{13} \quad \text{y} \quad P(A \cap B|A \cup B) = \frac{5}{13}}}$$

Ejercicio 4. Opción B

El 65% de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.**
b) **Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.**
c) **Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento.**

Sea p la probabilidad de superar el examen a la primera: $p = 0.65$. Sea q la probabilidad de necesitar más de un intento: $q = 1 - p = 1 - 0.65 = 0.35$. Se escogen $n = 10$ universitarios. Sea X la variable aleatoria: "número de universitarios (de los 10) que necesitaron más de un intento". X sigue una distribución binomial $B(n = 10, p = q = 0.35)$. Buscamos $P(X = 3)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.35)^3(0.65)^{10-3} = \binom{10}{3}(0.35)^3(0.65)^7$$

Calculamos el coeficiente binomial: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$.

$$P(X = 3) = 120 \cdot (0.35)^3 \cdot (0.65)^7 \approx 120 \cdot (0.042875) \cdot (0.0490315...) \approx 0.2522$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = 3) \approx 0.2522}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento.**

Buscamos la probabilidad de que $X \geq 1$. Es el suceso contrario a que ninguno necesitara más de un intento $(X = 0)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.35)^0(0.65)^{10} = 1 \cdot 1 \cdot (0.65)^{10} \approx 0.01346$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.01346 \approx 0.9865$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq 1) \approx 0.9865}}$$

c) Aproximando por normal, probabilidad de que, dados 60, como mínimo la mitad superase a la primera.

Ahora $N = 60$. Sea Y la variable aleatoria: "número de universitarios (de los 60) que superan el examen a la primera". Y sigue una distribución binomial $B(N = 60, p = 0.65)$. Buscamos $P(Y \geq 30)$ (como mínimo la mitad de 60). Aproximamos por una distribución normal $Y' \sim N(\mu, \sigma^2)$. Media: $\mu = Np = 60 \times 0.65 = 39$. Varianza: $\sigma^2 = Npq = 60 \times 0.65 \times (1 - 0.65) = 60 \times 0.65 \times 0.35 = 39 \times 0.35 = 13.65$. Desviación típica: $\sigma = \sqrt{13.65} \approx 3.6946$. Verificamos condiciones para la aproximación: $Np = 39 > 5$ y $Nq = 60 \times 0.35 = 21 > 5$. La aproximación es válida. $Y' \sim N(39, 13.65)$. Aplicamos la corrección por continuidad de Yates:

$$P(Y \geq 30) \approx P(Y' \geq 29.5)$$

Estandarizamos la variable Y' para usar la tabla N(0,1):

$$Z = \frac{Y' - \mu}{\sigma} = \frac{29.5 - 39}{\sqrt{13.65}} = \frac{-9.5}{3.6946} \approx -2.571$$

Buscamos $P(Z \geq -2.57)$.

$$P(Z \geq -2.57) = P(Z \leq 2.57)$$

Usando la tabla de la distribución normal N(0,1): buscamos el valor para $z = 2.57$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	~~0,9938~~	~~0,9940~~	~~0,9941~~	~~0,9943~~	~~0,9945~~	~~0,9946~~	~~0,9948~~	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

$$P(Z \leq 2.57) = 0.9949$$

$$\boxed{\textbf{La probabilidad es aproximadamente 0.9949}.}$$

Madrid, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7%. Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) **Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.**
b) **Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.**
c) **Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.**

Solución:

a) **Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.**

Sea $p = P(\text{Mujer}) = 0.277$. $q = P(\text{Hombre}) = 1 - p = 0.723$.
$n = 10$. $X=$ Nº mujeres. $X \sim B(10, 0.277)$.

$$P(X=5) = \binom{10}{5}(0.277)^5(0.723)^5 \approx 252 \cdot (0.001568) \cdot (0.1974) \approx 0.0781$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X=5) \approx 0.0781}}$$

b) **Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.**

$P(\text{al menos 1 hombre}) = 1 - P(\text{0 hombres}) = 1 - P(\text{10 mujeres}) = 1 - P(X = 10)$.

$$P(X=10) = \binom{10}{10}(0.277)^{10}(0.723)^0 = (0.277)^{10} \approx 2.58 \times 10^{-6}$$

$$P(\text{al menos 1 hombre}) \approx 1 - 0.00000258 \approx 0.9999$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(}\text{al menos 1 hombre}\boldsymbol{) \approx 0.9999}}$$

c) **Aproximando por normal, probabilidad de que en 200 hubiera como mínimo un 35% de mujeres.**

$N = 200$. $Y=$ Nº mujeres.
$Y \sim B(200, 0.277)$. Mínimo 35% de mujeres: $0.35 \times 200 = 70$. Buscamos $P(Y \geq 70)$.
Aproximación Normal $Y' \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\mu = Np = 200 \times 0.277 = 55.4$.
$\sigma^2 = Npq = 55.4 \times 0.723 \approx 40.0542$. $\sigma \approx 6.3288$.
$Np > 5, Nq > 5$. Aproximación válida. $Y' \sim N(55.4, 40.0542)$.
$P(Y \geq 70) \approx P(Y' \geq 69.5)$.
Estandarizar: $Z = \frac{Y'-\mu}{\sigma}$. $P(Y' \geq 69.5) = P(Z \geq \frac{69.5-55.4}{6.3288}) \approx P(Z \geq 2.23)$. $P(Z \geq 2.23) = 1 - P(Z < 2.23) \approx 1 - 0.9871 = 0.0129$.

$$\boxed{\textbf{La probabilidad es aproximadamente 0.0129.}}$$

Ejercicio 4. Opción B

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.**
b) **Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.**
c) **Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.**

Solución:

Definición de sucesos: S_B, S_N, P_B, P_N, P_C.

Probabilidades: $P(S_B) = 2/3$. $P(S_N) = 1/3$.

$P(P_B|S_B) = 2/9, P(P_N|S_B) = 2/9, P(P_C|S_B) = 5/9$

$P(P_B|S_N) = 2/10, P(P_N|S_N) = 4/10, P(P_C|S_N) = 4/10$.

a) **P(pañuelo con color diferente al sombrero).** Suceso $= (S_B \cap (P_N \cup P_C)) \cup (S_N \cap (P_B \cup P_C))$.

$$P(\text{dif}) = P(S_B)P(P_N \cup P_C|S_B) + P(S_N)P(P_B \cup P_C|S_N)$$
$$P(\text{dif}) = (2/3)(7/9) + (1/3)(6/10) = 14/27 + 1/5 = 97/135$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(}\text{color diferente}\boldsymbol{)} = \frac{\mathbf{97}}{\mathbf{135}}}$$

b) **P(al menos uno negro).** Complementario: P(ambos blancos) $= P(S_B \cap P_B)$.

$$P(S_B \cap P_B) = P(P_B|S_B)P(S_B) = (2/9)(2/3) = 4/27$$
$$P(\text{al menos uno negro}) = 1 - 4/27 = 23/27$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(}\text{al menos uno negro}\boldsymbol{)} = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{27}}}$$

c) **P(sombrero negro — pañuelo cuadros).** Buscamos $P(S_N|P_C)$. Bayes:

$$P(S_N|P_C) = \frac{P(P_C|S_N)P(S_N)}{P(P_C)}$$
$$P(P_C) = P(P_C|S_B)P(S_B) + P(P_C|S_N)P(S_N)$$
$$P(P_C) = (5/9)(2/3) + (4/10)(1/3) = 10/27 + 4/30 = 68/135$$
$$P(S_N|P_C) = \frac{(4/10)(1/3)}{68/135} = \frac{4/30}{68/135} = \frac{2/15}{68/135} = \frac{2}{15} \cdot \frac{135}{68} = \frac{9}{34}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(S_N|P_C) = \frac{9}{34}}}$$

Madrid, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.**
b) **Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.**
c) **Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.**

Sea $p = P(\text{Matriculado en MII}) = 3/5 = 0.6$. $q = 1 - p = 0.4$.
$n = 6$. $X \sim B(6, 0.6)$.

$$P(X = 4) = \binom{6}{4}(0.6)^4(0.4)^2 = 15 \cdot (0.1296) \cdot (0.16) = 0.31104$$

$$\boxed{\mathbf{P(X = 4) = 0.31104}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.**

$n = 6$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0}(0.6)^0(0.4)^6 = 1 - (0.4)^6 = 1 - 0.004096 = 0.995904$$

$$\boxed{\mathbf{P(X \geq 1) = 0.995904}}$$

c) **Aproximando por normal, probabilidad de que más de 60 de 120 alumnos estén matriculados.**

$N = 120$. $Y \sim B(120, 0.6)$.
Aproximar por $Y' \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\mu = Np = 120 \times 0.6 = 72$.
$\sigma^2 = Npq = 120 \times 0.6 \times 0.4 = 28.8$. $\sigma \approx 5.3666$.
$P(Y > 60) \approx P(Y' \geq 60.5)$.
Estandarizar: $Z = \frac{Y'-\mu}{\sigma}$. $P(Y' \geq 60.5) = P(Z \geq \frac{60.5-72}{5.3666}) \approx P(Z \geq -2.14)$.
$P(Z \geq -2.14) = P(Z \leq 2.14) = 0.9838$.

$$\boxed{\mathbf{P(Y > 60) \approx 0.9838}}$$

Ejercicio 4. Opción B

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.**
b) **Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.**

Solución:

Definición de sucesos: A, B, C: Producto tipo A, B, C. E: Producto exportado.

Probabilidades: $P(A) = 4/7, P(B) = 2/7, P(C) = 1/7$. $P(E|A) = 0.4, P(E|B) = 0.6, P(E|C) = 0.2$.

a) **Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.** Teorema Probabilidad Total:

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)$$
$$P(E) = (0.4)(4/7) + (0.6)(2/7) + (0.2)(1/7)$$
$$P(E) = 1.6/7 + 1.2/7 + 0.2/7 = 3.0/7 = 3/7$$

$$\boxed{\mathbf{P(E) = \frac{3}{7}}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.** Buscamos $P(C|E)$. Teorema de Bayes:

$$P(C|E) = \frac{P(E|C)P(C)}{P(E)}$$

$$P(C|E) = \frac{(0.2)(1/7)}{3/7} = \frac{0.2/7}{3/7} = \frac{0.2}{3} = \frac{2/10}{3} = \frac{1/5}{3} = 1/15$$

$$\boxed{\mathbf{P(C|E) = \frac{1}{15}}}$$

Madrid, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) **¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?**

b) **Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?**

c) **¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98% de los individuos de esta especie?**

Solución:

a) **¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?**

Sea T la variable aleatoria "tiempo de vida en meses". $T \sim N(\mu = 8.8, \sigma = 3)$.
Sea $Z = \frac{T-\mu}{\sigma}$ la variable normal estándar, $Z \sim N(0,1)$. $P(T > 10)$.
Estandarizamos: $Z = \frac{10-8.8}{3} = \frac{1.2}{3} = 0.4$.

$$P(T > 10) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4)$$

Usando la tabla N(0,1), $P(Z \leq 0.4)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,523
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,563
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,602
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,640
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,677

$$P(T > 10) = 1 - 0.6554 = 0.3446.$$

El porcentaje es 34.46%.

Porcentaje entre 7 y 10 meses: $P(7 < T < 10)$. Estandarizamos ambos límites: $Z_1 = \frac{7-8.8}{3} = \frac{-1.8}{3} = -0.6$. $Z_2 = 0.4$.

$$\begin{aligned} P(7 < T < 10) &= P(-0.6 < Z < 0.4) = P(Z < 0.4) - P(Z < -0.6) \\ &= P(Z < 0.4) - P(Z > 0.6) \\ &= P(Z < 0.4) - (1 - P(Z \leq 0.6)) \end{aligned}$$

De la tabla, $P(Z \leq 0.4) = 0.6554$ y $P(Z \leq 0.6) = 0.7257$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764

$$P(7 < T < 10) = 0.6554 - (1 - 0.7257) = 0.6554 - 0.2743 = 0.3811.$$

El porcentaje es 38.11%.

Supera 10 meses: 34.46%
Entre 7 y 10 meses: 38.11%

b) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

Sea p la probabilidad de que un espécimen no supere los 10 meses: $p = P(T \leq 10) = 1 - P(T > 10) = 1 - 0.3446 = 0.6554$.
Sea X la variable aleatoria "número de especímenes (de 4) que no superan los 10 meses".
X sigue una distribución binomial $B(n = 4, p = 0.6554)$.
Buscamos la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses, $P(X \geq 1)$.
Es el suceso contrario a que ninguno no supere los 10 meses ($X = 0$), que es lo mismo que decir que todos superan los 10 meses.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0.6554)^4 = (0.3446)^4$$

$$(0.3446)^4 \approx 0.014116$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.014116 \approx 0.985884$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq 1) \approx 0.9859}}$$

c) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida del 98% de los individuos?

Buscamos c tal que $P(8.8 - c < T < 8.8 + c) = 0.98$. Estandarizando:

$$P\left(\frac{-c}{3} < Z < \frac{c}{3}\right) = 0.98$$

Por simetría, $P(Z < c/3) = (1 + 0.98)/2 = 0.99$.

Buscamos en la tabla N(0,1) el valor z_0 tal que $P(Z < z_0) = 0.99$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

El valor más cercano en la tabla es 0.9901, que corresponde a $z_0 = 2.33$. Entonces, $\frac{c}{3} \approx 2.33$.

$$c \approx 3 \times 2.33 = 6.99$$

$$\boxed{\boldsymbol{c \approx 6.99}}$$

Ejercicio 4. Opción B

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?**
b) **¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?**
c) **¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?**
d) **¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?**

Solución:

a) **¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?**
Definición de sucesos: Sea N = "se supera el nivel permitido de NO_2". Sea P = "se supera el nivel permitido de partículas".

Datos: $P(N) = 0.16$.
$P(P|N) = 0.33$.
$P(P|\overline{N}) = 0.08$.

Probabilidades complementarias: $P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0.16 = 0.84$.

En el apartado se pide: $P(N \cap P)$.
Usamos la definición de probabilidad condicionada: $P(P|N) = \frac{P(N\cap P)}{P(N)}$.

$$P(N \cap P) = P(P|N) \cdot P(N) = 0.33 \times 0.16 = 0.0528.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(N \cap P) = 0.0528}}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

Buscamos $P(N \cup P)$. Usamos la fórmula $P(N \cup P) = P(N) + P(P) - P(N \cap P)$. Necesitamos calcular $P(P)$. Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(P) = P(P|N)P(N) + P(P|\overline{N})P(\overline{N})$$

$$P(P) = (0.33)(0.16) + (0.08)(0.84) = 0.0528 + 0.0672 = 0.12.$$

Ahora calculamos la unión:

$$P(N \cup P) = 0.16 + 0.12 - 0.0528 = 0.28 - 0.0528 = 0.2272.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(N \cup P) = 0.2272}}$$

c) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2 " y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

Dos sucesos son independientes si $P(N \cap P) = P(N) \cdot P(P)$. Calculamos $P(N) \cdot P(P)$:

$$P(N) \cdot P(P) = 0.16 \times 0.12 = 0.0192.$$

Comparamos con $P(N \cap P)$ calculado en a):

$$P(N \cap P) = 0.0528.$$

Como $0.0528 \neq 0.0192$, los sucesos N y P no son independientes.

$$\boxed{\textbf{Los sucesos NO son independientes.}}$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Buscamos $P(N|\overline{P})$. Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(N|\overline{P}) = \frac{P(N \cap \overline{P})}{P(\overline{P})}$$

Calculamos $P(\overline{P}) = 1 - P(P) = 1 - 0.12 = 0.88$. Calculamos $P(N \cap \overline{P})$. Podemos usar $P(N) = P(N \cap P) + P(N \cap \overline{P})$.

$$P(N \cap \overline{P}) = P(N) - P(N \cap P) = 0.16 - 0.0528 = 0.1072.$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada:

$$P(N|\overline{P}) = \frac{0.1072}{0.88} = \frac{1072}{8800} = \frac{67}{550}.$$

Aproximadamente $P(N|\overline{P}) \approx 0.1218$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(N|\overline{P}) = \frac{67}{550} \approx 0.1218}}$$

Madrid, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?**
b) **¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?**

Solución:

a) **¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?**

B_1: Blanca 1ª, N_1: Negra 1ª, B_2: Blanca 2ª, N_2: Negra 2ª.
Urna inicial: 2B, 4N (Total 6). $P(B_1) = 1/3, P(N_1) = 2/3$.
Si B_1: Urna 3B, 4N (Total 7). $P(B_2|B_1) = 3/7, P(N_2|B_1) = 4/7$.
Si N_1: Urna 2B, 3N (Total 5). $P(B_2|N_1) = 2/5, P(N_2|N_1) = 3/5$.

$$P(\text{Distinto color}) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(N_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1)$$
$$P(\text{Distinto color}) = (4/7)(1/3) + (2/5)(2/3) = 4/21 + 4/15 = (20 + 28)/105 = 48/105 = 16/35$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(\text{Distinto color}) = \frac{16}{35}}}$$

b) **¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?**

Se pide $P(N_1|B_2)$.
Usamos Bayes:

$$P(N_1|B_2) = \frac{P(B_2|N_1)P(N_1)}{P(B_2)}$$

Calculamos $P(B_2)$ por Probabilidad Total:

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1)$$
$$P(B_2) = (3/7)(1/3) + (2/5)(2/3) = 1/7 + 4/15 = (15 + 28)/105 = 43/105$$

Aplicamos Bayes:

$$P(N_1|B_2) = \frac{(2/5)(2/3)}{43/105} = \frac{4/15}{43/105} = \frac{4}{15} \cdot \frac{105}{43} = \frac{28}{43}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(N_1|B_2) = \frac{28}{43}}}$$

Ejercicio 4. Opción B

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45% de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) **Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.**
b) **Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.**

Solución:

a) **Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.** Sea X el número de días lluviosos en $n = 100$ días. X sigue una distribución Binomial $B(n = 100, p = 0.45)$. La probabilidad exacta de que $X = 40$ es:

$$P(X = 40) = \binom{100}{40}(0.45)^{40}(1 - 0.45)^{100-40} = \binom{100}{40}(0.45)^{40}(0.55)^{60}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = 40) = \binom{100}{40}(0.45)^{40}(0.55)^{60}}}$$

b) **Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.**

Aproximamos $X \sim B(100, 0.45)$ por una Normal $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\mu = np = 100(0.45) = 45$.
$\sigma^2 = np(1 - p) = 100(0.45)(0.55) = 24.75$.
$\sigma = \sqrt{24.75} \approx 4.975$.
Aproximación $Y \sim N(45, 24.75)$.
Aplicamos corrección por continuidad: $P(X = 40) \approx P(39.5 \leq Y \leq 40.5)$.
Estandarizamos $Z = (Y - \mu)/\sigma$:

$$P\left(\frac{39.5 - 45}{\sqrt{24.75}} \leq Z \leq \frac{40.5 - 45}{\sqrt{24.75}}\right) \approx P(-1.11 \leq Z \leq -0.90).$$

Usando la tabla N(0,1):

$$P(-1.11 \leq Z \leq -0.90) = P(Z \leq -0.90) - P(Z \leq -1.11) =$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621

$$= (1 - P(Z \leq 0.90)) - (1 - P(Z \leq 1.11)) = P(Z \leq 1.11) - P(Z \leq 0.90) \approx 0.8665 - 0.8159 = 0.0506.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = 40) \approx 0.0506}}$$

Madrid, Junio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.**
b) **Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.**
c) **En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.**

Solución:

Sean A_i = "Acierto en disparo i", F_i = "Fallo en disparo i".

$P(A_1) = 0.3, P(F_1) = 0.7$. $P(A_2) = 0.4, P(F_2) = 0.6$. $P(A_3) = 0.5, P(F_3) = 0.5$. $P(A_4) = 0.6, P(F_4) = 0.4$.

a) **Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.**

Explota en disparo 1, 2 ó 3.

$$P(\text{Explota en 1, 2 ó 3}) = P(A_1) + P(F_1 \cap A_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap A_3)$$

Asumiendo independencia:

$$= P(A_1) + P(F_1)P(A_2) + P(F_1)P(F_2)P(A_3)$$

$$= 0.3 + (0.7)(0.4) + (0.7)(0.6)(0.5) = 0.3 + 0.28 + 0.21 = 0.79.$$

$$\boxed{\textbf{Probabilidad de no lanzar cuarta flecha= 0.79}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.**

Fallar los 4 disparos. $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)$

$$= P(F_1)P(F_2)P(F_3)P(F_4) = (0.7)(0.6)(0.5)(0.4) = 0.084.$$

$$\boxed{\textbf{Probabilidad de fallar los cuatro disparos= 0.084}}$$

c) **En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.**

X= nº aciertos al primer disparo de 10 arqueros.

$$X \sim B(n = 10, p = 0.85)$$

$$P(X = 6) = \binom{10}{6}(0.85)^6(1 - 0.85)^{10-6} = \binom{10}{6}(0.85)^6(0.15)^4$$

$$\binom{10}{6} = 210$$

$$P(X = 6) = 210 \cdot (0.85)^6 \cdot (0.15)^4 \approx 210 \cdot 0.37715 \cdot 0.00050625 \approx 0.0401$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = 6) \approx 0.0401}}$$

Ejercicio 4. Opción B

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) **Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?**
b) **¿Son A y B independientes?**
c) **Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).**
d) **Calcular $P(\overline{B}|A)$.**

Solución:

a) **Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?**

$C \cap A = \emptyset$ y $C \cap B = \emptyset$. $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Son incompatibles.

$$\boxed{\textbf{No, son incompatibles.}}$$

b) **¿Son A y B independientes?**

Independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. $P(A)P(B) = (0.5)(0.25) = 0.125$. Como $P(A \cap B) = 0.125$, sí son independientes.

$$\boxed{\textbf{Sí, son independientes.}}$$

c) **Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.**

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.25 - 0.125 = 0.625$. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0.625 = 0.375$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.375}}$$

d) Calcular $\boldsymbol{P(\overline{B}|A)}$.

Como A y B son independientes, A y $\overline{B}$ también lo son. $P(\overline{B}|A) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.25 = 0.75$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(\overline{B}|A) = 0.75}}$$

Madrid, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras.

Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento.

Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.**
b) **Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.**
c) **Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.**

$$\frac{A}{4\,R \quad 2\,N} \qquad \frac{B}{3\,R \quad 3\,N} \qquad \frac{C}{0\,R \quad 6\,N}$$

Según la ley de las probabilidades totales:

$$P(R1) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(R \cap C) = P(R/A) \cdot P(A) + P(R/B) \cdot P(B) + P(C/R) \cdot P(C)$$

$$P(R1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{0}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18} = 0{,}3889$$

$$\boxed{\mathbf{P(R1) = 0{,}3889}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.**

$$P(RN) = P(RN/A) \cdot P(A) + P(RN/B) \cdot P(B) + P(RN/C) \cdot P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{6} \cdot \frac{0}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{90} = 0{,}1889$$

$$\boxed{\mathbf{P(RN) = 0{,}1889}}$$

c) **Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.**

$$P(N2/R1) = \frac{P(N2 \cap R1)}{P(R1)} = \frac{17/90}{7/18} = \frac{17}{35} = 0{,}4857$$

$$\boxed{\mathbf{P(N2/R1) = 0{,}4857}}$$

Ejercicio 4. Opción B

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \bar{Y}) = 0.08$ (donde $\bar{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) **Calcular P(Y).**
b) **Calcular P(XUY).**
c) **Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.**

Solución:

a) **Calcular P(Y).**

Al ser dos sucesos independientes:

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

$$P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) \Rightarrow P(X \cap Y) = P(X) - P(X \cap \overline{Y}) = 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32$$

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y) \Rightarrow P(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{0{,}32}{0{,}4} = 0{,}8$$

b) **Calcular P(XUY).**

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0{,}4 + 0{,}8 - 0{,}32 = 0{,}88$$

c) **Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.**

$$P = P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 0{,}6$$

$$E = \text{n}^{\text{o}} \text{ de veces en las que se tiene éxito}$$

$$p = P(\overline{X}) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$E \sim \mathcal{B}(8, 0{,}6)$$

$$P(E \geq 2) = 1 - P(E < 2) = 1 - [P(E = 0) + P(E = 1)]$$

$$P(E \geq 2) = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^7\right]$$

$$\boxed{\mathbf{P(E \geq 2) = 0{,}9915}}$$

Madrid, Junio 2019 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

a) **Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.**
b) **Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.**

Solución:

a) **Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.**

X= nº peces vivos tras 5 años.

$$X \sim B(n = 10, p = 0.10)$$
$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.1)^0(0.9)^{10} \approx 0.3487$$
$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.1)^1(0.9)^9 = 10(0.1)(0.9)^9 \approx 0.3874$$
$$P(X \geq 2) \approx 1 - (0.3487 + 0.3874) = 1 - 0.7361 = 0.2639$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq 2) \approx 0.2639}}$$

b) **Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.**

Y= nº peces vivos tras 5 años.

$$Y \sim B(n = 200, p = 0.10)$$

$$np = 200(0.1) = 20 \geq 5$$

.

$$nq = 200(0.9) = 180 \geq 5$$

Aproximación válida.

$$Y' \sim N(\mu = np = 20, \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20(0.9)} = \sqrt{18} \approx 4.243)$$

$$P(Y \geq 10) \approx P(Y' \geq 9.5)$$

(corrección por continuidad).

Estandarizamos:

$$P\left(Z \geq \frac{9.5-20}{\sqrt{18}}\right) = P\left(Z \geq \frac{-10.5}{\sqrt{18}}\right) \approx P(Z \geq -2.47)$$

$P(Z \geq -2.47) = P(Z \leq 2.47)$. Tabla N(0,1): $\Phi(2.47) = 0.9932$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	~~0,9918~~	~~0,9920~~	~~0,9922~~	~~0,9925~~	~~0,9927~~	~~0,9929~~	~~0,9931~~	0,9932	0,9934	0,9936

$\boxed{\textbf{La probabilidad es aproximadamente 0.9932.}}$

Ejercicio 4. Opción B

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
b) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:

Eventos: M=”Medicamento”, Pl=”Placebo”, Me=”Mejora”.

$P(M) = 0.5, P(Pl) = 0.5.$

$P(Me|M) = 0.80, P(Me|Pl) = 0.10.$

a) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

Probabilidad Total:
$P(Me) = P(Me|M)P(M) + P(Me|Pl)P(Pl)$
$P(Me) = (0.80)(0.5) + (0.10)(0.5) = 0.40 + 0.05 = 0.45.$

$\boxed{\textbf{La probabilidad de que un paciente mejore es 0.45.}}$

b) **Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.**

Bayes:

$$P(M|Me) = \frac{P(Me|M)P(M)}{P(Me)}$$

$$P(M|Me) = \frac{(0.80)(0.5)}{0.45} = \frac{0.40}{0.45} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(M|Me) = \frac{8}{9} \approx 0.8889}}$$

Madrid, Septiembre 2019 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) **Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.**

b) **Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.**

Solución:

a) **Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.**

Sea X el número de amigos seleccionados entre los 8.
Cada amigo puede ser seleccionado (éxito) con probabilidad $p = 0.40$ o no seleccionado (fracaso) con $q = 1 - p = 0.60$.
Asumiendo que la selección de cada amigo es independiente, X sigue una distribución Binomial: $X \sim B(n = 8, p = 0.40)$.
Se pide calcular la probabilidad de que al menos 2 sean seleccionados: $P(X \geq 2)$.
Es más fácil calcular el complementario:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

Usamos la fórmula de la probabilidad Binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} (0.40)^0 (0.60)^{8-0} = 1 \cdot 1 \cdot (0.60)^8 \approx 0.016796.$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} (0.40)^1 (0.60)^{8-1} = 8 \cdot (0.40) \cdot (0.60)^7 = 3.2 \cdot (0.60)^7 \approx 3.2 \cdot 0.02799 = 0.089579.$$

Calculamos la probabilidad pedida:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1 - (0.016796 + 0.089579) = 1 - 0.106375 = 0.893625.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq 2) \approx 0.8936}}$$

b) **Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.**

Tenemos $X \sim N(\mu = 5.6, \sigma)$. Nos dan $P(X \leq 8.2) = 0.67$. Estandarizamos la variable X para usar la normal estándar $Z \sim N(0, 1)$: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

$$P(X \leq 8.2) = P\left(\frac{X - 5.6}{\sigma} \leq \frac{8.2 - 5.6}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{2.6}{\sigma}\right) = 0.67.$$

Buscamos en la tabla de la $N(0,1)$ el valor z tal que $P(Z \leq z) = 0.67$. Mirando en el cuerpo de la tabla, el valor más cercano a 0.6700 es 0.6700, que corresponde a $z = 0.44$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	~~0,6554~~	~~0,6591~~	~~0,6628~~	~~0,6664~~	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Por lo tanto, debemos tener:

$$\frac{2.6}{\sigma} = 0.44$$

Despejamos σ:

$$\sigma = \frac{2.6}{0.44} = \frac{260}{44} = \frac{65}{11} \approx 5.91.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \frac{65}{11} \approx 5.91}}$$

Ejercicio 4. Opción B

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6%, mientras que para los de alta gama es del 0.9%. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución:

Definimos los sucesos:

A = "Vehículo es de alta gama" $\implies P(A) = 1/3$.

B = "Vehículo es de baja gama" $\implies P(B) = 1 - P(A) = 1 - 1/3 = 2/3$.

D = "Vehículo es defectuoso".

Datos del enunciado:

$P(D|B) = 0.016$ (Prob. defecto si es baja gama).

$P(D|A) = 0.009$ (Prob. defecto si es alta gama).

a) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

Se pide calcular $P(D)$. Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)$$

$$P(D) = (0.009)\left(\frac{1}{3}\right) + (0.016)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$P(D) = \frac{0.009}{3} + \frac{0.032}{3} = \frac{0.041}{3}.$$

$$P(D) = \frac{41}{3000} \approx 0.01367$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(D) = \frac{0.041}{3} = \frac{41}{3000} \approx 0.0137}}$$

b) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Se pide calcular $P(B|D)$. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)}$$

Ya hemos calculado los valores necesarios: $P(D|B) = 0.016$, $P(B) = 2/3$, $P(D) = 0.041/3$.

$$P(B|D) = \frac{(0.016)(2/3)}{0.041/3} = \frac{0.016 \times 2}{0.041} = \frac{0.032}{0.041} = \frac{32}{41}.$$

Calculamos el valor numérico:

$$P(B|D) \approx 0.7805.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(B|D) = \frac{32}{41} \approx 0.7805}}$$

Madrid, Junio 2018 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Solución:

Definimos los sucesos:

R = "Artículo comprado con precio rebajado" $\implies P(R) = 0.60$.

$\overline{R}$ = "Artículo comprado sin rebaja" $\implies P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0.60 = 0.40$.

D = "Artículo es devuelto".

Datos del enunciado:

$P(D|R) = 0.15$ (Probabilidad de devolución si fue rebajado).

$P(D|\overline{R}) = 0.08$ (Probabilidad de devolución si no fue rebajado).

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

Se pide calcular $P(D)$. Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|\overline{R})P(\overline{R})$$

$$P(D) = (0.15)(0.60) + (0.08)(0.40)$$

$$P(D) = 0.090 + 0.032 = 0.122.$$

El porcentaje global de artículos devueltos es $0.122 \times 100 = 12.2\%$.

El porcentaje global de artículos devueltos es del 12.2%.

b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Se pide calcular $P(R|D)$, la probabilidad de que un artículo devuelto fuera rebajado. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(R|D) = \frac{P(D|R)P(R)}{P(D)}$$

Ya hemos calculado todos los valores necesarios: $P(D|R) = 0.15$, $P(R) = 0.60$, $P(D) = 0.122$.

$$P(R|D) = \frac{(0.15)(0.60)}{0.122} = \frac{0.090}{0.122} = \frac{90}{122} = \frac{45}{61}.$$

Calculamos el valor numérico y el porcentaje:

$$P(R|D) \approx 0.7377$$

El porcentaje es $0.7377 \times 100 \approx 73.77\%$.

El 73.77% (aproximadamente) de los artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados.

Ejercicio 4. Opción B

En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

a) **Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?**

b) **Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.**

Solución:

Definimos sucesos:

A = "Producto es de tipo A" $\implies P(A) = 0.75$

B = "Producto es de tipo B" $\implies P(B) = 0.25$

D = "Producto es defectuoso"

Datos de probabilidades condicionadas:

$P(D|A) = 0.025$

$P(D|B) = 0.05$

a) **Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?**

Primero calculamos la probabilidad global de que un producto elegido al azar sea defectuoso, usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)$$

$$P(D) = (0.025)(0.75) + (0.05)(0.25)$$

$$P(D) = 0.01875 + 0.0125 = 0.03125.$$

Esta es la probabilidad de que un producto sea defectuoso. Si se fabrican $N = 5000$ productos, el número esperado de defectuosos es $E[Defectuosos] = N \times P(D)$.

$$E[Defectuosos] = 5000 \times 0.03125 = 156.25.$$

Se espera que aproximadamente 157 productos sean defectuosos.

$$\boxed{\textbf{Se espera que 156.25 (aprox. 157) productos sean defectuosos.}}$$

b) **Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.**

En este caso, solo hay productos tipo A.
Sea X el número de unidades defectuosas entre las 6000 fabricadas. Cada unidad puede ser defectuosa (éxito) con probabilidad $p = P(D|A) = 0.025$, o no defectuosa (fracaso) con $q = 1 - p = 0.975$.
La variable X sigue una distribución Binomial: $X \sim B(n = 6000, p = 0.025)$.

Podemos aproximar esta Binomial por una Normal si se cumplen las condiciones: $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5$.

$n \cdot p = 6000 \times 0.025 = 150.$
$n \cdot q = 6000 \times 0.975 = 5850.$
Ambos valores son mayores que 5, por lo que la aproximación es válida.
La Normal aproximada X' tendrá media $\mu = np = 150$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6000 \times 0.025 \times 0.975} = \sqrt{146.25} \approx 12.093$.
Así, $X' \sim N(\mu = 150, \sigma = 12.093)$.
Se pide calcular $P(X > 160)$. Al aproximar una variable discreta (Binomial) por una continua (Normal), aplicamos la corrección por continuidad de Yates:
$P(X > 160) \approx P(X' \geq 160.5)$.
Estandarizamos la variable: $Z = \frac{X'-\mu}{\sigma}$.

$$P(X' \geq 160.5) = P\left(Z \geq \frac{160.5 - 150}{12.093}\right) = P\left(Z \geq \frac{10.5}{12.093}\right) \approx P(Z \geq 0.868).$$

Usamos la propiedad del complementario:

$$P(Z \geq 0.868) = 1 - P(Z < 0.868) \approx 1 - P(Z \leq 0.87).$$

Buscamos $P(Z \leq 0.87)$ en la tabla N(0,1): $\Phi(0.87) = 0.8078$.

$$P(X > 160) \approx 1 - 0.8078 = 0.1922.$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621

La probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas es aproximadamente 0.1922.

Madrid, Septiembre 2018 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 4. Opción A

Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13.8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?**
b) **Cierto test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?**

Solución:

Definimos los sucesos:

D = "Ser diabético" $\implies P(D) = 0.138$.

$\overline{D}$ = "No ser diabético" $\implies P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.138 = 0.862$.

S = "Saber que tiene diabetes"

$\overline{S}$ = "No saber que tiene diabetes"

Datos del enunciado: $P(\overline{S}|D) = 0.43$ (Probabilidad de no saberlo, sabiendo que es diabético).

$P(S|D) = 1 - P(\overline{S}|D) = 1 - 0.43 = 0.57$ (Probabilidad de saberlo, sabiendo que es diabético).

Si no es diabético, no puede saber que lo es (asumimos que no hay error en este sentido), así que $P(S|\overline{D}) = 0$ y $P(\overline{S}|\overline{D}) = 1$.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?**

Probabilidad de ser diabético y saberlo: $P(D \cap S)$.
Usamos la definición de probabilidad condicionada: $P(S|D) = \frac{P(D \cap S)}{P(D)}$.

$$P(D \cap S) = P(S|D) \times P(D) = 0.57 \times 0.138 = 0.07867.$$

Probabilidad de no ser diabético o no saber que lo es: $P(\overline{D} \cup \overline{S})$. Usamos la ley de Morgan: $\overline{D} \cup \overline{S} = \overline{D \cap S}$.

$$P(\overline{D} \cup \overline{S}) = P(\overline{D \cap S}) = 1 - P(D \cap S) = 1 - 0.0787 = 0.9213.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(Diab\ y\ Sabe) = 0.07866}. \quad \boldsymbol{P(No\ Diab\ o\ No\ Sabe) = 0.92134}.}$$

b) **Cierto test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?**

Definimos el suceso T = "Dar positivo en el test".
Datos del test: $P(T|D) = 0.96$ (Sensibilidad: probabilidad de positivo si es diabético).
$P(T|\overline{D}) = 0.02$ (Probabilidad de falso positivo: positivo si no es diabético).
$P(\overline{T}|D) = 1 - 0.96 = 0.04$ (Falso negativo).
$P(\overline{T}|\overline{D}) = 1 - 0.02 = 0.98$ (Especificidad: negativo si no es diabético).

Se pide calcular $P(D|T)$, la probabilidad de ser diabético sabiendo que ha dado positivo. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T)}$$

Necesitamos calcular $P(T)$ usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(T) = P(T|D)P(D) + P(T|\overline{D})P(\overline{D})$$

$$P(T) = (0.96)(0.138) + (0.02)(0.862)$$

$$P(T) = 0.1324 + 0.0172 = 0.1497$$

Ahora aplicamos Bayes:

$$P(D|T) = \frac{(0.96)(0.138)}{0.1497} = \frac{0.1324}{0.1497} \approx 0.8849.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(D|T) \approx 0.8849}}$$

Ejercicio 4. Opción B

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8.5$ y desviación típica $\sigma = 2.5$. Se pide:

a) **Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0.05$.**
b) **Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.**

Solución:

Tenemos $X \sim N(\mu = 8.5, \sigma = 2.5)$.

Estandarizamos la variable usando $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-8.5}{2.5}$, donde $Z \sim N(0,1)$.

a) **Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0.05$.**

Estandarizamos la condición:

$$P(X \leq a) = P\left(\frac{X-8.5}{2.5} \leq \frac{a-8.5}{2.5}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-8.5}{2.5}\right) = 0.05.$$

Sea $z_a = \frac{a-8.5}{2.5}$. Buscamos z_a tal que $P(Z \leq z_a) = 0.05$.
Como $0.05 < 0.5$, el valor z_a debe ser negativo. La tabla de la $N(0,1)$ proporciona probabilidades para $P(Z \leq z)$ con $z \geq 0$.
Usamos la simetría: $P(Z \leq z_a) = 0.05 \implies P(Z \geq -z_a) = 0.05$. Esto significa que $P(Z \leq -z_a) = 1 - 0.05 = 0.95$. Buscamos en la tabla de la $N(0,1)$ el valor $-z_a$ cuya probabilidad acumulada es 0.95.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	~~0,9452~~	~~0,9463~~	~~0,9474~~	~~0,9484~~	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

El valor 0.95 está entre 0.9495 ($z = 1.64$) y 0.9505 ($z = 1.65$). Interpolando, tomamos $-z_a = 1.645$. Por lo tanto, $z_a = -1.645$. Ahora despejamos a:

$$z_a = \frac{a - 8.5}{2.5} \implies -1.645 = \frac{a - 8.5}{2.5}$$

$$a - 8.5 = -1.645 \times 2.5 = -4.1125$$

$$a = 8.5 - 4.1125 = 4.3875.$$

$$\boxed{\boldsymbol{a \approx 4.3875}}$$

b) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.

Se pide calcular $P(8 \leq X \leq 9.3)$. Estandarizamos ambos extremos:

$$Z_1 = \frac{8 - 8.5}{2.5} = \frac{-0.5}{2.5} = -0.20.$$

$$Z_2 = \frac{9.3 - 8.5}{2.5} = \frac{0.8}{2.5} = \frac{8}{25} = 0.32.$$

La probabilidad es $P(-0.20 \leq Z \leq 0.32)$. Usamos la propiedad $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$.

$$P(-0.20 \leq Z \leq 0.32) = P(Z \leq 0.32) - P(Z \leq -0.20).$$

Usamos la simetría para la parte negativa: $P(Z \leq -0.20) = P(Z \geq 0.20) = 1 - P(Z \leq 0.20)$.

$$P(-0.20 \leq Z \leq 0.32) = P(Z \leq 0.32) - (1 - P(Z \leq 0.20)) = P(Z \leq 0.32) + P(Z \leq 0.20) - 1.$$

Buscamos los valores en la tabla $N(0,1)$:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

$P(Z \leq 0.32) = 0.6255$. $P(Z \leq 0.20) = 0.5793$. Calculamos la probabilidad:

$$P(8 \leq X \leq 9.3) = 0.6255 + 0.5793 - 1 = 1.2048 - 1 = 0.2048.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(8 \leq X \leq 9.3) = 0.2048}}$$

Madrid, Junio 2017 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4. Opción B

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) **Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.**
b) **Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?**

Solución:

Definimos los sucesos:

C = "Marta va al cine" ($P(C) = 0.40$)

T = "Marta va de compras" ($P(T) = 0.30$)

V = "Marta juega a videojuegos" ($P(V) = 0.30$)

(Notar que $P(C) + P(T) + P(V) = 0.4 + 0.3 + 0.3 = 1$, forman una partición del espacio muestral).

B = "Marta queda con sus compañeros de baloncesto"

$\overline{B}$ = "Marta NO queda con sus compañeros de baloncesto"

Datos de probabilidades condicionadas:

$P(B|C) = 0.60$ (Prob. quedar con comp. si va al cine)

$P(B|T) = 0.20$ (Prob. quedar con comp. si va de compras)

$P(B|V) = 0.80$ (Prob. quedar con comp. si juega videojuegos)

Calculamos las probabilidades complementarias (no quedar con compañeros):

$P(\overline{B}|C) = 1 - P(B|C) = 1 - 0.60 = 0.40$

$P(\overline{B}|T) = 1 - P(B|T) = 1 - 0.20 = 0.80$

$P(\overline{B}|V) = 1 - P(B|V) = 1 - 0.80 = 0.20$

a) **Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.**

Usamos el Teorema de la Probabilidad Total para calcular $P(\overline{B})$:

$$P(\overline{B}) = P(\overline{B}|C)P(C) + P(\overline{B}|T)P(T) + P(\overline{B}|V)P(V)$$

$$P(\overline{B}) = (0.40)(0.40) + (0.80)(0.30) + (0.20)(0.30)$$

$$P(\overline{B}) = 0.16 + 0.24 + 0.06 = 0.46$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(\overline{B}) = 0.46}}$$

b) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Se pide calcular $P(C|B)$. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)}$$

Necesitamos calcular $P(B)$ primero. Podemos usar el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(B) = P(B|C)P(C) + P(B|T)P(T) + P(B|V)P(V)$$

$$P(B) = (0.60)(0.40) + (0.20)(0.30) + (0.80)(0.30)$$

$$P(B) = 0.24 + 0.06 + 0.24 = 0.54$$

(Alternativamente, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.46 = 0.54$).
Ahora aplicamos Bayes:

$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{(0.60)(0.40)}{0.54} = \frac{0.24}{0.54} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(C|B) = \frac{4}{9} \approx 0.4444}}$$

Madrid, Septiembre 2017 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$, se pide:

a) **Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.**
b) **Calcular $p(\overline{A}|B)$ donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.**

Solución:

a) **Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.**

Dos sucesos A y B son independientes si y solo si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Primero, calculamos $p(A \cap B)$ usando la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - p(A \cap B)$$
$$p(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

Encontramos un denominador común (18):

$$p(A \cap B) = \frac{4 \cdot 2}{18} + \frac{1 \cdot 9}{18} - \frac{2 \cdot 6}{18} = \frac{8 + 9 - 12}{18} = \frac{5}{18}.$$

Ahora, calculamos el producto $p(A) \cdot p(B)$:

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Comparamos los resultados:

$$p(A \cap B) = \frac{5}{18} \quad \text{y} \quad p(A) \cdot p(B) = \frac{4}{18}.$$

Como $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$, los sucesos A y B no son independientes.

Los sucesos A y B NO son independientes.

b) **Calcular $p(\overline{A}|B)$ donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.**

La probabilidad condicionada se define como:

$$p(\overline{A}|B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)}$$

Sabemos que $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$. Ya calculamos $p(A \cap B) = \frac{5}{18}$.

$$p(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{5}{18} = \frac{9}{18} - \frac{5}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada:

$$p(\overline{A}|B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{2/9}{1/2} = \frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{4}{9}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{p(\overline{A}|B) = \frac{4}{9}}}$$