Ejercicios resueltos de Selectividad

Matemáticas. Geometría

mentoor.es

Índice de contenido

Madrid, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

a) **Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.**

b) **Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.**

Solución:

a) **Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.**

Sea π_1 el plano buscado. Pasa por $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$.
Un vector contenido en π_1 es $\vec{AB} = B - A = (1-0, 1-0, 0-1) = (1,1,-1)$.
El plano $z = 0$ tiene como vector normal $\vec{n}_{z=0} = (0,0,1)$.
Como π_1 es perpendicular al plano $z = 0$, el vector normal $\vec{n}_{z=0}$ debe ser paralelo a π_1, es decir, es un vector director de π_1.
El plano π_1 está determinado por el punto $A(0,0,1)$ y los vectores directores $\vec{AB} = (1,1,-1)$ y $\vec{n}_{z=0} = (0,0,1)$.
La ecuación general del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) - y(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) + (z-1)(1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 0$$

$$x(1) - y(1) + (z-1)(0) = 0$$

$$x - y = 0.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi_1 \equiv x - y = 0}}$$

b) **Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.**

Sea π_2 el plano $x + z = 1$. Su vector normal es $\vec{n}_{\pi_2} = (1,0,1)$. Comprobamos si $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$ están en π_2:
Para A: $0 + 1 = 1$. Sí.
Para B: $1 + 0 = 1$. Sí.
Las rectas r_1 y r_2 deben estar contenidas en π_2. Por lo tanto, su vector director común, $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$, debe ser perpendicular a $\vec{n}_{\pi_2}$.

$$\vec{d} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \implies (d_1, d_2, d_3) \cdot (1,0,1) = 0 \implies d_1 + d_3 = 0 \implies d_3 = -d_1.$$

El vector director es de la forma $\vec{d} = (d_1, d_2, -d_1)$.
Recta r_1: Pasa por $A(0,0,1)$, vector $\vec{d}$.
Recta r_2: Pasa por $B(1,1,0)$, vector $\vec{d}$.
La distancia entre dos rectas paralelas $r_1(A, \vec{d})$ y $r_2(B, \vec{d})$ es

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

Sabemos $\vec{AB} = (1, 1, -1)$. Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{AB} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ d_1 & d_2 & -d_1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-d_1 - (-d_2)) - \vec{j}(-d_1 - (-d_1)) + \vec{k}(d_2 - d_1)$$

$$= \vec{i}(-d_1 + d_2) - \vec{j}(0) + \vec{k}(d_2 - d_1) = (-d_1 + d_2, 0, d_2 - d_1).$$

Calculamos su módulo:

$$|\vec{AB} \times \vec{d}| = \sqrt{(-d_1 + d_2)^2 + 0^2 + (d_2 - d_1)^2} = \sqrt{2(d_2 - d_1)^2} = \sqrt{2}|d_2 - d_1|.$$

Calculamos el módulo de $\vec{d}$:

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + (-d_1)^2} = \sqrt{2d_1^2 + d_2^2}.$$

La distancia debe ser 1:

$$\frac{\sqrt{2}|d_2 - d_1|}{\sqrt{2d_1^2 + d_2^2}} = 1 \implies \sqrt{2}|d_2 - d_1| = \sqrt{2d_1^2 + d_2^2}.$$

Elevamos al cuadrado:

$$2(d_2 - d_1)^2 = 2d_1^2 + d_2^2$$
$$2(d_2^2 - 2d_1 d_2 + d_1^2) = 2d_1^2 + d_2^2$$
$$2d_2^2 - 4d_1 d_2 + 2d_1^2 = 2d_1^2 + d_2^2$$
$$d_2^2 - 4d_1 d_2 = 0 \implies d_2(d_2 - 4d_1) = 0.$$

Esto da dos posibilidades para la relación entre d_1 y d_2:
1. $d_2 = 0$: El vector sería $\vec{d} = (d_1, 0, -d_1)$. Si $d_1 = 1$, $\vec{d} = (1, 0, -1)$. Este es $\vec{n}_{\pi_2}$, normal al plano. Las rectas no pueden tener un vector director normal al plano en el que están contenidas. Este caso no es válido.
2. $d_2 - 4d_1 = 0 \implies d_2 = 4d_1$. Elegimos $d_1 = 1$, entonces $d_2 = 4$. El vector director es $\vec{d} = (1, 4, -1)$. Este vector es perpendicular a $\vec{n}_{\pi_2}$: $(1, 4, -1) \cdot (1, 0, 1) = 1 + 0 - 1 = 0$. Es válido.
Las ecuaciones de las rectas son: Recta r_1: Pasa por $A(0, 0, 1)$, director $\vec{d} = (1, 4, -1)$.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Recta r_2: Pasa por $B(1, 1, 0)$, director $\vec{d} = (1, 4, -1)$.

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 4\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

(Se pueden expresar en forma continua también).

$$\boxed{\mathbf{r}_1 : \begin{cases} x = \lambda, \\ y = 4\lambda, \\ z = 1 - \lambda, \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 : \begin{cases} x = 1 + \mu, \\ y = 1 + 4\mu, \\ z = -\mu. \end{cases}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) **A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V=1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.**

b) **Dado el punto $Q(3,3,3)$ se quiere imprimir ahora el paralelepipedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepipedo que habría que suministrar al ordenador?**

Solución:

a) **A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V=1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.**

Cálculo del volumen:
El volumen de un tetraedro con vértices P_1,P_2,P_3,P_4 es $V=\frac{1}{6}|\det(\vec{P_1P_2},\vec{P_1P_3},\vec{P_1P_4})|$.
Calculamos los vectores con origen en $P_1(1,1,1)$:
$\vec{P_1P_2}=P_2-P_1=(2-1,1-1,0-1)=(1,0,-1)$.
$\vec{P_1P_3}=P_3-P_1=(1-1,3-1,2-1)=(0,2,1)$.
$\vec{P_1P_4}=P_4-P_1=(3-1,a-1,3-1)=(2,a-1,2)$.

Calculamos el producto mixto (determinante):

$$\det(\vec{P_1P_2},\vec{P_1P_3},\vec{P_1P_4})=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & a-1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=1(2(2)-1(a-1))-0+(-1)(0(a-1)-2(2))$$

$$=1(4-(a-1))-1(0-4)=(4-a+1)-(-4)=5-a+4=9-a.$$

El volumen es $V=\frac{1}{6}|9-a|$.
Nos dicen que $V=1$.

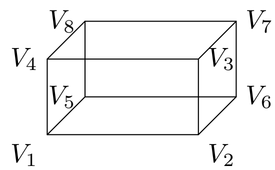
$$\frac{1}{6}|9-a|=1 \implies |9-a|=6.$$

Esto implica dos posibilidades: 1. $9-a=6 \implies a=9-6=3$. 2. $9-a=-6 \implies a=9+6=15$.
Comprobación de la longitud de las aristas (¡ 10):
Necesitamos calcular la longitud de las 6 aristas para $a=3$ y $a=15$.
Aristas desde P_1: $|\vec{P_1P_2}|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}<10$.
$|\vec{P_1P_3}|=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}<10$.
Si $a=3$, $\vec{P_1P_4}=(2,2,2)$, $|\vec{P_1P_4}|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}<10$.
Si $a=15$, $\vec{P_1P_4}=(2,14,2)$, $|\vec{P_1P_4}|=\sqrt{2^2+14^2+2^2}=\sqrt{4+196+4}=\sqrt{204}$. Como $14^2=196$ y $15^2=225$, $\sqrt{204}$ está entre 14 y 15, por lo que es mayor que 10. El valor $a=15$ no es válido.
Comprobamos las otras aristas para $a=3$:
$\vec{P_2P_3}=P_3-P_2=(1-2,3-1,2-0)=(-1,2,2)$, $|\vec{P_2P_3}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3<10$.
Para $a=3$, $P_4=(3,3,3)$.
$\vec{P_2P_4}=P_4-P_2=(3-2,3-1,3-0)=(1,2,3)$, $|\vec{P_2P_4}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}<10$.
$\vec{P_3P_4}=P_4-P_3=(3-1,3-3,3-2)=(2,0,1)$, $|\vec{P_3P_4}|=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}<10$.
Todas las aristas son menores que 10 para $a=3$.

El único valor posible es $a = 3$.

$\boxed{\textbf{El único valor posible es } \boldsymbol{a = 3}.}$

b) **Dado el punto $Q(3,3,3)$ se quiere imprimir ahora el paralelepipedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepipedo que habría que suministrar al ordenador?** El paralelepípedo está determinado por el vértice inicial $P_1(1,1,1)$ y los vectores de las aristas concurrentes en P_1: $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)$. $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)$. $\vec{w} = \overrightarrow{P_1Q} = Q - P_1 = (3-1, 3-1, 3-1) = (2,2,2)$.



Los 8 vértices del paralelepípedo son:
- $V_1 = P_1 = (1,1,1)$.
- $V_2 = P_1 + \vec{u} = (1,1,1) + (1,0,-1) = (2,1,0)$. (Este es P_2)
- $V_3 = P_1 + \vec{v} = (1,1,1) + (0,2,1) = (1,3,2)$. (Este es P_3)
- $V_4 = P_1 + \vec{w} = (1,1,1) + (2,2,2) = (3,3,3)$. (Este es Q)
- $V_5 = P_1 + \vec{u} + \vec{v} = (2,1,0) + (0,2,1) = (2,3,1)$.
- $V_6 = P_1 + \vec{u} + \vec{w} = (2,1,0) + (2,2,2) = (4,3,2)$.
- $V_7 = P_1 + \vec{v} + \vec{w} = (1,3,2) + (2,2,2) = (3,5,4)$.
- $V_8 = P_1 + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (2,3,1) + (2,2,2) = (4,5,3)$.

$\boxed{\textbf{Los vértices son: } \mathbf{(1,1,1), (2,1,0), (1,3,2), (3,3,3), (2,3,1), (4,3,2), (3,5,4), (4,5,3)}.}$

Madrid, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Sean los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$;

a) **Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.**
b) **El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.**

Solución:

a) **Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.**

El plano buscado, π, es el plano mediador del segmento PQ.
Pasa por el punto medio $M=(\frac{1+2}{2},\frac{-1+1}{2},\frac{3-1}{2})=(3/2,0,1)$.
Es perpendicular al vector $\vec{PQ}=Q-P=(1,2,-4)$. Este es el vector normal $\vec{n}_\pi$.
Ecuación del plano: $1(x-3/2)+2(y-0)-4(z-1)=0$. $x-3/2+2y-4z+4=0$.
Multiplicando por 2: $2x-3+4y-8z+8=0 \implies 2x+4y-8z+5=0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 2x+4y-8z+5=0}}$$

b) **El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.**

Sea R el tercer vértice. $R \in r$.
La recta r en paramétricas es $x=2+\lambda, y=\lambda, z=\lambda$. $R(2+\lambda,\lambda,\lambda)$.
La condición es

$$|\vec{PQ}|^2+|\vec{PR}|^2+|\vec{QR}|^2=34$$

$$|\vec{PQ}|^2=1^2+2^2+(-4)^2=21$$
$$\vec{PR}=R-P=(1+\lambda,1+\lambda,\lambda-3)$$
$$|\vec{PR}|^2=(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(\lambda-3)^2=2(1+2\lambda+\lambda^2)+(\lambda^2-6\lambda+9)=3\lambda^2-2\lambda+11$$
$$\vec{QR}=R-Q=(\lambda,\lambda-1,\lambda+1)$$
$$|\vec{QR}|^2=\lambda^2+(\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2=\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1+\lambda^2+2\lambda+1=3\lambda^2+2$$

Sustituyendo:

$$21+(3\lambda^2-2\lambda+11)+(3\lambda^2+2)=34$$
$$6\lambda^2-2\lambda+34=34$$
$$6\lambda^2-2\lambda=0 \implies 2\lambda(3\lambda-1)=0$$

Soluciones: $\lambda=0$ o $\lambda=1/3$.
Si $\lambda=0$, $R=(2,0,0)$. Tiene coordenadas nulas.
Si $\lambda=1/3$, $R=(2+1/3,1/3,1/3)=(7/3,1/3,1/3)$. No tiene coordenadas nulas.

$$\boxed{\textbf{El tercer vértice es } \boldsymbol{R\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}.}$$

Ejercicio 3. Opción B

Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{r}: & \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-0}{1}, \\ \mathbf{s}: & \begin{cases} x-y=5, \\ x+z=3. \end{cases} \end{array}}$$

se pide:

a) **Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.**
b) **Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.**

Solución:

a) **Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.**

Recta r: Punto $P_r(2,-1,0)$, vector $\vec{v}_r=(3,-1,1)$.
Recta s: Vector $\vec{v}_s=(1,-1,0)\times(1,0,1)=(-1,-1,1)$. Punto P_s: si $x=0$, $y=-5$, $z=3$. $P_s(0,-5,3)$.
$\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales. Se cortan o se cruzan.
Vector $\vec{P_rP_s}=P_s-P_r=(-2,-4,3)$.
Producto mixto $[\vec{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]$:

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(0)+4(4)+3(-4)=16-12=4.$$

Como es $\neq 0$, las rectas se cruzan.
Distancia:

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}$$

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-4,-4)$$

$$|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|=\sqrt{0^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$d(r,s)=\frac{|4|}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cruzan.}\quad \boldsymbol{d(r,s)=\frac{\sqrt{2}}{2}}\ \textbf{u.}}$$

b) **Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.**

Sea t la recta buscada. Pasa por $P(5,-1,2)$. Corta a r perpendicularmente en un punto M.
M es un punto genérico de r: $M(2+3\lambda,-1-\lambda,\lambda)$.
El vector $\vec{PM}$ es director de t y debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$.
$\vec{PM}=M-P=(2+3\lambda-5,-1-\lambda-(-1),\lambda-2)=(3\lambda-3,-\lambda,\lambda-2)$.

$$\vec{PM} \cdot \vec{v}_r = 0$$

$$(3\lambda - 3, -\lambda, \lambda - 2) \cdot (3, -1, 1) = 0$$

$$3(3\lambda - 3) - 1(-\lambda) + 1(\lambda - 2) = 0$$

$$9\lambda - 9 + \lambda + \lambda - 2 = 0 \implies 11\lambda - 11 = 0 \implies \lambda = 1$$

El punto de intersección es $M(2+3(1), -1-1, 1) = (5, -2, 1)$.
La recta t pasa por $P(5, -1, 2)$ y $M(5, -2, 1)$.
Vector director $\vec{d_t} = \vec{PM} = (0, -1, -1)$.
Ecuación paramétrica de t:

$$t \equiv \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 - \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{t}: \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -1 - \mu, \qquad \mu \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - \mu, \end{cases}}$$

Madrid, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) **Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.**
b) **Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z=1$.**
c) **Determinar el perímetro del triángulo T.**

Solución:

a) **Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.** Calculamos $\vec{AB}=(-1,4,-4)$ y $\vec{AC}=(1,3,-3)$. Como $\frac{-1}{1}\neq\frac{4}{3}$, los vectores no son proporcionales y los puntos no están alineados, formando un triángulo T. El plano π que los contiene pasa por A y tiene vectores directores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(0)-(y+2)(7)+(z-3)(-7)=0$$

$$-7(y+2)-7(z-3)=0 \implies y+2+z-3=0 \implies y+z-1=0.$$

$$\boxed{\textbf{Los puntos forman un triángulo. Plano: } \boldsymbol{y+z-1=0}.}$$

b) **Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z=1$.** Recta r por A y B: Punto $A(1,-2,3)$, vector $\vec{AB}=(-1,4,-4)$. Paramétricas: $x=1-\lambda, y=-2+4\lambda, z=3-4\lambda$. Intersección con $z=1$: $3-4\lambda=1 \implies 4\lambda=2 \implies \lambda=1/2$. Punto: $x=1-1/2=1/2$, $y=-2+4(1/2)=0$, $z=1$.

$$\boxed{\textbf{El punto de corte es } \left(\boldsymbol{\frac{1}{2},0,1}\right).}$$

c) **Determinar el perímetro del triángulo T.** Perímetro $P=|\vec{AB}|+|\vec{AC}|+|\vec{BC}|$. $|\vec{AB}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{1+16+16}=\sqrt{33}$. $|\vec{AC}|=\sqrt{1^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{19}$. $\vec{BC}=C-B=(2,-1,1)$. $|\vec{BC}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.

$$\boxed{\textbf{Perímetro } = \boldsymbol{\sqrt{33}+\sqrt{19}+\sqrt{6}} \textbf{ u}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Dada la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x-z=2$ y el punto $A(1,1,1)$ se pide:

a) **Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.**
b) **Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.**
c) **Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.**

Solución:

a) **Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.**

r: $P_r(1,0,-1)$, $\vec{d_r}=(2,1,-2)$. $\pi: x-z-2=0$, $\vec{n}_\pi=(1,0,-1)$.
$\vec{d_r}\cdot\vec{n}_\pi=(2)(1)+(1)(0)+(-2)(-1)=2+0+2=4\neq 0$. La recta y el plano se cortan en un único punto.
Para encontrar la intersección:
Paramétricas de r: $x=1+2t, y=t, z=-1-2t$.
Sustituimos en

$$\pi:(1+2t)-(-1-2t)-2=0 \implies 1+2t+1+2t-2=0 \implies 4t=0 \implies t=0$$

Punto de intersección I: $(1+0,0,-1-0)=(1,0,-1)$.

$$\boxed{\textbf{La recta y el plano se cortan en el punto } \boldsymbol{I(1,0,-1)}.}$$

b) **Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.**

Sea A' la proyección de $A(1,1,1)$ sobre $\pi: x-z-2=0$.
Recta p perpendicular a π por A: $\vec{d_p}=\vec{n}_\pi=(1,0,-1)$. $p: x=1+t, y=1, z=1-t$.
Para encontrar la intersección:

$$A'=p\cap\pi:(1+t)-(1-t)-2=0 \implies 2t-2=0 \implies t=1$$

$A'=(1+1,1,1-1)=(2,1,0)$.

$$\boxed{\textbf{La proyección ortogonal es } \boldsymbol{A'(2,1,0)}.}$$

c) **Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.**

Sea A'' el simétrico de $A(1,1,1)$ respecto a r.
Primero, buscaremos el Plano π perpendicular a r por A:
$\vec{n}_\pi=\vec{d_r}=(2,1,-2)$. $2(x-1)+1(y-1)-2(z-1)=0 \implies 2x+y-2z-1=0$.
$M=r\cap\pi$. $r: x=1+2t, y=t, z=-1-2t$.

$$2(1+2t)+(t)-2(-1-2t)-1=0 \implies 2+4t+t+2+4t-1=0 \implies 9t+3=0 \implies t=-1/3$$

$$M(1-2/3,-1/3,-1+2/3)=(1/3,-1/3,-1/3)$$

M es punto medio de AA''. $A''=2M-A$.

$$A''=2(1/3,-1/3,-1/3)-(1,1,1)=(2/3-1,-2/3-1,-2/3-1)=(-1/3,-5/3,-5/3)$$

$$\boxed{\textbf{El punto simétrico es } \boldsymbol{A''\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)}.}$$

Madrid, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) **Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.**
b) **Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.**
c) **Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.**

Solución:

a) **Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.**

El plano es $\pi : z = 1$. Para el punto $P(1, 1, 1)$, su coordenada z es 1. Por tanto, $P \in \pi$. Para el punto $Q(0, 0, 1)$, su coordenada z es 1. Por tanto, $Q \in \pi$.

$$\boxed{\textbf{Ambos puntos cumplen la ecuación } z = 1\textbf{, por lo que pertenecen al plano } \pi.}$$

b) **Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.**

Recta r:

Pasa por $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$. Vector director $\vec{d_r} = \vec{QP} = P - Q = (1 - 0, 1 - 0, 1 - 1) = (1, 1, 0)$.

Recta buscada r':
Debe ser paralela a r, por lo que su vector director $\vec{d_{r'}}$ puede ser el mismo, $\vec{d_{r'}} = (1, 1, 0)$.

Debe estar contenida en el plano $z = 0$. Esto significa que todos sus puntos deben tener coordenada $z = 0$.

Necesitamos un punto que pertenezca a $z = 0$. Podemos elegir el origen $O(0, 0, 0)$.

La recta r' pasa por $O(0, 0, 0)$ y tiene vector director $(1, 1, 0)$.

Ecuación paramétrica de r':

$$r' \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda = \lambda \\ y = 0 + 1\lambda = \lambda \\ z = 0 + 0\lambda = 0 \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\textbf{Una recta paralela a r en } z = 0 \textbf{ es } r' : (x, y, z) = (\lambda, \lambda, 0).}$$

c) **Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.**

Sea s la recta buscada. s pasa por $P(1, 1, 1)$.

La proyección ortogonal de s sobre $\pi : z = 1$ es la recta r.

Vector director de r es $\vec{d_r} = (1, 1, 0)$.

Sea $\vec{d_s} = (a, b, c)$ el vector director de s.

Como s pasa por $P \in \pi$, la proyección de s sobre π es la intersección del plano π con el plano π' que contiene a s y es perpendicular a π. El vector normal a π es $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

La proyección de $\vec{d_s}$ sobre el plano π es $\vec{d_s} - \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{d_s})$.

$$\text{proj}_{\vec{n}}(\vec{d_s}) = \frac{\vec{d_s} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(a,b,c)\cdot(0,0,1)}{1^2}(0,0,1) = c(0,0,1) = (0,0,c).$$

El vector proyectado es $(a,b,c) - (0,0,c) = (a,b,0)$.

Este vector proyectado debe ser paralelo a $\vec{d_r} = (1,1,0)$.

Entonces, $(a,b,0) = k(1,1,0)$ para algún k. Esto implica $a = k, b = k$.

Podemos tomar $k = 1$, así que $\vec{d_s} = (1,1,c)$.

Como la proyección es r, s no está contenida en π, por lo que $c \neq 0$.
El ángulo θ entre s (con $\vec{d_s} = (1,1,c)$) y r (con $\vec{d_r} = (1,1,0)$) es $\pi/4$.

Usamos la fórmula del coseno del ángulo entre dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{d_s} \cdot \vec{d_r}|}{|\vec{d_s}||\vec{d_r}|}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|(1,1,c)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{1^2+1^2+c^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1(1)+1(1)+c(0)|}{\sqrt{2+c^2}\sqrt{2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2(2+c^2)}} = \frac{2}{\sqrt{4+2c^2}}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{4+2c^2}}\right)^2$$

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{4+2c^2} \implies \frac{1}{2} = \frac{4}{4+2c^2}$$

$$1(4+2c^2) = 2(4) \implies 4+2c^2 = 8 \implies 2c^2 = 4 \implies c^2 = 2 \implies c = \pm\sqrt{2}.$$

Hay dos posibles vectores directores para s: $\vec{d_{s1}} = (1,1,\sqrt{2})$ y $\vec{d_{s2}} = (1,1,-\sqrt{2})$. Como la recta s pasa por $P(1,1,1)$, las ecuaciones son:

$$s_1 \equiv (x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,1,\sqrt{2})$$

$$s_2 \equiv (x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,1,-\sqrt{2})$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Las posibles rectas son:}\\ \boldsymbol{s_1 : (x,y,z) = (1+\lambda, 1+\lambda, 1+\sqrt{2}\lambda)}\\ \boldsymbol{s_2 : (x,y,z) = (1+\lambda, 1+\lambda, 1-\sqrt{2}\lambda)}\end{array}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Dados el plano $\boldsymbol{\pi} : x+3y+2z+14=0$ y la recta $\boldsymbol{r} : \begin{cases} \mathbf{x} = 2, \\ \mathbf{z} = 5. \end{cases}$ se pide:

a) **Hallar el punto del plano más próximo al origen de coordenadas.**
b) **Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano $\boldsymbol{\pi}$.**
c) **Hallar la recta con dirección perpendicular a $\boldsymbol{r}$, contenida en $\boldsymbol{\pi}$, que corte al eje OZ.**

Solución:

a) **Hallar el punto del plano más próximo al origen de coordenadas.**

El punto P del plano π más próximo al origen $O(0,0,0)$ es la proyección ortogonal de O sobre π. Se encuentra en la intersección de π con la recta s que pasa por O y es perpendicular a π. El vector normal a π es $\vec{n_\pi} = (1,3,2)$. Este es el vector director de la recta s. Ecuación de la recta s:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda = \lambda \\ y = 0 + 3\lambda = 3\lambda \\ z = 0 + 2\lambda = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la intersección $P = s \cap \pi$ sustituyendo las coordenadas de s en la ecuación de π:

$$(\lambda) + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) + 14 = 0$$

$$\lambda + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$$

$$14\lambda = -14 \implies \lambda = -1.$$

Sustituimos $\lambda = -1$ en las ecuaciones de s para obtener el punto P:

$$P = (-1, 3(-1), 2(-1)) = (-1,-3,-2).$$

$$\boxed{\textbf{El punto del plano más próximo al origen es } \boldsymbol{P(-1,-3,-2)}.}$$

b) **Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano $\boldsymbol{\pi}$.**

La proyección ortogonal p del eje OZ sobre el plano π es la recta intersección de π con el plano π' que contiene al eje OZ y es perpendicular a π. *Plano π':* Contiene al eje OZ (vector director $\vec{d_{OZ}} = (0,0,1)$ y punto $O(0,0,0)$). Es perpendicular a π (vector normal $\vec{n_\pi} = (1,3,2)$). El vector normal a π', $\vec{n_{\pi'}}$, debe ser perpendicular a $\vec{d_{OZ}}$ y a $\vec{n_\pi}$.

$$\vec{n_{\pi'}} = \vec{n_\pi} \times \vec{d_{OZ}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3-0) - \vec{j}(1-0) + \vec{k}(0-0) = (3,-1,0).$$

La ecuación de π' es de la forma $3x - y + 0z + D = 0$. Como pasa por $O(0,0,0)$, $D = 0$.

$$\pi' \equiv 3x - y = 0.$$

La recta proyección p Es la intersección de π y π'.

$$p \equiv \begin{cases} x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La proyección ortogonal del eje } OZ \text{ sobre } \pi \text{ es la recta } p: \begin{cases} x + 3y + 2z + 14 = 0, \\ 3x - y = 0. \end{cases}}$$

c) **Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en $\boldsymbol{\pi}$, y que corte al eje OZ.**

Recta buscada t: Sea $\vec{d_t}$ su vector director. Recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$. Su vector director puede obtenerse haciendo $y = \mu$. Entonces $r : (2, \mu, 5)$. Un vector director es $\vec{d_r} = (0, 1, 0)$.
– $t \perp r \implies \vec{d_t} \perp \vec{d_r} \implies \vec{d_t} \cdot (0, 1, 0) = 0$.
– $t \subset \pi \implies \vec{d_t} \perp \vec{n_\pi} \implies \vec{d_t} \cdot (1, 3, 2) = 0$.
El vector $\vec{d_t}$ es perpendicular a $\vec{d_r}$ y $\vec{n_\pi}$. Podemos tomar $\vec{d_t}$ como su producto vectorial:

$$\vec{d_t} = \vec{d_r} \times \vec{n_\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(2-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-1) = (2, 0, -1).$$

La recta t debe cortar al eje OZ ($x = 0, y = 0$). Sea Q el punto de corte. Q tiene la forma $(0, 0, z_Q)$. Como $t \subset \pi$, el punto Q debe pertenecer a π. Sustituimos $Q(0, 0, z_Q)$ en la ecuación de π:

$$0 + 3(0) + 2(z_Q) + 14 = 0 \implies 2z_Q = -14 \implies z_Q = -7.$$

El punto de corte es $Q(0, 0, -7)$. La recta t pasa por $Q(0, 0, -7)$ y tiene vector director $\vec{d_t} = (2, 0, -1)$.

Ecuación paramétrica de t:

$$t \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda = 2\lambda \\ y = 0 + 0\lambda = 0 \\ z = -7 - 1\lambda = -7 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\textbf{La recta buscada es } \boldsymbol{t \equiv (x, y, z) = (2\lambda, 0, -7 - \lambda)}.}$$

Madrid, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones

$$r:\quad \begin{cases} 2x - y = 10, \\ x - z = -90. \end{cases}$$

a) **Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.**
b) **Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.**
c) **Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.**

Solución:

a) **Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.**

Vector director $\vec{d_r}$:

Normales: $\vec{n_1} = (2,-1,0)$, $\vec{n_2} = (1,0,-1)$. $\vec{d_r} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,1)$.

Posición en $z = 0$: Si $z = 0$: $x - 0 = -90 \implies x = -90$. $2x - y = 10 \implies 2(-90) - y = 10 \implies -180 - y = 10 \implies y = -190$. Punto $Q(-90,-190,0)$.

$$\boxed{\textbf{Vector director: } \vec{d_r} = (1,2,1). \textbf{ Punto (z=0): } Q(-90,-190,0).}$$

b) **Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.**

Posición más próxima M: Es la proyección ortogonal de $P(1,1,1)$ sobre r. Es la intersección de r con el plano $\pi \perp r$ que pasa por P.

Plano π: $\vec{n_\pi} = \vec{d_r} = (1,2,1)$.
Ecuación: $x+2y+z+D = 0$. Pasa por $P(1,1,1)$: $1+2(1)+1+D = 0 \implies D = -4$. $\pi \equiv x+2y+z-4 = 0$.

Intersección $M = r \cap \pi$:
Paramétricas de r (usando Q y $\vec{d_r}$): $(x,y,z) = (-90+\lambda, -190+2\lambda, \lambda)$. Sustituimos en π: $(-90+\lambda) + 2(-190+2\lambda) + \lambda - 4 = 0$. $-90 + \lambda - 380 + 4\lambda + \lambda - 4 = 0 \implies 6\lambda - 474 = 0 \implies \lambda = 79$.

Punto M: $x = -90 + 79 = -11$. $y = -190 + 2(79) = -32$. $z = 79$. $M(-11,-32,79)$.

$$\boxed{\textbf{La posición más próxima es } M(-11,-32,79).}$$

c) **Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.**

Plano $\sigma : x + y = 2$. Normal $\vec{n_\sigma} = (1,1,0)$. Recta r. Director $\vec{d_r} = (1,2,1)$.

Ángulo α. Calculamos $\sin\alpha = \frac{|\vec{d_r}\cdot\vec{n_\sigma}|}{|\vec{d_r}||\vec{n_\sigma}|}$.

$\vec{d_r} \cdot \vec{n_\sigma} = (1)(1) + 2(1) + 1(0) = 3$. $|\vec{d_r}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$. $|\vec{n_\sigma}| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$.

$\sin\alpha = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\alpha = \arcsin(\sqrt{3}/2) = 60°$.

$$\boxed{\textbf{El ángulo es } \alpha = 60° \textbf{ (o } \pi/3 \textbf{ radianes).}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta

$$boldsymbolr_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = -1 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, y el punto $P(0, 1, 0)$.

a) **Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.**

b) **Halle una ecuación de la recta contenida en el plano que pase por P y sea perpendicular a r_1.**

c) **Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.**

Solución:

a) **Verifique que $r_1 \subset \pi$ y $P \in \pi$.**

r_1 en π: $(1 + \lambda) + (1 - \lambda) + (-1) = 1 + 1 - 1 = 1$. Se cumple. P en π: $0 + 1 + 0 = 1$. Se cumple.

$$\boxed{\textbf{Se verifican ambas condiciones.}}$$

b) **Halle una ecuación de la recta contenida en el plano que pase por P y sea perpendicular a r_1.**

Recta s. Pasa por $P(0, 1, 0)$. $s \subset \pi$. $s \perp r_1$. $\vec{d_s} \perp \vec{n_\pi} = (1, 1, 1)$. $\vec{d_s} \perp \vec{d_{r1}} = (1, -1, 0)$. $\vec{d_s} = \vec{n_\pi} \times \vec{d_{r1}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -2)$. $s : (x, y, z) = (0, 1, 0) + \mu(1, 1, -2) = (\mu, 1 + \mu, -2\mu)$.

$$\boxed{\textbf{La recta es } s \equiv (x, y, z) = (\mu, 1 + \mu, -2\mu).}$$

c) **Calcule r_2 paralela a r_1 por P. Halle el área de un cuadrado...**

Recta r_2: Pasa por $P(0, 1, 0)$. Paralela a $r_1 \implies \vec{d_{r2}} = \vec{d_{r1}} = (1, -1, 0)$. $r_2 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1, -1, 0) = (t, 1 - t, 0)$.

Área del cuadrado: Lado $L = d(r_1, r_2) = d(P, r_1)$. Punto $P_1(1, 1, -1) \in r_1$. $\vec{P_1P} = (0 - 1, 1 - 1, 0 - (-1)) = (-1, 0, 1)$. $\vec{d_{r1}} = (1, -1, 0)$. $\vec{P_1P} \times \vec{d_{r1}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$. $|\vec{P_1P} \times \vec{d_{r1}}| = \sqrt{3}$.

$|\vec{d_{r1}}| = \sqrt{2}$. $L = \sqrt{3}/\sqrt{2}$. Area $= L^2 = 3/2$.

$$\boxed{\boldsymbol{r_2 \equiv (x, y, z) = (t, 1 - t, 0)}. \quad \textbf{Área del cuadrado} = \boldsymbol{\frac{3}{2} u^2}.}$$

Madrid, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ pertenecientes al plano π.

a) **Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.**

b) **Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.**

Solución:

a) **Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.**
El plano $\pi \equiv x - z = 0$. Vector normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$.
Puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ están en π.

Vector del lado conocido: $\overrightarrow{AB} = (0,2,0)$. Longitud $L = 2$.

Determinación del vértice D: Sea $D = (x_D, y_D, z_D)$.

Condición 1:

$$D \in \pi \implies z_D = x_D$$

Así $D = (x_D, y_D, x_D)$.

Condición 2:

$$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$$

.
Vector $\overrightarrow{AD} = (x_D, y_D + 1, x_D)$.
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(y_D + 1) = 0 \implies y_D = -1$. Así $D = (x_D, -1, x_D)$.

Condición 3:

$$|\overrightarrow{AD}| = L = 2$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = x_D^2 + 0^2 + x_D^2 = 2x_D^2 = 4 \implies x_D = \pm\sqrt{2}$$

Cálculo de los vértices C y D:
Posibilidad 1: $D_1 = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$. $\overrightarrow{AD_1} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$. $C_1 = B + \overrightarrow{AD_1} = (0,1,0) + (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$.

Posibilidad 2: $D_2 = (-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$. $\overrightarrow{AD_2} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$. $C_2 = B + \overrightarrow{AD_2} = (0,1,0) + (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Solución 1: } C(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}), D(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}) \\ \textbf{Solución 2: } C(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}), D(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}) \end{array}}$$

b) **Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.**

Centro del cuadrado:

$$M = \frac{A + B}{2} = (0,0,0)$$

Determinación de los otros vértices C y D:

Semidiagonal $\overrightarrow{MA} = (0, -1, 0)$,
Longitud $|\overrightarrow{MA}| = 1$.

$\overrightarrow{MC}$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{MA}$ y estar en π.

$C = (x_C, y_C, x_C)$. $\overrightarrow{MC} = (x_C, y_C, x_C)$.

$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = -y_C = 0 \implies y_C = 0$. Así $C = (x_C, 0, x_C)$.

$|\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 \implies 2x_C^2 = 1^2 \implies x_C = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Los vértices C y D:
$C = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y
$D = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$\boxed{\textbf{Los otros dos vértices son } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \textbf{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Ejercicio 3. Opción B

Sean las rectas

$$\text{r}: \begin{cases} x + y + 2 = 0, \\ y - 2z + 1 = 0, \end{cases} \qquad \text{s}: \begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) **Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.**
b) **Determine una ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.**
c) **Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.**

Solución:

a) **Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.**

Puntos y vectores:
Recta s: $P_s = (2, 5, 0)$, $\vec{d_s} = (-2, 2, 1)$. Recta r: $z = \lambda \implies y = 2\lambda - 1 \implies x = -(2\lambda - 1) - 2 = -2\lambda - 1$.
$P_r = (-1, -1, 0)$, $\vec{d_r} = (-2, 2, 1)$.

Posición relativa: $\vec{d_r} = \vec{d_s}$.
Paralelas o coincidentes.
¿$P_s \in r$? $2 = -1 - 2\lambda \implies \lambda = -3/2$. $5 = -1 + 2\lambda \implies \lambda = 3$. $0 = \lambda$. No coinciden. Son paralelas distintas.

Distancia:

$$d(r, s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (3, 6, 0)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (6, -3, 18)$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{d_r}| = \sqrt{36+9+324} = \sqrt{369}$$
$$|\vec{d_r}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$d(r,s) = \sqrt{369}/3 = 3\sqrt{41}/3 = \sqrt{41}$$

$$\boxed{\textbf{Las rectas son paralelas y distintas. La distancia es } \sqrt{41} \textbf{ u.}}$$

b) Determine una ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

El plano π' contiene $P_r(-1,-1,0)$ y los vectores $\vec{d_r} = (-2,2,1)$ y $\overrightarrow{P_rP_s} = (3,6,0)$. $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $(x+1)(-6) - (y+1)(-3) + z(-12-6) = 0 \implies -6x - 6 + 3y + 3 - 18z = 0$. $-6x + 3y - 18z - 3 = 0 \implies 2x - y + 6z + 1 = 0$.

$$\boxed{\textbf{El plano es } \boldsymbol{\pi' : 2x - y + 6z + 1 = 0}.}$$

c) ...recta que pasa por los puntos P y Q.

Punto P: $P \in r$ y $z = 0$. $\lambda = 0 \implies P(-1,-1,0)$. Punto Q: $Q \in s$ y $z = 0$. $t = 0 \implies Q(2,5,0)$. Recta t pasa por P y Q. Vector director $\overrightarrow{PQ} = (3,6,0)$. Simplificado $\vec{v_t} = (1,2,0)$. Ecuación paramétrica (usando Q):

$$t \equiv \begin{cases} x = 2 + \delta \\ y = 5 + 2\delta \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\textbf{La recta es } \boldsymbol{t : (x,y,z) = (2+\delta, 5+2\delta, 0)}.}$$

Madrid, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Sean la recta

$$\boldsymbol{r} \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0, \\ 2x + 3y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

y el plano $\boldsymbol{\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0}$. Se pide:

a) **Calcular el ángulo que forman $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\pi}$.**
b) **Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano $\boldsymbol{\pi}$ con respecto al plano $\boldsymbol{z - y = 0}$.**
c) **Determinar la proyección ortogonal de la recta sobre el plano $\boldsymbol{\pi}$.**

Solución:

a) **Calcular el ángulo que forman $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\pi}$.**

Vector director de la recta r, $\vec{d_r}$: Es perpendicular a los vectores normales de los planos que la definen, $\vec{n_1} = (-1, -1, 1)$ y $\vec{n_2} = (2, 3, -1)$.

$$\vec{d_r} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1-3) - \vec{j}(1-2) + \vec{k}(-3-(-2)) = (-2, 1, -1).$$

Vector normal del plano π, $\vec{n_\pi} = (2, 1, -1)$.

El ángulo α entre la recta r y el plano π cumple $\sin\alpha = \frac{|\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi}|}{|\vec{d_r}||\vec{n_\pi}|}$.

$$\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = (-2, 1, -1) \cdot (2, 1, -1) = (-2)(2) + 1(1) + (-1)(-1) = -4 + 1 + 1 = -2.$$

$$|\vec{d_r}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

$$|\vec{n_\pi}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

$$\sin\alpha = \frac{|-2|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = \arcsin(1/3) = 19,47^\circ}}$$

b) **Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano $\boldsymbol{\pi}$ con respecto al plano $\boldsymbol{z - y = 0}$.**

Primero, buscaremos el punto de intersección entre r y π: Necesitamos la ecuación paramétrica de r.

Un punto P_r de r: Si $y=0$, $\begin{cases} -x+z=0 \implies z=x \\ 2x-z+1=0 \implies 2x-x+1=0 \implies x=-1 \end{cases}$
Así $P_r(-1,0,-1)$. Ecuación paramétrica de r:

$$r \equiv (x,y,z) = (-1,0,-1) + \lambda(-2,1,-1) = (-1-2\lambda, \lambda, -1-\lambda).$$

Sustituimos en la ecuación del plano $\pi : 2x+y-z+3=0$:

$$2(-1-2\lambda) + (\lambda) - (-1-\lambda) + 3 = 0$$

$$-2-4\lambda+\lambda+1+\lambda+3=0$$

$$-2\lambda+2=0 \implies \lambda=1.$$

El punto de intersección es $P=(-1-2(1), 1, -1-1) = (-3,1,-2)$.

El plano respecto al cual buscaremos la simetría es el: $\sigma \equiv z-y=0 \implies -y+z=0$. Vector normal $\vec{n_\sigma}=(0,-1,1)$.

Para hallar el simétrico respecto al plano σ, hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por P: $\vec{d_s}=\vec{n_\sigma}=(0,-1,1)$.

$$s \equiv (x,y,z) = (-3,1,-2) + t(0,-1,1) = (-3, 1-t, -2+t).$$

Hallamos el punto $M = s \cap \sigma$ (proyección de P_{int} sobre σ):

$$-(1-t)+(-2+t)=0 \implies -1+t-2+t=0 \implies 2t-3=0 \implies t=3/2.$$

El punto medio M es $M=(-3, 1-3/2, -2+3/2) = (-3,-1/2,-1/2)$.

El punto simétrico P' cumple $M=\frac{P_{int}+P'}{2} \implies P' = 2M - P_{int}$.

$P' = 2(-3,-1/2,-1/2)-(-3,1,-2) = (-6,-1,-1)-(-3,1,-2) = (-6+3,-1-1,-1+2) = (-3,-2,1)$.

$$\boxed{\textbf{El punto simétrico es } \boldsymbol{P'(-3,-2,1)}.}$$

c) **Determinar la proyección ortogonal de la recta sobre el plano $\boldsymbol{\pi}$.**

La proyección r' es la intersección del plano π con el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. *Plano π':*

Contiene a r (pasa por $P_r(-1,0,-1)$ y tiene vector $\vec{d_r}=(-2,1,-1)$).
Es perpendicular a π (vector normal $\vec{n_\pi}=(2,1,-1)$).
El vector normal a π', $\vec{n_{\pi'}}$, es perpendicular a $\vec{d_r}$ y $\vec{n_\pi}$.

$$\vec{n_{\pi'}} = \vec{d_r} \times \vec{n_\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-(-1)) - \vec{j}(2-(-2)) + \vec{k}(-2-2) = (0,-4,-4).$$

Podemos usar $\vec{n_{\pi'}}=(0,1,1)$.

La ecuación de π' es $0x+1y+1z+D=0$. Pasa por $P_r(-1,0,-1)$:

$$0(-1)+1(0)+1(-1)+D=0 \implies -1+D=0 \implies D=1.$$

El plano es $\pi' \equiv y + z + 1 = 0$.

Recta proyección r': Es la intersección de π y π'.

$$r' \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\textbf{La proyección ortogonal es la recta } \boldsymbol{r'} \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0, \\ y + z + 1 = 0. \end{cases}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Sean los planos $\boldsymbol{\pi_1 \equiv x + y = 1}$ y $\boldsymbol{\pi_2 \equiv x + z = 1}$.

a) **Halle los planos paralelos al plano $\boldsymbol{\pi_1}$ tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.**
b) **Halle la recta que pasa por el punto (0,2,0) y es perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi_2}$.**
c) **Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano $\boldsymbol{\pi_1}$ con los ejes x e y.**

Solución:

a) **Halle los planos paralelos al plano $\boldsymbol{\pi_1}$ tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.**

Un plano π' paralelo a $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$ tiene la forma $\pi' \equiv x + y + D = 0$.

La distancia del origen $O(0,0,0)$ al plano π' es:

$$d(O, \pi') = \frac{|1(0) + 1(0) + 0(0) + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}}.$$

Queremos $d(O, \pi') = 2$:

$$\frac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \implies |D| = 2\sqrt{2}.$$

Esto da dos soluciones: $D = 2\sqrt{2}$ y $D = -2\sqrt{2}$.

Los planos son $\pi_1' \equiv x + y + 2\sqrt{2} = 0$ y $\pi_2' \equiv x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

$$\boxed{\textbf{Los planos son } \boldsymbol{x + y + 2\sqrt{2} = 0} \textbf{ y } \boldsymbol{x + y - 2\sqrt{2} = 0}.}$$

b) **Halle la recta que pasa por el punto (0,2,0) y es perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi_2}$.**

Sea s la recta buscada. Pasa por $P(0,2,0)$. $\pi_2 \equiv x + 0y + z - 1 = 0$. Su vector normal es $\vec{n_2} = (1,0,1)$.

Como $s \perp \pi_2$, el vector director de s, $\vec{d_s}$, es paralelo a $\vec{n_2}$. Podemos tomar $\vec{d_s} = (1,0,1)$.

La ecuación paramétrica de s es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda = \lambda \\ y = 2 + 0\lambda = 2 \\ z = 0 + 1\lambda = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\textbf{La recta es } \boldsymbol{s \equiv (x, y, z) = (\lambda, 2, \lambda)}.}$$

c) **Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.**

Plano $\pi_1 \equiv x + y = 1$.

Intersección con eje X ($y = 0, z = 0$): $x + 0 = 1 \implies x = 1$. Punto $P_X(1, 0, 0)$.

Intersección con eje Y ($x = 0, z = 0$): $0 + y = 1 \implies y = 1$. Punto $P_Y(0, 1, 0)$.

Distancia entre P_X y P_Y:

$$d(P_X, P_Y) = |\vec{P_X P_Y}| = |P_Y - P_X| = |(0-1, 1-0, 0-0)| = |(-1, 1, 0)|$$

$$d(P_X, P_Y) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\textbf{La distancia es } \boldsymbol{\sqrt{2}}.}$$

Madrid, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) **Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.**
b) **Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.**
c) **Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.**

Solución:

a) **Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.**

Plano $\pi : x+y-z=6 \implies \vec{n}_\pi = (1,1,-1)$.
Recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2} \implies \vec{d}_r = (1,1,2)$.
Plano α: Perpendicular a r pasando por $A(1,0,-1)$.
Su vector normal es $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_r = (1,1,2)$.
Ángulo θ entre π y α:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_\alpha|} = \frac{|(1,1,-1)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{|1+1-2|}{\sqrt{18}} = \frac{0}{\sqrt{18}} = 0.$$

$\implies \theta = 90°$.

$\boxed{\textbf{Los planos son perpendiculares, forman un ángulo de } 90°.}$

b) **Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.**

Posición relativa r y π: $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,1,2)\cdot(1,1,-1) = 1+1-2 = 0$.
Son paralelos o $r \subset \pi$.
Punto de r: $P_r(1,-1,2)$. ¿$P_r \in \pi$? $1+(-1)-2 = -2 \neq 6$. No pertenece.
Luego r es paralela a π.
Distancia $d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|1(1)+1(-1)-1(2)-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

$$\boxed{d(r,\pi) = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ u}}$$

c) **Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.**

Recta s: Pasa por $A(1,0,-1)$. Sea $\vec{d}_s$ su vector director.
1. $s \perp r \implies \vec{d}_s \perp \vec{d}_r = (1,1,2)$.
2. s no corta a $\pi \implies s \parallel \pi \implies \vec{d}_s \perp \vec{n}_\pi = (1,1,-1)$. $\vec{d}_s$ es perpendicular a $\vec{d}_r$ y $\vec{n}_\pi$. Podemos tomar $\vec{d}_s = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi$.

$$\vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3,3,0).$$

Podemos usar el vector proporcional $\vec{d}'_s = (1, -1, 0)$.
Recta s: Pasa por $A(1, 0, -1)$, vector director $(1, -1, 0)$.
Ecuación paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{s} \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -\lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1, \end{cases}}$$

Ejercicio 3. Opción B

$$\mathbf{r} \equiv \frac{\boldsymbol{x-2}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{y+1}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{z+4}}{\mathbf{-3}} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{s} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x + z = 2}, \\ \boldsymbol{-2x + y - 2z = 1}. \end{cases}$$

a) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.
b) Calcule la distancia entre r y s.

Solución:

a) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

Recta r: Punto $P(2, -1, -4)$, vector $\vec{u} = (1, 1, -3)$.
Recta s: Planos $\pi_1 : x+z-2 = 0$, $\pi_2 : -2x+y-2z-1 = 0$. Vector $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 0, 1) \times (-2, 1, -2) = (-1, 0, 1)$.
Punto Q de s: Sea $x = 0$. $z = 2$. $y = 1 + 2(0) + 2(2) = 5$. $Q(0, 5, 2)$.
Vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, -3) \times (-1, 0, 1) = (1, 2, 1)$.
Plano π_1: Contiene r y $\vec{w}$. Punto $P(2, -1, -4)$, vectores $\vec{u}, \vec{w}$.

$$\pi = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies 7(x-2) - 4(y+1) + (z+4) = 0 \implies 7x - 4y + z - 14 = 0$$

Plano π_2: Contiene s y $\vec{w}$. Punto $Q(0, 5, 2)$, vectores $\vec{v}, \vec{w}$.

$$\pi = \begin{vmatrix} x-0 & y-5 & z-2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies -2x-(y-5)(-2)+(z-2)(-2) = 0 \implies x-(y-5)+(z-2) = 0 \implies x-y+z+3 = 0$$

Recta perpendicular común $t = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$t \equiv \begin{cases} 7x - 4y + z - 14 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t} \equiv \begin{cases} 7x - 4y + z - 14 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0. \end{cases}}$$

b) Calcule la distancia entre r y s.

Vector $\vec{PQ} = Q - P = (0-2, 5-(-1), 2-(-4)) = (-2, 6, 6)$.
Producto mixto $[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(1) - 6(1-3) + 6(0-(-1)) = -2 + 12 + 6 = 16.$$

Como es $\neq 0$, las rectas se cruzan.
Módulo del producto vectorial

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{w}| = |(1,2,1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Distancia

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|16|}{\sqrt{6}} = \frac{16\sqrt{6}}{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(r,s) = \frac{8\sqrt{6}}{3}} \textbf{ u}}$$

Madrid, Junio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=2, \\ 3x-z=-1 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda, \\ y=-4-\lambda, \\ z=\lambda \end{cases}$ **se pide:**

a) **Calcular la posición relativa de las rectas r y s.**
b) **Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $\boldsymbol{P(2,-1,5)}$.**
c) **Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.**

Solución:

a) **Calcular la posición relativa de las rectas r y s.**

r: $y=x-2, z=3x+1$. Punto $A(0,-2,1)$, $\vec{v}_r=(1,1,3)$.
s: Punto $B(-1,-4,0)$, $\vec{v}_s=(2,-1,1)$.
$\vec{v}_r, \vec{v}_s$ no proporcionales. Se cortan o cruzan.
$\vec{AB}=(-1,-2,-1)$.

$$[\vec{AB},\vec{v}_r,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1(1-(-3))-(-2)(1-6)+(-1)(-1-2)=-4+2(-5)-1(-3)=$$

$-4-10+3=-11\neq 0$. Las rectas se cruzan.

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cruzan.}}$$

b) **Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $\boldsymbol{P(2,-1,5)}$.**

Plano $\pi \perp r$. Normal $\vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,1,3)$.
Ecuación: $x+y+3z+D=0$.
Pasa por $P(2,-1,5)$: $2+(-1)+3(5)+D=0 \implies 16+D=0 \implies D=-16$. $\pi \equiv x+y+3z-16=0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv x+y+3z-16=0}}$$

c) **Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.**

Plano σ contiene a s (punto $B(-1,-4,0)$, $\vec{v}_s=(2,-1,1)$) y es paralelo a r (contiene $\vec{v}_r=(1,1,3)$).

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$(x+1)(-3-1)-(y+4)(6-1)+z(2-(-1))=0$
$-4(x+1)-5(y+4)+3z=0 \implies -4x-4-5y-20+3z=0$.
$4x+5y-3z+24=0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma \equiv 4x+5y-3z+24=0}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) **Hallar la proyección de Q sobre π.**
b) **Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.**
c) **Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.**

Solución:

a) **Hallar la proyección de Q sobre π.**

Sea $Q(-1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z - 4 = 0$.
Para hallar la proyección Q' de Q sobre π, se traza la recta perpendicular a π que pasa por Q, cuya dirección es el vector normal $\vec{n}_\pi = (1, 2, -3)$.
La ecuación de la recta es:

$$r: \ (-1 + \lambda, \ 0 + 2\lambda, \ 1 - 3\lambda).$$

Para hallar λ se sustituye en la ecuación del plano:

$$(-1 + \lambda) + 2(2\lambda) - 3(1 - 3\lambda) - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 14\lambda - 8 = 0,$$

$$\lambda = \frac{4}{7}.$$

Por tanto,

$$Q' = \left(-1 + \frac{4}{7}, \ 2 \cdot \frac{4}{7}, \ 1 - 3 \cdot \frac{4}{7}\right) = \left(-\frac{3}{7}, \ \frac{8}{7}, \ -\frac{5}{7}\right).$$

$$\boxed{\textbf{La proyección es } \boldsymbol{Q'\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)}}$$

b) **Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.**

Un plano paralelo a π tiene el mismo vector normal, por lo que su ecuación es:

$$x + 2y - 3z + D = 0.$$

Como debe pasar por $P(-3, 1, 2)$:

$$-3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + D = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3 + 2 - 6 + D = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = 7.$$

Entonces,

$$\pi' \equiv x + 2y - 3z + 7 = 0.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi' \equiv x + 2y - 3z + 7 = 0}}$$

c) **Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.**

Sea σ el plano perpendicular a π. Como el plano π tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (1, 2, -3)$, éste estará contenido en σ. Además, σ pasa por $P(-3, 1, 2)$ y contiene el vector $\vec{PQ} = Q - P = (2, -1, -1)$.

Una forma de obtener la ecuación es usar el determinante:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tras desarrollarlo se obtiene, tras simplificar:

$$x + y + z = 0.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma \equiv x + y + z = 0}}$$

Madrid, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ se pide :

a) **Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.**
b) **Calcular el punto simétrico de P respecto de r.**
c) **Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.**

Solución:

a) **Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.**

Para definir un plano, necesitamos un punto y dos vectores directores contenido en él. Nos sirve el vector director de la recta r, un punto de la recta r, que llamaremos Pr y el vector que une el punto P y el punto Pr

$$\pi : \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{d_r} = (-1,1,0) \\ Pr = (2,0,-1) \\ P = (3,3,0) \\ \overrightarrow{PrP} = (1,3,1) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad \pi : \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación del plano es:

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} : \quad \mathbf{x+y-4z-6=0}}$$

b) **Calcular el punto simétrico de P respecto de r.**

Primero, encontraremos un plano perpendicular a la recta r y que, a su vez, contenga el punto P:

$$\pi' \perp r / P \in \pi' :$$

$$\overrightarrow{n_{\pi'}} = \overrightarrow{d_r} = (-1,1,0) \quad \longrightarrow \quad \pi' : \quad x+y+0z+\lambda = 0$$

$$P \in \pi' \quad \longrightarrow \quad -3+3+\lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 0$$

El plano buscado es:

$$\pi' = -x + y = 0$$

Como segundo paso, calcularemos el punto Q de corte del plano anterior con la recta r. La forma más cómoda de hacerlo es encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r : \left.\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad -(2-\lambda)+\lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 1$$

Sustituyendo lambda en r, hallamos el punto Q (1,1,-1)

El punto Q es el punto medio entre P y su simétrico P':

$$Q = \frac{P + P'}{2} \quad \longrightarrow \quad P' = 2Q - P = 2(1,1,-1) - (3,3,0) = (-1,-1,-2)$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{P' = (-1,-1,-2)}}$$

c) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

A y B pertenecen a la recta r. Por tanto, cumplen su ecuación. Partiendo de las ecuaciones paramétricas de la recta:

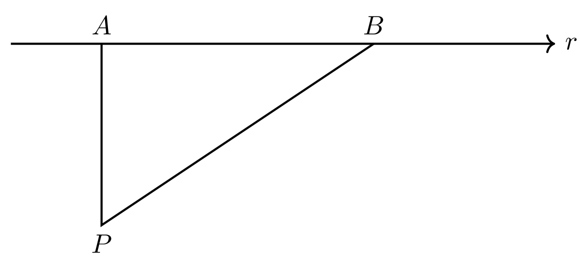
$$A: \quad \left.\begin{array}{l} X = 2 - \lambda \\ Y = \lambda \\ Z = -1 \end{array}\right\} \qquad B: \quad \left.\begin{array}{l} X = 2 - \mu \\ Y = \mu \\ Z = -1 \end{array}\right\}$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como expresión:

$$\overrightarrow{AB} = (2-\mu, \mu, -1) - (2-\lambda, \lambda, -1) = (-\mu + \lambda, \mu - \lambda, 0)$$

$$= (-\mu + \lambda)(1, -1, 0)$$

Asumiendo que el ángulo recto está en A:



$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB} \quad . \quad \text{Por tanto} \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = (3,3,0) - (2-\lambda, \lambda, -1) = (1+\lambda, 3-\lambda, 1)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = (1,-1,0) \cdot (1+\lambda, 3-\lambda, 1) = 0$$

$$1(1+\lambda) + (-1)(3-\lambda) + 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

Por tanto:

$$A = (1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AP} = (2,2,1)$$

El área del triángulo puede calcularse como:

$$A_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (-\mu + 1)\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (-\mu + 1)\left[-\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}\right]$$

$$A_t = \frac{1}{2}\,|(-\mu + 1)(-1, -1, 4)| = \frac{1}{2}|-\mu + 1| \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}$$

$$A_t = \frac{1}{2}|-\mu + 1| \cdot \sqrt{18} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$|-\mu + 1| = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1$$

$$-\mu + 1 = 1 \quad \to \quad \mu = 0 \quad \to \quad B(2, 0, -1)$$

$$\mu - 1 = 1 \quad \to \quad \mu = 2 \quad \to \quad B(0, 2, -1)$$

Por tanto, hay dos posibles soluciones:

$$\boxed{\mathbf{A = (1, 1, -1) \quad y \quad B = (2, 0, -1)}}$$

$$\boxed{\mathbf{A = (1, 1, -1) \quad y \quad B = (0, 2, -1)}}$$

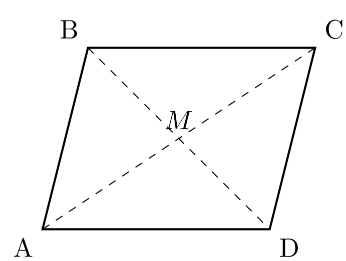
Ejercicio 3. Opción B

Del paralelogramo ABCD, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

a) **Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.**
b) **Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.**
c) **Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores AB y AC.**

Solución:

a) **Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.**
-



El punto M es el punto medio de $\overrightarrow{AC}$:

$$M = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[(4,3,-2)+(1,0,-1)\right] = \left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

El vector director de la recta $\overrightarrow{d_r}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k} = (-4,4,0)$$

$$r: \quad \begin{cases} \overrightarrow{d_r} = (4,-4,0) \\ M = \left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad r: \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2}+\lambda \\ y = \dfrac{3}{2}-\lambda \\ z = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

En definitiva, la ecuación de la recta es:

$$\boxed{\boldsymbol{r}: \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{5}{2}+\lambda} \\ \boldsymbol{y = \frac{3}{2}-\lambda} \\ \boldsymbol{z = -\frac{3}{2}} \end{cases}}$$

b) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

$$\overrightarrow{AD} = D - A = \overrightarrow{BC}$$

$$D = |\overrightarrow{BC}| + A = \left[(4,3,-2)-(2,1,0)\right] + (1,0,-1)$$

$$D = (3,2,-3)$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}\right| = \left|-4\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}\right|$$

$$A = \sqrt{(-4)^2+4^2+0^2} = \sqrt{32}\,ud^2 = 4\sqrt{2}\,ud^2$$

$$\boxed{\mathbf{A = 4\sqrt{2}\,ud^2}}$$

c) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores AB y AC.

$$|\overrightarrow{AB}| = (1,1,1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = (3,3,-1)$$

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{3\cdot 1+3\cdot 1+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}} = \frac{5}{\sqrt{57}}$$

$$\psi = \arccos \frac{5}{\sqrt{57}} = 48^\circ 53'$$

$$\boxed{\textbf{El ángulo es de } \mathbf{48^\circ 53'}}$$

Madrid, Junio 2019 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto (2,-5, 1) y tiene dirección (-1,0,-1), se pide:

a) **Estudiar la posición relativa de las dos rectas.**
b) **Calcular un plano que sea paralelo ar y contenga a s.**
c) **Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.**

Solución:

a) **Estudiar la posición relativa de las dos rectas.**

r: Punto $A(1,3,0)$, $\vec{v}_r = (2,-2,1)$.
s: Punto $B(2,-5,1)$, $\vec{v}_s = (-1,0,-1)$.
$\vec{v}_r, \vec{v}_s$ no son proporcionales $\Longrightarrow$ se cortan o cruzan.
$\vec{AB} = B - A = (1,-8,1)$.
Producto mixto $[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(2-0)-(-8)(-2-(-1))+1(0-2) = 2+8(-1)-2 =$
$2-8-2 = -8 \neq 0$.
Las rectas se cruzan.

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cruzan.}}$$

b) **Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.**

El plano π contiene a s, pasa por $B(2,-5,1)$ y contiene a $\vec{v}_s = (-1,0,-1)$. Como es paralelo a r, contiene a $\vec{v}_r = (2,-2,1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-2)(0-2)-(y+5)(-1-(-2))+(z-1)(2-0) = 0$ $-2(x-2)-(y+5)(1)+2(z-1) = 0$ $-2x+4-y-5+2z-2 = 0 \Longrightarrow -2x-y+2z-3 = 0$. $2x+y-2z+3 = 0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 2x+y-2z+3 = 0}}$$

c) **Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.**

El plano σ es $\perp r$, su vector normal $\vec{n}_\sigma = \vec{v}_r = (2,-2,1)$. Ecuación: $2x-2y+z+D = 0$. Pasa por $O(0,0,0)$: $2(0)-2(0)+0+D = 0 \Longrightarrow D = 0$. Ecuación: $2x-2y+z = 0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma \equiv 2x-2y+z = 0}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z = 36$, se pide:

a) **Determinar la distancia del punto A al plano π.**
b) **Hallar las coordenadas del punto del plano más próximo al punto A.**
c) **Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.**

Solución:

a) **Determinar la distancia del punto A al plano π.**

$$d(A,\pi) = \frac{|2(2)+3(1)+4(0)-36|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{|4+3-36|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{|-29|}{\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}ud$$

$$\boxed{d(A,\pi) = \sqrt{29}\text{ud}}$$

b) **Hallar las coordenadas del punto del plano más próximo al punto A.**

Es la proyección ortogonal M.
1. Recta $r \perp \pi$ por $A(2,1,0)$. $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2,3,4)$.
$r \equiv (2+2\lambda, 1+3\lambda, 4\lambda)$.
2. Intersección $M = r \cap \pi$:
$2(2+2\lambda)+3(1+3\lambda)+4(4\lambda) = 36 \implies 4+4\lambda+3+9\lambda+16\lambda = 36 \implies 29\lambda+7 = 36 \implies 29\lambda = 29 \implies \lambda = 1$.
$M = (2+2(1), 1+3(1), 4(1)) = (4,4,4)$.

$$\boxed{\text{El punto más próximo es } M(4,4,4).}$$

c) **Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.**

M es punto medio de AA'. $A' = 2M - A$. $A' = 2(4,4,4)-(2,1,0) = (8,8,8)-(2,1,0) = (6,7,8)$.

$$\boxed{\text{El punto simétrico es } A'(6,7,8).}$$

Madrid, Septiembre 2019 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Dados los puntos $\boldsymbol{A(1,1,1), B(1,3,-3)}$ y $\boldsymbol{C(-3,-1,1)}$, se pide:

a) **Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.**
b) **Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ sean linealmente dependientes.**
c) **Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.**

Solución:

a) **Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.**

El plano π está determinado por el punto A y los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\vec{AB} = B - A = (1-1, 3-1, -3-1) = (0, 2, -4).$$

$$\vec{AC} = C - A = (-3-1, -1-1, 1-1) = (-4, -2, 0).$$

Podemos usar vectores proporcionales para simplificar: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AB} = (0, 1, -2)$ y $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{AC} = (-2, -1, 0)$.
La ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(1(0) - (-2)(-1)) - (y-1)(0(0) - (-2)(-2)) + (z-1)(0(-1) - 1(-2)) = 0$$

$$(x-1)(0-2) - (y-1)(0-4) + (z-1)(0+2) = 0$$

$$-2(x-1) + 4(y-1) + 2(z-1) = 0$$

Dividimos por -2:

$$(x-1) - 2(y-1) - (z-1) = 0$$

$$x - 1 - 2y + 2 - z + 1 = 0$$

$$x - 2y - z + 2 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y - z + 2 = 0}}$$

b) **Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ sean linealmente dependientes.**

Los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ son linealmente dependientes si y solo si los cuatro puntos A, B, C y D son coplanarios, es decir, si D pertenece al plano π determinado por A, B y C.
Necesitamos encontrar un punto $D(x, y, z)$ que satisfaga la ecuación del plano $x - 2y - z + 2 = 0$ y que sea distinto de A, B y C.
Podemos elegir un valor para x e y y calcular z. Por ejemplo, sea $x = 0, y = 0$.
$0 - 2(0) - z + 2 = 0 \implies -z + 2 = 0 \implies z = 2$. El punto $D(0, 0, 2)$ pertenece al plano π.

Comprobamos que es distinto de A(1,1,1), B(1,3,-3) y C(-3,-1,1). Sí lo es.

$$\boxed{\textbf{Un posible punto es } \boldsymbol{D(0,0,2)} \textbf{ (cualquier punto del plano distinto de A, B, C es válido).}}$$

c) **Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.**

Un punto P del eje OX tiene coordenadas $P(x_p, 0, 0)$. El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P es:

$$V = \frac{1}{6}|\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP})|$$

Calculamos $\vec{AP} = P - A = (x_p - 1, 0 - 1, 0 - 1) = (x_p - 1, -1, -1)$. Usamos los vectores $\vec{AB} = (0, 2, -4)$ y $\vec{AC} = (-4, -2, 0)$ de antes.

$$\det(\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} x_p - 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x_p - 1)(2(0) - (-4)(-2)) - (-1)(0(0) - (-4)(-4)) + (-1)(0(-2) - 2(-4))$$
$$= (x_p - 1)(0 - 8) + 1(0 - 16) - 1(0 + 8)$$
$$= -8(x_p - 1) - 16 - 8 = -8x_p + 8 - 16 - 8 = -8x_p - 16.$$

El volumen es $V = \frac{1}{6}| - 8x_p - 16|$. Queremos que $V = 1$.

$$\frac{1}{6}| - 8x_p - 16| = 1 \implies | - 8x_p - 16| = 6$$

Esto nos da dos posibilidades: 1) $-8x_p - 16 = 6 \implies -8x_p = 22 \implies x_p = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$. Punto $P_1(-\frac{11}{4}, 0, 0)$. 2) $-8x_p - 16 = -6 \implies -8x_p = 10 \implies x_p = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$. Punto $P_2(-\frac{5}{4}, 0, 0)$.

$$\boxed{\textbf{Hay dos posibles puntos: } \boldsymbol{P_1(-\frac{11}{4}, 0, 0)} \textbf{ y } \boldsymbol{P_2(-\frac{5}{4}, 0, 0)}.}$$

Ejercicio 3. Opción B

Dados el plano $\pi \equiv \mathbf{2x + 3y - z = 4}$, y las rectas $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, $\mathbf{s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) **Calcular el punto simétrico de $\mathbf{P(1, 2, 3)}$ respecto de π.**
b) **Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano, que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s.**
c) **Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.**

Solución:

a) **Calcular el punto simétrico de $\boldsymbol{P(1, 2, 3)}$ respecto de $\boldsymbol{\pi}$.**

Sea $P'(x', y', z')$ el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto al plano $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$.
1. Hallamos la recta t perpendicular a π que pasa por P.

El vector director de t, $\vec{v}_t$, es el vector normal del plano π, $\vec{n}_\pi = (2, 3, -1)$.
La recta t es: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \mu(2, 3, -1) = (1 + 2\mu, 2 + 3\mu, 3 - \mu)$.

2. Hallamos el punto M, intersección de la recta t y el plano π. Sustituimos las coordenadas de t en la ecuación de π:

$$2(1 + 2\mu) + 3(2 + 3\mu) - (3 - \mu) = 4$$
$$2 + 4\mu + 6 + 9\mu - 3 + \mu = 4$$
$$14\mu + 5 = 4 \implies 14\mu = -1 \implies \mu = -1/14.$$

El punto M es:

$$x_M = 1 + 2(-1/14) = 1 - 1/7 = 6/7$$
$$y_M = 2 + 3(-1/14) = 2 - 3/14 = 28/14 - 3/14 = 25/14$$
$$z_M = 3 - (-1/14) = 3 + 1/14 = 42/14 + 1/14 = 43/14$$
$$M(6/7, 25/14, 43/14)$$

3. M es el punto medio del segmento PP'.

$$M = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2M - P$$
$$x' = 2(6/7) - 1 = 12/7 - 7/7 = 5/7$$
$$y' = 2(25/14) - 2 = 25/7 - 14/7 = 11/7$$
$$z' = 2(43/14) - 3 = 43/7 - 21/7 = 22/7$$

El punto simétrico es $P'(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7})$.

$$\boxed{\textbf{El punto simétrico es } \boldsymbol{P'(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7})}}$$

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

1. Hallamos el punto de intersección I de r y s.
Recta r:
Sumando las ecuaciones $x+y-z = 0$ y $x+y+z = 2$, obtenemos $2x+2y = 2 \implies x+y = 1 \implies y = 1-x$.
Restando las ecuaciones $(x + y + z) - (x + y - z) = 2 - 0 \implies 2z = 2 \implies z = 1$.
Sustituyendo $z = 1$ en la primera ecuación: $x + y - 1 = 0 \implies y = 1 - x$.
Parametrización de r: $(x, y, z) = (\lambda, 1 - \lambda, 1)$.
Punto $A(0, 1, 1)$, $\vec{v}_r = (1, -1, 0)$.
Recta s: $(x, y, z) = (1 + \lambda', 2, 3 + \lambda')$. Punto $B(1, 2, 3)$, $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$.

Igualamos las coordenadas paramétricas (usando μ para s para evitar confusión): $r : (\lambda, 1 - \lambda, 1)$ $s : (1 + \mu, 2, 3 + \mu)$

$$\begin{cases} \lambda = 1 + \mu \\ 1 - \lambda = 2 \\ 1 = 3 + \mu \end{cases}$$

De la tercera ecuación: $\mu = 1 - 3 = -2$.
De la primera ecuación: $\lambda = 1 + (-2) = -1$.
Comprobamos en la segunda ecuación: $1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Se cumple.
El punto de intersección I se obtiene con $\lambda = -1$ en r o $\mu = -2$ en s.

Usando $\lambda = -1$: $I(-1, 1-(-1), 1) = I(-1, 2, 1)$.
Usando $\mu = -2$: $I(1+(-2), 2, 3+(-2)) = I(-1, 2, 1)$.

2. Hallamos la recta t perpendicular a π que pasa por $I(-1, 2, 1)$.
El vector director de t es el normal de π: $\vec{v}_t = \vec{n}_\pi = (2, 3, -1)$.
La ecuación paramétrica de t es:

$$t \equiv (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \gamma(2, 3, -1) = (-1+2\gamma, 2+3\gamma, 1-\gamma).$$

$$\boxed{\textbf{La recta pedida es } \boldsymbol{t} \equiv \begin{cases} x = -1+2\gamma, \\ y = 2+3\gamma, \\ z = 1-\gamma, \end{cases} \qquad (\gamma \in \mathbb{R})}.$$

c) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

El ángulo θ entre las rectas r y s es el ángulo agudo formado por sus vectores directores $\vec{v}_r = (1, -1, 0)$ y $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$. Usamos la fórmula del producto escalar:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}$$

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (1)(1) + (-1)(0) + (0)(1) = 1 + 0 + 0 = 1$. $|\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$. $|\vec{v}_s| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$.

$$\cos\theta = \frac{|1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

El ángulo es $\theta = \arccos(1/2) = 60°$.

$$\boxed{\textbf{El ángulo entre r y s es 60°}}.$$

Madrid, Junio 2018 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

a) **Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.**

b) **Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con $A(2, 1, 3)$ y $B(1, 2, 3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.**

Solución:

a) **Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.**

Primero, estudiamos la posición relativa de los planos.
Vector normal de π_1: $\vec{n}_1 = (4, 6, -12)$, podemos simplificarlo a $\vec{n}_1 = (2, 3, -6)$.
Vector normal de π_2: $\vec{n}_2 = (-2, -3, 6)$.
Observamos que $\vec{n}_2 = -1 \cdot \vec{n}_1$. Los vectores normales son proporcionales, por lo que los planos son paralelos o coincidentes.
Comparamos los términos independientes. Reescribimos π_2 multiplicando por -1: $2x + 3y - 6z + 5 = 0$.
Comparamos con π_1 (simplificada dividiendo por 2): $2x + 3y - 6z + 1/2 = 0$.
Como $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = 1$, pero $\frac{D_1}{D_2} = \frac{1/2}{5} = \frac{1}{10} \neq 1$, los planos son paralelos y no coincidentes.

El lado del cubo, L, es la distancia entre los dos planos paralelos π_1 y π_2.
Usamos la fórmula de la distancia entre planos paralelos $Ax+By+Cz+D_1 = 0$ y $Ax+By+Cz+D_2 = 0$:

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

.
Usamos las formas $2x + 3y - 6z + 1/2 = 0$ y $2x + 3y - 6z + 5 = 0$.

$$L = d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|1/2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{|1/2 - 10/2|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{|-9/2|}{\sqrt{49}} = \frac{9/2}{7} = \frac{9}{14}.$$

El volumen del cubo es $V = L^3$.

$$V = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744} ud^3$$

$$\boxed{\boldsymbol{Volumen = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744}\ \text{ud}^3.}}$$

b) **Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con $A(2, 1, 3)$ y $B(1, 2, 3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.**

El vector $\vec{AB} = B - A = (1 - 2, 2 - 1, 3 - 3) = (-1, 1, 0)$.
En un cuadrado ABCD, el vector $\vec{BC}$ debe ser perpendicular a $\vec{AB}$ y tener la misma longitud.
$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$. La longitud del lado es $\sqrt{2}$.

El punto C pertenece a la recta intersección de los planos π_2 y π_3.
$\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$
$\pi_3 \equiv x - y + z = 2$
Sea $z = \lambda$. De π_3, $x = y - z + 2 = y - \lambda + 2$.

Sustituimos en π_2: $-2(y-\lambda+2)-3y+6\lambda-5=0$ $-2y+2\lambda-4-3y+6\lambda-5=0$ $-5y+8\lambda-9=0 \implies 5y=8\lambda-9 \implies y=\frac{8\lambda-9}{5}$.

Sustituimos y para encontrar x: $x=\frac{8\lambda-9}{5}-\lambda+2=\frac{8\lambda-9-5\lambda+10}{5}=\frac{3\lambda+1}{5}$. La recta intersección r es: $r\equiv(x,y,z)=\left(\frac{3\lambda+1}{5},\frac{8\lambda-9}{5},\lambda\right)$. Un punto genérico de esta recta es $C\left(\frac{3\lambda+1}{5},\frac{8\lambda-9}{5},\lambda\right)$. El vector $\vec{BC}=C-B=\left(\frac{3\lambda+1}{5}-1,\frac{8\lambda-9}{5}-2,\lambda-3\right)$ $\vec{BC}=\left(\frac{3\lambda+1-5}{5},\frac{8\lambda-9-10}{5},\lambda-3\right)=\left(\frac{3\lambda-4}{5},\frac{8\lambda-19}{5},\lambda-3\right)$.
Condición 1: $\vec{BC}$ es perpendicular a $\vec{AB}$. $\vec{BC}\cdot\vec{AB}=0$.

$$\left(\frac{3\lambda-4}{5},\frac{8\lambda-19}{5},\lambda-3\right)\cdot(-1,1,0)=0$$

$$(-1)\frac{3\lambda-4}{5}+(1)\frac{8\lambda-19}{5}+0(\lambda-3)=0$$

$$\frac{-3\lambda+4+8\lambda-19}{5}=0 \implies 5\lambda-15=0 \implies 5\lambda=15 \implies \lambda=3.$$

Para $\lambda=3$, el punto C es: $x_C=\frac{3(3)+1}{5}=\frac{10}{5}=2$. $y_C=\frac{8(3)-9}{5}=\frac{24-9}{5}=\frac{15}{5}=3$. $z_C=3$. $C(2,3,3)$.

Condición 2: $|\vec{BC}|^2=|\vec{AB}|^2=2$.

Para $\lambda=3$, $\vec{BC}=\left(\frac{3(3)-4}{5},\frac{8(3)-19}{5},3-3\right)=\left(\frac{9-4}{5},\frac{24-19}{5},0\right)=\left(\frac{5}{5},\frac{5}{5},0\right)=(1,1,0)$. $|\vec{BC}|^2=1^2+1^2+0^2=1+1+0=2$. Se cumple.
El punto C es $(2,3,3)$.
Finalmente, hallamos D usando la propiedad del paralelogramo $\vec{AD}=\vec{BC}$. $D=A+\vec{BC}=(2,1,3)+(1,1,0)=(2+1,1+1,3+0)=(3,2,3)$.

$$\boxed{\boldsymbol{C(2,3,3)} \text{ y } \boldsymbol{D(3,2,3)}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Dados el punto $P(1,1,1)$ y las rectas $r\equiv\begin{cases}2x+y=2,\\5x+z=6,\end{cases}$ $s\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{\frac{1}{3}}$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.
b) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.
c) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Solución:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

Primero, obtenemos un punto y vector director de r.
De $2x+y=2$, $y=2-2x$. De $5x+z=6$, $z=6-5x$.
Haciendo $x=\lambda$, $r\equiv(\lambda,2-2\lambda,6-5\lambda)$.
Un punto de r es $A(0,2,6)$ (para $\lambda=0$).
El vector director de r es $\vec{v}_r=(1,-2,-5)$.
El punto exterior es $P(1,1,1)$.
Formamos el vector $\vec{AP}=P-A=(1-0,1-2,1-6)=(1,-1,-5)$.
La distancia es $d(P,r)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$.

Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}(5-10) - \vec{j}(-5-(-5)) + \vec{k}(-2-(-1))$$

$$= (-5, 0, -1).$$

Calculamos su módulo:

$$|\vec{AP} \times \vec{v}_r| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+0+1} = \sqrt{26}$$

Calculamos el módulo del vector director:

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$$

La distancia es

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{26}{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{195}}{15} ud$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,r) = \sqrt{\frac{13}{15}} = \frac{\sqrt{195}}{15}\mathbf{ud}}}$$

b) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

Recta r: Punto $A(0,2,6)$, vector $\vec{v}_r = (1,-2,-5)$.
Recta s: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$.
Punto $B(2,-1,1)$, vector $\vec{v}_s = (-1,1,1/3)$.
Podemos usar un vector proporcional $\vec{v}_s = (-3,3,1)$.
Comprobamos si $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales: $\frac{1}{-3} \neq \frac{-2}{3}$. No son paralelas. Se cortan o se cruzan.
Formamos el vector $\vec{AB} = B - A = (2-0, -1-2, 1-6) = (2,-3,-5)$.
Estudiamos el producto mixto $[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$:

$$[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2(-5) - (-5)3) - (-3)(1(1) - (-5)(-3)) + (-5)(1(3) - (-2)(-3))$$

$$= 2(-2+15) + 3(1-15) - 5(3-6)$$

$$= 2(13) + 3(-14) - 5(-3) = 26 - 42 + 15 = -1.$$

Como el producto mixto es $-1 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. Las rectas se cruzan.

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cruzan.}}$$

c) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Sea π el plano buscado. Como es perpendicular a s, su vector normal $\vec{n}_\pi$ es el vector director de s. Usamos $\vec{v}_s = (-3,3,1)$.
La ecuación del plano es de la forma $-3x + 3y + 1z + D = 0$.
El plano pasa por $P(1,1,1)$. Sustituimos para hallar D:

$$-3(1) + 3(1) + 1(1) + D = 0$$

$$-3+3+1+D=0 \implies 1+D=0 \implies D=-1.$$

La ecuación del plano es $-3x+3y+z-1=0$.

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv -3x+3y+z-1=0 \text{ (o } 3x-3y-z+1=0)}}$$

Madrid, Septiembre 2018 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3. Opción A

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

a) **Determinar un vector $\vec{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.**

b) **Hallar un vector no nulo $\vec{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.**

c) **Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\vec{OA}$.**

Solución:

a) **Determinar un vector $\vec{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.**

Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es su producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2-0) - \vec{j}(1-6) + \vec{k}(0-4) = (-2, 5, -4).$$

Sea $\vec{p} = (-2, 5, -4)$. Este vector es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Para que sea unitario, lo dividimos por su módulo:

$$|\vec{p}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Un vector unitario y ortogonal es $\vec{p}_u = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, 5, -4) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$.

Racionalizando: $\vec{p}_u = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{5\sqrt{5}}{15}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)$.

Este vector $\vec{p}_u$ tiene la tercera coordenada $-\frac{4\sqrt{5}}{15}$, que es negativa. Por lo tanto, $\vec{w_1} = \vec{p}_u$.

$$\boxed{\vec{w_1} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{5\sqrt{5}}{15}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)}$$

b) **Hallar un vector no nulo $\vec{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.**

Un vector $\vec{w_2}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene la forma $\vec{w_2} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ para algunos escalares λ, μ.

$$\vec{w_2} = \lambda(-1, 2, 3) + \mu(2, 0, -1) = (-\lambda + 2\mu, 2\lambda, 3\lambda - \mu).$$

Debe ser ortogonal a $\vec{v} = (2, 0, -1)$, lo que significa que su producto escalar es cero: $\vec{w_2} \cdot \vec{v} = 0$.

$$(-\lambda + 2\mu, 2\lambda, 3\lambda - \mu) \cdot (2, 0, -1) = 0$$

$$2(-\lambda + 2\mu) + 0(2\lambda) + (-1)(3\lambda - \mu) = 0$$

$$-2\lambda + 4\mu - 3\lambda + \mu = 0$$

$$-5\lambda + 5\mu = 0 \implies 5\mu = 5\lambda \implies \mu = \lambda.$$

El vector $\vec{w_2}$ es de la forma:

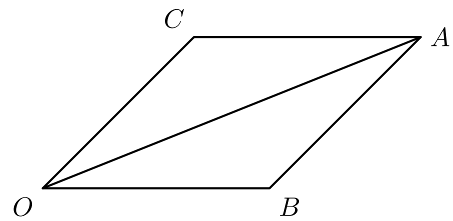
$$\vec{w_2} = (-\lambda + 2\lambda, 2\lambda, 3\lambda - \lambda) = (\lambda, 2\lambda, 2\lambda) = \lambda(1, 2, 2).$$

Como se pide un vector no nulo, podemos elegir cualquier $\lambda \neq 0$. Por ejemplo, con $\lambda = 1$.

$$\vec{w_2} = (1, 2, 2).$$

$$\boxed{\vec{w_2} = (1, 2, 2) \text{ (o cualquier múltiplo no nulo)}}$$

c) **Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\vec{OA}$.**



Sea el paralelogramo $OBAC'$ con origen O(0,0,0).
Los lados son $\vec{OB}$ (en dirección $\vec{u}$ o $\vec{v}$) y $\vec{OC'}$ (en dirección del otro vector).
Las diagonales son $\vec{OC'} + \vec{OB}$ y $\vec{OC'} - \vec{OB}$.
Los lados del paralelogramo son $k\vec{u}$ y $m\vec{v}$ para algunos escalares k, m, y la diagonal es $\vec{OA} = k\vec{u} + m\vec{v}$.

$$(-4, 4, 7) = k(-1, 2, 3) + m(2, 0, -1)$$

$$(-4, 4, 7) = (-k + 2m, 2k, 3k - m)$$

Igualando componentes:

$$\begin{cases} -k + 2m = -4 \\ 2k = 4 \\ 3k - m = 7 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $k = 2$.
Sustituyendo $k = 2$ en la primera: $-(2) + 2m = -4 \implies 2m = -2 \implies m = -1$.
Comprobamos en la tercera ecuación: $3(2) - (-1) = 6 + 1 = 7$. Se cumple.
Los lados del paralelogramo son $2\vec{u} = (-2, 4, 6)$ y $(-1)\vec{v} = (-2, 0, 1)$.
Los vértices del paralelogramo, partiendo del origen $O(0, 0, 0)$, son: $O = (0, 0, 0)$.
$V_1 = O + 2\vec{u} = (0, 0, 0) + (-2, 4, 6) = (-2, 4, 6)$.
$V_2 = O - \vec{v} = (0, 0, 0) + (-2, 0, 1) = (-2, 0, 1)$. (Usamos $-\vec{v}$ como lado)
$A = O + 2\vec{u} - \vec{v} = (-2, 4, 6) + (-2, 0, 1) = (-4, 4, 7)$. (Diagonal $\vec{OA}$)
Los vértices son $O(0, 0, 0)$, $V_1(-2, 4, 6)$, $A(-4, 4, 7)$ y $V_2(-2, 0, 1)$.

$$\boxed{\textbf{Los vértices son } O(0,0,0), B(-2,4,6), C(-2,0,1), A(-4,4,7).}$$

Ejercicio 3. Opción B

Dados el punto $P(0, -1, 1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1, 0, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, 1, 2)$, se pide:

a) **Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.**
b) **Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\vec{SP}$ sea perpendicular a la recta r.**

c) **Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.**

Solución:

a) **Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.**

El plano π está determinado por el punto $Q(1,0,1)$ de la recta, el vector director de la recta $\vec{v} = (0,1,2)$, y el vector $\vec{QP} = P - Q = (0-1, -1-0, 1-1) = (-1,-1,0)$.
Comprobamos que $\vec{v}$ y $\vec{QP}$ no son paralelos: $\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{-1}$. Son linealmente independientes.
La ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x - x_Q & y - y_Q & z - z_Q \\ v_x & v_y & v_z \\ QP_x & QP_y & QP_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(1(0) - 2(-1)) - y(0(0) - 2(-1)) + (z-1)(0(-1) - 1(-1)) = 0$$

$$(x-1)(2) - y(2) + (z-1)(1) = 0$$

$$2x - 2 - 2y + z - 1 = 0$$

$$2x - 2y + z - 3 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0}}$$

b) **Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\vec{SP}$ sea perpendicular a la recta r.**

El punto S, al estar en la recta r, tiene coordenadas $S(1, \lambda, 1+2\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ (usando la ecuación paramétrica de r: $(1,0,1) + \lambda(0,1,2)$).
El vector $\vec{SP} = P - S = (0-1, -1-\lambda, 1-(1+2\lambda)) = (-1, -1-\lambda, -2\lambda)$.
La condición es que $\vec{SP}$ sea perpendicular a r, lo que significa que $\vec{SP}$ es perpendicular al vector director de r, $\vec{v} = (0,1,2)$.
Su producto escalar debe ser cero: $\vec{SP} \cdot \vec{v} = 0$.

$$(-1, -1-\lambda, -2\lambda) \cdot (0,1,2) = 0$$

$$-1(0) + (-1-\lambda)(1) + (-2\lambda)(2) = 0$$

$$0 - 1 - \lambda - 4\lambda = 0$$

$$-1 - 5\lambda = 0 \implies 5\lambda = -1 \implies \lambda = -1/5.$$

Sustituimos $\lambda = -1/5$ en las coordenadas de S:

$$S = (1, -1/5, 1 + 2(-1/5)) = (1, -1/5, 1 - 2/5) = (1, -1/5, 3/5).$$

Este punto S es la proyección ortogonal de P sobre r.

$$\boxed{\textbf{El punto es } \boldsymbol{S(1, -1/5, 3/5)}.}$$

c) **Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos $\boldsymbol{T_1, T_2}$, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.**

Los puntos T_1, T_2 están en la recta r, por lo que $T(1, \lambda, 1 + 2\lambda)$.
La distancia de P a T es $d(P, T) = \sqrt{5}$. $d(P, T)^2 = 5$.
El vector $\vec{PT} = T - P = (1 - 0, \lambda - (-1), (1 + 2\lambda) - 1) = (1, \lambda + 1, 2\lambda)$. $d(P, T)^2 = |\vec{PT}|^2 = 1^2 + (\lambda + 1)^2 + (2\lambda)^2 = 5$.

$$1 + (\lambda^2 + 2\lambda + 1) + 4\lambda^2 = 5$$

$$1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 4\lambda^2 = 5$$

$$5\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 5$$

$$5\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática para λ:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)(-3)}}{2(5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10}.$$

Dos soluciones para λ:

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 8}{10} = \frac{6}{10} = 3/5$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 - 8}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

Los puntos T_1 y T_2 corresponden a estos valores de λ:
Para $\lambda_1 = 3/5$: $T_1 = (1, 3/5, 1 + 2(3/5)) = (1, 3/5, 1 + 6/5) = (1, 3/5, 11/5)$.
Para $\lambda_2 = -1$: $T_2 = (1, -1, 1 + 2(-1)) = (1, -1, 1 - 2) = (1, -1, -1)$.

El área del triángulo PT_1T_2 es $\frac{1}{2}|\vec{PT_1} \times \vec{PT_2}|$.

$$\vec{PT_1} = T_1 - P = (1 - 0, 3/5 - (-1), 11/5 - 1) = (1, 8/5, 6/5)$$

$$\vec{PT_2} = T_2 - P = (1 - 0, -1 - (-1), -1 - 1) = (1, 0, -2)$$

$$\vec{PT_1} \times \vec{PT_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 8/5 & 6/5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-16/5 - 0) - \vec{j}(-2 - 6/5) + \vec{k}(0 - 8/5)$$

$$= (-16/5, -(-10/5 - 6/5), -8/5) = (-16/5, -(-16/5), -8/5) = (-16/5, 16/5, -8/5).$$

Módulo:

$$|\vec{PT_1} \times \vec{PT_2}| = \sqrt{(-16/5)^2 + (16/5)^2 + (-8/5)^2} = \sqrt{\frac{256}{25} + \frac{256}{25} + \frac{64}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{\sqrt{576}}{5} = \frac{24}{5}.$$

Área:

$$\text{Área}(PT_1T_2) = \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} = \frac{12}{5} ud^2$$

$$\boxed{\textbf{Área}(\boldsymbol{PT_1T_2}) = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}} \textbf{ ud}^{\,2}}$$

Madrid, Junio 2017 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 2. Opción A

Dados los puntos $\boldsymbol{P(1,-2,1), Q(-4,0,1), R(-3,1,2), S(0,-3,0)}$, se pide:

a) **Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.**
b) **Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.**
c) **Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.**

Solución:

a) **Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.**

El plano π está determinado por el punto P y los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$.

$$\vec{PQ} = Q - P = (-4-1, 0-(-2), 1-1) = (-5, 2, 0).$$

$$\vec{PR} = R - P = (-3-1, 1-(-2), 2-1) = (-4, 3, 1).$$

Estos vectores no son proporcionales ($\frac{-5}{-4} \neq \frac{2}{3}$), por lo que definen un plano. La ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ PQ_x & PQ_y & PQ_z \\ PR_x & PR_y & PR_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-2) & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(2\cdot 1 - 0\cdot 3) - (y+2)(-5\cdot 1 - 0\cdot(-4)) + (z-1)(-5\cdot 3 - 2\cdot(-4)) = 0$$

$$(x-1)(2) - (y+2)(-5) + (z-1)(-15+8) = 0$$

$$2(x-1) + 5(y+2) - 7(z-1) = 0$$

$$2x - 2 + 5y + 10 - 7z + 7 = 0$$

$$2x + 5y - 7z + 15 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 2x + 5y - 7z + 15 = 0}}$$

b) **Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.**

Recta r: Pasa por $P(1, -2, 1)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = \vec{PQ} = (-5, 2, 0)$.
Recta s: Pasa por $R(-3, 1, 2)$ y tiene vector director $\vec{v}_s = \vec{RS} = S - R = (0-(-3), -3-1, 0-2) = (3, -4, -2)$.
Comprobamos si los vectores directores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales: $\frac{-5}{3} \neq \frac{2}{-4}$.
No son paralelos, por lo tanto, las rectas r y s se cortan o se cruzan.
Formamos el vector $\vec{PR} = R - P = (-4, 3, 1)$ (calculado en el apartado a).

Estudiamos el producto mixto $[\vec{PR}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$:

$$[\vec{PR}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -4(2(-2) - 0(-4)) - 3(-5(-2) - 0(3)) + 1(-5(-4) - 2(3))$$
$$= -4(-4) - 3(10) + 1(20 - 6)$$
$$= 16 - 30 + 14 = 0$$

Como el producto mixto es cero, los tres vectores son linealmente dependientes (coplanarios). Dado que los vectores directores no son paralelos, las rectas se cortan en un punto.

$$\boxed{\textbf{Las rectas r y s se cortan.}}$$

c) **Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.**

El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que forman lados del triángulo, por ejemplo $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$.

$$\text{Área}(PQR) = \frac{1}{2}|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$$

Ya calculamos los vectores en el apartado a): $\vec{PQ} = (-5, 2, 0)$ y $\vec{PR} = (-4, 3, 1)$. Calculamos su producto vectorial:

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - \vec{j}(-5 \cdot 1 - 0 \cdot (-4)) + \vec{k}(-5 \cdot 3 - 2 \cdot (-4))$$

$$= \vec{i}(2) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(-15 + 8) = (2, 5, -7).$$

Calculamos el módulo de este vector:

$$|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = |(2, 5, -7)| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 25 + 49} = \sqrt{78}.$$

El área del triángulo es:

$$\text{Área}(PQR) = \frac{1}{2}\sqrt{78}ud^2$$

$$\boxed{\text{Área}\boldsymbol{(PQR) = \frac{\sqrt{78}}{2}}\ \textbf{ud}^2}$$

Ejercicio 3. Opción B

a) **Determine la distancia entre las rectas** $\mathbf{r_1 \equiv x = y = z}$ **y** $\mathbf{r_2} \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$.

b) **Obtenga el punto de corte de la recta** $\mathbf{s \equiv x = 2 - y = z - 1}$ **con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.**

Solución:

Recta $\boldsymbol{r_1}$*:*

b) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

Pasa por el origen $A(0,0,0)$ y tiene vector director $\vec{v}_1 = (1,1,1)$.

Recta r_2: Buscamos un punto y vector director.
Hacemos $x = \lambda$.
De la primera ecuación: $y = 1 - x = 1 - \lambda$.
De la segunda ecuación: $z = x + 1 = \lambda + 1$.
Ecuación paramétrica de r_2: $(\lambda, 1-\lambda, \lambda+1)$.
Un punto de r_2 (haciendo $\lambda = 0$) es $B(0,1,1)$.
El vector director de r_2 es $\vec{v}_2 = (1,-1,1)$.
Posición relativa: Los vectores directores $\vec{v}_1 = (1,1,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,-1,1)$ no son proporcionales ($\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$).
Las rectas se cortan o se cruzan. Vector $\vec{AB} = B - A = (0,1,1)$. Producto mixto $[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]$:

$$[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0(1-(-1)) - 1(1-1) + 1(-1-1) = 0 - 0 + 1(-2) = -2.$$

Como el producto mixto es $-2 \neq 0$, las rectas se cruzan.

Distancia:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}.$$

Ya tenemos $|[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]| = |-2| = 2$.
Calculamos $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1-(-1)) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(-1-1) = (2,0,-2).$$

Módulo: $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |(2,0,-2)| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Distancia:

$$d(r_1, r_2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{u}}}$$

b) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

Primero, escribimos la recta s en forma paramétrica. De las igualdades: $x = 2 - y \implies y = 2 - x$. $x = z - 1 \implies z = x + 1$. Haciendo $x = \lambda$:

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un punto de s es $P_s(0,2,1)$ (para $\lambda = 0$) y su vector director es $\vec{v}_s = (1,-1,1)$.
Sea π el plano perpendicular a s que pasa por el origen $O(0,0,0)$.
El vector normal al plano π es el vector director de s: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_s = (1,-1,1)$.
La ecuación del plano π es de la forma $1x - 1y + 1z + D = 0$.
Como pasa por el origen $O(0,0,0)$: $1(0) - 1(0) + 1(0) + D = 0 \implies D = 0$.

La ecuación del plano es $\pi \equiv x - y + z = 0$.
Buscamos el punto de corte M entre la recta s y el plano π.
Sustituimos las coordenadas paramétricas de s en la ecuación de π:

$$(\lambda) - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0$$

$$\lambda - 2 + \lambda + 1 + \lambda = 0$$

$$3\lambda - 1 = 0 \implies 3\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{3}.$$

Sustituimos $\lambda = 1/3$ en las ecuaciones paramétricas de s:

$$x = \frac{1}{3}$$

$$y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6-1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$z = 1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

El punto de corte es $M(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

$$\boxed{\textbf{El punto de corte es } \boldsymbol{M\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)}.}$$

Madrid, Septiembre 2017 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 2. Opción A

Dadas las rectas

$$\mathbf{r_1} \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

y

$$\mathbf{r_2} \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3. \end{cases}$$

se pide:

a) **Estudiar la posición relativa de $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$.**
b) **Calcular la distancia entre las dos rectas.**
c) **Hallar la ecuación del plano que contiene a $\boldsymbol{r_1}$ y al punto $\boldsymbol{P(1,2,3)}$.**

Solución:

a) **Estudiar la posición relativa de $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$.**

Primero, obtenemos un punto y un vector director para cada recta.
Recta r_1: Resolvemos el sistema para obtener un punto A..
Sumando las ecuaciones: $8x - 2y = 2 \implies 4x - y = 1$.
Si $x = 0$, $y = -1$.
Sustituyendo en la segunda ecuación: $2(0) - (-1) + z = 1 \implies 1 + z = 1 \implies z = 0$.
Un punto de r_1 es $A(0, -1, 0)$.
El vector director $\vec{v}_1$ es perpendicular a los vectores normales de los planos que definen r_1, $\vec{n}_{1a} = (6, -1, -1)$ y $\vec{n}_{1b} = (2, -1, 1)$.

$$\vec{v}_1 = \vec{n}_{1a} \times \vec{n}_{1b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-1) - \vec{j}(6-(-2)) + \vec{k}(-6-(-2)) = (-2, -8, -4).$$

Podemos usar un vector director proporcional: $\vec{v}_1 = (1, 4, 2)$.
Recta r_2: Resolvemos el sistema para obtener un punto de la recta.
Restando las ecuaciones: $-6y - 6z = 0 \implies y = -z$. Si $z = 0$, $y = 0$.
Sustituyendo en la segunda ecuación: $3x + 0 + 4(0) = 3 \implies 3x = 3 \implies x = 1$.
Un punto de r_2 es $B(1, 0, 0)$.
El vector director $\vec{v}_2$ es perpendicular a los vectores normales $\vec{n}_{2a} = (3, -5, -2)$ y $\vec{n}_{2b} = (3, 1, 4)$.

$$\vec{v}_2 = \vec{n}_{2a} \times \vec{n}_{2b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-20-(-2)) - \vec{j}(12-(-6)) + \vec{k}(3-(-15)) = (-18, -18, 18).$$

Podemos usar un vector director proporcional: $\vec{v}_2 = (1, 1, -1)$.
Estudio de la posición: Comprobamos si los vectores directores $\vec{v}_1 = (1, 4, 2)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1, -1)$ son proporcionales:
$\frac{1}{1} \neq \frac{4}{1}$.
No son paralelos, por lo tanto, las rectas se cortan o se cruzan.
Formamos el vector $\vec{AB} = B - A = (1-0, 0-(-1), 0-0) = (1, 1, 0)$.
Calculamos el producto mixto $[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]$:

$$[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-4-2) - 1(-1-2) + 0(1-4) = -6 - (-3) = -3.$$

Como el producto mixto es distinto de cero, los tres vectores son linealmente independientes y las rectas se cruzan.

$$\boxed{\textbf{Las rectas } \boldsymbol{r_1} \textbf{ y } \boldsymbol{r_2} \textbf{ se cruzan.}}$$

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

La distancia entre dos rectas que se cruzan $r_1(A, \vec{v}_1)$ y $r_2(B, \vec{v}_2)$ se calcula mediante la fórmula:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}.$$

Ya hemos calculado el producto mixto: $|[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]| = |-3| = 3$. Calculamos el producto vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4-2) - \vec{j}(-1-2) + \vec{k}(1-4) = (-6, 3, -3).$$

Calculamos su módulo:

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |(-6, 3, -3)| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

La distancia es:

$$d(r_1, r_2) = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{6}}{6}}\,\mathbf{u}}$$

c) Hallar la ecuación del plano que contiene a $\boldsymbol{r_1}$ y al punto $\boldsymbol{P(1, 2, 3)}$.

El plano π buscado está determinado por un punto de r_1, por ejemplo $A(0, -1, 0)$, el vector director de r_1, $\vec{v}_1 = (1, 4, 2)$, y el vector $\vec{AP} = P - A = (1-0, 2-(-1), 3-0) = (1, 3, 3)$.
Comprobamos que $\vec{v}_1$ y $\vec{AP}$ no son paralelos: $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{3}$.
Son linealmente independientes.
La ecuación del plano π es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ AP_x & AP_y & AP_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - (-1) & z - 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y + 1 & z \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(12 - 6) - (y + 1)(3 - 2) + z(3 - 4) = 0$$

$$6x - (y + 1)(1) + z(-1) = 0$$

$$6x - y - 1 - z = 0$$

$$6x - y - z - 1 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 6x - y - z - 1 = 0}}$$

Ejercicio 3. Opción B

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) **Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.**
b) **Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.**

Solución:

a) **Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.**

La recta r pasa por $P_1(3,2,0)$ y tiene como vector director $\vec{v} = \vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (7-3, 0-2, 2-0) = (4,-2,2)$.
Podemos usar un vector proporcional $\vec{v} = (2,-1,1)$.
Un punto de la recta es $A = P_1(3,2,0)$. El punto exterior es $Q(3,5,-3)$.
Formamos el vector $\vec{AQ} = Q - A = (3-3, 5-2, -3-0) = (0,3,-3)$.
La distancia del punto Q a la recta r se calcula como:

$$d(Q,r) = \frac{|\vec{AQ} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{AQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3\cdot 1 - (-3)\cdot(-1)) - \vec{j}(0\cdot 1 - (-3)\cdot 2) + \vec{k}(0\cdot(-1) - 3\cdot 2)$$

$$= \vec{i}(3-3) - \vec{j}(0+6) + \vec{k}(0-6) = (0,-6,-6).$$

Calculamos su módulo:

$$|\vec{AQ} \times \vec{v}| = |(0,-6,-6)| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Calculamos el módulo del vector director:

$$|\vec{v}| = |(2,-1,1)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

La distancia es:

$$d(Q,r) = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 6\sqrt{\frac{2}{6}} = 6\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(Q,r) = 2\sqrt{3}u}}$$

b) **Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.**

Sea π el plano perpendicular a r que pasa por $Q(3,5,-3)$.
El vector normal al plano π es el vector director de la recta r, $\vec{n}_\pi = \vec{v} = (2,-1,1)$.
La ecuación del plano π es de la forma $2x - y + z + D = 0$.
Como $Q(3,5,-3)$ pertenece a π, debe cumplir su ecuación:

$$2(3) - (5) + (-3) + D = 0 \implies 6 - 5 - 3 + D = 0 \implies -2 + D = 0 \implies D = 2.$$

La ecuación del plano es $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$.

Para hallar el punto de corte M entre la recta r y el plano π, usamos la ecuación paramétrica de r. Usando $P_1(3,2,0)$ y $\vec{v}=(2,-1,1)$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 0+\lambda \end{cases}$$

Sustituimos las coordenadas paramétricas de r en la ecuación del plano π:

$$2(3+2\lambda)-(2-\lambda)+(\lambda)+2=0$$

$$6+4\lambda-2+\lambda+\lambda+2=0$$

$$6\lambda+6=0 \implies 6\lambda=-6 \implies \lambda=-1.$$

Sustituimos $\lambda=-1$ en las ecuaciones paramétricas de r para hallar las coordenadas del punto de corte M:

$$x = 3+2(-1)=3-2=1$$

$$y = 2-(-1)=2+1=3$$

$$z=-1$$

El punto de corte es $M(1,3,-1)$.

$$\boxed{\textbf{El punto de corte es } \boldsymbol{M(1,3,-1)}.}$$

Ejercicio 4. Opción B

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1)$, $B(3,1,0)$ y $C(2,5,1)$ y se pide:

a) **Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.**
b) **Obtener las medidas de sus tres ángulos.**

Solución:

a) **Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.**

Calculamos los vectores que forman los lados del triángulo:

$$\vec{AB}=B-A=(3-1,1-3,0-(-1))=(2,-2,1).$$

$$\vec{AC}=C-A=(2-1,5-3,1-(-1))=(1,2,2).$$

$$\vec{BC}=C-B=(2-3,5-1,1-0)=(-1,4,1).$$

Calculamos las longitudes de los lados (módulos de los vectores):

$$|\vec{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3.$$

$$|\vec{AC}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3.$$

$$|\vec{BC}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

Como dos lados tienen la misma longitud ($|\vec{AB}|=|\vec{AC}|=3$) y el tercero es diferente ($|\vec{BC}|=3\sqrt{2}$), el triángulo es isósceles.

$$\boxed{\textbf{El triángulo es Isósceles.}}$$

b) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

Usamos el producto escalar para calcular los ángulos. *Ángulo en A (α):* Formado por $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{(2,-2,1)\cdot(1,2,2)}{3\cdot 3} = \frac{2(1)+(-2)(2)+1(2)}{9} = \frac{2-4+2}{9} = \frac{0}{9} = 0.$$

$$\alpha = \arccos(0) = 90^\circ.$$

El triángulo es rectángulo en A.

Ángulo en B (β): Formado por $\vec{BA} = -\vec{AB} = (-2,2,-1)$ y $\vec{BC} = (-1,4,1)$.

$$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} = \frac{(-2,2,-1)\cdot(-1,4,1)}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{(-2)(-1)+2(4)+(-1)(1)}{9\sqrt{2}} = \frac{2+8-1}{9\sqrt{2}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ.$$

Ángulo en C (γ): Formado por $\vec{CA} = -\vec{AC} = (-1,-2,-2)$ y $\vec{CB} = -\vec{BC} = (1,-4,-1)$. Como es un triángulo isósceles con $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$, los ángulos opuestos a estos lados deben ser iguales, es decir, $\beta = \gamma$. Por lo tanto, $\gamma = 45^\circ$. Comprobación: La suma de los ángulos es $90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

$$\boxed{\textbf{Los ángulos son } \boldsymbol{\alpha = 90^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 45^\circ}.}$$

Andalucía, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 7

a) **Halla el punto simétrico de $\mathbf{P(2,2,1)}$ respecto de la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x-2y+z &= 2, \\ y-z &= 1. \end{cases}$**

b) **Halla el punto simétrico de $\mathbf{Q(1,-1,-3)}$ respecto del plano $\pi \equiv \mathbf{x-2y+z+6=0}$.**

Solución:

a) **Halla el punto simétrico de $\mathbf{P(2,2,1)}$ respecto de la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x-2y+z &= 2, \\ y-z &= 1. \end{cases}$**

La recta r se halla en la intersección de los planos

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z &= 2, \\ y-z &= 1. \end{cases}$$

Se puede describir en forma paramétrica resolviendo de manera simultánea. De la segunda ecuación $y-z=1$ se obtiene $z=y-1$. Sustituyendo en la primera,

$$x-2y+(y-1)=2 \implies x-y-1=2 \implies x-y=3 \implies x=3+y.$$

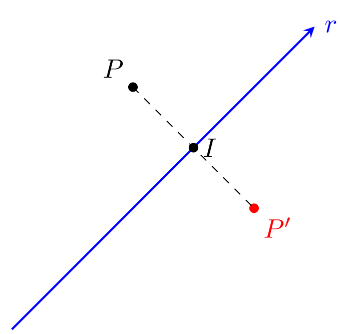
Tomando y como parámetro t, resulta $x=3+t$ y $z=t-1$. De este modo, la recta se describe como

$$r \equiv \begin{cases} x &= t+3 \\ y &= t \\ z &= t-1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

También puede usarse la forma vectorial:

$$r: \quad (x,y,z) = (3,\ 0,\ -1) + t\,(1,\ 1,\ 1).$$

Sea $P=(2,2,1)$. Para hallar el simétrico de P respecto de r, se procede del modo siguiente:
- Se encuentra el punto I de la recta r que es intersección con la perpendicular desde P. Esto se logra imponiendo que el vector $\overrightarrow{PI}$ sea ortogonal a la dirección de r, que es $(1,\ 1,\ 1)$.
- Si I es tal punto de intersección, el simétrico P' de P respecto de r es aquel para el cual I es el punto medio del segmento PP'. Es decir, $P'=2I-P$.



Considerando la forma vectorial:

$$I = (3,\ 0,\ -1) + t\,(1,\ 1,\ 1),$$

el vector $\overrightarrow{PI} = I-P$ ha de ser ortogonal a $(1,1,1)$. De aquí se obtiene la ecuación

$$\big[(3-2)+t,\ (0-2)+t,\ (-1-1)+t\big] \cdot (1,1,1) = 0.$$

Es decir,

$$(1+t)+(-2+t)+(-2+t)=0,$$

cuya suma lleva a $1+t-2+t-2+t=-3+3t=0$, de donde $t=1$. Sustituyendo $t=1$ en la recta, se halla

$$I=(3,0,-1)+(1,1,1)=(4,\,1,\,0).$$

El punto simétrico P' es tal que I sea el punto medio de PP', de modo que

$$P'=2\,I-P=2\,(4,\,1,\,0)\;-\;(2,\,2,\,1).$$

Con la operación componente a componente,

$$P'=(8-2,\;2-2,\;0-1)=(6,\,0,\,-1).$$

Por tanto, el punto simétrico de $\mathbf{P(2,2,1)}$ respecto de la recta r es:

$$\boxed{(6,\,0,\,-1)}$$

b) Halla el punto simétrico de $\mathbf{Q(1,-1,-3)}$ respecto del plano $\pi\equiv \mathbf{x-2y+z+6=0}$.

Sea el plano

$$\pi:\quad x-2y+z+6=0.$$

La ecuación normal del plano es $(1,-2,1)\cdot(x,y,z)+6=0$, de modo que su vector normal es $\vec{n}=(1,-2,1)$. Para reflejar un punto $Q=(1,-1,-3)$ respecto de π, se utiliza la fórmula habitual de reflexión, que puede resumirse así:

$$Q'=Q\;-\;2\,\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\,\bigl(A,\,B,\,C\bigr),$$

donde el plano es $A\,x+B\,y+C\,z+D=0$, y (x_0,y_0,z_0) son las coordenadas del punto que se refleja. En este problema, $(A,B,C)=(1,-2,1)$ y $D=6$. Entonces:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=1\cdot1+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-3)+6=1+2-3+6=6.$$

El cuadrado de la norma de n es $1^2+(-2)^2+1^2=1+4+1=6$. Por tanto, la reflexión es

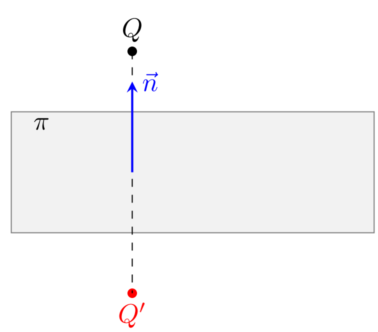
$$Q'=Q-2\,\frac{6}{6}\,(1,\,-2,\,1)=Q-2\,(1,\,-2,\,1).$$

Dado $Q=(1,-1,-3)$, se realiza la resta:

$$Q'=\bigl(1,\,-1,\,-3\bigr)\;-\;2\,(1,\,-2,\,1)=\bigl(1-2,\;-1-(-4),\;-3-2\bigr).$$

Componente a componente:

$$Q'=(-1,\,3,\,-5).$$



Por tanto, el punto simétrico de $\mathbf{Q(1,-1,-3)}$ respecto del plano π es:

$$\boxed{(-1,\,3,\,-5)}$$

Ejercicio 8

Considera las rectas r $\equiv \begin{cases} y & = 0, \\ 2x - z & = 0, \end{cases}$ y **s** $\equiv \begin{cases} x + y + 7 & = 0, \\ z & = 0. \end{cases}$

a) **Estudia la posición relativa de r y s**.
b) **Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas**.

Solución:

a) **Estudia la posición relativa de r y s**.

Recta r: Para r se tienen las ecuaciones

$$y = 0, \quad 2x - z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2x.$$

Tomando $x = t$ como parámetro,

$$r : (x, y, z) = (t,\ 0,\ 2t).$$

Un punto sobre r es, por ejemplo, $R_0 = (0,\ 0,\ 0)$ (cuando $t = 0$), y su vector director es $\overrightarrow{d_r} = (1,\ 0,\ 2)$.

Recta s: Se da por

$$x + y + 7 = 0, \quad z = 0.$$

Al tomar $x = \tau$ como parámetro, entonces $y = -\tau - 7$, y $z = 0$. Por tanto,

$$s : (x, y, z) = (\tau,\ -\tau - 7,\ 0).$$

Un punto sobre s es, por ejemplo, $S_0 = (0,\ -7,\ 0)$ (cuando $\tau = 0$), y su vector director es $\overrightarrow{d_s} = (1,\ -1,\ 0)$.

Comparación de vectores directores: $(1,\ 0,\ 2)$ y $(1,\ -1,\ 0)$ no son proporcionales, por lo que r y s no son paralelas.

Búsqueda de intersección: Para un posible punto común, se igualan las parametrizaciones:

$$(t,\ 0,\ 2t) \ = \ (\tau,\ -\tau - 7,\ 0).$$

Ello supondría $t = \tau$, $0 = -\tau - 7$ y $2t = 0$. De $2t = 0$ se sigue $t = 0$, y así $\tau = 0$. Pero entonces $0 = -0 - 7$ impone $0 = -7$, lo cual es absurdo. No hay solución y, por tanto, r y s no se cortan.

Comprobación de coplanaridad: Se analiza si hay un solo plano que contenga ambas rectas. Se toma el vector entre un punto de r y un punto de s, por ejemplo,

$$\overrightarrow{R_0S_0} = (0 - 0,\ -7 - 0,\ 0 - 0) = (0,\ -7,\ 0).$$

Si los tres vectores

$$\overrightarrow{d_r} = (1,\ 0,\ 2), \quad \overrightarrow{d_s} = (1,\ -1,\ 0), \quad \overrightarrow{R_0S_0} = (0,\ -7,\ 0)$$

fueran coplanarios, el determinante de la matriz que forman daría cero. Se construye la matriz con estos vectores como filas:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$\det(M) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}.$$

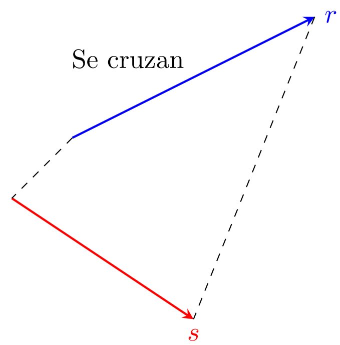
Calculamos los determinantes menores:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (0)(-7) = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = (1)(-7) - (-1)(0) = -7.$$

Sustituyendo:

$$\det(M) = 1(0) + 2(-7) = -14 \neq 0.$$

Dado que el determinante es distinto de cero, los tres vectores no son coplanarios, lo que implica que las rectas r y s no están contenidas en un mismo plano y, por ende, son rectas que se cruzan.



Por lo tanto, las rectas r y s no están contenidas en un mismo plano y, por ende, son rectas que se cruzan.

b) Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

Un plano es paralelo a una recta si su vector normal es ortogonal al vector director de la recta. Aquí, el vector normal $\vec{n}$ del plano buscado debe ser ortogonal a $\overrightarrow{d_r} = (1,\ 0,\ 2)$ y también a $\overrightarrow{d_s} = (1,\ -1,\ 0)$. Entonces,

$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = (1,\ 0,\ 2) \times (1,\ -1,\ 0) = (2,\ 2,\ -1).$$

Cualquier plano con normal $(2, 2, -1)$ puede escribirse como

$$2x + 2y - z + d = 0,$$

con d real. Queremos que dicho plano esté *a la misma distancia* de ambas rectas. Para la distancia de una línea a un plano, si la línea es paralela al plano, basta con medir la distancia entre el plano y cualquier punto de la recta. Así:

- En r, tomamos $R_0 = (0, 0, 0)$. Su distancia al plano $2x + 2y - z + d = 0$ es

$$d(r,\ \text{plano}) = \frac{|\,2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0 + d\,|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|\,d\,|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|\,d\,|}{3}.$$

- En s, tomamos $S_0 = (0, -7, 0)$. La distancia al mismo plano es

$$d(s,\ \text{plano}) = \frac{|\,2 \cdot 0 + 2 \cdot (-7) - 0 + d\,|}{3} = \frac{|\,-14 + d\,|}{3}.$$

Para que el plano equidiste de las dos rectas, necesitamos

$$\frac{|\,d\,|}{3} = \frac{|\,-14+d\,|}{3} \implies |\,d\,| = |\,-14+d\,|.$$

La solución que funciona (sin caer en contradicción) es $d = 7$:

$$d = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\,7\,| = 7, \\ |\,-14+7\,| = |\,-7\,| = 7, \end{cases}$$

así se cumple la igualdad. El plano buscado es

$$2x + 2y - z + 7 = 0.$$

Su distancia a ambos ejes directores de las rectas es $7/3$.

Por lo tanto, el plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas es:

$$\boxed{2x \ + \ 2y \ - \ z \ + \ 7 \ = \ 0}$$

Andalucía, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 7

Considera el plano $\pi \equiv \mathbf{x - 2y + z - 2 = 0}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

a) **Estudia la posición relativa de π y r.**
b) **Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $\mathbf{P(2, -1, -2)}$ y es perpendicular a r.**

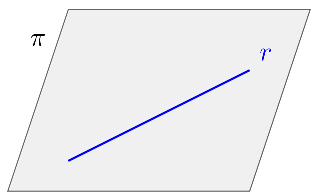
Solución:

a) **Estudia la posición relativa de π y r.**

Sustituimos la ecuación paramétrica de la recta r en el plano π para estudiar la posición relativa:

$$(1 + 2\lambda) - 2(\lambda) + (1) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\lambda - 2\lambda + 1 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.$$

Esta igualdad, siempre cierta, implica que todos los puntos de la recta satisfacen la ecuación del plano, lo que indica que la recta r está contenida en el plano π:



Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{La recta } r \text{ está contenida en el plano } \pi.}$$

b) **Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $\mathbf{P(2, -1, -2)}$ y es perpendicular a r.**

El vector director de la recta r es:

$$\vec{v}_r = (2, 1, 0).$$

La recta buscada debe ser perpendicular a r, por lo que su dirección $\vec{u} = (a, b, c)$ verifica:

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad (a, b, c) \cdot (2, 1, 0) = 2a + b = 0.$$

Además, como la recta está contenida en el plano π, su dirección también debe ser perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}_\pi = (1, -2, 1)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad (a, b, c) \cdot (1, -2, 1) = a - 2b + c = 0.$$

Obtenemos el sistema:

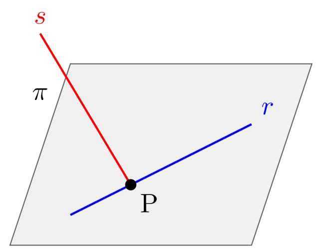
$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

Podemos elegir $a = 1$ (valor arbitrario), así obtenemos:

$$\begin{cases} 2(1) + b = 0 \\ 1 - 2b + c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = -2 \\ c = 2b - 1 = -4 - 1 = -5 \end{cases}$$

Por tanto, un vector director adecuado es:

$$\vec{u} = (1, -2, -5).$$



Finalmente, la recta pedida, que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$, tiene la ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = -2 - 5\mu \end{cases} , \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = -2 - 5\mu \end{cases} , \quad \mu \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 8

Considera los puntos $\mathbf{A(4,0,0)}$ y $\mathbf{B(0,2,0)}$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

Solución:

Sea el punto buscado del plano OXZ, $C(x,0,z)$, ya que pertenece a dicho plano y, por tanto, tiene la coordenada $y=0$. Para que el triángulo ABC sea equilátero, se deben cumplir:

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}$$

Calculamos las distancias:

1. Distancia AB:
$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
2. Distancia AC:
$$\overline{AC} = \sqrt{(x-4)^2 + (0-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + z^2}$$
3. Distancia BC:
$$\overline{BC} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-2)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2+4+z^2}$$

Igualamos estas distancias para formar el triángulo equilátero:

1. $\overline{AC} = \overline{AB}$:
$$\sqrt{(x-4)^2+z^2} = 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 + z^2 = 20$$
2. $\overline{BC} = \overline{AB}$:
$$\sqrt{x^2+4+z^2} = 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad x^2+z^2+4 = 20 \quad \Rightarrow \quad x^2+z^2 = 16$$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + z^2 = 20 \\ x^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera:

$$(x-4)^2 + z^2 - (x^2+z^2) = 20 - 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 16 - x^2 = 4$$

Simplificando:

$$-8x + 16 = 4 \quad \Rightarrow \quad -8x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Sustituimos $x = \frac{3}{2}$ en la ecuación $x^2+z^2=16$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4} + z^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 16 - \frac{9}{4} = \frac{55}{4}$$

Por tanto, obtenemos dos puntos simétricos respecto al plano OX:

$$z = \pm\frac{\sqrt{55}}{2}$$

Por tanto, los puntos buscados son:

$$\boxed{C_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right) \quad \text{y} \quad C_2 = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right)}$$

Andalucía, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 7

El plano perpendicular al segmento de extremos $\mathbf{P(0,3,8)}$ y $\mathbf{Q(2,1,6)}$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Solución:

Primero, hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = (2-0,\ 1-3,\ 6-8) = (2,-2,-2).$$

El punto medio del segmento PQ es:

$$M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{8+6}{2}\right) = (1,2,7)\,.$$

La ecuación del plano perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ que pasa por M es:

$$2(x-1) - 2(y-2) - 2(z-7) = 0.$$

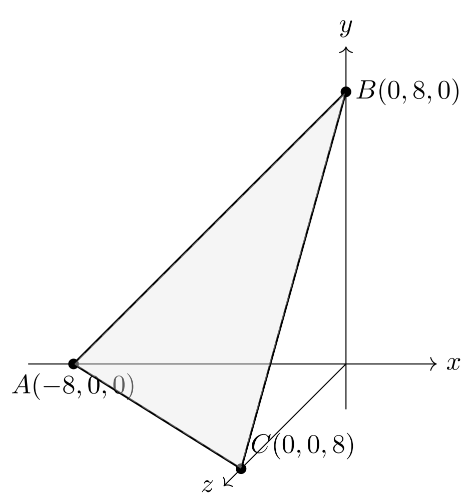
Simplificando:

$$2x - 2 - 2y + 4 - 2z + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - z + 8 = 0.$$

Calculamos los puntos de intersección con los ejes:

- Con el eje OX: $y = z = 0 \Rightarrow x = -8$, punto $A = (-8,0,0)$.
- Con el eje OY: $x = z = 0 \Rightarrow y = 8$, punto $B = (0,8,0)$.
- Con el eje OZ: $x = y = 0 \Rightarrow z = 8$, punto $C = (0,0,8)$.

Los puntos del triángulo son $A = (-8,0,0)$, $B = (0,8,0)$ y $C = (0,0,8)$.



El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\overrightarrow{AB} = (8,8,0), \quad \overrightarrow{AC} = (8,0,8).$$

Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \vec{i}(64) - \vec{j}(64) + \vec{k}(-64) = (64, -64, -64).$$

El área es la mitad del módulo de este vector:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{64^2 + (-64)^2 + (-64)^2} = 32\sqrt{3}\ u^2.$$

Por tanto, la solución es:

$$\boxed{32\sqrt{3}\ u^2}$$

Ejercicio 8

Considera el punto A$(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos B$(2,1,1)$ y C$(0,1,-1)$.

a) **Halla la distancia del punto A a la recta r.**
b) **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.**

Solución:

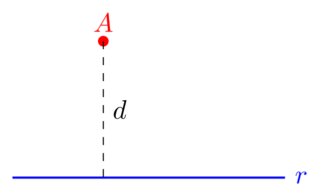
a) **Halla la distancia del punto A a la recta r.**

La recta r pasa por $B(2,1,1)$ y tiene dirección:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0-2, 1-1, -1-1) = (-2, 0, -2).$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ es:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2+1, 1-1, 1-3) = (3, 0, -2).$$



La distancia del punto A a la recta r es:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}.$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0, 10, 0).$$

Luego,

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = 10.$$

El módulo de $\overrightarrow{BC}$ es:

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Por tanto,

$$d = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u.$$

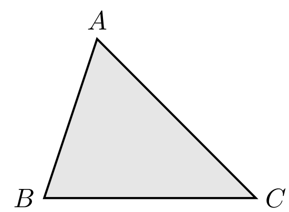
Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u}$$

b) **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.**

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$



Calculamos $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0+1, 1-1, -1-3) = (1, 0, -4).$$

Ahora calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (0, 10, 0).$$

Entonces, el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}|(0, 10, 0)| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\ u^2.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{5\ u^2}$$

Andalucía, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 7

Considera los planos $\pi_1 \equiv \mathbf{x - y + z = 0}$ y $\pi_2 \equiv \mathbf{x + y = 2}$.

a) **Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $\mathbf{P(2, 6, -2)}$.**
b) **Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.**

Solución:

a) **Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $\mathbf{P(2, 6, -2)}$.**

La recta intersección se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Tomando y como parámetro λ, resulta:

$$x = 2 - \lambda, \quad z = y - x = \lambda - (2 - \lambda) = 2\lambda - 2.$$

Así, la recta intersección es:

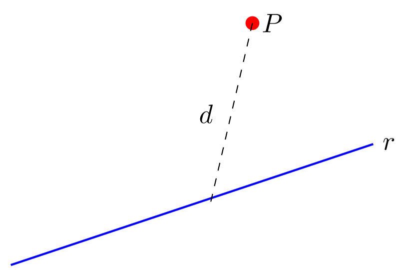
$$r : (2 - \lambda,\ \lambda,\ 2\lambda - 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sea $P = (2, 6, -2)$. La distancia del punto a la recta se obtiene mediante el producto vectorial:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|},$$

donde A es un punto de la recta (tomando $\lambda = 0$, $A = (2, 0, -2)$) y el vector director es:

$$\vec{v} = (-1, 1, 2).$$



Entonces,

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2 - 2, 6 - 0, -2 + 2) = (0, 6, 0).$$

El producto vectorial es:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (12, 0, 6).$$

Su módulo es:

$$|(12, 0, 6)| = \sqrt{12^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

La distancia pedida es:

$$d = \frac{6\sqrt{5}}{|(-1, 1, 2)|} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}.$$

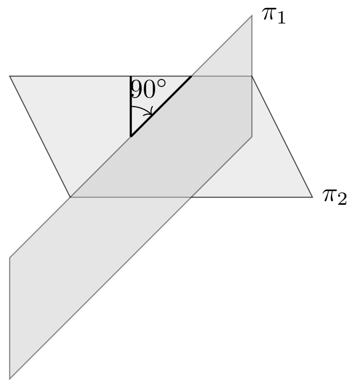
Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\sqrt{30}}$$

b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

Los vectores normales de los planos son:

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{n}_2 = (1, 1, 0).$$



El ángulo entre los planos es el ángulo entre estos vectores normales:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 0.$$

Por tanto,

$$\theta = 90^\circ.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{90^\circ}$$

Ejercicio 8

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $\mathbf{A(0,2,-2)}$, $\mathbf{B(3,2,1)}$ y $\mathbf{C(2,3,2)}$ con los planos cartesianos.

Solución:

El tetraedro está formado por el plano determinado por los puntos A, B y C y los planos cartesianos $x=0$, $y=0$, $z=0$. Primero, hallamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C:

$$\overrightarrow{AB} = (3,0,3), \quad \overrightarrow{AC} = (2,1,4).$$

Obtenemos el vector normal al plano mediante el producto vectorial:

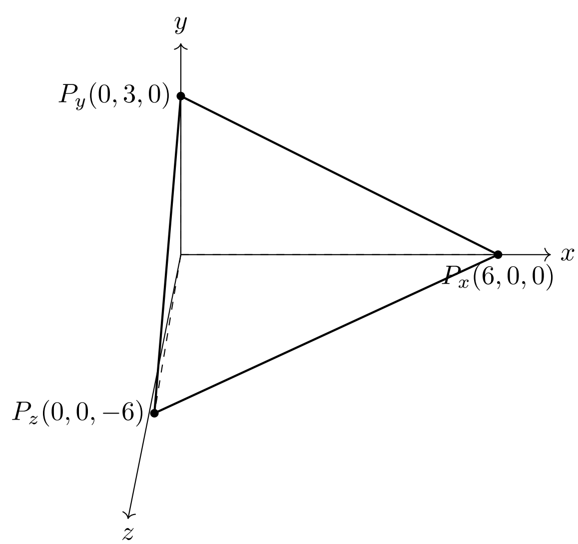
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-3,-6,3).$$

La ecuación del plano es, por tanto:

$$-3(x-0)-6(y-2)+3(z+2)=0 \quad \Rightarrow \quad -3x-6y+12+3z+6=0 \quad \Rightarrow \quad x+2y-z=6.$$

Encontramos los puntos de intersección con los ejes coordenados:

$$\begin{aligned} &\text{Con el eje } x: \quad y=0, z=0 \quad \Rightarrow \quad x=6, \quad P_x=(6,0,0). \\ &\text{Con el eje } y: \quad x=0, z=0 \quad \Rightarrow \quad y=3, \quad P_y=(0,3,0). \\ &\text{Con el eje } z: \quad x=0, y=0 \quad \Rightarrow \quad z=-6, \quad P_z=(0,0,-6). \end{aligned}$$



El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto escalar del vector posición de uno de los puntos con el producto vectorial de los otros dos:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OP_x} \cdot (\overrightarrow{OP_y} \times \overrightarrow{OP_z})\right|,$$

siendo $O = (0,0,0)$:

$$\overrightarrow{OP_x} = (6,0,0), \quad \overrightarrow{OP_y} = (0,3,0), \quad \overrightarrow{OP_z} = (0,0,-6).$$

Calculamos primero el producto vectorial:

$$\overrightarrow{OP_y} \times \overrightarrow{OP_z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-18,0,0).$$

Luego, el producto escalar:

$$\overrightarrow{OP_x} \cdot (-18,0,0) = (6,0,0) \cdot (-18,0,0) = -108.$$

Finalmente, el volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}|-108| = \frac{108}{6} = 18\ u^3.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{18\ u^3}$$

Andalucía, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 7

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto A$(-4, 4, 7)$.

a) **Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

b) **Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.**

Solución:

a) **Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Para que el vector $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (1)(-1) + (a)(2) + (b)(3) = -1 + 2a + 3b = 0.$$

Para que el vector $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{v}$, su producto escalar debe ser cero:

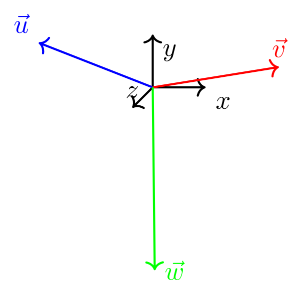
$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (1)(2) + (a)(0) + (b)(-1) = 2 - b = 0.$$

De la segunda ecuación, obtenemos directamente el valor de b:

$$2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2.$$

Sustituimos el valor de b en la primera ecuación para encontrar a:

$$-1 + 2a + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a = -5 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{5}{2}.$$



Por lo tanto, los valores son:

$$\boxed{a = -\frac{5}{2}, \quad b = 2}$$

b) **Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.**

Sea el paralelogramo de vértices O, B, A, D. Los lados $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OD}$ tienen las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Esto significa que $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{u}$ y $\overrightarrow{OD} = \mu\vec{v}$ para algunos escalares λ y μ. La diagonal $\overrightarrow{OA}$ se forma por la suma de los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OD}$:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}.$$

Sustituyendo las expresiones de los vectores:

$$\lambda(-1,2,3)+\mu(2,0,-1)=(-4,4,7) \quad \Rightarrow \quad (-\lambda+2\mu, 2\lambda, 3\lambda-\mu)=(-4,4,7).$$

Igualando las componentes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\lambda+2\mu &= -4 \\ 2\lambda &= 4 \\ 3\lambda-\mu &= 7 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, encontramos λ:

$$2\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2.$$

Sustituimos $\lambda = 2$ en la primera ecuación:

$$-2+2\mu=-4 \quad \Rightarrow \quad 2\mu=-2 \quad \Rightarrow \quad \mu=-1.$$

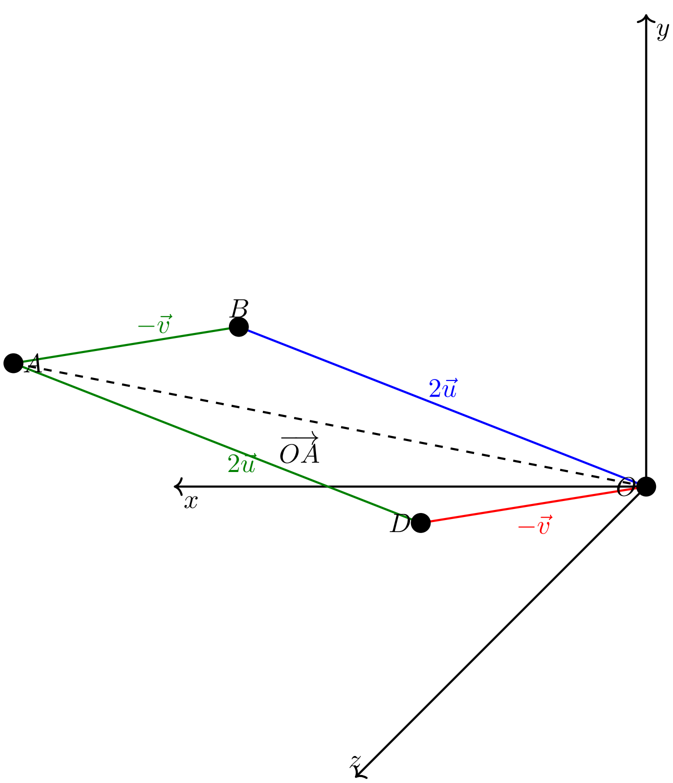
Verificamos que estos valores de λ y μ satisfacen la tercera ecuación:

$$3(2)-(-1)=6+1=7.$$

La tercera ecuación también se cumple. Ahora podemos encontrar los vértices del paralelogramo. Un vértice es el origen $O(0,0,0)$. Los otros dos vértices adyacentes al origen son:

$$B=\overrightarrow{OB}=\lambda\vec{u}=2(-1,2,3)=(-2,4,6),$$
$$D=\overrightarrow{OD}=\mu\vec{v}=-1(2,0,-1)=(-2,0,1).$$

El cuarto vértice A es el punto dado $(-4,4,7)$, que es el extremo de la diagonal $\overrightarrow{OA}$.



Por lo tanto, los cuatro vértices del paralelogramo son:

$$\boxed{O(0,0,0), \quad B(-2,4,6), \quad A(-4,4,7), \quad D(-2,0,1)}$$

Ejercicio 8

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$, así como la recta s determinada por el punto $P(1,2,3)$ y el vector director $\vec{v} = (1+a, -a, 3a)$.

a) **Calcula a para que las rectas r y s se corten.**
b) **Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.**

Solución:

a) **Calcula a para que las rectas r y s se corten.**

Primero, expresamos la recta r en forma paramétrica. Igualando la expresión dada a un parámetro λ, tenemos:

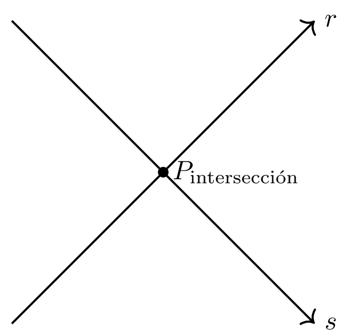
$$x - 2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = 2 + \lambda,$$
$$\frac{y}{-1} = \lambda \quad \Rightarrow \quad y = -\lambda,$$
$$\frac{z-1}{2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad z = 1 + 2\lambda.$$

Así, la recta r puede escribirse como $(x,y,z) = (2+\lambda, -\lambda, 1+2\lambda)$. Un punto de la recta r es $R(2,0,1)$ y su vector director es $\vec{d_r} = (1,-1,2)$.

Ahora, expresamos la recta s en forma paramétrica. Sabiendo que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1+a, -a, 3a)$, su ecuación paramétrica es:

$$x = 1 + \mu(1+a),$$
$$y = 2 + \mu(-a) = 2 - a\mu,$$
$$z = 3 + \mu(3a).$$

Así, la recta s puede escribirse como $(x,y,z) = (1+\mu(1+a), 2-a\mu, 3+3a\mu)$.



Para que las rectas r y s se corten, debe existir un punto común, es decir, deben existir valores de λ y μ tales que las coordenadas sean iguales:

$$2 + \lambda = 1 + \mu(1+a),$$
$$-\lambda = 2 - a\mu,$$
$$1 + 2\lambda = 3 + 3a\mu.$$

De la segunda ecuación, tenemos $\lambda = -2 + a\mu$. Sustituimos esta expresión de λ en la primera ecuación:

$$2 + (-2 + a\mu) = 1 + \mu(1+a) \quad \Rightarrow \quad a\mu = 1 + \mu + a\mu \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 + \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = -1.$$

Ahora sustituimos $\lambda = -2 + a\mu$ y $\mu = -1$ en la tercera ecuación:

$$1+2(-2+a(-1)) = 3+3a(-1) \quad \Rightarrow \quad 1-4-2a = 3-3a-3-2a = 3-3a \quad \Rightarrow \quad 3a-2a = 3+3 \quad \Rightarrow \quad a = 6.$$

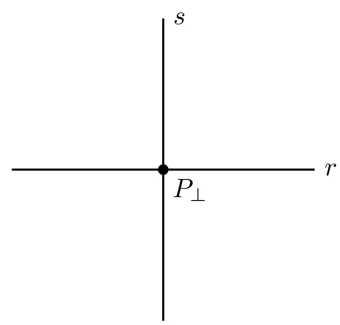
Por lo tanto, las rectas r y s se cortan para:

$$\boxed{a = 6}$$

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

Calculamos el producto escalar de $\vec{d_r}$ y $\vec{v}$ e igualamos a cero:

$$\vec{d_r} \cdot \vec{v} = (1)(1+a) + (-1)(-a) + (2)(3a) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + a + a + 6a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{8}.$$



Por lo tanto, las rectas r y s son perpendiculares para:

$$\boxed{a = -\frac{1}{8}}$$

Andalucía, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 7

Considera las rectas $\mathbf{r \equiv x + 1 = y - a = -z}$ y $\mathbf{s} \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$.

a) **Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.**
b) **Halla la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{P(8, -7, 2)}$ y que contiene a la recta s.**

Solución:

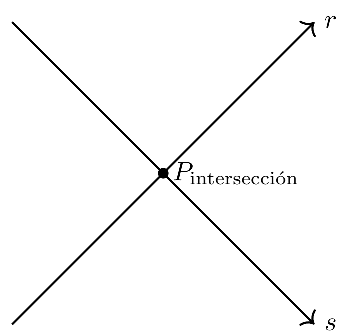
a) **Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.**

Primero, escribimos la ecuación de la recta r en forma paramétrica. Sea $r \equiv x + 1 = y - a = -z = \mu$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = \mu - 1 \\ y = \mu + a \\ z = -\mu \end{cases}.$$

La recta s ya está dada en forma paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}.$$



Para que las rectas r y s se corten, debe existir un punto que pertenezca a ambas rectas. Igualamos las coordenadas correspondientes:

$$\begin{aligned} \mu - 1 &= 5 + 2\lambda, \\ \mu + a &= -3, \\ -\mu &= 2 - \lambda. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación, despejamos μ:

$$\mu = -3 - a$$

Sustituimos esta expresión de μ en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} (-3 - a) - 1 = 5 + 2\lambda \quad &\Rightarrow \quad -4 - a = 5 + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = -9 - a, \\ -(-3 - a) = 2 - \lambda \quad &\Rightarrow \quad 3 + a = 2 - \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 - a. \end{aligned}$$

Resolvemos por sustitución:

$$2(-1-a) = -9-a \quad \Rightarrow \quad 7 = a$$

Así, el valor de a para que las rectas se corten es $a = 7$. Para encontrar el punto de corte, sustituimos $a = 7$ en la expresión para λ (o μ):

$$\lambda = -1 - a = -1 - 7 = -8.$$

Sustituimos $\lambda = -8$ en las ecuaciones paramétricas de s:

$$x = 5 + 2(-8) = 5 - 16 = -11, \quad y = -3, \quad z = 2 - (-8) = 2 + 8 = 10.$$

El punto de corte es $(-11, -3, 10)$.

Por lo tanto, para $\mathbf{a = 7}$, las rectas se cortan en el punto:

$$\boxed{(-11, -3, 10)}$$

b) Halla la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{P(8, -7, 2)}$ y que contiene a la recta s.

Para determinar dicho plano, primero observamos que la recta s se encuentra dada en forma paramétrica. Un punto cualquiera de s se obtiene tomando $\lambda = 0$, lo que proporciona

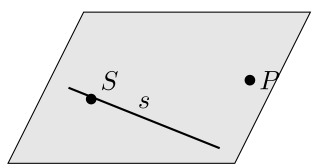
$$S(5,\ -3,\ 2).$$

Además, la dirección de la recta s se lee directamente de sus parámetros, resultando

$$\vec{v}_s = (2,\ 0,\ -1).$$

Como el plano debe incluir tanto la recta s como el punto $P(8, -7, 2)$, necesitamos otra dirección independiente dentro del plano. Para ello, consideramos el vector que va desde el punto S (en la recta) hasta P, es decir

$$\overrightarrow{SP} = \big(8 - 5,\ -7 - (-3),\ 2 - 2\big) = (3,\ -4,\ 0).$$



En un plano, dos direcciones cualesquiera que pertenezcan a él permiten encontrar un vector normal mediante el producto vectorial. Por tanto, el vector normal $\vec{n}$ de nuestro plano se obtiene como

$$\vec{n} = \vec{v}_s \times \overrightarrow{SP} = (2,\ 0,\ -1)\ \times\ (3,\ -4,\ 0).$$

El determinante correspondiente nos da

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-4)) - \mathbf{j}(2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) + \mathbf{k}(2 \cdot (-4) - 0 \cdot 3),$$

lo que se traduce en

$$\vec{n} = \big(-4,\ -3,\ -8\big).$$

Podríamos dejarlo tal cual o tomar su opuesto $(4,\ 3,\ 8)$ para mayor comodidad.
Teniendo un vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ y un punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente al plano, la ecuación se escribe como

$$A\,(x - x_0)\ +\ B\,(y - y_0)\ +\ C\,(z - z_0) = 0.$$

En este caso, podemos usar como punto Q cualquiera que sepamos que está en el plano, por ejemplo $S(5, -3, 2)$ de la recta. Con $\vec{n} = (4,\, 3,\, 8)$ y $Q = S$, la ecuación se vuelve

$$4\,(x-5)\; +\; 3\,(y+3)\; +\; 8\,(z-2) = 0.$$

Desarrollando y simplificando se obtiene

$$4x + 3y + 8z - 27 = 0.$$

Por último, verificamos que el plano también contiene el punto $P(8, -7, 2)$ sustituyéndolo en la ecuación (verificación que, al hacerse, da cero).

Por lo tanto, el plano pedido es:

$$\boxed{4x + 3y + 8z - 27 = 0}$$

Ejercicio 8

Sean el plano $\pi \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{2}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{3}} = \mathbf{z} - \mathbf{1}$.

a) **Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.**
b) **Dado el punto $\mathbf{Q(2, 6, 3)}$, halla su simétrico respecto del plano π.**

Solución:

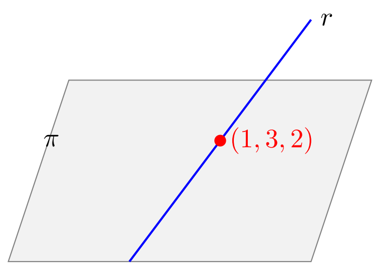
a) **Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.**

La recta puede parametrizarse usando $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$r: \quad x = \lambda, \quad y = 3\lambda, \quad z = \lambda + 1.$$

Sustituyendo en el plano π:

$$\lambda + 3\lambda - (\lambda + 1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.$$



Así, el punto de intersección es:

$$(1, 3, 2).$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{(1, 3, 2)}$$

b) **Dado el punto $\mathbf{Q(2, 6, 3)}$, halla su simétrico respecto del plano π.**

Usamos la fórmula del punto simétrico Q' respecto de un plano:

$$Q' = Q - 2\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}(A, B, C)$$

siendo $\pi : x + y - z - 2 = 0$, tenemos:

$$(A, B, C) = (1, 1, -1), \quad D = -2, \quad Q = (2, 6, 3).$$

Calculamos primero la distancia numerador:

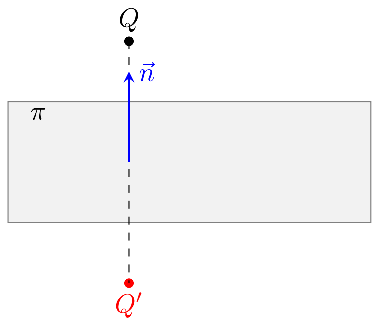
$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 3 - 2 = 2 + 6 - 3 - 2 = 3.$$

Luego:

$$Q' = (2, 6, 3) - 2\frac{3}{1^2 + 1^2 + (-1)^2}(1, 1, -1) = (2, 6, 3) - 2\frac{3}{3}(1, 1, -1).$$

Simplificando:

$$Q' = (2, 6, 3) - 2(1, 1, -1) = (2, 6, 3) - (2, 2, -2) = (0, 4, 5).$$



Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{(0, 4, 5)}$$

Andalucía, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 7

Considera las rectas

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \quad \mathbf{s} \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

a) **Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $\mathbf{P(1, 0, -5)}$.**
b) **Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv \mathbf{-2x + y + 2z = 0}$.**

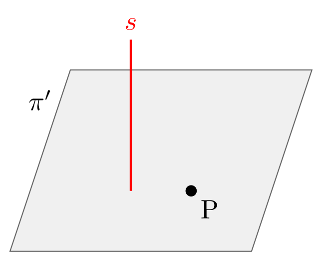
Solución:

a) **Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $\mathbf{P(1, 0, -5)}$.**

La recta s está dada en forma paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

El vector director de la recta s se obtiene de los coeficientes de λ, que es $\vec{v}_s = (-2, 1, 2)$.



Un plano perpendicular a la recta s tendrá como vector normal el vector director de la recta s. Por lo tanto, el vector normal del plano que buscamos es $\vec{n} = (-2, 1, 2)$.

La ecuación de un plano con vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ que pasa por un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. En nuestro caso, $P(1, 0, -5)$ y $\vec{n} = (-2, 1, 2)$.

Sustituyendo los valores, obtenemos la ecuación del plano:

$$-2(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z - (-5)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi' \equiv -2x + y + 2z + 12 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\pi' \equiv -2x + y + 2z + 12 = 0}$$

b) **Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv \mathbf{-2x + y + 2z = 0}$.**

La recta r está dada por la intersección de dos planos:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

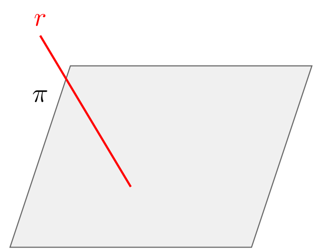
El vector director de la recta r es el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos. Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (2, -3, 1)$ y $\vec{n}_2 = (-3, 2, 2)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-6-2)\vec{i} - (4-(-3))\vec{j} + (4-9)\vec{k} = -8\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k} = (-8, -7, -5).$$

El plano π tiene ecuación $-2x + y + 2z = 0$. Su vector normal es $\vec{n}_\pi = (-2, 1, 2)$.

El ángulo α que forma una recta con un plano es el ángulo complementario del ángulo β que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano. Es decir, $\alpha = 90° - \beta$, por lo que $\sin(\alpha) = \cos(\beta)$. El seno del ángulo que forma la recta r con el plano π se puede calcular utilizando la fórmula:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r||\vec{n}_\pi|}.$$



Calculamos el producto escalar $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi$:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-8)(-2) + (-7)(1) + (-5)(2) = 16 - 7 - 10 = -1.$$

Calculamos los módulos de los vectores:

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{(-8)^2 + (-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 49 + 25} = \sqrt{138},$$

$$|\vec{n}_\pi| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Sustituimos estos valores en la fórmula del seno del ángulo:

$$\sin(\alpha) = \frac{|-1|}{\sqrt{138} \cdot 3} = \frac{1}{3\sqrt{138}}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{1}{3\sqrt{138}}}$$

Ejercicio 8

La recta r $\equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

Primero, vamos a escribir las ecuaciones paramétricas de ambas rectas. La recta r está dada en forma continua: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$. Igualando cada fracción a un parámetro λ, obtenemos las ecuaciones paramétricas de r:

$$\frac{x+3}{2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = 2\lambda - 3,$$
$$\frac{y+4}{2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad y = 2\lambda - 4,$$
$$\frac{z-3}{3} = \lambda \quad \Rightarrow \quad z = 3\lambda + 3.$$

Así, las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 3 \\ y = 2\lambda - 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases}$$

La recta s pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$. El vector director de la recta s es $\vec{v}_s = \vec{PQ} = Q - P = (a-1, 1-0, 0-2) = (a-1, 1, -2)$. Utilizando el punto $P(1,0,2)$ y el vector director $\vec{v}_s$, las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + (a-1)\mu \\ y = 0 + 1\mu = \mu \\ z = 2 + (-2)\mu = 2 - 2\mu \end{cases}$$

donde μ es otro parámetro. Si las rectas r y s se cortan en un punto, entonces existe un punto cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones paramétricas de ambas rectas para algunos valores de λ y μ. Igualando las coordenadas correspondientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\lambda - 3 = 1 + (a-1)\mu \\ 2\lambda - 4 = \mu \\ 3\lambda + 3 = 2 - 2\mu \end{cases}$$

Sustituimos la ecuación 2 ($\mu = 2\lambda - 4$) en la ecuación 3:

$$3\lambda + 3 = 2 - 2(2\lambda - 4) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

Ahora sustituimos el valor de $\lambda = 1$ en la ecuación 2 para encontrar el valor de μ:

$$\mu = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2.$$

Finalmente, sustituimos los valores de $\lambda = 1$ y $\mu = -2$ en la ecuación 1 para encontrar el valor de a:

$$2(1) - 3 = 1 + (a-1)(-2) \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Por lo tanto, el valor de a para que las rectas se corten es $a = 2$. Para encontrar el punto de corte, sustituimos el valor de $\lambda = 1$ en las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$x = 2(1) - 3 = -1,$$

$$y = 2(1) - 4 = -2,$$

$$z = 3(1) + 3 = 6.$$

El punto de corte es $(-1, -2, 6)$.

Podemos verificar este punto sustituyendo $a = 2$ y $\mu = -2$ en las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$x = 1 + (2 - 1)(-2) = 1 + (1)(-2) = 1 - 2 = -1,$$

$$y = -2,$$

$$z = 2 - 2(-2) = 2 + 4 = 6.$$

El punto coincide, por lo que el punto de corte es correcto.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = 2 \quad \text{y el punto de corte es } (-1, -2, 6)}$$

Andalucía, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 7

La recta perpendicular desde el punto A$(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto B$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

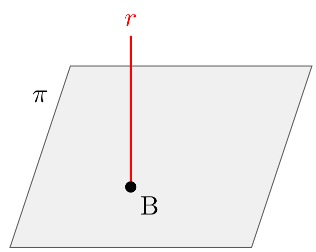
a) **Calcula la ecuación del plano π.**
b) **Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.**

Solución:

a) **Calcula la ecuación del plano π.**

La recta que pasa por A y es perpendicular al plano π contiene el punto B, que es el punto de intersección con el plano. Esto significa que el vector $\vec{AB}$ es normal al plano π. Calculamos el vector $\vec{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(1-1, \frac{1}{2}-1, \frac{1}{2}-0\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Podemos tomar como vector normal del plano π cualquier vector paralelo a $\overrightarrow{AB}$. Un vector paralelo más sencillo es $\vec{n} = -2\vec{AB} = (0,1,-1)$. La ecuación de un plano con vector normal $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) es $n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0) = 0$. En este caso, el vector normal es $(0,1,-1)$ y el punto del plano es $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Sustituyendo estos valores, obtenemos la ecuación del plano π:

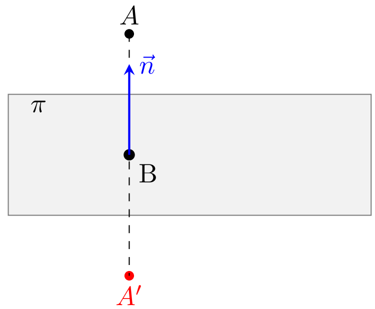
$$0(x-1) + 1\left(y-\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(z-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv y - z = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es:

$$\boxed{\pi \equiv y - z = 0}$$

b) **Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.**

Sea A' el punto simétrico de A respecto al plano π. El punto B es el punto medio del segmento AA', ya que la recta que une A y A' es perpendicular al plano π y B es el punto de intersección.



La distancia entre A y su simétrico A' es el doble de la distancia entre A y el plano π, que es la distancia entre A y B. Calculamos la distancia entre los puntos $A(1,1,0)$ y $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos en el espacio:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La distancia entre el punto A y su simétrico A' es $2\cdot d(A,B)$:

$$d(A,A')=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, la distancia del punto A a su simétrico respecto a π es:

$$\boxed{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 8

Considera las rectas

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \qquad \mathbf{s} \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) **Estudia la posición relativa de r y s.**
b) **Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s.**

Solución:

a) **Estudia la posición relativa de r y s.**

La recta r pasa por el punto $P_r = (3, 1, -3)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$. La recta s está definida por las ecuaciones implícitas $x + y = 1$ y $z = 0$. Para obtener su forma paramétrica, hacemos $x = \mu$. Entonces $y = 1 - x = 1 - \mu$, y $z = 0$. Por lo tanto, la recta s pasa por el punto $P_s = (0, 1, 0)$ (para $\mu = 0$) y tiene vector director $\vec{v}_s = (1, -1, 0)$.

Primero, comprobamos si los vectores directores son paralelos. Los vectores $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$ y $\vec{v}_s = (1, -1, 0)$ no son proporcionales, ya que no existe un escalar k tal que $(1, 0, -1) = k(1, -1, 0)$. Por lo tanto, las rectas r y s no son paralelas.

A continuación, comprobamos si las rectas se cortan. Para ello, igualamos las coordenadas de un punto genérico de r con un punto genérico de s:

$$\begin{aligned} 3 + \lambda &= \mu \\ 1 &= 1 - \mu \\ -3 - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

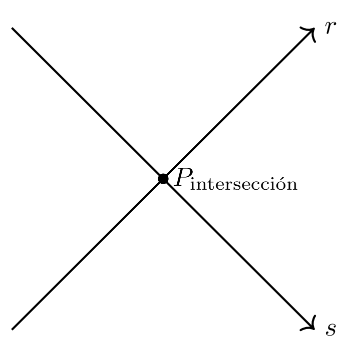
De la tercera ecuación, obtenemos $\lambda = -3$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$3 + (-3) = \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 0.$$

Comprobamos la segunda ecuación:

$$1 = 1 - 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1.$$

Las tres ecuaciones son consistentes, por lo que las rectas r y s se cortan. El punto de intersección se obtiene sustituyendo $\lambda = -3$ en las ecuaciones de r (o $\mu = 0$ en las ecuaciones de s):
- Para r: $x = 3 - 3 = 0$, $y = 1$, $z = -3 - (-3) = 0$. Punto $(0, 1, 0)$.
- Para s: $x = 0$, $y = 1 - 0 = 1$, $z = 0$. Punto $(0, 1, 0)$.



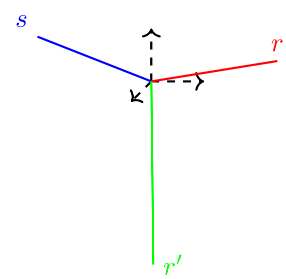
Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ son secantes en el punto } (0,1,0)}$$

b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

Dado que las rectas r y s se cortan en el punto $P = (0, 1, 0)$, la recta que corta perpendicularmente a ambas debe pasar por este punto y tener un vector director perpendicular a los vectores directores de r y s. El vector director de esta recta será el producto vectorial de $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$:

$$\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0 - (-1)(-1))\vec{i} - (1 \cdot 0 - (-1)(1))\vec{j} + (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1)\vec{k} = (-1, -1, -1).$$



Podemos tomar como vector director de la recta buscada el vector $\vec{d} = (1, 1, 1)$, que es paralelo a $\vec{w}$. La recta que pasa por el punto $P(0, 1, 0)$ y tiene vector director $\vec{d} = (1, 1, 1)$ tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$r' \equiv \begin{cases} x = 0 + t = t \\ y = 1 + t \\ z = 0 + t = t \end{cases}$$

Por lo tanto, la recta que corta perpendicularmente a r y a s es:

$$\boxed{r' \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}}$$

Andalucía, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 4

Siendo $\mathbf{a \neq 0}$, considera las rectas

$$\mathbf{r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}}$$

a) **Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.**
b) **Para $\mathbf{a = 2}$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.**

Solución:

a) **Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.**

Las rectas tienen vectores directores:

$$\vec{v}_r = (1, 1, a), \quad \vec{v}_s = (-a, -1, 2)$$

Comprobamos si pueden ser paralelas:

$$\vec{v}_r = k\vec{v}_s \quad \Rightarrow \quad (1, 1, a) = k(-a, -1, 2).$$

Esto genera el sistema:

$$1 = -ka, \quad 1 = -k, \quad a = 2k.$$

De la segunda ecuación, tenemos $k = -1$. Sustituyendo en la primera y tercera:

$$1 = -(-1)a \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad \text{y} \quad a = 2(-1) = -2.$$

No existe un valor común para a, luego las rectas nunca son paralelas. Ahora comprobamos si se cortan resolviendo el sistema conjunto:

$$x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = \lambda + 1, \quad y = \lambda + 2, \quad z = a\lambda + 1.$$

$$\frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} = \mu \quad \Rightarrow \quad x = -a\mu + 3, \quad y = -\mu + 3, \quad z = 2\mu - 1.$$

Igualamos ambas parametrizaciones:

$$\lambda + 1 = -a\mu + 3, \quad \lambda + 2 = -\mu + 3, \quad a\lambda + 1 = 2\mu - 1.$$

De la segunda ecuación despejamos fácilmente μ:

$$\lambda + 2 = -\mu + 3 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 - \lambda.$$

Sustituyendo μ en la primera y tercera ecuación:

$$\lambda + 1 = -a(1 - \lambda) + 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda + 1 = -a + a\lambda + 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda(1 - a) = 2 - a,$$

$$a\lambda + 1 = 2(1 - \lambda) - 1 \quad \Rightarrow \quad a\lambda + 1 = 2 - 2\lambda - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda(a + 2) = 0.$$

De la segunda, tenemos dos opciones:
- $\lambda = 0$ implica (de la primera ecuación) que

$$2 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Entonces, para $a = 2$ se cortan.

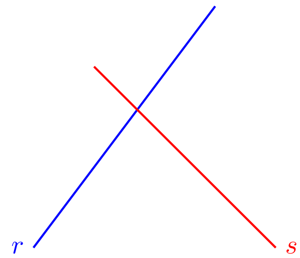
– Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2.$$

Sustituyendo en la primera:

$$\lambda(1 + 2) = 2 + 2 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4/3.$$

Entonces, para $a = -2$ también se cortan.



Resumiendo:
– Las rectas se cortan para $a = 2$ y $a = -2$.
– Para cualquier otro valor de a, las rectas no son paralelas ni se cortan, por lo que se **cruzan**.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Se cortan si } a = \pm 2; \text{ se cruzan para cualquier otro valor}}$$

b) Para a = 2, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

Para $a = 2$, las rectas son:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Primero hallamos el punto de intersección resolviendo el sistema conjunto:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = 2\lambda + 1 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -2\mu + 3 \\ y = -\mu + 3 \\ z = 2\mu - 1 \end{cases}.$$

Igualando ambas parametrizaciones:

$$\lambda + 1 = -2\mu + 3, \quad \lambda + 2 = -\mu + 3, \quad 2\lambda + 1 = 2\mu - 1.$$

De la segunda ecuación:

$$\lambda + 2 = -\mu + 3 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 - \lambda.$$

Sustituyendo en la primera y tercera:

$$\lambda + 1 = -2(1 - \lambda) + 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda + 1 = -2 + 2\lambda + 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,$$

$$2\lambda + 1 = 2(1 - \lambda) - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2 - 2\lambda - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

Obtenemos fácilmente $\lambda = 0$. Sustituyendo en la parametrización de r:

$$P = (1, 2, 1).$$

Ahora buscamos la recta perpendicular a ambas. Su vector director es perpendicular a los vectores directores de r y s:

$$\vec{v}_r = (1, 1, 2), \quad \vec{v}_s = (-2, -1, 2).$$

Calculamos el vector perpendicular usando el producto vectorial:

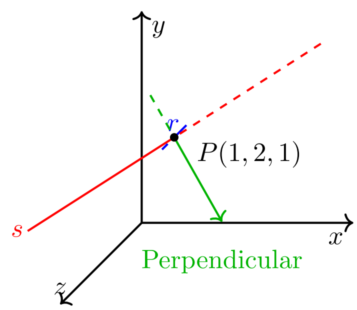
$$\vec{u} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Resolviendo:

$$\vec{u} = (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1), -(1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)), 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2)) = (4, -6, 1).$$

Entonces, la recta perpendicular buscada es:

$$\boxed{\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}}$$



Por tanto, la recta perpendicular buscada es:

$$\boxed{\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}}$$

Ejercicio 8

Se considera el punto $\mathbf{A(1,-2,0)}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$.

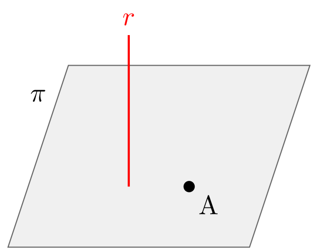
a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Solución:

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

La recta r está dada como la intersección de dos planos. Para encontrar su vector director, calculamos el producto vectorial de los vectores normales de estos planos. Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (1,1,0)$ y $\vec{n}_2 = (0,1,-3)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1\cdot(-3) - 0\cdot 1)\vec{i} - (1\cdot(-3) - 0\cdot 0)\vec{j} + (1\cdot 1 - 1\cdot 0)\vec{k} = (-3,3,1).$$



El plano que pasa por $A(1,-2,0)$ y es perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de r, es decir, $\vec{n}_\pi = (-3,3,1)$. La ecuación del plano es de la forma $n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0) = 0$.

$$-3(x-1) + 3(y-(-2)) + 1(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x+3y+z+9 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

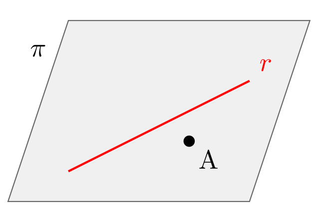
$$\boxed{-3x+3y+z+9=0}$$

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

El plano que contiene a la recta r debe contener un punto de r y su vector director. También debe pasar por el punto A. Primero, encontramos un punto de la recta r. Hacemos $z=0$ en las ecuaciones de r:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Rightarrow y=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-y=2.$$

Así, el punto $P(2,-2,0)$ pertenece a la recta r. El vector director de r es $\vec{v}_r = (-3,3,1)$. El plano que buscamos está determinado por el punto $A(1,-2,0)$ y la recta que pasa por $P(2,-2,0)$ con vector director $\vec{v}_r = (-3,3,1)$.



Consideramos el vector

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (1-2, -2-(-2), 0-0) = (-1, 0, 0).$$

El vector normal del plano será perpendicular a $\vec{v}_r$ y a $\overrightarrow{PA}$. Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (3\cdot 0 - 1\cdot 0)\vec{i} - (-3\cdot 0 - 1\cdot(-1))\vec{j} + (-3\cdot 0 - 3\cdot(-1))\vec{k} = (0, -1, 3).$$

La ecuación del plano con vector normal $(0, -1, 3)$ que pasa por $A(1, -2, 0)$ es:

$$0(x-1) - 1(y-(-2)) + 3(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y - 3z + 2 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y - 3z + 2 = 0}$$

Andalucía, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 4

Considera el plano $\pi \equiv \mathbf{x - y + az = 0}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

a) **Halla a sabiendo que π es paralelo a r.**
b) **Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $\mathbf{P(1, 2, 3)}$.**

Solución:

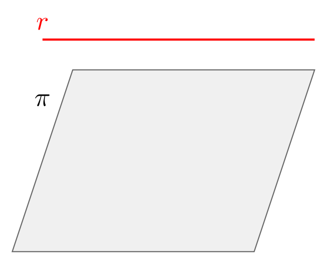
a) **Halla a sabiendo que π es paralelo a r.**

El plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ tiene como vector normal $\vec{n}_\pi = (1, -1, a)$. La recta r está dada por la intersección de dos planos. Su vector director $\vec{v}_r$ se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que la definen. Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (4, -3, 4)$ y $\vec{n}_2 = (3, -2, 1)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = ((-3)(1) - (4)(-2))\vec{i} - ((4)(1) - (4)(3))\vec{j} + ((4)(-2) - (-3)(3))\vec{k} = (5, 8, 1).$$

Para que el plano π sea paralelo a la recta r, el vector normal del plano $\vec{n}_\pi$ debe ser perpendicular al vector director de la recta $\vec{v}_r$. Esto significa que su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad (1)(5) + (-1)(8) + (a)(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

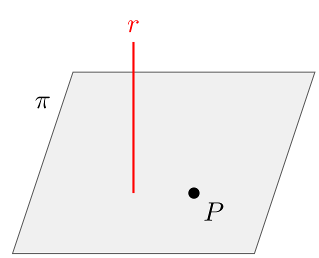


Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = 3}$$

b) **Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $\mathbf{P(1, 2, 3)}$.**

Un plano perpendicular a la recta r tendrá como vector normal el vector director de la recta $\vec{v}_r = (5, 8, 1)$.



La ecuación de un plano con vector normal (n_x, n_y, n_z) que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) es $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$. En este caso, el punto es $P(1, 2, 3)$ y el vector normal es $(5, 8, 1)$:

$$5(x-1) + 8(y-2) + 1(z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 5 + 8y - 16 + z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 8y + z - 24 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{5x + 8y + z - 24 = 0}$$

Ejercicio 8

Considera el plano $\pi \equiv \mathbf{x - y + z = 2}$ y la recta $\mathbf{r} \equiv \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y+1}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{z+2}}{\mathbf{-1}}$.

a) **Calcula la distancia entre r y π.**
b) **Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.**

Solución:

a) **Calcula la distancia entre r y π.**

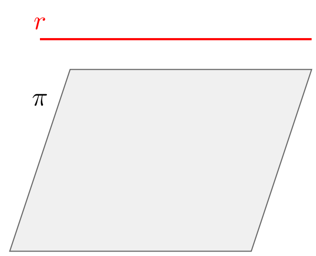
Primero, determinamos si la recta r y el plano π son paralelos. El vector normal del plano π es $\vec{n}_\pi = (1, -1, 1)$. El vector director de la recta r se obtiene de su forma continua: $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$. Calculamos el producto escalar del vector normal del plano y el vector director de la recta:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = (1)(2) + (-1)(1) + (1)(-1) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Como el producto escalar es cero, el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta, lo que significa que la recta es paralela al plano o está contenida en él. Para determinar si la recta está contenida en el plano, tomamos un punto de la recta. De la forma continua de r, un punto es $P_r(0, -1, -2)$. Sustituimos las coordenadas de este punto en la ecuación del plano:

$$(0) - (-1) + (-2) = 0 + 1 - 2 = -1.$$

Como $-1 \neq 2$, el punto P_r no pertenece al plano, por lo que la recta r es paralela al plano π y no está contenida en él.



La distancia entre una recta paralela a un plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Usamos la fórmula de la distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

La ecuación del plano es $x - y + z - 2 = 0$, y el punto es $P_r(0, -1, -2)$. Sustituimos los valores:

$$d = \frac{|(1)(0) + (-1)(-1) + (1)(-2) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|0 + 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Por lo tanto, la solución es:

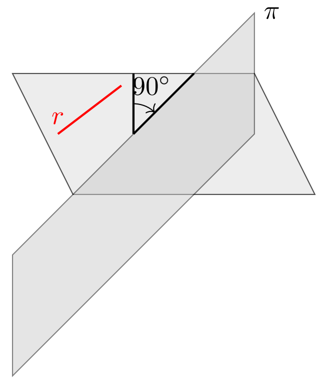
$$\boxed{\text{La distancia entre la recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ es } \sqrt{3} \text{ unidades}}$$

b) **Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.**

El plano que buscamos contiene a la recta r, por lo que su vector normal debe ser perpendicular al vector director de r, $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$. Además, este plano es perpendicular al plano π, por lo que su vector normal también debe ser perpendicular al vector normal de π, $\vec{n}_\pi = (1, -1, 1)$. El vector normal del plano buscado, $\vec{n}_{nuevo}$, será el producto vectorial de $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$:

$$\vec{n}_{nuevo} = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = ((1)(1) - (-1)(-1))\vec{i} - ((2)(1) - (-1)(1))\vec{j} + ((2)(-1) - (1)(1))\vec{k}$$
$$= (0, -3, -3).$$

Podemos tomar como vector normal $\vec{n} = (0, 1, 1)$ (dividiendo por -3). El plano contiene a la recta r, por lo que pasa por el punto $P_r(0, -1, -2)$.



La ecuación del plano con vector normal $(0, 1, 1)$ que pasa por $(0, -1, -2)$ es:

$$0(x - 0) + 1(y - (-1)) + 1(z - (-2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + (y + 1) + (z + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + z + 3 = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y + z + 3 = 0}$$