Ejercicios resueltos de Selectividad

Física. Ondas

mentoor.es

Índice de contenido

Madrid, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Por una cuerda tensa dispuesta a lo largo del eje x se propaga, a una velocidad de 200 m s^{-1} en el sentido positivo del eje, una onda armónica de 0,4 m de longitud de onda. En el instante inicial y en el origen de coordenadas, la elongación es positiva y también lo es la velocidad de oscilación, que equivale a la mitad de su valor máximo. Obtenga:

a) **El número de onda y la frecuencia de la onda.**
b) **La fase inicial de la onda.**

Solución:

a) **El número de onda y la frecuencia de la onda.**

Para calcular el número de onda, utilizamos la longitud de onda dada con la siguiente fórmula:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \,\text{rad/m}.$$

La frecuencia de la onda se obtiene mediante la relación entre la velocidad de propagación y la longitud de onda:

$$f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{200}{0.4} = 500\,\text{Hz}.$$

Por lo tanto, el número de onda es 5π rad/m y la frecuencia de onda es 500 Hz.

b) **La fase inicial de la onda.**

Para encontrar la fase inicial, consideramos que la velocidad de oscilación es positiva y equivale a la mitad de su valor máximo en el origen de coordenadas en el instante inicial. Asumiendo que la elongación se describe mediante la función coseno, se tiene que

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi_0).$$

Al derivar esta función respecto al tiempo, obtenemos la expresión para la velocidad de oscilación:

$$v(x,t) = -\omega A \sin(\omega t - kx + \phi_0) = -v_{\max}\sin(\omega t - kx + \phi_0).$$

Aplicando las condiciones para el origen de coordenadas ($x = 0$) y el instante inicial ($t = 0$), con la información proporcionada:

$$v(0,0) = -v_{\max}\sin(\phi_0) = \frac{1}{2}v_{\max} \quad \Rightarrow \quad \sin(\phi_0) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = -\frac{\pi}{6}\,\text{rad} \quad o \quad \phi_0 = \frac{7\pi}{6}\,\text{rad}.$$

Además, la elongación en el origen se describe como

$$y(0,0) = A\cos(\phi_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = -\frac{\pi}{6}\,\text{rad}.$$

Por lo tanto, la fase inicial de la onda si la elongación se describe mediante la función coseno es $-\frac{\pi}{6}$ rad.

Si se utiliza la función seno para representar la elongación, se tendría que

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi_0).$$

Derivando respecto al tiempo, resulta que la velocidad de oscilación es

$$v(x,t) = \omega A \cos(\omega t - kx + \phi_0) = v_{\max} \cos(\omega t - kx + \phi_0).$$

Aplicando de nuevo las condiciones para el origen de coordenadas ($x = 0$) y el instante inicial ($t = 0$):

$$v(0,0) = v_{\max} \cos(\phi_0) = \frac{1}{2} v_{\max} \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi_0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad o \quad \phi_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

Como la elongación en el origen se describe como

$$y(0,0) = A \cos(\phi_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

Por lo tanto, la fase inicial de la onda si la elongación se describe mediante la función seno es $\frac{\pi}{3}$ rad.

Pregunta 2. Opción B

El campanario de una iglesia medieval, situado a 35 m de altura, consta de 4 campanas. Cada una de ellas emite 10 mW de potencia sonora tras ser golpeada. Por otro lado, el límite de contaminación acústica en ese municipio está establecido en 55 dB.

a) **Determine el nivel de intensidad sonora que percibe una persona parada al pie de la torre del campanario cuando se toca una sola campana.**
b) **¿Podrán tocar las cuatro campanas a la vez si no se quiere sobrepasar el límite de contaminación acústica y la población está situada a más de 100 metros de la iglesia?**

Dato: Intensidad umbral, $\mathbf{I_0 = 1 \cdot 10^{-12}}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **Determine el nivel de intensidad sonora que percibe una persona parada al pie de la torre del campanario cuando se toca una sola campana.**

La intensidad del sonido a una distancia de 35 m se obtiene mediante la fórmula:

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 35^2} = 6{,}5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

El nivel de intensidad sonora se calcula como:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{6{,}5 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-12}} \right) = 58{,}1\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora que percibe una persona parada al pie de la torre del campanario cuando se toca una sola campana es 58,1 dB.

b) **¿Podrán tocar las cuatro campanas a la vez si no se quiere sobrepasar el límite de contaminación acústica y la población está situada a más de 100 metros de la iglesia?**

Usando el Teorema de Pitágoras, se puede obtener que la distancia mínima entre el campanario y la población, teniendo en cuenta la altura H de 35 m y la distancia horizontal D de 100 m, es

$$d = \sqrt{H^2 + D^2} = \sqrt{35^2 + 100^2} = 105{,}95\,\mathrm{m}.$$

A esta distancia, la intensidad total cuando las cuatro campanas suenan simultáneamente es:

$$I = \frac{4P}{4\pi d^2} = \frac{P}{\pi d^2} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 35^2} = 2{,}84 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

El nivel de intensidad sonora correspondiente es:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{2{,}84 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-12}} \right) = 54{,}5\,\mathrm{dB}.$$

Dado que este valor es inferior al límite de 55 dB, no se excedería la contaminación acústica permitida.

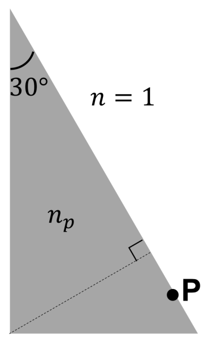
Por ende, se pueden tocar las cuatro campanas a la vez.

Pregunta 4. Opción B

El prisma de sección triangular mostrado en la figura está hecho de un material con índice de refracción $\mathbf{n_p}$. Se halla inmerso en aire, con índice de refracción igual a 1.

a) **Determine el índice de refracción $\mathbf{n_p}$ si se sabe que el ángulo límite para la reflexión total en el paso del prisma al aire vale $\mathbf{45,58°}$.**

b) **Considere un rayo de luz que incide perpendicularmente sobre la superficie del prisma desde el aire, en el punto P. Elabore un diagrama mostrando su recorrido en el interior del prisma hasta que vuelve a emerger al aire, y calcule el ángulo de refracción a la salida.**



Solución:

a) **Determine el índice de refracción $\mathbf{n_p}$ si se sabe que el ángulo límite para la reflexión total en el paso del prisma al aire vale $\mathbf{45,58°}$.**

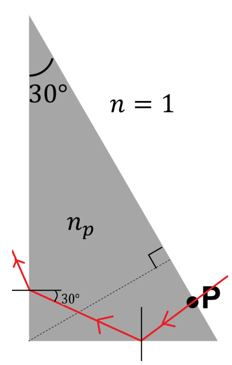
El ángulo límite para la reflexión total se define como el ángulo de incidencia en la cara interna del prisma en el cual el ángulo de refracción al aire alcanza 90°. Utilizando la ley de Snell bajo estas condiciones, se establece la siguiente relación:

$$n_p \cdot \sin(45,58°) = n \cdot \sin(90°) \quad \Rightarrow \quad n_p = \frac{n \cdot \sin(90°)}{\sin(45,58°)} = \frac{1 \cdot \sin(90°)}{\sin(45,58°)} = 1,4.$$

Por lo tanto, en las condiciones del apartado, el índice de refracción es 1,4.

b) **Considere un rayo de luz que incide perpendicularmente sobre la superficie del prisma desde el aire, en el punto P. Elabore un diagrama mostrando su recorrido en el interior del prisma hasta que vuelve a emerger al aire, y calcule el ángulo de refracción a la salida.**

El diagrama pedido se encuentra en la siguiente figura:



El rayo que incide de manera normal en el punto P continúa su trayecto sin sufrir desviación hasta llegar a la cara opuesta, que forma un ángulo de 30°. En este punto, su ángulo de incidencia es 60°, el cual excede el ángulo límite mencionado en el enunciado. De esta forma, se produce una reflexión total y el rayo impacta en la cara vertical del prisma con un ángulo de incidencia de 30°. Utilizando la ley de Snell, podemos determinar el ángulo de refracción θ_r al salir del prisma:

$$n_p \cdot \sin(30^\circ) = n \cdot \sin(\theta_r) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_r) = \frac{n_p}{2n} = \frac{1,4}{2 \cdot 1} = 0,7 \quad \Rightarrow \quad \theta_r = \arcsin(0,7) = 44,43^\circ.$$

Por ende, el ángulo de refracción al salir del prisma es $44,43^\circ$.

Madrid, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Dos focos sonoros puntuales $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ están situados en las posiciones $(0,3)$ m y $(4,0)$ m del plano xy. Cuando emiten por separado, el nivel de intensidad sonora debido al foco 1 a una distancia de 2 m de este es $\beta_1 = 55$ dB, mientras que el nivel de intensidad sonora debido al foco 2 es $\beta_2 = 65$ dB a 2 m de este. Halle:

a) **La intensidad y el nivel de intensidad sonora en el origen cuando ambos focos emiten simultáneamente.**

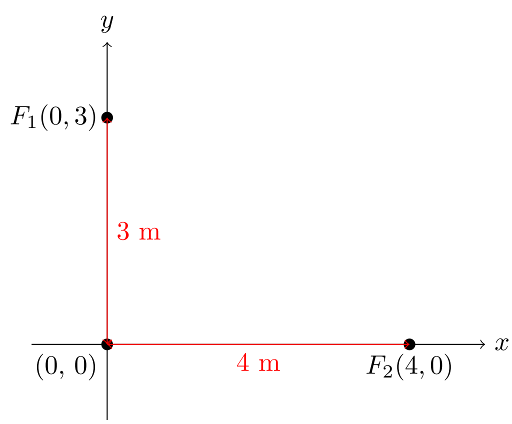
b) **La distancia al foco $\mathbf{F_1}$ del punto situado sobre el segmento que une ambos focos en el que las intensidades generadas por ambos focos son iguales.**

Dato: Intensidad umbral, $\mathbf{I_0 = 1 \cdot 10^{-12}}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **La intensidad y el nivel de intensidad sonora en el origen cuando ambos focos emiten simultáneamente.**

Primero, comenzamos representado la situación descrita por el problema:



Ahora, determinemos la potencia de cada uno de los focos sonoros. Para ello, calculamos la intensidad en una distancia de 2 metros para ambos focos.

Para el foco 1:

$$I_1(2\,\mathrm{m}) = I_0 \cdot 10^{\beta_1/10} = 1 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{55/10} = 3,16 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Para el foco 2:

$$I_2(2\,\mathrm{m}) = I_0 \cdot 10^{\beta_2/10} = 1 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{65/10} = 3,16 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Con estas intensidades, podemos calcular la potencia de cada uno de los focos:

$$P_1 = 4\pi(2)^2 I_1 = 1,59 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W} \quad \text{y} \quad P_2 = 4\pi(2)^2 I_2 = 1,59 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W}.$$

A continuación, calculemos las intensidades de los focos en el origen. Para el foco 1, ubicado a 3 metros del origen:

$$I_1(3\,\mathrm{m}) = \frac{P_1}{4\pi(3)^2} = \frac{1,59 \cdot 10^{-5}}{4\pi(3)^2} = 1,41 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Para el foco 2, situado a 4 metros:

$$I_2(4\,\mathrm{m}) = \frac{P_2}{4\pi(4)^2} = \frac{1,59 \cdot 10^{-4}}{4\pi(4)^2} = 7,91 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

La intensidad total en el origen será la suma de ambas:

$$I_{total} = I_1 + I_2 = 1,41 \cdot 10^{-7} + 7,91 \cdot 10^{-7} = 9,31 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

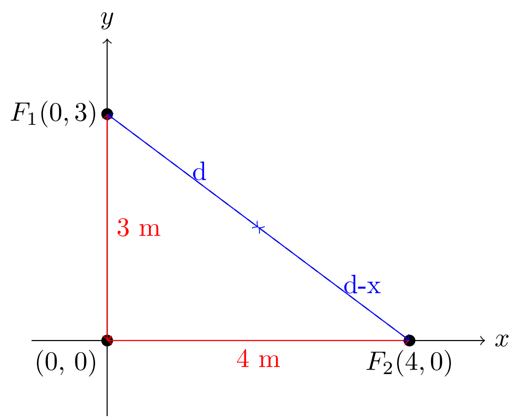
Finalmente, el nivel de intensidad sonora combinado se calcula como:

$$\beta_{total} = 10 \log\left(\frac{I_{total}}{I_0}\right) = 59,62\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, la intensidad pedida es $\mathbf{9,31 \cdot 10^{-7}}$ y el nivel de intensidad sonora es $\mathbf{59,62}$.

b) La distancia al foco $\mathbf{F_1}$ del punto situado sobre el segmento que une ambos focos en el que las intensidades generadas por ambos focos son iguales.

Comenzamos este apartado añadiendo el segmento descrito por el enunciado al dibujo anterior:



Para encontrar el punto donde las intensidades de los focos son iguales, supongamos que el punto se encuentra a una distancia x del foco F_1 y a $d - x$ del foco F_2, donde d se obtiene usando el Teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ metros. Igualamos las intensidades:

$$I_1(x) = I_2(d - x).$$

Sustituyendo las expresiones de las intensidades:

$$\frac{P_1}{4\pi x^2} = \frac{P_2}{4\pi(5 - x)^2}.$$

Simplificando:

$$9x^2 + 10x - 25 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática completa:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{1000}}{18} = \begin{cases} -2,31\,\mathrm{m}, \\ +1,2\,\mathrm{m}. \end{cases}$$

Dado que buscamos el punto en el segmento que une los focos, la única solución válida es la positiva (estamos trabajando en el primer cuadrante). Por lo tanto, la distancia desde el foco F_1 es:

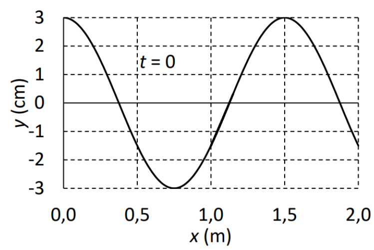
$$x = 1,2\,\mathrm{m}.$$

Por ende, la distancia al foco $\mathbf{F_1}$ del punto situado sobre el segmento que une ambos focos en el que las intensidades generadas por ambos focos son iguales es 1,2 m.

Pregunta 2. Opción B

En la figura se representa la elongación de una onda transversal en el instante $t = 0$ en función de la posición x. La onda se propaga en el sentido negativo del eje x. Sabiendo que el tiempo que tarda el punto situado en $x = 0$ desde que sale de su posición inicial ($t = 0$) hasta que vuelve a la misma es de 0,5 s, determine:

a) **La longitud de onda y la velocidad de propagación.**
b) **La expresión matemática de la onda.**



Solución:

a) **La longitud de onda y la velocidad de propagación.**

Según se observa en el esquema, la longitud de onda es de $1,5\,\text{m}$. Como se indica que el intervalo entre dos oscilaciones consecutivas es de $0,5\,\text{s}$, esto corresponde al período $T = 0,5\,\text{s}$. A partir de estos datos, la velocidad de propagación de la onda se calcula mediante la relación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1,5\,\text{m}}{0,5\,\text{s}} = 3\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda es 1,5 m y la velocidad de propagación es 3 m/s.

b) **La expresión matemática de la onda.**

La ecuación matemática de la onda viene dada por la forma:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t + kx + \varphi).$$

De la figura se puede determinar que la amplitud es $A = 3\,\text{cm}$. La frecuencia angular ω y el número de onda k se calculan como sigue:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi\,\text{rad/s} \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1,5} = \frac{4\pi}{3}\,\text{rad/m}.$$

Para encontrar la fase inicial φ, utilizamos la condición inicial $y(0,0) = A$, lo que nos lleva a:

$$y(0,0) = A\sin(\varphi) = A \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}.$$

Así, la ecuación completa de la onda será:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 3\sin\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)}\ \textbf{cm},$$

donde x está en metros y t en segundos. Si en lugar de la función seno se utiliza el coseno,

la expresión de la onda se escribe como:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 3\cos\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)\ \mathrm{cm}}$$

donde nuevamente $\boldsymbol{x}$ está en metros y $\boldsymbol{t}$ en segundos, puesto que en ese caso

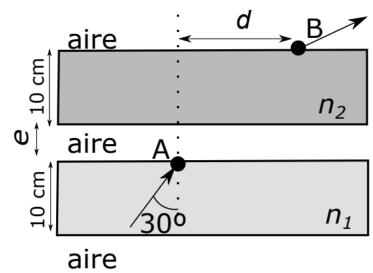
$$y(0,0) = A\cos(\varphi) = A \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0\,\mathrm{rad}.$$

Pregunta 4. Opción A

Dos cristales de grosor 10 cm e índices de refracción $n_1 = 1,40$ y $n_2 = 1,50$, están separados por una capa de aire de espesor desconocido, e. Un rayo de luz incide por el punto A desde el cristal 1 hacia el cristal 2 atravesando la capa de aire que los separa con un ángulo de incidencia de 30° y saliendo por el punto B tal y como se indica en la figura. Si la distancia horizontal entre los puntos A y B es $d = 9,2$ cm, determine:

a) **El espesor, e, de la capa de aire situada entre ambos cristales.**
b) **El tiempo que tarda el rayo de luz en llegar desde el punto A hasta el punto B.**

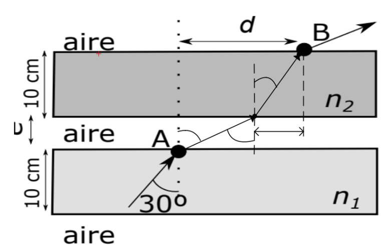
Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Índice de refracción del aire, $n = 1$.



Solución:

a) **El espesor, e, de la capa de aire situada entre ambos cristales.**

Comenzamos realizando un esquema que ilustre los ángulos de refracción y la trayectoria del rayo:



Nótese que los ángulos señalados entre los dos cristales en la figura anterior son todos iguales y serán denotados como θ, mientras que el el ángulo en la cara interna del segundo cristal es θ'. Por otra parte, la distancia horizontal recorrida por el rayo de luz en el segundo cristal es d'.

Aplicamos la ley de Snell en el punto A y en la interface entre el aire y el segundo medio para determinar los ángulos de refracción:

$$n_1 \sin(30°) = 1 \cdot \sin\theta \quad \Rightarrow \quad 1.4 \sin(30°) = 1 \cdot \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = 44.43°,$$
$$1 \cdot \sin\theta = n_2 \sin(\theta') \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \sin\theta = 1.5 \sin(\theta') \quad \Rightarrow \quad \theta' = 27.82°.$$

Con el ángulo θ' calculamos la distancia horizontal que el rayo recorre en el segundo medio:

$$d' = 10 \tan(\theta') = 10 \tan(27.82°) = 5.28\,\text{cm}.$$

Por lo tanto, el desplazamiento horizontal en el tramo de aire es:

$$d - d' = 9.2 - 5.28 = 3.92\,\text{cm}.$$

Con este valor, calculamos el grosor de la lámina de aire:

$$e = \frac{3.92}{\tan\theta} = 4\,\text{cm}.$$

Por lo tanto, el espesor es 4 cm.

b) **El tiempo que tarda el rayo de luz en llegar desde el punto A hasta el punto B.**

Para el recorrido del tramo AB, el rayo transita por un espacio s_1 en el aire y un espacio s_2 en el medio 2. Podemos calcular estos espacios utilizando los ángulos previamente determinados, así como los tiempos t_1 y t_2 que el rayo tarda en recorrer cada tramo:

$$s_1 = \frac{4}{\cos\theta} = \frac{4}{\cos 44.43°} = 5.60\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{s_1}{c} = 1.87\cdot 10^{-10}\,\text{s},$$

$$s_2 = \frac{10}{\cos\theta'} = \frac{10}{\cos 27.82°} = 11.31\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_2 n_2}{c} = 5.65\cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Finalmente, el tiempo total T es:

$$T = t_1 + t_2 = 1.87\cdot 10^{-10} + 5.65\cdot 10^{-10} = 7.52\cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Por ende, el tiempo que tarda el rayo de luz en llegar desde el punto A hasta el punto B es $\mathbf{7.52\cdot 10^{-10}}$ s.

Madrid, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 2. Opción A

A lo largo de una cuerda se propaga en el sentido $+x$ una onda transversal. El periodo de oscilación y la elongación máxima de un punto cualquiera de la cuerda son, respectivamente, $4 \cdot 10^{-3}$ s y 3 mm. La distancia mínima entre dos puntos cualesquiera de la cuerda que oscilan en fase es de 0,25 metros. En el instante $2 \cdot 10^{-3}$ s la elongación de un punto situado a $+0,5$ m del origen de coordenadas es de $-1,5$ mm y su velocidad de oscilación en ese instante es positiva.

a) **Halle la frecuencia angular y la velocidad de propagación de la onda.**
b) **Obtenga la expresión matemática que describe a la onda.**

Solución:

a) **Halle la frecuencia angular y la velocidad de propagación de la onda.**

La frecuencia angular ω se puede obtener a partir del periodo T con la fórmula:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Sustituyendo el valor del periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^3 \,\text{rad/s}.$$

Para calcular la velocidad de propagación v, utilizamos la relación entre la velocidad, la longitud de onda λ y el periodo T:

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Dado que la distancia mínima entre puntos en fase es la longitud de onda, podemos deducir que $\lambda = 0,25\,\text{m}$. Entonces, la velocidad de propagación es:

$$v = \frac{0,25}{4 \cdot 10^{-3}} = 62,5\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la frecuencia angular es $\frac{\pi}{2} \cdot 10^3$ rad/s y la velocidad de propagación de la onda es $62,5$ m/s.

b) **Obtenga la expresión matemática que describe a la onda.**

Sabemos que la ecuación general de una onda tiene la forma:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t \pm kx + \varphi_0),$$

donde A es la amplitud de la onda, ω es la frecuencia angular (ya obtenida), k es el número de onda y φ_0 es la fase inicial.

La amplitud A ya la conocemos:

$$A = 3\,\text{mm} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{m}.$$

El número de onda k se calcula como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,25} = 8\pi\,\text{rad/m}.$$

Nótese que como la onda se propaga en el sentido positivo de x, el signo en la ecuación será negativo.

Ahora tenemos la ecuación parcial de la onda:

$$y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^3 t - 8\pi x + \varphi_0\right).$$

Para determinar la fase inicial φ_0, utilizamos el dato de que en el instante $t = 2 \cdot 10^{-3}$ s y para $x = 0,5$ m, la elongación es $y = -1,5\,\text{mm} = -1,5 \cdot 10^{-3}$ m. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la onda:

$$-1,5 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} - 8\pi \cdot 0,5 + \varphi_0\right).$$

Esto simplifica a:

$$-\frac{1}{2} = \sin(\pi - 4\pi + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = \sin(\pi + \varphi_0).$$

De aquí obtenemos dos posibles soluciones para φ_0:

$$\pi + \varphi_0 = -\frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad \pi + \varphi_0 = \frac{7\pi}{6}.$$

Para determinar cuál de las dos es correcta, utilizamos el dato de que la velocidad en $x = 0,5$ m y $t = 2 \cdot 10^{-3}$ s es positiva. La velocidad de oscilación de la onda está dada por:

$$v(x,t) = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Sustituyendo los valores:

$$v(0,5, 2 \cdot 10^3) = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 10^3 \cos(\pi + \varphi_0).$$

Para que la velocidad sea positiva, necesitamos que $\pi + \varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$, lo que nos da:

$$\varphi_0 = -\frac{7\pi}{6}.$$

Finalmente, la expresión matemática de la onda es:

$$y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^3 t - 8\pi x - \frac{7\pi}{6}\right) \text{ m}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la onda es $\boldsymbol{y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10^3 t - 8\pi x - \frac{7\pi}{6}\right)}$ m.

En el caso de haber escogido la expresión del coseno, la ecuación que describiría la onda se obtiene de manera similar. **En ese caso, la expresión matemática de la onda es:**

$$\boldsymbol{y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \cos\left(500\pi t - 8\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m.}}$$

Pregunta 2. Opción B

Un observador que se encuentra a 3 m de una fuente puntual sonora que emite en todas direcciones mide un nivel de intensidad sonora de 53 dB. Halle:

a) **La intensidad sonora recibida por el observador y la potencia con la que emite la fuente puntual.**
b) **La distancia a la que debe situarse el observador para que el nivel de intensidad sonora percibido se reduzca a una cuarta parte.**

Dato: Intensidad umbral, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **La intensidad sonora recibida por el observador y la potencia con la que emite la fuente puntual.**

La relación entre la intensidad sonora (I) y el nivel de intensidad sonora (β) en decibelios está dada por la fórmula:

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \Rightarrow \quad I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Sustituyendo los valores dados:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{53/10} = 1,99 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Para calcular la potencia emitida por la fuente, utilizamos la relación entre la intensidad y la potencia para una fuente puntual que emite en todas direcciones (esféricamente):

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad P = I \cdot 4\pi r^2,$$

donde $I = 1,99 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}$ es la intensidad sonora y $r = 3\,\mathrm{m}$ es la distancia del observador a la fuente. Sustituyendo los valores:

$$P = 1,99 \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 3^2 = 2,25 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W}.$$

Por lo tanto, la intensidad sonora recibida por el observador es de aproximadamente $1,99 \cdot 10^{-7}$ W/m^2 y la potencia emitida por la fuente es de aproximadamente $2,25 \cdot 10^{-5}$ W.

b) **La distancia a la que debe situarse el observador para que el nivel de intensidad sonora percibido se reduzca a una cuarta parte.**

Primero, determinamos la intensidad sonora que corresponde a una cuarta parte del nivel de intensidad sonora de 53 dB. Recordemos que el nivel de intensidad sonora en decibelios se relaciona logarítmicamente con la intensidad:

$$\beta' = \frac{\beta}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta' = \frac{53}{4} = 13,25\,\mathrm{dB}.$$

Ahora, calculamos la nueva intensidad sonora I' utilizando la fórmula de intensidad en función del nivel de intensidad sonora:

$$I' = I_0 \cdot 10^{\beta'/10} \quad \Rightarrow \quad I' = 10^{-12} \cdot 10^{13,25/10} = 2,11 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}.$$

La nueva intensidad sonora que corresponde a una cuarta parte del nivel de intensidad sonora original es aproximadamente $2,11 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}$. Ahora bien, para encontrar la distancia r' a la que el observador debe situarse para que se perciba esta nueva intensidad, utilizamos nuevamente la relación entre la intensidad y la potencia:

$$I' = \frac{P}{4\pi r'^2} \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{\frac{P}{4\pi I'}} \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{\frac{2,25 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 2,11 \cdot 10^{-11}}} = 291,3\,\text{m}.$$

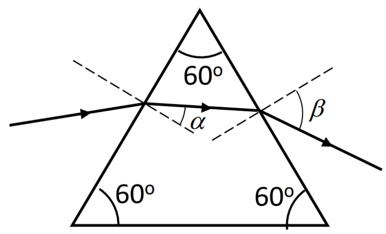
Por lo tanto, la distancia r' a la que el observador debe situarse para que el nivel de intensidad sonora percibido se reduzca a una cuarta parte es de aproximadamente 291,3 m.

Pregunta 4. Opción B

Un rayo de luz incide sobre la cara izquierda del prisma de la figura, el cual está construido con un material cuyo índice de refracción vale 1,66.

a) **Determine los ángulos α y β de la trayectoria que sigue el rayo de luz que entra en el prisma desde el aire con un ángulo de incidencia de 50º.**
b) **Calcule el ángulo límite con el que deberá incidir desde el aire el rayo de luz para que este no emerja del prisma.**

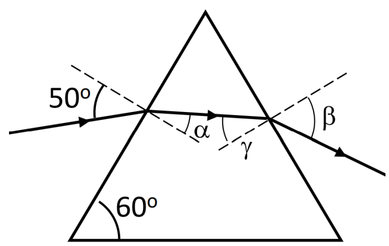
Dato: Índice de refracción del aire, $n = 1$.



Solución:

a) **Determine los ángulos α y β de la trayectoria que sigue el rayo de luz que entra en el prisma desde el aire con un ángulo de incidencia de 50º.**

Representemos en primer lugar todos los ángulos implicados en esta primera parte del ejercicio:



Aplicamos la Ley de Snell en la cara de entrada del prisma:

$$n_0 \sin \alpha_0 = n \sin \alpha.$$

Sustituyendo los valores dados, donde $n_0 = 1$ (índice de refracción del aire), $\alpha_0 = 50°$, y $n = 1,66$ (índice de refracción del prisma):

$$1 \cdot \sin(50°) = 1,66 \cdot \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{\sin(50°)}{1,66} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = 0,461 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 27,48°.$$

Ahora, para calcular el ángulo β, utilizamos la geometría del prisma. Sabemos que el ángulo entre las caras del prisma es:

$$\gamma = 60° - \alpha = 60° - 27,48° = 32,52°.$$

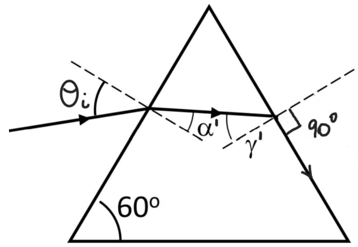
Aplicando la Ley de Snell en la cara de salida del haz de luz:

$$n \sin \alpha = n_0 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad 1,66 \cdot \sin(32,52°) = 1 \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) = 0,892 \quad \Rightarrow \quad \beta = 63,18°.$$

Por lo tanto, los ángulos son $\boldsymbol{\alpha = 27,48°}$ y $\boldsymbol{\beta = 63,18°}$.

b) **Calcule el ángulo límite con el que deberá incidir desde el aire el rayo de luz para que este no emerja del prisma.**

La situación es ahora:



El rayo de luz no emergerá del prisma cuando el ángulo de refracción β sea igual a 90°. Aplicamos la Ley de Snell para este caso:

$$n\sin(\gamma') = n_0 \sin(90°) \Rightarrow 1,66{\cdot}\sin(\gamma') = 1{\cdot}\sin(90°) \quad \Rightarrow \quad \sin(\gamma') = \frac{1}{1,66} = 0,602 \quad \Rightarrow \quad \gamma' = 37,04°.$$

Además, se observa en el dibujo que $\alpha' = 60° - \gamma' = 60° - 37,04° = 22,96°$. Finalmente, aplicando la Ley de Snell a la cara de entrada del prisma, podemos calcular el ángulo de incidencia θ_i necesario para que el rayo no emerja:

$$n_0 \sin(\theta_i) = n\sin(\alpha') \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_i) = 1,66 \cdot \sin(22,96°) = 0,648 \quad \Rightarrow \quad \theta_i = 40,39°.$$

Por lo tanto, el ángulo límite es $\mathbf{40,39°}$.

Madrid, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Por una cuerda dispuesta a lo largo del eje x viaja una onda armónica transversal con velocidad de propagación $\vec{v} = -400\,\vec{i}$ m s^{-1}. La onda produce en la cuerda una aceleración máxima de $2 \cdot 10^4$ m s^{-2}. En un instante cualquiera, los puntos con elongación nula se repiten cada 0,4 m a lo largo del eje x.

a) **Determine la frecuencia y la amplitud de la onda.**
b) **Si en el instante inicial y en el origen de coordenadas la elongación es +1 mm y la velocidad es positiva, calcule la elongación en $x = 1,2$ m para $t = 2$ s.**

Solución:

a) **Determine la frecuencia y la amplitud de la onda.**

Dado que la distancia entre los puntos de elongación nula es $0,4$ m, sabemos que la mitad de la longitud de onda corresponde a este valor, por lo que

$$\lambda = 2 \cdot 0,4\,\text{m} = 0,8\,\text{m}.$$

Utilizando la relación entre la velocidad de propagación de la onda, la longitud de onda y la frecuencia:

$$v = \lambda f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{400}{0,8} = 500\,\text{Hz}.$$

Para hallar la amplitud, usamos la ecuación de la aceleración máxima, que es proporcional al cuadrado de la frecuencia angular:

$$a_{\text{máx}} = A\omega^2.$$

Sabemos que la frecuencia angular está relacionada con la frecuencia por $\omega = 2\pi f$. Calculamos primero ω:

$$\omega = 2\pi \cdot 500 = 1000\pi\,\text{rad/s}.$$

Ahora, despejamos la amplitud A:

$$A = \frac{a_{\text{máx}}}{\omega^2} = \frac{2 \cdot 10^4}{(1000\pi)^2} = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 2\,\text{mm}.$$

Por lo tanto, la frecuencia es 500 Hz y la amplitud de onda es 2 mm.

b) **Si en el instante inicial y en el origen de coordenadas la elongación es +1 mm y la velocidad es positiva, calcule la elongación en $x = 1,2$ m para $t = 2$ s.**

Dado que la onda se propaga en el sentido negativo del eje x, la ecuación que describe la onda es:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \phi_0),$$

donde k es el número de onda, que se calcula como

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,8} = 2,5\pi\,\text{rad/m}.$$

De esta forma, sustituyendo también la amplitud en la ecuación de la onda:

$$y(x,t) = 2\cos(1000\pi t + 2,5\pi x + \phi_0)\,[\text{mm}].$$

La fase inicial ϕ_0 se determina usando las condiciones iniciales. En $t = 0$ y $x = 0$, la elongación es $y(0,0) = +1\,\text{mm}$ y la velocidad es positiva, lo que implica que el coseno debe estar en un punto donde decrece:

$$y(0,0) = 2\cos(\phi_0) = 1\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi_0) = \frac{1}{2}.$$

Esto nos da:

$$\phi_0 = \frac{\pi}{3}\,\text{rad} \quad \text{o} \quad \phi_0 = -\frac{\pi}{3}.$$

Sabemos que la velocidad es positiva en el instante inicial y estamos trabajando con una función coseno, por lo que podemos verificar cuál es la fase inicial calculando la velocidad de la onda e imponiendo que sea positiva. La velocidad se obtiene derivando la expresión de la elongación con respecto al tiempo:

$$v(t,x) = \frac{dy(t,x)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + kx + \phi_0).$$

En el instante inicial ($t = 0\,\text{s}, x = 0\,\text{m}$), la velocidad es:

$$v(0,0) = -A\omega\sin(\phi_0) = -2000\pi\sin(\phi_0).$$

Para que la velocidad sea positiva, debe cumplirse que $\phi_0 = -\frac{\pi}{3}$, pues

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad v > 0.$$

Esto indica que $\phi_0 = -\frac{\pi}{3}$ es la fase correcta.
Por lo tanto, la expresión general de la onda se escribe como:

$$y(x,t) = 2\cos(1000\pi t + 2,5\pi x - \frac{\pi}{3})\,[\text{mm}].$$

Ahora, para calcular la elongación en $x = 1,2\,\text{m}$ y $t = 2\,\text{s}$, sustituimos estos valores en la ecuación de la onda:

$$y(1,2\,\text{m}, 2\,\text{s}) = 2\cos(1000\pi \cdot 2 + 2,5\pi \cdot 1,2 - \frac{\pi}{3}) = -1\,\text{mm}.$$

Por lo tanto, la elongación en $x = 1,2\,\text{m}$ para $t = 2\,\text{s}$ es -1 mm.

Pregunta 2. Opción B

Dos focos sonoros puntuales F_1 y F_2 se encuentran respectivamente situados en los puntos $(-6, 0)$ m y $(6, 0)$ m del plano xy. Se sabe que en el punto $(2, 0)$ m la intensidad debida a cada foco vale lo mismo, y que en el punto $(0, 2)$ m el nivel de intensidad sonora es de 80 dB. Determine:

a) **El cociente entre la potencia del foco F_1 y la del foco F_2.**
b) **La potencia del foco F_1 y la intensidad que se registraría en el punto $(0, 8)$ m si solamente se recibiesen ondas del foco F_1.**

Dato: Intensidad umbral, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **El cociente entre la potencia del foco F_1 y la del foco F_2.**

La potencia de una onda se define como $P = I \cdot s$, donde s es el área. Por lo tanto, al analizar el cociente de potencias, tenemos:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{s_1}{s_2}.$$

Dado que el área s está relacionada con la distancia como $s = 4\pi d^2$, y considerando que las intensidades son iguales en el punto donde se miden, podemos escribir:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = 4.$$

Por lo tanto, el cociente entre la potencia del foco F_1 y la del foco F_2 es 4.

b) **La potencia del foco F_1 y la intensidad que se registraría en el punto $(0, 8)$ m si solamente se recibiesen ondas del foco F_1.**

Para determinar la potencia del foco F_1, partimos del dato de que en el punto $(0, 2)$ m la intensidad sonora es de 80 dB. Esta intensidad se relaciona con la intensidad I_T mediante la fórmula:

$$\beta = 10 \log \frac{I_T}{I_0} \quad \Rightarrow \quad 80 = 10 \log \frac{I_T}{I_0} \quad \Rightarrow \quad I_T = 10^8 I_0.$$

Sustituyendo $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}:

$$I_T = 10^8 \cdot 10^{-12} = 10^{-4}\,\text{W/m}^2.$$

Esta intensidad total es la suma de las intensidades de ambos focos:

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{P_1}{s_1} + \frac{P_2}{s_2} = \frac{P_1}{4\pi d_1^2} + \frac{P_2}{4\pi d_2^2}.$$

Dado que $P_2 = \frac{P_1}{4}$ y que en este caso $d_1^2 = d_2^2 = d^2 = 6^2 + 2^2 = 40$, la expresión anterior se transforma en:

$$I_T = \frac{P_1}{4\pi d^2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{P_1}{4\pi d^2} \cdot \frac{5}{4}.$$

De aquí despejamos P_1:

$$P_1 = \frac{16\pi d^2}{5} \cdot I_T = \frac{16\pi \cdot 40}{5} \cdot 10^{-4} = 128\pi \cdot 10^{-4} = 4,02 \cdot 10^{-2}\,\text{W}.$$

Una vez obtenida la potencia de F_1, podemos calcular la intensidad que este foco produciría en el punto $(0,8)$ m utilizando la fórmula:

$$P = I \cdot s \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{4\pi d^2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$I = \frac{128\pi \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot (6^2 + 2^2)} = \frac{4,02 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot (6^2 + 2^2)} = 3,2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W/m^2}.$$

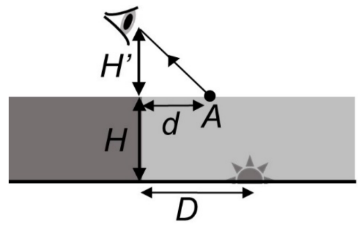
Por lo tanto, la potencia del foco $\boldsymbol{F_1}$ es $\mathbf{4,02 \cdot 10^{-2}\,W}$ y la intensidad que se registraría en el punto $\mathbf{(0,8)}$ m si solamente se recibiesen ondas del foco $\boldsymbol{F_1}$ es $\mathbf{3,2 \cdot 10^{-5}\,W/m^2}$.

Pregunta 4. Opción A

Un observador está situado al borde de un estanque de profundidad $H = 2\,\mathrm{m}$. Su visual está a una altura $H' = 1,6\,\mathrm{m}$ sobre la superficie del agua. En el fondo del estanque hay un foco puntual de luz. El observador lo ve cuando mira hacia el punto A de la superficie a una distancia $d = 1,2\,\mathrm{m}$ del borde (véase la figura). Calcule:

a) **El índice de refracción del agua del estanque si la longitud de onda de la luz del foco vale 375 nm en ella y 500 nm en el aire.**
b) **La distancia D del foco a la pared del estanque.**

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Índice de refracción del aire, $n = 1$.



Solución:

a) **El índice de refracción del agua del estanque si la longitud de onda de la luz del foco vale 375 nm en ella y 500 nm en el aire.**

Para determinar el índice de refracción del agua, debemos recordar que la frecuencia de la luz permanece constante al atravesar diferentes medios. Podemos expresar esta relación como

$$f = \frac{c}{n_{\text{aire}}\lambda_{\text{aire}}} = \frac{c}{n_{\text{agua}}\lambda_{\text{agua}}}.$$

De aquí, se deduce que

$$\frac{n_{\text{agua}}}{n_{\text{aire}}} = \frac{\lambda_{\text{aire}}}{\lambda_{\text{agua}}}.$$

Sustituyendo los valores de las longitudes de onda, obtenemos:

$$n_{\text{agua}} = \frac{500}{375} = 1,33.$$

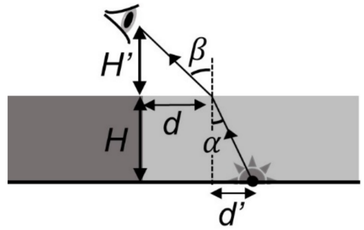
Por lo tanto, el índice de refracción del agua del estanque es 1,33.

b) **La distancia D del foco a la pared del estanque.**

Para encontrar la distancia total D desde el foco hasta la pared del estanque, utilizamos la relación:

$$D = d + d'.$$

donde d es la distancia que se observa en la siguiente figura:



Para obtener d', necesitamos calcular el ángulo de incidencia α utilizando la Ley de Snell. Primero, calculamos el ángulo de refracción β:

$$\tan\beta = \frac{d}{H'} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan\left(\frac{d}{H'}\right) = \arctan\left(\frac{1,2}{1,6}\right) = 36,87^\circ.$$

A partir de β, podemos calcular α utilizando la Ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin\beta = n_{\text{agua}} \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{n_{\text{aire}} \cdot \sin\beta}{n_{\text{agua}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1 \cdot \sin 36,87^\circ}{1,33}\right) = 26,82^\circ.$$

Con α calculamos d' mediante:

$$\tan\alpha = \frac{d'}{H} \quad \Rightarrow \quad d' = H \cdot \tan\alpha = 2 \cdot \tan 26,82^\circ = 1,01\,\text{m}.$$

Finalmente, sumamos ambas distancias para obtener D:

$$D = d + d' = 1,2\,\text{m} + 1,01\,\text{m} = 2,21\,\text{m}.$$

Por lo tanto, la distancia D del foco a la pared del estanque es 2,21 m.

Madrid, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Por una cuerda dispuesta a lo largo del eje x viaja una onda armónica que desplaza los elementos de la cuerda en la dirección del eje y. Se sabe que los elementos A y B, respectivamente ubicados en $x_A = 0\,\mathrm{m}$ y $x_B = 2\,\mathrm{m}$, oscilan en fase y cortan al eje x cada 4 s. Teniendo en cuenta que no hay entre A y B ningún otro elemento que oscile en fase con ellos:

a) **Calcule el valor de la velocidad de propagación.**
b) **Escriba la expresión matemática de la onda, si esta viaja en el sentido negativo del eje x y en el instante inicial los elementos A y B presentan desplazamiento igual a +10 cm y velocidad nula.**

Solución:

a) **Calcule el valor de la velocidad de propagación.**

Sabemos que la relación entre la velocidad de propagación de una onda (v), su longitud de onda (λ) y su frecuencia (ν) está dada por la ecuación:

$$v = \lambda \cdot \nu.$$

Primero, debemos calcular la longitud de onda y la frecuencia. Dado que los puntos A y B oscilan en fase y no hay otros puntos que lo hagan entre ellos, podemos inferir que la distancia entre A y B es igual a una longitud de onda completa, es decir:

$$\lambda = 2\,\mathrm{m}.$$

Luego, se nos dice que cada punto pasa por el eje x cada 4 s, lo que implica que realiza una oscilación completa en el doble de ese tiempo, ya que en cada oscilación completa, el punto cruza el eje dos veces (una al subir y otra al bajar). Por lo tanto, el periodo de la onda es:

$$T = 8\,\mathrm{s}.$$

La frecuencia se obtiene como el inverso del periodo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{8}\,\mathrm{Hz}.$$

Finalmente, la velocidad de propagación de la onda será:

$$v = \lambda \cdot \nu = 2 \cdot \frac{1}{8} = 0,25\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es 0,25 m/s.

b) **Escriba la expresión matemática de la onda, si esta viaja en el sentido negativo del eje x y en el instante inicial los elementos A y B presentan desplazamiento igual a +10 cm y velocidad nula.**

La expresión general para una onda que se propaga en la dirección negativa del eje x es:

$$y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + kx + \phi),$$

donde ω es la frecuencia angular, k el número de onda y ϕ es la fase inicial. La frecuencia angular ω y el número de onda k se pueden obtener mediante las siguientes relaciones:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad/s} \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Para determinar la fase inicial, consideramos que en $x = 0\,\mathrm{m}$ y $t = 0\,\mathrm{s}$, la velocidad es nula, lo que implica que el seno de la fase debe ser cero:

$$v(0,0) = -\omega A \sin(\phi) = 0\,\mathrm{m/s}.$$

Necesariamente, como $A \neq 0$, $\sin(\phi) = 0$, lo que nos deja dos posibles valores para la fase inicial: $\phi = 0\,\mathrm{rad}$ o $\phi = \pi\,\mathrm{rad}$. Para resolver esta ambigüedad, utilizamos la información adicional de que el desplazamiento en $x = 0\,\mathrm{m}$ y $t = 0\,\mathrm{s}$ es positivo ($y(0,0) = +0,1\,\mathrm{m}$). Entonces:

$$y(0,0) = A\cos(\phi) = 0,1\,\mathrm{m}.$$

Como el coseno debe ser positivo, concluimos que $\phi = 0\,\mathrm{rad}$. Entonces, la amplitud es:

$$A = 0,1\,\mathrm{m}.$$

Finalmente, la expresión de la onda es:

$$y(x,t) = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \pi x\right)\, m.$$

Por lo tanto, la expresión matemática de la onda es

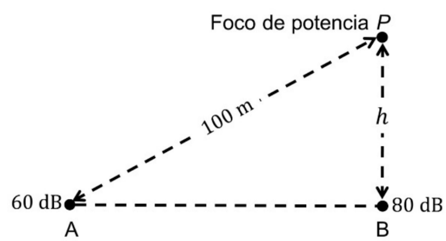
$$\boldsymbol{y(x,t) = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \pi x\right)\, m.}$$

Pregunta 2. Opción B

Un foco sonoro de potencia P se coloca a una altura h sobre el suelo, como ilustra la figura. El nivel de intensidad sonora vale 60 dB en el punto A, a 100 m de distancia del foco, y alcanza 80 dB en el punto B, en el suelo en la vertical del foco.

a) **Calcule P y h.**
b) **¿Cuál sería el nivel de intensidad en el punto B si se agregase sobre él otro foco de igual potencia a una altura de $h/2$?**

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.



Solución:

a) **Calcule P y h.**

La relación que define el nivel de intensidad sonora β es:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

De esta expresión, despejamos la intensidad sonora I:

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}.$$

Para un nivel de intensidad de 80 dB, tenemos:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{8} = 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Y para 60 dB:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{60}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{6} = 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Sabemos que la intensidad está relacionada con la potencia P y la superficie esférica $S = 4\pi r^2$ mediante la expresión:

$$I = \frac{P}{S} \quad \Rightarrow \quad P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2.$$

Para el punto A, donde $r = 100$ m e $I = 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$, tenemos:

$$P = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot (100^2) = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 10^4 = \frac{\pi}{25}\,\mathrm{W}.$$

Ahora, para determinar la altura h, utilizamos la misma expresión de potencia en el punto B, donde $I = 10^{-4}$ W m^{-2}, y despejamos $r = h$:

$$P = I \cdot 4\pi h^2.$$

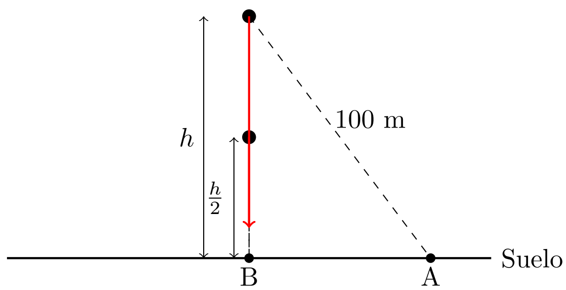
Sustituyendo los valores, obtenemos:

$$h = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{\pi/25}{4\pi \cdot 10^{-4}}} = 10\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la altura es 10 m y la potencia del foco es $\frac{\pi}{25}$ W.

b) **¿Cuál sería el nivel de intensidad en el punto B si se agregase sobre él otro foco de igual potencia a una altura de $h/2$?**

Si se añade otro foco con la misma potencia a la mitad de la altura ($h/2$), la intensidad en el punto B aumentaría, ya que ambos focos contribuirían con la misma potencia:



La intensidad total que se percibe se puede expresar como:

$$I_T = I + I',$$

donde la intensidad I' se calcula mediante la relación:

$$I' = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$I' = \frac{\frac{\pi}{25}}{4\pi \cdot 5^2} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Así, la intensidad total se convierte en:

$$I_T = 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Al sustituir este valor en la fórmula para el nivel de intensidad sonora en decibelios, se tiene:

$$\beta_T = 10 \cdot \log\left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 87\,\mathrm{dB}.$$

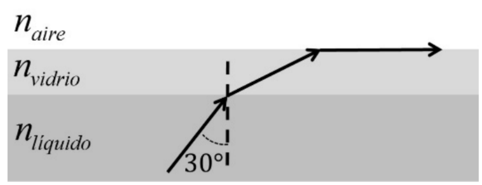
Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora en el punto B sería de 87 dB.

Pregunta 4. Opción B

Una lámina de vidrio se halla sobre un líquido de índice de refracción desconocido. La longitud de onda de la luz en el vidrio se reduce a un 70 % de su valor en el aire. Si se emite luz desde el líquido, los rayos con ángulos de incidencia superiores a 30º en la cara inferior de la lámina no se refractan al aire por su cara superior. Calcule:

a) **El índice de refracción del vidrio.**
b) **El índice de refracción del líquido.**

Dato: Índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$.



Solución:

a) **El índice de refracción del vidrio.**

El índice de refracción del vidrio n_{vidrio} se puede expresar como:

$$n_{\text{vidrio}} = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío y λ es la longitud de onda en el vidrio. Dado que $\lambda = 0,7\lambda_0$, podemos simplificar la expresión anterior:

$$n_{\text{vidrio}} = \frac{\lambda_0}{0,7\lambda_0} = \frac{1}{0,7} = 1,4286.$$

Por lo tanto, el índice de refracción del vidrio es 1,4286.

b) **El índice de refracción del líquido.**

Para ángulos de incidencia superiores a 30°, no se observa refracción en la frontera entre el vidrio y el aire. Esto indica que el rayo de luz alcanza el ángulo crítico en esta interfaz. El ángulo crítico, α_L, se puede calcular mediante la Ley de Snell, considerando que el ángulo de refracción en el aire es 90°:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin(\alpha_L) = n_{\text{aire}} \cdot \sin(90°) \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha_L) = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{1}{n_{\text{vidrio}}}.$$

Por lo tanto, el ángulo crítico se puede expresar como:

$$\alpha_L = \arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{vidrio}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,4286}\right) = 44,37°.$$

Dado que el ángulo de incidencia en el líquido es $\alpha = 30°$ y el ángulo refractado en el vidrio es $\beta = \alpha_L = 44,37°$, podemos usar la Ley de Snell para determinar el índice de refracción del líquido $n_{\text{líquido}}$:

$$n_{\text{líquido}} \cdot \sin(\alpha) = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad n_{\text{líquido}} = n_{\text{vidrio}} \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$n_{\text{líquido}} = 1,4286 \cdot \frac{\sin(44,37^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 2.$$

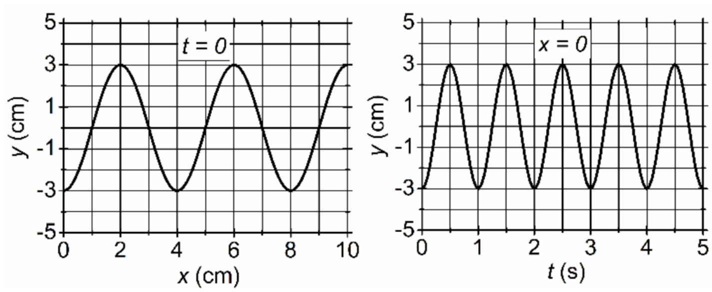
Por lo tanto, el índice de refracción del líquido es 2.

Madrid, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje x. En la figura se tiene una gráfica de la elongación de la onda para $t = 0$ y para $x = 0$. A partir de dicha información determine:

a) **La expresión matemática de la onda.**
b) **La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de oscilación del punto $x = 3\,\text{cm}$ en $t = 1\,\text{s}$.**



Solución:

a) **La expresión matemática de la onda.**

Como la onda se propaga en el sentido positivo del eje x, su expresión general es:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi).$$

Observando las gráficas, notamos que los máximos de la onda alcanzan 3 cm, por lo que la amplitud es $A = 3\,\text{cm} = 0,03\,m$.

De la gráfica en $x = 0$, vemos que los picos se repiten cada 1 s, lo que indica que el período es $T = 1\,\text{s}$. La frecuencia se calcula como $\nu = \frac{1}{T} = 1\,\text{Hz}$, y por tanto la frecuencia angular es $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\,\text{rad/s}$.

En la gráfica para $t = 0$, los máximos están separados por 4 cm, lo que significa que la longitud de onda es $\lambda = 4\,\text{cm} = 0{,}04\,\text{m}$. Por lo tanto, el número de onda es $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}04\,\text{m}} = 50\pi\,\text{m}^{-1}$.

En el punto $x = 0$ y $t = 0$, la elongación es $y(0,0) = -3\,\text{cm}$. Al sustituir en la ecuación general de la onda, obtenemos:

$$y(0,0) = A\cos(\phi) = -A \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi) = -1.$$

Esto implica que $\phi = \pi\,\text{rad}$.

Por lo tanto, sustituyendo todos los valores obtenidos en la expresión general, la ecuación de la onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}03\ \cos(2\pi t - 50\pi x + \pi).}$$

b) **La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de oscilación del punto $x = 3\,\text{cm}$ en $t = 1\,\text{s}$.**

La velocidad de propagación de la onda se calcula mediante la relación $v = \lambda\nu$. Por lo tanto:

$$v = (0{,}04\,\text{m})(1\,\text{Hz}) = 0{,}04\,\text{m/s}.$$

La velocidad de oscilación en un punto específico se obtiene derivando la función de la onda respecto al tiempo:

$$v_{\text{osc}}(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \phi).$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v_{\text{osc}}(x,t) = -0{,}03 \cdot 2\pi \cdot \sin(2\pi t - 50\pi x + \pi) = -0{,}06\pi \cdot \sin(2\pi t - 50\pi x + \pi).$$

Evaluamos esta expresión en $x = 3\,\text{cm} = 0{,}03\,\text{m}$ y $t = 1\,\text{s}$:

$$v_{\text{osc}}(0{,}03\,\text{m}, 1\,\text{s}) = -0{,}06\pi \cdot \sin\big(2\pi(1\,\text{s}) - 50\pi(0{,}03\,\text{m}) + \pi\big) = 0{,}06\pi\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es 0,04 m/s y la velocidad de oscilación en $x = 3\,\text{cm}$ y $t = 1\,\text{s}$ es $0{,}06\pi\,\text{m/s}$.

Pregunta 2. Opción B

En el centro de una pista de baile circular de una discoteca el nivel de intensidad sonora es de 100 dB. La discoteca dispone de cuatro altavoces idénticos dispuestos alrededor de la pista de baile, todos ellos a la misma distancia del centro de la pista, $d = 10\,\text{m}$.

a) **Determine la potencia de cada uno de los altavoces de la discoteca.**
b) **Si el oído humano tiene una superficie de $2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$, y una persona permanece 5 horas bailando en el centro de la pista, ¿cuál es la energía sonora total que le llega al oído?**

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **Determine la potencia de cada uno de los altavoces de la discoteca.**

El nivel de intensidad sonora en decibelios (β) se relaciona con la intensidad (I) mediante la fórmula:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right).$$

Despejando I, obtenemos:

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Dado que $I_0 = 10^{-12}\,\text{W/m}^2$ y $\beta = 100\,\text{dB}$:

$$I = 10^{-12}\,\text{W/m}^2 \cdot 10^{100/10} = 10^{-12}\,\text{W/m}^2 \cdot 10^{10} = 10^{-2}\,\text{W/m}^2.$$

Esta es la intensidad total en el centro de la pista, producida por los cuatro altavoces. Como los altavoces son idénticos y están a la misma distancia, la intensidad aportada por cada uno es:

$$I_{\text{alt}} = \frac{I}{4} = \frac{10^{-2}\,\text{W/m}^2}{4} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{W/m}^2.$$

La intensidad sonora a una distancia r de una fuente puntual de potencia P es:

$$I_{\text{alt}} = \frac{P_{\text{alt}}}{S} = \frac{P_{\text{alt}}}{4\pi r^2}.$$

Despejando la potencia de cada altavoz P_{alt}:

$$P_{\text{alt}} = I_{\text{alt}} \cdot 4\pi r^2 = (2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{W/m}^2) \cdot 4\pi (10\,\text{m})^2 = \pi\,\text{W}.$$

Por lo tanto, la potencia de cada altavoz es $\boldsymbol{\pi}$ vatios.

b) **Si el oído humano tiene una superficie de $2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$, y una persona permanece 5 horas bailando en el centro de la pista, ¿cuál es la energía sonora total que le llega al oído?**

La potencia que recibe el oído se calcula multiplicando la intensidad por el área del oído:

$$P_{\text{oído}} = I \cdot S_{\text{oído}} = (10^{-2}\,\text{W/m}^2) \cdot (2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2) = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{W}.$$

La energía total E recibida durante el tiempo t es:

$$E = P_{\text{oído}} \cdot t,$$

donde t es el tiempo en segundos:

$$t = 5\,\text{horas} \cdot 3600\,\text{s/hora} = 18\,000\,\text{s}.$$

Entonces,

$$E = (2 \cdot 10^{-6}\,\text{W}) \cdot 18\,000\,\text{s} = 0{,}036\,\text{J}.$$

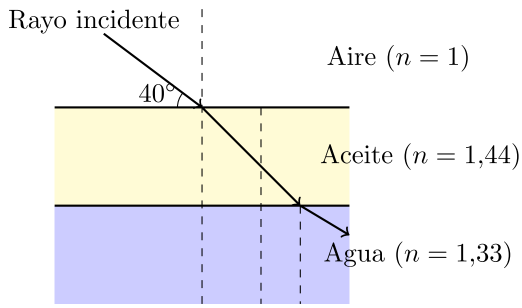
Por lo tanto, la energía sonora total que llega al oído es 0,036 J.

Pregunta 4. Opción B

Solución:

a) **Si un rayo de luz monocromático incide desde el aire hacia el estanque con un ángulo de 40° con respecto a la normal, ¿cuál es el ángulo de refracción del haz en el agua del estanque?**

El rayo de luz atraviesa dos interfaces: primero pasa del aire al aceite y luego del aceite al agua. Aplicaremos la ley de Snell en ambas interfaces.



Paso 1: Aire a Aceite

La ley de Snell establece que:

$$n_{\text{aire}} \sin\theta_{\text{aire}} = n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite}} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \sin 40° = 1{,}44 \cdot \sin\theta_{\text{aceite}}.$$

Despejamos θ_{aceite}:

$$\theta_{\text{aceite}} = \arcsin\left(\frac{\sin 40°}{1{,}44}\right) = 26{,}51°.$$

Paso 2: Aceite a Agua

Aplicamos nuevamente la ley de Snell:

$$n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite}} = n_{\text{agua}} \sin\theta_{\text{agua}} \quad \Rightarrow \quad 1{,}44 \cdot \sin 26{,}51° = 1{,}33 \cdot \sin\theta_{\text{agua}}.$$

Calculamos θ_{agua}:

$$\theta_{\text{agua}} = \arcsin\left(\frac{1{,}44 \cdot \sin 26{,}51°}{1{,}33}\right) = 28{,}90°.$$

Por lo tanto, el ángulo de refracción del haz en el agua es 28,90°.

b) **Si en el fondo del estanque hay un foco de luz, ¿por debajo de qué ángulo debe incidir el haz de luz del foco con respecto a la normal de la superficie del agua para que la luz salga fuera del estanque hacia el aire?**

Primero, calculamos el ángulo crítico en la interfaz aceite-aire, donde la refracción pasa a ser reflexión total interna. La condición para el ángulo límite es cuando el ángulo de refracción en el aire es 90°:

$$n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite-crítico}} = n_{\text{aire}} \sin 90°.$$

Como $\sin 90° = 1$, tenemos:

$$\sin\theta_{\text{aceite-crítico}} = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{aceite}}} = \frac{1}{1{,}44} = 0{,}6944.$$

Entonces,

$$\theta_{\text{aceite-crítico}} = \arcsin(0{,}6944) = 43{,}98°.$$

Para el cálculo del ángulo máximo en el agua aplicamos la ley de Snell entre el agua y el aceite:

$$n_{\text{agua}} \sin\theta_{\text{agua-máx}} = n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite-crítico}}.$$

Despejamos $\sin\theta_{\text{agua-máx}}$:

$$\sin\theta_{\text{agua-máx}} = \frac{n_{\text{aceite}} \sin\theta_{\text{aceite-crítico}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1{,}44 \cdot 0{,}6944}{1{,}33} = \frac{1{,}0}{1{,}33} = 0{,}7519.$$

Luego,

$$\theta_{\text{agua-máx}} = \arcsin(0{,}7519) = 48{,}75°.$$

Por lo tanto, el haz de luz debe incidir desde el agua con un ángulo menor a 48,75° respecto a la normal para que pueda atravesar todas las interfaces y salir al aire.

Madrid, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Al explotar, un cohete de fuegos artificiales genera una onda sonora esférica con una potencia sonora de 20 mW. Un espectador oye la explosión 1,5 s después de verlo explotar. Calcule:

a) **La distancia a la que está situado el espectador respecto al cohete en el momento de la explosión, así como la intensidad del sonido en la posición del espectador.**
b) **El nivel de intensidad sonora percibida si explotan 10 cohetes simultáneamente, y el espectador los oye todos al unísono 1,5 s después de explotar.**

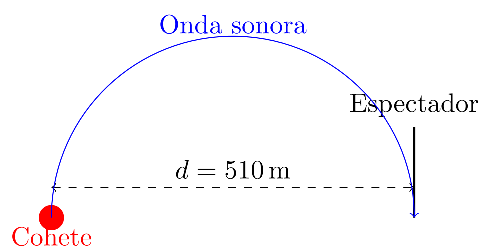
Datos: Velocidad del sonido en el aire, $v_s = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; Valor umbral de la intensidad acústica, $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

Solución:

a) **La distancia a la que está situado el espectador respecto al cohete en el momento de la explosión, así como la intensidad del sonido en la posición del espectador.**

El espectador escucha la explosión 1,5 s después de verla, lo que significa que el sonido tardó 1,5 s en llegar hasta él. La distancia (d) se calcula usando la velocidad del sonido (v_s):

$$d = v_s \cdot t = 340\,\mathrm{m/s} \cdot 1{,}5\,\mathrm{s} = 510\,\mathrm{m}.$$



La intensidad (I) de una onda sonora esférica se calcula mediante:

$$I = \frac{P}{S},$$

donde P es la potencia sonora y S es la superficie de la esfera de propagación. La superficie de una esfera es:

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi d^2 = 4\pi(510\,\mathrm{m})^2 = 3{,}27 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^2.$$

La potencia sonora es $P = 20\,\mathrm{mW} = 0{,}02\,\mathrm{W}$. Entonces, la intensidad es:

$$I = \frac{0{,}02\,\mathrm{W}}{3{,}27 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^2} = 6{,}11 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m}^2.$$

Por lo tanto, el espectador está a una distancia de 510 m del cohete, y la intensidad del sonido en su posición es $6{,}11 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}$.

b) **El nivel de intensidad sonora percibida si explotan 10 cohetes simultáneamente, y el espectador los oye todos al unísono 1,5 s después de explotar.**

Si explotan 10 cohetes simultáneamente y se asume que las ondas sonoras son incoherentes y no interfieren destructivamente, la intensidad total (I_{total}) es la suma de las intensidades individuales:

$$I_{\text{total}} = 10 \cdot I = 10 \cdot 6{,}11 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m}^2 = 6{,}11 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/m}^2.$$

El nivel de intensidad sonora en decibelios se calcula mediante:

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I_{\text{total}}}{I_0} \right),$$

donde $I_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-12}\,\text{W/m}^2$ es la intensidad umbral de audición. Sustituyendo:

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{6{,}11 \cdot 10^{-8}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}} \right) = 47{,}86\,\text{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora percibida al explotar 10 cohetes simultáneamente es 47,86 dB.

Pregunta 2. Opción B

El valor del campo eléctrico asociado a una onda electromagnética que se propaga en un medio material en la dirección del eje x viene expresado por:

$$\boldsymbol{E(t,x) = 4\cos(3,43 \cdot 10^{15} t - 1,52 \cdot 10^{7} x)\,\mathrm{N\ C^{-1}}},$$

donde todas las magnitudes están expresadas en unidades del SI. Calcule:

a) **La frecuencia y la longitud de onda asociadas a la onda electromagnética.**
b) **La velocidad de propagación de la onda y el índice de refracción del medio por el cual se propaga.**

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}.

Solución:

a) **La frecuencia y la longitud de onda asociadas a la onda electromagnética.**

La ecuación de la onda electromagnética se puede comparar con la forma general de una onda armónica:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

donde A es la amplitud de la onda, ω es la frecuencia angular (rad/s), k es el número de onda (rad/m) y φ_0 es la fase inicial. Del enunciado, identificamos:

$$A = 4\,\mathrm{m}, \quad \omega = 3{,}43 \cdot 10^{15}\,\mathrm{rad/s}, \quad k = 1{,}52 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}.$$

La frecuencia f está relacionada con la frecuencia angular ω mediante:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{3{,}43 \cdot 10^{15}\,\mathrm{rad/s}}{2\pi} = 5{,}46 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}.$$

La longitud de onda λ se relaciona con el número de onda k mediante:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{1{,}52 \cdot 10^{7\ -1}} = 4{,}13 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 413\,\mathrm{nm}.$$

Por lo tanto, la frecuencia de la onda es $5{,}46 \cdot 10^{14}$ Hz y su longitud de onda es 413 nm.

b) **La velocidad de propagación de la onda y el índice de refracción del medio por el cual se propaga.**

La velocidad de propagación de la onda se puede obtener multiplicando la frecuencia por la longitud de onda:

$$v = \lambda f = (4{,}13 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}) \cdot (5{,}46 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}) = 2{,}26 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}.$$

El índice de refracción del medio es la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de propagación en el medio:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{2{,}26 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}} = 1{,}33.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es $2{,}26 \cdot 10^{8}$ m/s y el índice de refracción del medio es 1,33.

Pregunta 4. Opción B

Un rayo láser, que emite luz de longitud de onda de 488 nm en el vacío, incide desde el aire sobre la superficie plana de un material con un índice de refracción de 1, 55. El rayo incidente y el reflejado forman entre sí un ángulo de 60°. Calcule:

a) **Determine la frecuencia y la longitud de onda del rayo luminoso en el aire y dentro del medio material.**
b) **Calcule el ángulo que formará el rayo refractado en el material con el rayo reflejado en el aire. ¿Existirá algún ángulo de incidencia para el cual el rayo láser sufra reflexión total? Justifique la respuesta.**

Datos: Índice de refracción del aire, $n_{\text{aire}} = 1$; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

Solución:

a) **Determine la frecuencia y la longitud de onda del rayo luminoso en el aire y dentro del medio material.**

La frecuencia de la luz permanece constante al pasar de un medio a otro, por lo que es la misma en el aire y dentro del material. Recordemos que la frecuencia (f) se calcula mediante la relación:

$$f = \frac{c}{\lambda_0},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s y λ_0 es la longitud de onda en el vacío, $\lambda_0 = 488\,\text{nm} = 488 \cdot 10^{-9}$ m. Calculamos:

$$f = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{488 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 6{,}15 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.$$

La longitud de onda dentro del material (λ) se obtiene dividiendo la longitud de onda en el vacío por el índice de refracción del material:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{488 \cdot 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}55} = 3{,}15 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 315\,\text{nm}.$$

Por lo tanto, la frecuencia de la luz es $6{,}15 \cdot 10^{14}$ Hz tanto en el aire como en el material y la longitud de onda es 488 nm en el aire y 315 nm dentro del material.

b) **Calcule el ángulo que formará el rayo refractado en el material con el rayo reflejado en el aire. ¿Existirá algún ángulo de incidencia para el cual el rayo láser sufra reflexión total? Justifique la respuesta.**

Comenzamos determinando el ángulo de incidencia (θ_1). Dado que el rayo incidente y el reflejado forman un ángulo de 60° y que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, se cumple:

$$\theta_1 + \theta_{\text{reflejado}} = 60^\circ, \quad \text{pero} \quad \theta_{\text{reflejado}} = \theta_1 \quad \Rightarrow \quad 2\theta_1 = 60^\circ.$$

Entonces,

$$\theta_1 = 30^\circ.$$

A continuación, calculamos el ángulo de refracción (θ_2) usando la Ley de Snell:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

donde:
- $n_1 = 1$ es el índice de refracción del aire,

- $n_2 = 1{,}55$ es el índice de refracción del material,
- $\theta_1 = 30°$ es el ángulo de incidencia.

Despejamos θ_2:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \frac{1}{1{,}55}\sin 30° = \frac{1}{1{,}55}\cdot 0{,}5 = 0{,}3226 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \arcsin(0{,}3226) \approx 18{,}82°.$$

Finalmente, calculamos el ángulo entre el rayo refractado y el rayo reflejado (α). La suma de los ángulos en el punto de incidencia es:

$$\theta_1 + \theta_{\text{reflejado}} + \alpha = 180°.$$

Como $\theta_{\text{reflejado}} = \theta_1$, entonces

$$\alpha = 180° - \theta_1 - \theta_{\text{refractado}} = 180° - 30° - 18{,}82° = 131{,}18°.$$

La reflexión total interna ocurre cuando la luz pasa de un medio con mayor índice de refracción a uno con menor índice, y el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico. En este caso, la luz pasa del aire ($n_1 = 1$) al material ($n_2 = 1{,}55$), es decir, de un medio menos refringente a uno más refringente. De esta forma, no es posible que ocurra reflexión total interna en este caso, ya que se requiere que $n_1 > n_2$.

Por lo tanto, el ángulo entre el rayo refractado y el rayo reflejado es 131,18°. No existe ningún ángulo de incidencia para el cual el rayo láser sufra reflexión total al pasar del aire al material, porque la reflexión total interna sólo ocurre cuando la luz pasa de un medio más refringente a uno menos refringente.

Madrid, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Anacleto, el agente secreto, está grabando con un teléfono inteligente, a través de una pared, una conversación muy delicada del malvado Vázquez. La distancia entre ambos es de 5 m y, por efecto de la pared, al teléfono solo llega un 2% de la intensidad que llegaría si no hubiese pared. Se sabe que el nivel de intensidad sonora de una conversación a 1 metro es de 50 dB.

a) **Calcule el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente.**
b) **Si el teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 metros de distancia, ¿cuál es el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir?**

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **Calcule el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente.**

El nivel de intensidad sonora (β) se relaciona con la intensidad (I) mediante la fórmula:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right).$$

Dado que a 1 m, $\beta = 50$ dB, podemos despejar I:

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2} \cdot 10^{50/10} = 10^{-12} \cdot 10^5 = 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

A continuación, calculemos la intensidad sonora a 5 m sin considerar la pared. La intensidad sonora en una onda esférica disminuye con el cuadrado de la distancia (r):

$$I(r) = I_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2,$$

donde $I_1 = 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}$ es la intensidad a $r_1 = 1$ m y $r = 5$ m es la nueva distancia. Sustituyendo:

$$I(5\,\mathrm{m}) = 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2} \left(\frac{1}{5} \right)^2 = 10^{-7} \cdot \frac{1}{25} = 4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Considerando la atenuación por la pared (solo llega el 2% de la intensidad):

$$I_{\mathrm{pared}} = 0{,}02 \cdot I(5\,\mathrm{m}) = 0{,}02 \cdot 4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2} = 8 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Finalmente, hallamos el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono (β_{tel}):

$$\beta_{\mathrm{tel}} = 10 \log \left(\frac{I_{\mathrm{pared}}}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{8 \cdot 10^{-11}}{10^{-12}} \right) = 10 \log(80) = 10 \cdot 1{,}903 = 19{,}03\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente es de aproximadamente 19,03 dB.

b) **Si el teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 metros de distancia, ¿cuál es el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir?**

Empezamos calculando la intensidad sonora a 100 m sin considerar la pared. Nuevamente, aplicamos la ley de inversa del cuadrado:

$$I(100\,\mathrm{m}) = I_1 \left(\frac{1}{100} \right)^2 = 10^{-7} \cdot \frac{1}{10^4} = 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}.$$

El nivel de intensidad sonora que llega al teléfono a 100 m (β_{100m}) es:

$$\beta_{100m} = 10 \log \left(\frac{I(100\,\mathrm{m})}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{10^{-11}}{10^{-12}} \right) = 10\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir el teléfono es de 10 dB.

Pregunta 2. Opción B

Una onda transversal se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje x. La propagación de la onda es en el sentido positivo del eje x. La expresión matemática de la onda en los instantes $t = 0\,\mathrm{s}$ y $t = 2\,\mathrm{s}$ es $y(x,0) = 0,1\cos(\pi - 4\pi x)\,\mathrm{m}$ e $y(x,2) = 0,1\cos(11\pi - 4\pi x)\,\mathrm{m}$, respectivamente, donde todas las magnitudes están expresadas en el SI de unidades. Calcule:

a) **La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.**
b) **La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.**

Solución:

a) **La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.**

La expresión general de una onda transversal que se propaga en la dirección positiva del eje x es:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi),$$

donde:
- A es la amplitud de la onda,
- ω es la frecuencia angular,
- k es el número de onda,
- ϕ es la fase inicial.

Dado el enunciado del problema, en $t = 0\,\mathrm{s}$:

$$y(x,0) = 0{,}1\cos(\pi - 4\pi x) = 0{,}1\cos(-4\pi x + \pi).$$

Comparando con la expresión general:

$$A\cos(-kx + \phi) = 0{,}1\cos(-4\pi x + \pi).$$

De aquí, se identifican:

$$A = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad k = 4\pi\,\mathrm{rad/m}, \quad \phi = \pi.$$

En $t = 2\,\mathrm{s}$, la expresión de la onda es:

$$y(x,2) = 0{,}1\cos(11\pi - 4\pi x) = 0{,}1\cos(-4\pi x + 11\pi).$$

Comparando con la expresión general:

$$A\cos(\omega t - kx + \phi) = 0{,}1\cos(-4\pi x + 11\pi).$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$0{,}1\cos(\omega \cdot 2 - 4\pi x + \pi) = 0{,}1\cos(-4\pi x + 11\pi).$$

Para que las expresiones sean equivalentes, los argumentos de los cosenos deben ser iguales:

$$2\omega - 4\pi x + \pi = -4\pi x + 11\pi \quad \Rightarrow \quad 2\omega = 10\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 5\pi\,\mathrm{rad/s}.$$

Sin embargo, la frecuencia angular es una magnitud positiva, por lo que:

$$\omega = 5\pi\,\mathrm{rad/s}.$$

Con los valores determinados:

$$y(x,t) = 0{,}1\cos(5\pi t - 4\pi x + \pi)\ \mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la frecuencia angular de la onda es $\omega = 5\pi\,\mathrm{rad/s}$ y la expresión matemática de la onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}1\cos(4\pi x - 5\pi t + \pi)\ \mathrm{m}.}$$

b) **La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.**

La velocidad de propagación de una onda es la relación entre la frecuencia angular y el número de onda:

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Sustituyendo los valores encontrados:

$$v = \frac{5\pi\,\mathrm{rad/s}}{4\pi\,\mathrm{rad/m}} = \frac{5}{4}\,\mathrm{m/s} = 1{,}25\,\mathrm{m/s}.$$

La aceleración de un punto de la cuerda está dada por la segunda derivada de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Calculamos las derivadas:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - kx + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t - kx + \phi).$$

Entonces, la aceleración máxima es:

$$a_{\max} = A\omega^2.$$

Sustituyendo los valores:

$$a_{\max} = 0{,}1 \cdot (5\pi)^2 = 24{,}67\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es $v = 1{,}25\,\mathrm{m/s}$ y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda es $a_{\max} = 24{,}67\,\mathrm{m/s^2}$.

Pregunta 4. Opción B

Sean dos medios A y B de índices de refracción n_A y n_B, respectivamente. Un rayo de luz de frecuencia $6,04 \cdot 10^{14}$ Hz incide desde el medio A hacia el medio B, verificándose que el ángulo límite para la reflexión total es $45,58°$. Sabiendo que $n_A - n_B = 0,6$, determine:

a) **Los índices de refracción n_A y n_B de ambos medios.**
b) **Las longitudes de onda del rayo de luz incidente en los medios A y B.**

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

Solución:

a) **Los índices de refracción n_A y n_B de ambos medios.**

El ángulo límite θ_c para la reflexión total ocurre cuando el ángulo de refracción θ_r es 90°. Según la Ley de Snell:

$$n_A \sin(\theta_c) = n_B \sin(\theta_r).$$

Dado que $\theta_r = 90°$, $\sin(90°) = 1$, por lo que:

$$n_A \sin(\theta_c) = n_B.$$

Sabemos que el ángulo límite es $\theta_c = 45{,}58°$ y que $n_A - n_B = 0{,}6$. Entonces:

$$\begin{cases} n_A \sin(45{,}58°) = n_B, \\ n_A - n_B = 0{,}6. \end{cases}$$

Ahora, sustituimos n_B en la segunda ecuación:

$$n_A - \sin(45{,}58°) \cdot n_A = 0{,}6 \;\Rightarrow\; n_A(1 - \sin(45{,}58°)) = 0{,}6 \;\Rightarrow\; n_A = \frac{0{,}6}{1 - \sin(45{,}58°)} = 2{,}10.$$

Finalmente, calculamos n_B:

$$n_B = \sin(45{,}58°) \cdot 2{,}10 = 1{,}5.$$

Por lo tanto, los índices de refracción son $n_A = 2{,}10$ y $n_B = 1{,}45$.

b) **Las longitudes de onda del rayo de luz incidente en los medios A y B.**

La velocidad de la luz en un medio está relacionada con su frecuencia y longitud de onda mediante:

$$v_i = f\lambda_i,$$

donde:
- v_i es la velocidad de la luz en el medio i,
- f es la frecuencia de la onda (constante para todos los medios),
- λ_i es la longitud de onda en el medio i.

Además, la velocidad de la luz en un medio está relacionada con la velocidad de la luz en el vacío y el índice de refracción:

$$v_i = \frac{c}{n_i}.$$

Calculamos las velocidades en los medios A y B:

$$v_A = \frac{c}{n_A} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2{,}05} = 1{,}463 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

$$v_B = \frac{c}{n_B} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}45} = 2{,}069 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Sabemos que la frecuencia $f = 6{,}04 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$, entonces:

$$\lambda_A = \frac{v_A}{f} = \frac{1{,}463 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{6{,}04 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 2{,}42 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 242\,\text{nm},$$

$$\lambda_B = \frac{v_B}{f} = \frac{2{,}069 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{6{,}04 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 3{,}42 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 342\,\text{nm}.$$

Por lo tanto, las longitudes de onda son $\boldsymbol{\lambda_A = 242\,\text{nm}}$ y $\boldsymbol{\lambda_B = 342\,\text{nm}}$.

Madrid, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Una onda armónica unidimensional, que se propaga en un medio con una velocidad de 400 m/s, está descrita por la siguiente expresión matemática:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 3\,\mathrm{sen}(kx - 200\pi t + \phi_0)\,\mathrm{cm}}$$

donde x y t están en metros y segundos, respectivamente. Sabiendo que $y(0,0) = 1,5\,\mathrm{cm}$ y que la velocidad de oscilación en $t = 0$ y $x = 0$ es positiva, halle:

a) **El número de onda k y la fase inicial ϕ_0.**
b) **La aceleración máxima de oscilación de un punto genérico del eje x.**

Solución:

a) **El número de onda k y la fase inicial ϕ_0.**

La fase de onda se refiere al estado de vibración de un punto de la onda. Para determinar la fase inicial, sustituimos la posición y el tiempo iniciales en la ecuación de la onda:

$$y(0,0) = 1,5\,\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad 1,5 = 3 \cdot \mathrm{sen}(\phi_0) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}(\phi_0) = \frac{1,5}{3} = 0,5.$$

Las soluciones para ϕ_0 son:

$$\phi_0 = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad \frac{5\pi}{6}.$$

Para determinar cuál de estas soluciones es correcta, derivamos la ecuación de la onda para encontrar la velocidad de vibración de la onda y verificamos cuál de las dos fases iniciales da una velocidad positiva en $t = 0$ y $x = 0$. La velocidad de vibración es la derivada de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -3 \cdot 200\pi \cdot \cos(kx - 200\pi t + \phi_0).$$

Evaluando en $t = 0$ y $x = 0$:

$$v(0,0) = -3 \cdot 200\pi \cdot \cos(\phi_0).$$

Sustituyendo las posibles fases iniciales:

$$\text{Para } \phi_0 = \frac{\pi}{6}: \quad v_y(0,0) = -600\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -600\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -600\pi \cdot 0,8660 = -1632\,\mathrm{m/s}.$$

$$\text{Para } \phi_0 = \frac{5\pi}{6}: \quad v_y(0,0) = -600\pi \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -600\pi \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 600\pi \cdot 0,8660 = 1632\,\mathrm{m/s}.$$

Dado que la velocidad de vibración en $t = 0$ y $x = 0$ es positiva, la fase inicial debe ser $\phi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

Conociendo el valor de la frecuencia angular ω, calculamos el número de onda k. La frecuencia angular está relacionada con la velocidad de propagación mediante:

$$\omega = 200\pi\,\mathrm{rad/s} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100\,\mathrm{Hz}.$$

La longitud de onda λ se relaciona con la velocidad y la frecuencia mediante:

$$v_p = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{400\,\mathrm{m/s}}{100\,\mathrm{Hz}} = 4\,\mathrm{m}.$$

El número de onda k se calcula como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,\text{rad/m}.$$

Por lo tanto, el número de onda es $k = \frac{\pi}{2}$ rad/m y la fase inicial es $\phi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

b) La aceleración máxima de oscilación de un punto genérico del eje x.

La aceleración de un punto de la onda es la segunda derivada de $y(x,t)$ respecto al tiempo. Comenzamos derivando la ecuación de la onda:

$$y(x,t) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 200\pi t + \frac{5\pi}{6}\right).$$

La primera derivada (velocidad) es:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -3 \cdot 200\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 200\pi t + \frac{5\pi}{6}\right).$$

La segunda derivada (aceleración) es:

$$a(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} = 3 \cdot 200\pi \cdot (-200\pi) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 200\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = -120000\pi^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 200\pi t + \frac{5\pi}{6}\right).$$

La aceleración es máxima cuando el seno toma su valor máximo absoluto, es decir, $|\operatorname{sen}(\cdot)| = 1$. Por lo tanto, la aceleración máxima es:

$$a_{\max} = 120000\pi^2\,\text{m/s}^2 = 1,184 \cdot 10^5\,\text{m/s}^2.$$

Por lo tanto, la aceleración máxima es $a_{\max} = 1,184 \cdot 10^5$ m/s^2.

Pregunta 2. Opción B

A una distancia de 10 m, el nivel de intensidad sonora producida por un foco puntual es de 20 dB. Halle:

a) **La potencia del foco.**
b) **El nivel de intensidad sonora a 2 m del foco.**

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Solución:

a) **La potencia del foco.**

Conociendo el nivel de intensidad sonora a 10 m, podemos determinar la intensidad de la onda (I_1) a esa misma distancia utilizando la fórmula del nivel de intensidad sonora (β):

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right).$$

Dado que $\beta = 20\,\text{dB}$, sustituimos los valores conocidos:

$$20 = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10^{-10}\,\text{W/m}^2.$$

Una vez obtenido el valor de I_1, calcularemos la potencia del foco (P). Sabiendo que el sonido es una onda isotrópica, mecánica y tridimensional que se propaga de forma esférica, la potencia se relaciona con la intensidad y la superficie de la esfera mediante la siguiente fórmula:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Despejando la potencia:

$$P = I_1 \cdot 4\pi r^2.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$P = 10^{-10} \cdot 4\pi \cdot (10)^2 = 1,2566 \cdot 10^{-7}\,\text{W}.$$

Por lo tanto, la potencia del foco es $P = 1{,}2566 \cdot 10^{-7}$ W.

b) **El nivel de intensidad sonora a 2 m del foco.**

Para obtener el valor de la intensidad sonora a 2 m del foco (I_2), utilizaremos la fórmula de la superficie esférica:

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$I_2 = \frac{1,2566 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot (2)^2} = 2,49 \cdot 10^{-9}\,\text{W/m}^2.$$

Conociendo la intensidad a 2 m del foco, calculamos el nivel de intensidad sonora (β) a esa distancia:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right).$$

Sustituyendo los valores:

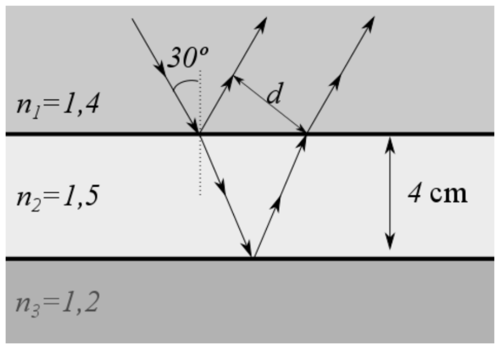
$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{2,49 \cdot 10^{-9}}{10^{-12}}\right) = 33,96\,\text{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora a 2 m del foco es $\beta = 33,96$ dB.

Pregunta 4. Opción B

Una placa de vidrio de 4 cm de espesor y de índice de refracción 1,5 se encuentra sumergida entre dos aceites de índices de refracción 1,4 y 1,2 respectivamente. Proveniente del aceite de índice 1,4 incide sobre el vidrio un haz de luz con un ángulo de incidencia de 30º. Calcule:

a) **La distancia, *d*, entre el rayo reflejado por la cara superior del vidrio y el refractado después de reflejarse en la cara inferior del vidrio.**
b) **El ángulo de incidencia mínimo en la cara superior del vidrio necesario para que se produzca el fenómeno de reflexión total en la cara inferior de la placa de vidrio.**



Solución:

a) **La distancia, *d*, entre el rayo reflejado por la cara superior del vidrio y el refractado después de reflejarse en la cara inferior del vidrio.**

Primero, aplicamos la Ley de Snell en la cara superior del vidrio:

$$n_i \cdot \sin\theta_i = n_r \cdot \sin\theta_r,$$

donde:
- $n_i = 1,4$ (índice de refracción del aceite),
- $\theta_i = 30°$ (ángulo de incidencia),
- $n_r = 1,5$ (índice de refracción del vidrio),
- θ_r es el ángulo refractado.

Sustituyendo los valores:

$$1,4 \cdot \sin 30° = 1,5 \cdot \sin\theta_r \Rightarrow \sin\theta_r = \frac{1,4 \cdot 0,5}{1,5} = \frac{0,7}{1,5} = 0,47 \quad \Rightarrow \quad \theta_r = \arcsin(0,47) \approx 27,8°$$

Conociendo el valor del ángulo refractado, procedemos a construir un triángulo rectángulo donde uno de los catetos es el espesor de la placa de vidrio (4 cm) y el ángulo correspondiente es $\theta_r = 27,8°$. Utilizando las propiedades trigonométricas:

$$\tan 27,8° = \frac{x}{4\,\text{cm}} \Rightarrow x = 4\,\text{cm} \cdot \tan 27,8° = 2,11\,\text{cm}.$$

La distancia total d' es el doble de x, ya que la normal corta el lado en dos partes iguales:

$$d' = 2 \cdot 2,11\,\text{cm} = 4,22\,\text{cm}$$

Finalmente, aplicamos la trigonometría para encontrar la distancia entre los rayos reflejados:

$$\sin 60° = \frac{d}{4,22\,\text{cm}} \Rightarrow d = 4,22\,\text{cm} \cdot \sin 60° = 3,65\,\text{cm}$$

Por lo tanto, la distancia pedida es $d = 3,65$ cm.

b) **El ángulo de incidencia mínimo en la cara superior del vidrio necesario para que se produzca el fenómeno de reflexión total en la cara inferior de la placa de vidrio.**

Para que se produzca el fenómeno de reflexión total, el rayo de luz debe pasar de un medio más refringente a uno menos refringente, y el ángulo de incidencia debe ser mayor al ángulo límite. Primero, determinamos el ángulo límite en la cara inferior del vidrio. La reflexión total ocurre cuando el ángulo de refracción es 90°. Aplicamos la Ley de Snell:

$$n_r \cdot \sin\theta_c = n_{\text{aceite inferior}} \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow \sin\theta_c = \frac{n_{\text{aceite inferior}}}{n_r} = \frac{1,2}{1,5} = 0,8 \Rightarrow \theta_c = \arcsin(0,8) = 53,13^\circ.$$

A continuación, aplicamos la Ley de Snell para determinar el ángulo de incidencia mínimo β en la cara superior del vidrio necesario para que ocurra reflexión total en la cara inferior:

$$n_{\text{aceite superior}} \cdot \sin\beta = n_r \cdot \sin 53,13^\circ \Rightarrow \sin\beta = \frac{1,5 \cdot \sin 53,13^\circ}{1,4} = \frac{1,5 \cdot 0,8}{1,4} = 0,857.$$

Finalmente, obtenemos:

$$\beta = \arcsin(0,857) = 59^\circ.$$

Por lo tanto, el ángulo de incidencia mínimo es $\beta = 59^\circ$.

Madrid, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta 2. Opción A

Un violín emite ondas sonoras con una potencia de $5 \cdot 10^{-3}$ W cuando se toca la nota Fa de 698 Hz.

a) **Indique razonadamente si la onda es longitudinal o transversal y obtenga su longitud de onda.**
b) **Calcule el nivel de intensidad sonora que percibe un oyente situado a 20 m generado por 15 violines de una orquesta tocando al unísono.**

Datos: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}; Velocidad del sonido en el aire, $v_s = 340\,\mathrm{m\ s^{-1}}$.

Solución:

a) **Indique razonadamente si la onda es longitudinal o transversal y obtenga su longitud de onda.**

Las ondas sonoras son perturbaciones que se propagan a través de un medio elástico debido a la vibración de sus partículas. Estas ondas pueden ser de dos tipos:

– Longitudinales: Las partículas del medio vibran en la misma dirección en que avanza la onda.

– Transversales: Las partículas vibran perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.

En el caso del sonido en el aire, las ondas son *longitudinales* ya que las moléculas del aire vibran hacia adelante y hacia atrás en la dirección de propagación del sonido. Para calcular la longitud de onda (λ) utilizamos la fórmula:

$$\lambda = \frac{v_s}{f},$$

donde:
– $v_s = 340\,\mathrm{m/s}$ es la velocidad del sonido en el aire,
– $f = 698\,\mathrm{Hz}$ es la frecuencia de la nota Fa emitida por el violín.
Sustituyendo los valores:

$$\lambda = \frac{340\,\mathrm{m/s}}{698\,\mathrm{Hz}} = 0{,}487\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la onda sonora es longitudinal y su longitud de onda es aproximadamente 0,487 metros.

b) **Calcule el nivel de intensidad sonora que percibe un oyente situado a 20 m generado por 15 violines de una orquesta tocando al unísono.**

Primero, calculamos la potencia total emitida por los 15 violines:

$$P_{\text{total}} = 15 \cdot P_{\text{violín}} = 15 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W} = 7{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W}.$$

La intensidad sonora (I) a una distancia (r) de la fuente se calcula mediante la fórmula:

$$I = \frac{P_{\text{total}}}{S},$$

donde S es el área de la superficie esférica a una distancia r:

$$S = 4\pi r^2.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$S = 4\pi(20\,\mathrm{m})^2 = 4\pi(400\,\mathrm{m}^2) = 5026{,}55\,\mathrm{m}^2,$$

$$I = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W}}{5026{,}55\,\mathrm{m}^2} = 1{,}49 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W/m}^2.$$

El nivel de intensidad sonora (β) se mide en decibelios (dB) y se calcula con:

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m}^2$ es la intensidad umbral de audición. Sustituyendo los valores:

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{1{,}49 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 71{,}74\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora percibido por el oyente es aproximadamente 71,74 decibelios (dB).

Pregunta 2. Opción B

Un oscilador armónico de frecuencia 1000 Hz genera en una cuerda una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje x, con una longitud de onda de 1,5 m. La velocidad máxima de oscilación de un punto de la cuerda es de 100 m/s. Además, para un punto de la cuerda situado en $x = 0$ m y en el instante $t = 600\,\mu$s, la elongación de la onda es de 1 cm y su velocidad de oscilación es positiva.

a) **Determine la velocidad de propagación y la amplitud de la onda.**
b) **Halle la fase inicial y escriba la expresión matemática que representa dicha onda.**

Solución:

a) **Determine la velocidad de propagación y la amplitud de la onda.**

La velocidad de propagación (v_p) de una onda se define como la distancia que recorre por unidad de tiempo. Se relaciona con la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) mediante la fórmula:

$$v_p = \lambda \cdot f.$$

Sustituyendo los valores proporcionados:

$$v_p = 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot 1000\,\mathrm{Hz} = 1500\,\mathrm{m/s}.$$

Por otro lado, la amplitud (A) de la onda es la máxima desplazamiento de una partícula del medio respecto a su posición de equilibrio. Para determinar A, utilizamos la relación entre la velocidad máxima de oscilación (v_{max}) y la amplitud en una onda sinusoidal:

$$v_{\mathrm{max}} = \omega \cdot A,$$

donde ω es la velocidad angular, calculada como:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1000\,\mathrm{Hz} = 6283{,}19\,\mathrm{rad/s}.$$

Despejando A:

$$A = \frac{v_{\mathrm{max}}}{\omega} = \frac{100\,\mathrm{m/s}}{6283{,}19\,\mathrm{rad/s}} = 1{,}59 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1{,}6\,\mathrm{cm}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es 1500 m/s y la amplitud es 1,6 cm.

b) **Halle la fase inicial y escriba la expresión matemática que representa dicha onda.**

La fase inicial (ϕ_0) de una onda sinusoidal se determina a partir de la condición dada en un punto específico de la onda. La expresión general de una onda transversal que se propaga en el eje x es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \phi_0),$$

donde k es el número de onda, calculado como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}5\,\mathrm{m}} = 4{,}19\,\mathrm{rad/m}.$$

En el punto $(x,t) = (0\,\mathrm{m}, 600\,\mu\mathrm{s})$, se nos indica que la elongación es $y = 1\,\mathrm{cm}$ y la velocidad de oscilación es positiva. Aplicamos la expresión de la onda en este punto:

$$y(0, 600 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}) = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0) = 1\,\mathrm{cm}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot \sin\left(6283{,}19\,\mathrm{rad/s} \cdot 600 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} + \phi_0\right).$$

Simplificando:

$$\sin\left(6283{,}19\,\mathrm{rad/s}\cdot 600\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}+\phi_0\right)=\frac{1\cdot 10^{-2}}{1{,}6\cdot 10^{-2}}=0{,}625.$$

Calculamos el ángulo:

$$6283{,}19\,\mathrm{rad/s}\cdot 600\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}=3{,}7699\,\mathrm{rad}.$$

Entonces,

$$\sin(3{,}7699\,\mathrm{rad}+\phi_0)=0{,}625.$$

Despejando ϕ_0:

$$3{,}7699\,\mathrm{rad}+\phi_0=\arcsin(0{,}625)=0{,}675\,\mathrm{rad}.$$

$$\phi_0=0{,}675\,\mathrm{rad}-3{,}7699\,\mathrm{rad}=-3{,}0949\,\mathrm{rad}.$$

Finalmente, la expresión matemática de la onda es

$$y(x,t)=1{,}6\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot\sin\left(6283{,}19\,\mathrm{rad/s}\cdot t-4{,}19\,\mathrm{rad/m}\cdot x-3{,}0949\,\mathrm{rad}\right).$$

Por lo tanto, la fase inicial de la onda es $\boldsymbol{\phi_0=-3{,}01}$ rad y la expresión completa de la onda es

$$\boldsymbol{y(x,t)=1{,}6\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot\sin\left(2000\pi t-\frac{4}{3}\pi x-3{,}01\right)\ \mathrm{m}.}$$

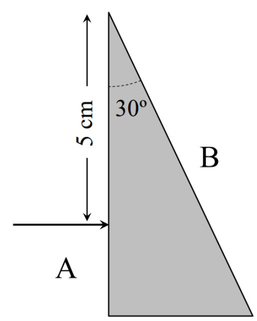
Pregunta 4. Opción A

Sobre la cara A de un prisma de material transparente incide perpendicularmente desde el aire un rayo de luz a una distancia de 5 cm desde el vértice superior, cuyo ángulo es de 30º (ver figura).

a) **Calcule el tiempo que tarda el rayo en alcanzar la cara B, y el ángulo de emergencia al aire a través de dicha cara, si el material es un vidrio con un índice de refracción de 1,5.**

b) **¿Emergerá el rayo por la cara B si el prisma es de diamante, cuyo índice de refracción es de 2,5? Razone la respuesta.**

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Índice de refracción del aire, $n_{\text{aire}} = 1$.



Solución:

a) **Calcule el tiempo que tarda el rayo en alcanzar la cara B, y el ángulo de emergencia al aire a través de dicha cara, si el material es un vidrio con un índice de refracción de 1,5.**

El rayo incide a 30° respecto a la normal y recorre una distancia horizontal de 5 cm hasta alcanzar la cara B. Utilizamos la tangente del ángulo para calcular la distancia vertical x dentro del prisma:

$$\tan(30°) = \frac{x}{5\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad x = \tan(30°) \cdot 5\,\text{cm} = 2{,}887\,\text{cm}.$$

La velocidad de la luz dentro del vidrio (v) se relaciona con la velocidad en el vacío (c) mediante el índice de refracción (n):

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}5} = 2 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

La distancia recorrida (D) por el rayo es $2{,}887\,\text{cm} = 2{,}887 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$. Por lo tanto, el tiempo (t) es:

$$t = \frac{D}{v} = \frac{2{,}887 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{2 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = 1{,}4435 \cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Aplicamos la Ley de Snell-Descartes en la interfaz vidrio-aire:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin(\alpha) = n_{\text{aire}} \cdot \sin(\theta_{\text{emergencia}}).$$

Dado que el rayo emerge al aire, $\theta_{\text{emergencia}}$ es el ángulo que forma con la normal:

$$\sin(\theta_{\text{emergencia}}) = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin(\alpha).$$

Sabemos que $\alpha = 30°$, entonces:

$$\sin(\theta_{\text{emergencia}}) = 1{,}5 \cdot \sin(30°) = 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75.$$

Así,

$$\theta_{\text{emergencia}} = \arcsin(0{,}75) = 48{,}59^\circ.$$

Por lo tanto, el tiempo que tarda el rayo en alcanzar la cara B es $1{,}44 \cdot 10^{-10}$ s y el ángulo de emergencia es de 48,59°.

b) **¿Emergerá el rayo por la cara B si el prisma es de diamante, cuyo índice de refracción es de 2,5? Razone la respuesta.**

Ahora, consideramos que el prisma está hecho de diamante con un índice de refracción de $n_{\text{diamante}} = 2{,}5$. Usamos la Ley de Snell:

$$n_{\text{diamante}} \cdot \sin(30^\circ) = n_{\text{aire}} \cdot \sin(\phi).$$

Sustituyendo los valores:

$$2{,}5 \cdot \sin(30^\circ) = 1 \cdot \sin(\phi) \quad \Rightarrow \quad \sin(\phi) = 2{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}25.$$

Dado que $\sin(\phi) = 1{,}25 > 1$, no existe un ángulo real ϕ que satisfaga esta ecuación. Entonces, se produce una *reflexión total interna*, lo que significa que el rayo no puede emerger por la cara B del prisma y se refleja completamente dentro del diamante.

Por lo tanto, el rayo no emergerá por la cara B del prisma de diamante debido a que se produce una reflexión total interna.

Andalucía, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta C. Opción 1

a) **Demuestre razonadamente, a partir de la ecuación de onda, cómo varían la velocidad y la aceleración máxima de oscilación de una onda armónica en las siguientes situaciones:**
   i. **Se duplica la amplitud sin modificar el periodo.**
   ii. **Se duplica la frecuencia sin modificar la amplitud.**

b) **En una cuerda se propaga una onda armónica cuya ecuación viene dada por: $y(x,t) = 0,2 \cdot \cos(0,2\pi x + 0,25\pi t + \pi)$ (S.I.). Calcule razonadamente:**
   i. **la frecuencia y la longitud de onda.**
   ii. **la velocidad de propagación de la onda, especificando su dirección y sentido de propagación.**
   iii. **la velocidad máxima de oscilación de la onda.**

Solución:

a) **Demuestre razonadamente, a partir de la ecuación de onda, cómo varían la velocidad y la aceleración máxima de oscilación de una onda armónica en las siguientes situaciones:**
   i. **Se duplica la amplitud sin modificar el periodo.**

La ecuación de una onda armónica es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \phi_0).$$

La velocidad de oscilación se obtiene derivando respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - kx + \phi_0).$$

La velocidad máxima de oscilación es:

$$v_{\max} = A \cdot \omega.$$

La aceleración de oscilación es la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t - kx + \phi_0).$$

La aceleración máxima de oscilación es:

$$a_{\max} = A \cdot \omega^2.$$

Si se duplica la amplitud ($A' = 2A$) sin modificar el periodo (por lo tanto, ω constante):

$$v'_{\max} = 2A \cdot \omega = 2v_{\max},$$

$$a'_{\max} = 2A \cdot \omega^2 = 2a_{\max}.$$

Por lo tanto, al duplicar la amplitud sin modificar el periodo, la velocidad y la aceleración máxima de oscilación se duplican.

   ii. **Se duplica la frecuencia sin modificar la amplitud.**

Si se duplica la frecuencia ($f' = 2f$), la frecuencia angular se duplica ($\omega' = 2\omega$), ya que

$$\omega = 2\pi f.$$

Manteniendo la amplitud constante ($A' = A$):

$$v'_{\max} = A \cdot \omega' = A \cdot 2\omega = 2v_{\max},$$

$$a'_{\max} = A \cdot (\omega')^2 = A \cdot (2\omega)^2 = 4A \cdot \omega^2 = 4a_{\max}.$$

Por lo tanto, al duplicar la frecuencia sin modificar la amplitud, la velocidad máxima de oscilación se duplica y la aceleración máxima se cuadruplica.

b) **En una cuerda se propaga una onda armónica cuya ecuación viene dada por: $\boldsymbol{y(x,t) = 0,2 \cdot \cos(0,2\pi x + 0,25\pi t + \pi)}$ (S.I.). Calcule razonadamente:**

i. **la frecuencia y la longitud de onda.**

Identificamos los parámetros de la ecuación de la onda:

$$A = 0{,}2\,\text{m}, \quad k = 0{,}2\pi\,\text{rad/m}, \quad \omega = 0{,}25\pi\,\text{rad/s}, \quad \phi_0 = \pi\,\text{rad}.$$

La frecuencia angular y el número de onda están relacionados con la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ):

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}25\pi}{2\pi} = 0{,}125\,\text{Hz}.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}2\pi} = 10\,\text{m}.$$

Por lo tanto, la frecuencia es 0,125 Hz y la longitud de onda es 10 m.

ii. **la velocidad de propagación de la onda, especificando su dirección y sentido de propagación.**

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{k} = \frac{0{,}25\pi}{0{,}2\pi} = 1{,}25\,\text{m/s}.$$

Observando la forma de la ecuación de la onda:

$$y(x,t) = A \cdot \cos(kx + \omega t + \phi_0),$$

vemos que el signo de kx y ωt es positivo. Esto indica que la onda se propaga en el sentido negativo del eje x.

Por lo tanto, la onda se propaga en el sentido negativo del eje x con una velocidad de 1,25 m/s.

iii. **la velocidad máxima de oscilación de la onda.**

La velocidad máxima de oscilación es:

$$v_{\max} = A \cdot \omega = 0{,}2\,\text{m} \cdot 0{,}25\pi\,\text{rad/s} = 0{,}157\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad máxima de oscilación de la onda es 0,157 m/s.

Pregunta C. Opción 2

a) Un rayo de luz monocromática duplica su longitud de onda al pasar del medio 1 al medio 2.

i. Determine razonadamente la relación entre los índices de refracción de los medios.

ii. Deduzca si el rayo se acerca o aleja de la normal a la superficie y explique si puede darse la reflexión total.

b) Sobre una lámina de caras planas y paralelas, rodeada de aire, incide un rayo de luz monocromática formando un ángulo de 80° con la normal a las superficies de las láminas. La longitud de onda del rayo en la lámina vale $3\lambda_0/4$, siendo λ_0 la longitud de onda en el aire.

i. Halle el índice de refracción en la lámina.

ii. Calcule el ángulo de refracción en la lámina y represente en un esquema la trayectoria del rayo.

iii. Obtenga el espesor de la lámina sabiendo que el rayo tarda $5,28 \cdot 10^{-10}$ s en atravesarla. Justifique sus respuestas.

Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $n_{\text{aire}} = 1$

Solución:

a) Un rayo de luz monocromática duplica su longitud de onda al pasar del medio 1 al medio 2.

i. Determine razonadamente la relación entre los índices de refracción de los medios.

El índice de refracción de un medio está relacionado con la longitud de onda en ese medio mediante:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío (o en el aire si $n_{\text{aire}} = 1$) y λ es la longitud de onda en el medio. Como la frecuencia f de la luz no cambia al pasar de un medio a otro, podemos escribir:

$$n \cdot \lambda = \text{constante}.$$

Entonces, para los dos medios:

$$n_1 \cdot \lambda_1 = n_2 \cdot \lambda_2.$$

Dado que la longitud de onda en el medio 2 es el doble que en el medio 1:

$$\lambda_2 = 2 \cdot \lambda_1.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$n_1 \cdot \lambda_1 = n_2 \cdot (2 \cdot \lambda_1),$$

simplificando:

$$n_1 = 2 \cdot n_2.$$

Por lo tanto, la relación entre los índices de refracción es:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el índice de refracción del medio 2 es la mitad del índice de refracción del medio 1, es decir, $n_2 = \frac{1}{2} n_1$.

ii. Deduzca si el rayo se acerca o aleja de la normal a la superficie y explique si puede darse la reflexión total.

Según la Ley de Snell:

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2.$$

Como $n_2 < n_1$ (ya que $n_2 = \frac{1}{2}\, n_1$), entonces:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin\theta_1 = 2 \cdot \sin\theta_1.$$

Esto implica que $\theta_2 > \theta_1$, es decir, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia. Por lo tanto, el rayo se aleja de la normal al pasar del medio 1 al medio 2.

Para que se produzca reflexión total interna, la luz debe pasar de un medio más refringente a uno menos refringente ($n_1 > n_2$) y el ángulo de incidencia debe ser mayor que el ángulo crítico, dado por:

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}.$$

En este caso, como $n_2 < n_1$, es posible que se produzca reflexión total si $\theta_1 > \theta_c$.

Por lo tanto, el rayo se aleja de la normal y es posible que se produzca reflexión total interna.

b) Sobre una lámina de caras planas y paralelas, rodeada de aire, incide un rayo de luz monocromática formando un ángulo de 80° con la normal a las superficies de las láminas. La longitud de onda del rayo en la lámina vale $3\lambda_0/4$, siendo λ_0 la longitud de onda en el aire.

i. Halle el índice de refracción en la lámina.

Sabemos que la relación entre el índice de refracción y la longitud de onda es:

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el aire y λ es la longitud de onda en el medio. Dado que:

$$\lambda = \frac{3}{4}\,\lambda_0,$$

entonces

$$n = \frac{\lambda_0}{\frac{3}{4}\,\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1{,}33.$$

Por lo tanto, el índice de refracción de la lámina es $n = \frac{4}{3}$.

ii. Calcule el ángulo de refracción en la lámina y represente en un esquema la trayectoria del rayo.

Aplicamos la Ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \cdot \sin\theta_i = n_{\text{lámina}} \cdot \sin\theta_r.$$

Se tiene que

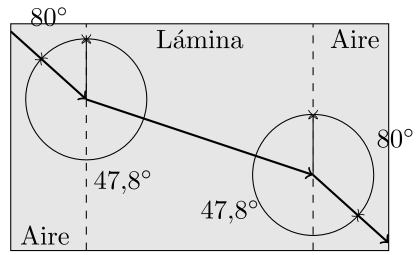
$$n_{\text{aire}} = 1, \quad \theta_i = 80°, \quad n_{\text{lámina}} = \frac{4}{3}.$$

Despejamos el ángulo de refracción θ_r:

$$\sin\theta_r = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{lámina}}} \cdot \sin\theta_i = \frac{1}{\frac{4}{3}} \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{4} \cdot \sin 80^\circ = 0{,}7386 \quad \Rightarrow \quad \theta_r = \arcsin(0{,}7386) = 47{,}8^\circ.$$

Por lo tanto, el ángulo de refracción en la lámina es aproximadamente 47,8°.

El esquema de la trayectoria del rayo es:



iii. Obtenga el espesor de la lámina sabiendo que el rayo tarda $5,28{\cdot}10^{-10}$ s en atravesarla. Justifique sus respuestas.

Primero, calculamos la velocidad de la luz en el medio:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{\frac{4}{3}} = \frac{9 \cdot 10^8}{4}\,\text{m/s} = 2{,}25 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

La distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina es:

$$d = v \cdot t = 2{,}25 \cdot 10^8\,\text{m/s} \cdot 5{,}28 \cdot 10^{-10}\,\text{s} = 0{,}1188\,\text{m}.$$

El espesor de la lámina e es la proyección de esta distancia en la dirección normal a la lámina. Dado que el rayo atraviesa la lámina con un ángulo $\theta_r = 47{,}8^\circ$:

$$e = d \cdot \cos\theta_r = 0{,}1188\,\text{m} \cdot \cos 47{,}8^\circ = 0{,}0801\,\text{m}.$$

Por lo tanto, el espesor de la lámina es 0,08 m.

Andalucía, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta C. Opción 2

a) **Explique las diferencias entre ondas longitudinales y ondas transversales, proporcionando un ejemplo representativo de cada tipo.**

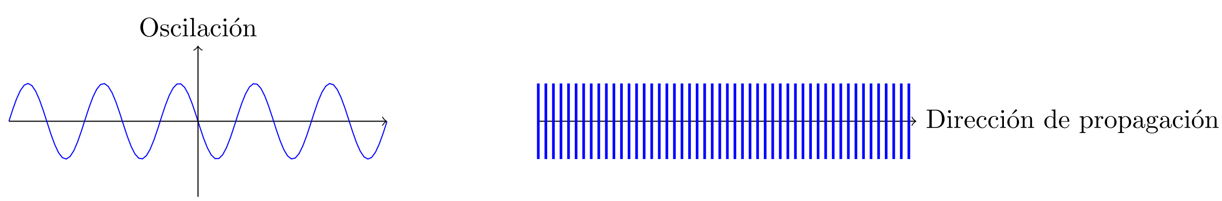
b) **Considere un oleaje que se propaga en el sentido positivo del eje OX. Una boya, situada en $x = 10$ m, describe una oscilación armónica vertical con una amplitud de 0,4 m y un periodo de 2 segundos. La velocidad de propagación de las olas en la superficie del mar es de $0,5\,\mathrm{m\ s^{-1}}$. Determine razonadamente:**
   i. **la longitud de onda de las olas.**
   ii. **la ecuación de onda, asumiendo que, en el instante inicial $t = 0$ s, la altura de la boya es máxima.**
   iii. **la velocidad máxima de oscilación de la boya.**

Solución:

a) **Explique las diferencias entre ondas longitudinales y ondas transversales, proporcionando un ejemplo representativo de cada tipo.**

Las ondas longitudinales son aquellas en las que las partículas del medio oscilan en la misma dirección que la propagación de la onda. Un ejemplo típico es el *sonido en el aire*, donde las moléculas se comprimen y expanden en la dirección de propagación.

Las ondas transversales son aquellas en las que las partículas del medio oscilan en dirección perpendicular a la propagación de la onda. Un ejemplo representativo es la *onda en una cuerda*, donde la perturbación se mueve hacia arriba y abajo mientras la onda se propaga horizontalmente.



Onda Transversal   Onda Longitudinal

Por lo tanto, la principal diferencia radica en la dirección de oscilación de las partículas respecto a la dirección de propagación de la onda.

b) **Considere un oleaje que se propaga en el sentido positivo del eje OX. Una boya, situada en $x = 10$ m, describe una oscilación armónica vertical con una amplitud de 0,4 m y un periodo de 2 segundos. La velocidad de propagación de las olas en la superficie del mar es de $0,5\,\mathrm{m\ s^{-1}}$. Determine razonadamente:**
   i. **la longitud de onda de las olas.**

La longitud de onda λ se relaciona con la velocidad de propagación v y el periodo T mediante la ecuación:

$$\lambda = v \cdot T$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\lambda = (0,5\,\mathrm{m\ s^{-1}}) \cdot (2\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda de las olas es $\boldsymbol{\lambda = 1}$ m.

ii. la ecuación de onda, asumiendo que, en el instante inicial $t = 0$ s, la altura de la boya es máxima.

La ecuación general de una onda que se propaga en el sentido positivo del eje x es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi),$$

donde:

* A es la amplitud,
* k es el número de onda, dado por $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$,
* ω es la frecuencia angular, dada por $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$,
* φ es la fase inicial.

Calculamos k y ω:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}0\,\mathrm{m}} = 2\pi\,\mathrm{m}^{-1},$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,\mathrm{s}} = \pi\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Como la boya está en $x = 10$ m y alcanza su altura máxima en $t = 0$ s, entonces:

$$y(10\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{s}) = A.$$

Entonces,

$$A = A \cdot \sin(k \cdot 10\,\mathrm{m} + \varphi) \quad \Rightarrow \quad 1 = \sin(20\pi + \varphi).$$

Sabemos que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, donde n es un entero. Entonces, podemos ajustar la fase inicial a $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, ya que las funciones seno son periódicas cada 2π. La ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = 0{,}4\,\mathrm{m} \cdot \sin\left(2\pi\,\mathrm{m}^{-1} \cdot x - \pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Utilizando la identidad $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$, la ecuación puede simplificarse:

$$y(x,t) = 0{,}4\,\mathrm{m} \cdot \cos\left(2\pi\,\mathrm{m}^{-1} \cdot x - \pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t\right).$$

Por lo tanto, la ecuación de la onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}4\,\mathrm{m} \cdot \cos\left(2\pi\,\mathrm{m}^{-1} \cdot x - \pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t\right).}$$

iii. la velocidad máxima de oscilación de la boya.

La velocidad transversal de oscilación es la derivada parcial de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cdot \sin(kx - \omega t).$$

La velocidad máxima ocurre cuando $\sin(kx - \omega t) = \pm 1$:

$$v_{\text{máx}} = A\omega = 0{,}4\,\mathrm{m} \cdot \pi\,\mathrm{s}^{-1} = 1{,}2566\,\mathrm{m\ s}^{-1}.$$

Por lo tanto, la velocidad máxima de oscilación de la boya es aproximadamente $\boldsymbol{1{,}26\,\mathrm{m\ s}^{-1}}$.

Andalucía, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta C. Opción 2

a) Un rayo de luz monocromática duplica su velocidad al pasar de un medio a otro.
   i. Represente la trayectoria de un rayo que incide con un ángulo no nulo respecto a la normal, y justifique si puede producirse el fenómeno de la reflexión total.
   ii. Determine razonadamente la relación entre las longitudes de onda en ambos medios.

b) Un rayo de luz de $8,22 \cdot 10^{14}$ Hz se propaga por el interior de un líquido con una longitud de onda de $1,46 \cdot 10^{-7}$ m.
   i. Calcule su longitud de onda en el aire.
   ii. Calcule la velocidad del rayo en el líquido y el índice de refracción del líquido.
   iii. Si el rayo se propaga por el líquido e incide en la superficie de separación con el aire con un ángulo de 10° respecto a la normal, realice un esquema con la trayectoria de los rayos y calcule los ángulos de refracción y de reflexión.

Dato: $n_{\text{aire}} = 1$; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

Solución:

a) Un rayo de luz monocromática duplica su velocidad al pasar de un medio a otro.
   i. Represente la trayectoria de un rayo que incide con un ángulo no nulo respecto a la normal, y justifique si puede producirse el fenómeno de la reflexión total.

Tenemos que:

$$v_1 = 2v_2.$$

Aplicamos la Ley de Snell:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin i}{\sin t} \quad \Rightarrow \quad \frac{2v_2}{v_2} = \frac{\sin i}{\sin t} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{\sin i}{\sin t}.$$

Despejamos:

$$\sin t = \frac{\sin i}{2}.$$

Dado que $\sin t \leq 1$, para que exista refracción, debemos tener:

$$\sin i \leq 2 \quad \text{(siempre cierto)}.$$

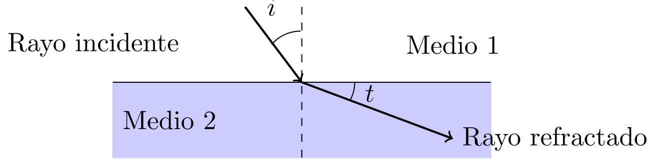
Sin embargo, el ángulo de refracción será mayor que el de incidencia, ya que:

$$t = \arcsin\left(\frac{\sin i}{2}\right) > i.$$

Para determinar si puede ocurrir reflexión total interna, calculamos el ángulo límite (l):

$$\sin l = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad l = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°.$$

Entonces, si el ángulo de incidencia es mayor que 30°, se producirá reflexión total interna:



Por lo tanto, puede producirse reflexión total si el ángulo de incidencia es mayor que 30°.

ii. Determine razonadamente la relación entre las longitudes de onda en ambos medios.

Sabemos que la relación entre las velocidades y las longitudes de onda es:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Como $v_1 = 2v_2$, entonces:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = 2.$$

Por lo tanto, la longitud de onda en el primer medio es el doble que en el segundo, es decir, $\boldsymbol{\lambda_1 = 2\lambda_2}$.

b) **Un rayo de luz de $\mathbf{8,22 \cdot 10^{14}}$ Hz se propaga por el interior de un líquido con una longitud de onda de $\mathbf{1,46 \cdot 10^{-7}}$ m.**

i. Calcule su longitud de onda en el aire.

La longitud de onda en el aire es:

$$\lambda_{\text{aire}} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{8{,}22 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 3{,}65 \cdot 10^{-7}\,\text{m}.$$

Por lo tanto, su longitud de onda en el aire es $\mathbf{3{,}65 \cdot 10^{-7}}$ m.

ii. Calcule la velocidad del rayo en el líquido y el índice de refracción del líquido.

La velocidad del rayo en el líquido es:

$$v_{\text{líquido}} = \lambda_{\text{líquido}} \cdot f = 1{,}46 \cdot 10^{-7}\,\text{m} \cdot 8{,}22 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} = 1{,}2 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

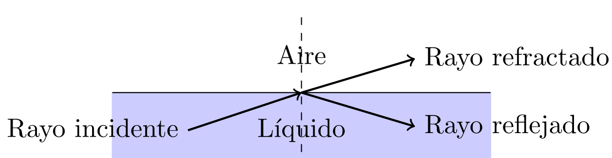
El índice de refracción del líquido es:

$$n_{\text{líquido}} = \frac{c}{v_{\text{líquido}}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}2 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = 2{,}5.$$

Por lo tanto, la velocidad del rayo en el líquido es $\mathbf{1{,}2 \cdot 10^8}$ m/s y el índice de refracción es 2,5.

iii. Si el rayo se propaga por el líquido e incide en la superficie de separación con el aire con un ángulo de 10° respecto a la normal, realice un esquema con la trayectoria de los rayos y calcule los ángulos de refracción y de reflexión.

El esquema pedido es:



Aplicamos la Ley de Snell:

$$n_{\text{líquido}} \cdot \sin i = n_{\text{aire}} \cdot \sin t \quad \Rightarrow \quad 2{,}5 \cdot \sin 10^\circ = 1 \cdot \sin t.$$

Calculamos $\sin t$:

$$\sin t = 2{,}5 \cdot \sin 10^\circ = 2{,}5 \cdot 0{,}1736 = 0{,}4341.$$

Entonces,

$$t = \arcsin(0{,}4341) = 25{,}73^\circ.$$

El ángulo de reflexión es igual al de incidencia:

$$r = i = 10^\circ.$$

Por lo tanto, el ángulo de refracción es 25,73° y el ángulo de reflexión es 10°.

Andalucía, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta C. Opción 1

a) **Un rayo de luz pasa del aire a otro medio con un índice de refracción mayor. Razone cómo cambian el ángulo con la normal, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.**

b) **Un haz de luz con una longitud de onda de $5,5 \cdot 10^{-7}$ m que se propaga a través del aire incide sobre la superficie de un material transparente. El haz incidente forma un ángulo de 40º con la normal, mientras que el haz refractado forma un ángulo de 26º con la normal.**

   i. **Realice un esquema con la trayectoria de los rayos y calcule el índice de refracción del material.**

   ii. **Determine razonadamente su longitud de onda en el interior del mismo.**

Dato: $n_{aire} = 1$; $c = 3 \cdot 10^8$ **m/s**

Solución:

a) **Un rayo de luz pasa del aire a otro medio con un índice de refracción mayor. Razone cómo cambian el ángulo con la normal, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.**

Al pasar de un medio con índice de refracción menor (aire, $n_1 = 1$) a otro con índice de refracción mayor ($n_2 > n_1$), ocurren los siguientes cambios:

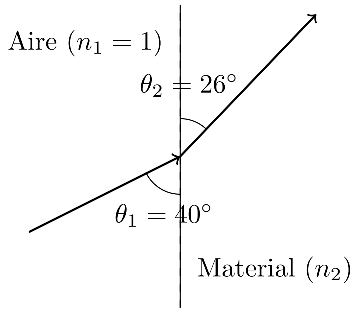
- Velocidad de propagación (v): La velocidad de la luz disminuye en el medio de mayor índice de refracción, ya que:
$$v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{c}{n_2} < v_1 = \frac{c}{n_1}.$$
- Frecuencia (f): La frecuencia de la luz no cambia al pasar de un medio a otro, es decir, $f_2 = f_1$, porque depende únicamente de la fuente emisora.
- Longitud de onda (λ): La longitud de onda disminuye en el medio de mayor índice de refracción, dado que:
$$\lambda = \frac{v}{f} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{v_2}{f} < \lambda_1 = \frac{v_1}{f}.$$
- Ángulo con la normal (θ): Según la Ley de Snell:
$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2.$$
Como $n_2 > n_1$, se tiene que $\sin\theta_2 < \sin\theta_1$, por lo que $\theta_2 < \theta_1$. Es decir, el rayo se acerca a la normal al entrar en el medio.

Por lo tanto, al entrar en un medio de mayor índice de refracción, la velocidad y la longitud de onda disminuyen, la frecuencia permanece constante y el rayo se acerca a la normal (disminuye el ángulo con la normal).

b) **Un haz de luz con una longitud de onda de $5,5 \cdot 10^{-7}$ m que se propaga a través del aire incide sobre la superficie de un material transparente. El haz incidente forma un ángulo de 40º con la normal, mientras que el haz refractado forma un ángulo de 26º con la normal.**

   i. **Realice un esquema con la trayectoria de los rayos y calcule el índice de refracción del material.**

   El esquema pedido es:



Aplicamos la ley de Snell:

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2.$$

Dado que $n_1 = 1$, $\theta_1 = 40°$ y $\theta_2 = 26°$, despejamos n_2:

$$n_2 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\sin 40°}{\sin 26°}.$$

Calculamos:

$$n_2 = \frac{\sin 40°}{\sin 26°} = \frac{0{,}6428}{0{,}4384} = 1{,}466.$$

Por lo tanto, el índice de refracción del material es $n_2 = 1{,}466$.

ii. Determine razonadamente su longitud de onda en el interior del mismo.

La frecuencia de la luz permanece constante al cambiar de medio:

$$f = \frac{c}{\lambda_{\text{aire}}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{5{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}} = 5{,}45 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.$$

La velocidad de la luz en el material es:

$$v = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}466} = 2{,}046 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

Entonces, la longitud de onda en el material es:

$$\lambda_{\text{material}} = \frac{v}{f} = \frac{2{,}046 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{5{,}45 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 3{,}75 \cdot 10^{-7}\,\text{m}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda en el material es $3{,}75 \cdot 10^{-7}$ m.

Andalucía, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta C. Opción 1

a) **¿Qué significa que una onda armónica es doblemente periódica? Explíquelo apoyándose en las gráficas correspondientes.**

b) **Una onda armónica transversal se propaga en sentido negativo del eje OX con una velocidad de propagación de $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Si su longitud de onda es de $1,5$ m y su amplitud es de 2 m:**
   i. **escriba la ecuación de la onda teniendo en cuenta que en el punto $x = 0$ m y en el instante $t = 0$ s la perturbación es nula y la velocidad de oscilación es positiva.**
   ii. **determine la velocidad máxima de oscilación de un punto cualquiera del medio.**

Solución:

a) **¿Qué significa que una onda armónica es doblemente periódica? Explíquelo apoyándose en las gráficas correspondientes.**

Recordamos que la ecuación general de una onda armónica que se propaga en el eje x es:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t \pm kx + \delta),$$

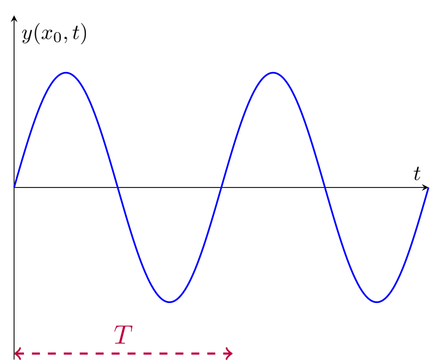
donde:
- A es la amplitud,
- $\omega = 2\pi f$ es la pulsación o frecuencia angular temporal,
- $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda o frecuencia espacial,
- δ es la fase inicial,
- El signo $\pm$ depende de la dirección de propagación.

Una onda armónica es *doblemente periódica* porque presenta periodicidad tanto en el espacio como en el tiempo. Esto significa que la onda se repite en intervalos regulares a lo largo del espacio y también a lo largo del tiempo.

La *periodicidad temporal* se refiere a que en un punto fijo del espacio, la perturbación se repite cada cierto tiempo T (período). Matemáticamente:

$$y(x_0,t) = y(x_0,t+T).$$

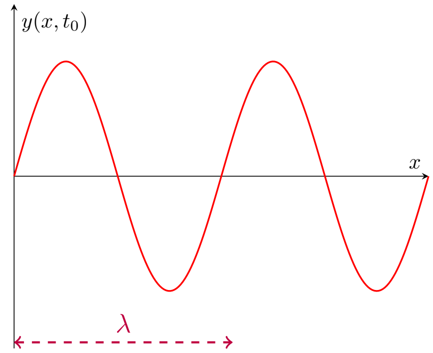
Gráficamente, si observamos la oscilación en un punto fijo x_0, obtenemos una gráfica de y vs. t que muestra una función sinusoidal con período T:



La *periodicidad espacial* indica que en un instante fijo t_0, la forma de la onda se repite cada una distancia λ (longitud de onda). Matemáticamente:

$$y(x,t_0) = y(x+\lambda,t_0).$$

Gráficamente, si congelamos el tiempo y observamos la onda a lo largo del espacio, obtenemos una gráfica de y vs. x que muestra una función sinusoidal con período espacial λ:



Por lo tanto, una onda armónica es doblemente periódica porque se repite en el espacio cada longitud de onda $\boldsymbol{\lambda}$ y en el tiempo cada período $\boldsymbol{T}$.

b) **Una onda armónica transversal se propaga en sentido negativo del eje OX con una velocidad de propagación de $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Si su longitud de onda es de $1,5$ m y su amplitud es de 2 m:**

i. **escriba la ecuación de la onda teniendo en cuenta que en el punto $x = 0$ m y en el instante $t = 0$ s la perturbación es nula y la velocidad de oscilación es positiva.**

Tenemos que:

* Amplitud: $A = 2\,\mathrm{m}$.
* Longitud de onda: $\lambda = 1{,}5\,\mathrm{m}$.
* Velocidad de propagación: $v = 3\,\mathrm{m/s}$.
* Dirección de propagación: sentido negativo del eje x.

Observamos que:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}5} = \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{rad/m},$$

$$\omega = k \cdot v = \frac{4\pi}{3} \cdot 3 = 4\pi\,\mathrm{rad/s}.$$

Como la onda se propaga en el sentido negativo de x, usamos el signo $+$ en la ecuación general de la onda:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t + kx + \delta).$$

En $x = 0\,\mathrm{m}$ y $t = 0\,\mathrm{s}$:

$$y(0,0) = A\sin(\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0.$$

La velocidad de oscilación es:

$$v_{\text{oscil}} = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega\cos(\omega t + kx + \delta).$$

En $x = 0\,\mathrm{m}$ y $t = 0\,\mathrm{s}$:

$$v_{\text{oscil}}(0,0) = A\omega\cos(\delta) = 2 \cdot 4\pi \cdot \cos(0) = 8\pi\,\mathrm{m/s}.$$

Como $v_{\text{oscil}}(0,0) > 0$, la condición se cumple.

Por lo tanto, la ecuación de la onda es $\boldsymbol{y(x,t) = 2\sin\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)}$.

ii. determine la velocidad máxima de oscilación de un punto cualquiera del medio.

La velocidad de oscilación es:

$$v_{\text{oscil}} = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t + kx + \delta).$$

La velocidad máxima ocurre cuando $\cos(\omega t + kx + \delta) = \pm 1$:

$$v_{\text{oscil máx}} = A \cdot \omega = 2 \cdot 4\pi = 8\pi \, \text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad máxima de oscilación es 8π m/s.

Andalucía, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta C. Opción 1

a) Un rayo de luz monocromática se propaga por el aire e incide formando un ángulo de incidencia θ sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas. El rayo atraviesa la lámina, se propaga por el vidrio y sale nuevamente al aire.

i. Dibuje un esquema de la trayectoria que sigue el rayo en el proceso descrito.

ii. Analice su velocidad, longitud de onda y frecuencia a lo largo del camino citado.

b) Un rayo de luz monocromática se propaga desde el aire al agua, e incide formando un ángulo de 30º con la normal a la superficie. El rayo refractado forma un ángulo de 128º con el reflejado.

i. Determine el ángulo de refracción ayudándose de un esquema.

ii. Determine la velocidad de propagación de la luz en el agua.

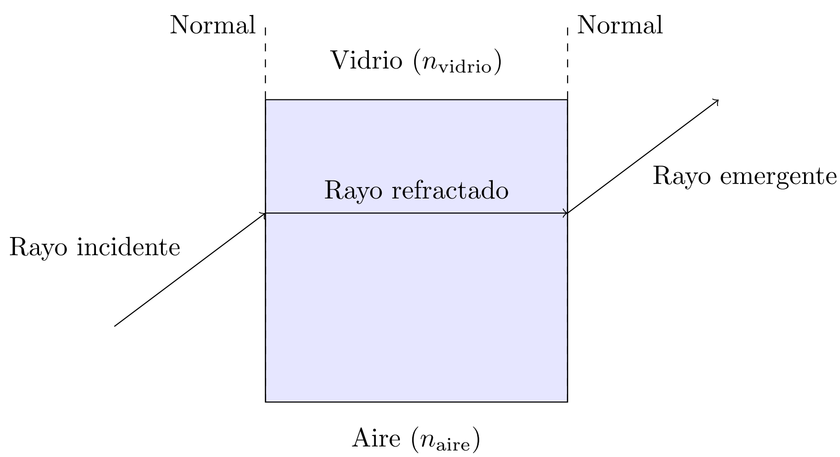
iii. Si el rayo luminoso se dirigiera desde el agua hacia el aire, ¿a partir de qué ángulo de incidencia se produciría la reflexión total? Justifique sus respuestas.

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$; $c = 3 \cdot 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

Solución:

a) Un rayo de luz monocromática se propaga por el aire e incide formando un ángulo de incidencia θ sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas. El rayo atraviesa la lámina, se propaga por el vidrio y sale nuevamente al aire.

i. Dibuje un esquema de la trayectoria que sigue el rayo en el proceso descrito.



Por lo tanto, el esquema muestra la trayectoria del rayo incidente, refractado y emergente con los ángulos correspondientes.

ii. Analice su velocidad, longitud de onda y frecuencia a lo largo del camino citado.

Analizamos las magnitudes oscilatorias:

∗ <u>Velocidad de la onda:</u>

$$v = \frac{c}{n},$$

donde:

· c es la velocidad de la luz en el vacío ($3 \cdot 10^8$ m/s).

· n es el índice de refracción del medio.

$$v_{\text{aire}} = \frac{c}{n_{\text{aire}}} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{1} = 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}.$$

$$v_{\text{vidrio}} = \frac{c}{n_{\text{vidrio}}} \quad (\text{donde } n_{\text{vidrio}} > 1).$$

∗ Longitud de Onda:

$$\lambda = \frac{v}{f},$$

donde f es la frecuencia de la luz. Dado que la frecuencia de la luz no cambia al pasar de un medio a otro ($f_{\text{aire}} = f_{\text{vidrio}}$), la longitud de onda se reduce en el vidrio:

$$\lambda_{\text{vidrio}} = \frac{v_{\text{vidrio}}}{f} < \lambda_{\text{aire}} = \frac{v_{\text{aire}}}{f}.$$

∗ Frecuencia:

$$f = \frac{c}{\lambda_{\text{aire}}} = \frac{v_{\text{vidrio}}}{\lambda_{\text{vidrio}}}.$$

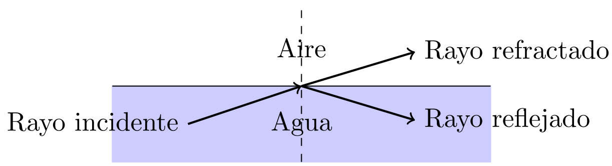
La frecuencia permanece constante a lo largo de todo el recorrido del rayo.

Por lo tanto, al atravesar la lámina de vidrio, la velocidad de la luz disminuye, la longitud de onda se reduce, y la frecuencia permanece constante.

b) Un rayo de luz monocromática se propaga desde el aire al agua, e incide formando un ángulo de 30º con la normal a la superficie. El rayo refractado forma un ángulo de 128º con el reflejado.

i. Determine el ángulo de refracción ayudándose de un esquema.

El esquema pedido es:



Vemos en el esquema que $\theta_{\text{refl}} + 128° + \theta_{\text{refl}} = 180°$, por lo que $\theta_{\text{refl}} = 22°$.

Por lo tanto, el ángulo de refracción es 22°.

ii. Determine la velocidad de propagación de la luz en el agua.

Aplicando la Ley de Snell:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \sin 30° = n_{\text{agua}} \cdot \sin 22° \quad \Rightarrow \quad n_{\text{agua}} = \frac{\sin 30°}{\sin 22°} = 1,33.$$

Sabemos que el índice de refracción (n) está relacionado con la velocidad de la luz en el medio (v) mediante:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Por lo tanto, la velocidad de la luz en el agua es:

$$v = \frac{c}{n_{\text{agua}}}.$$

Dado que

$$n_{\text{agua}} = 1{,}33 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}33} = 2{,}26 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la luz en el agua es $\mathbf{2{,}26 \cdot 10^8}$ m/s.

iii. Si el rayo luminoso se dirigiera desde el agua hacia el aire, ¿a partir de qué ángulo de incidencia se produciría la reflexión total? Justifique sus respuestas.

Aplicamos de nuevo la Ley de Snell:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin\theta_{\text{lim}} = n_{\text{aire}} \cdot \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{\sin 90°}{1,33}\right) = 48,75°.$$

Por lo tanto, el ángulo límite es $\mathbf{48,75°}$.

Andalucía, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Pregunta C. Opción 1

a) Un rayo de luz monocromática pasa de un medio de índice de refracción n_1 a otro medio con índice de refracción n_2, siendo $n_1 < n_2$. Razone y justifique la veracidad o falsedad de las siguientes frases:
i. La velocidad de dicho rayo aumenta al pasar del primer medio al segundo.
ii. La longitud de onda del rayo es mayor en el segundo medio.

b) Sea un recipiente que contiene agua que llega hasta una altura de 0,25 m, y sobre la que se ha colocado una capa de aceite. Procedente del aire, incide sobre la capa de aceite un rayo de luz que forma 50° con la normal a la superficie de separación aire-aceite.
i. Haga un esquema de la trayectoria que sigue el rayo en los diferentes medios (aire, aceite y agua), en el que se incluyan los valores de los ángulos que forman con la normal los rayos refractados en el aceite y en el agua.
ii. Calcule la velocidad de la luz en el agua.

Datos: $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $n_{\text{aire}} = 1$; $n_{\text{aceite}} = 1{,}47$; $n_{\text{agua}} = 1{,}33$

Solución:

a) Un rayo de luz monocromática pasa de un medio de índice de refracción n_1 a otro medio con índice de refracción n_2, siendo $n_1 < n_2$. Razone y justifique la veracidad o falsedad de las siguientes frases:
i. La velocidad de dicho rayo aumenta al pasar del primer medio al segundo.

La afirmación es falsa. La velocidad de la luz en un medio está relacionada con su índice de refracción mediante la fórmula:

$$v = \frac{c}{n},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción del medio. Dado que $n_1 < n_2$, se tiene:

$$v_1 = \frac{c}{n_1} > v_2 = \frac{c}{n_2}.$$

Por lo tanto, la velocidad de la luz *disminuye* al pasar del primer medio al segundo.

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

ii. La longitud de onda del rayo es mayor en el segundo medio.

La afirmación es falsa. La longitud de onda λ de la luz en un medio está relacionada con su velocidad y frecuencia mediante la ecuación:

$$v = \lambda \cdot f,$$

donde f es la frecuencia de la luz, que permanece constante al cambiar de medio. Dado que la velocidad disminuye al pasar al segundo medio ($v_2 < v_1$), la longitud de onda también disminuye:

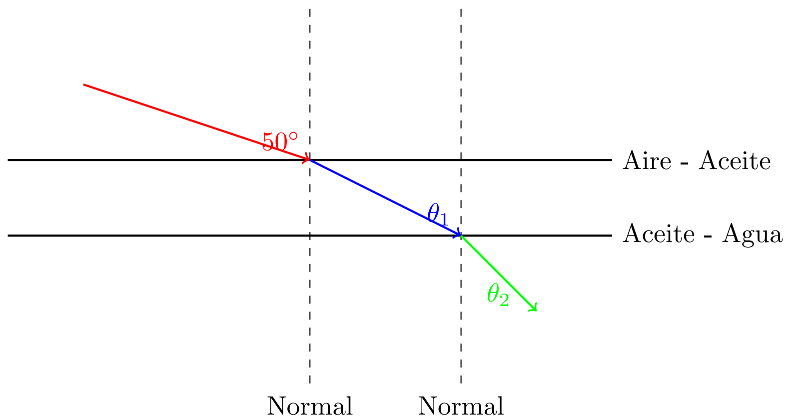
$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} < \lambda_1 = \frac{v_1}{f}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda del rayo es *menor* en el segundo medio.

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

b) Sea un recipiente que contiene agua que llega hasta una altura de 0,25 m, y sobre la que se ha colocado una capa de aceite. Procedente del aire, incide sobre la capa de aceite un rayo de luz que forma 50° con la normal a la superficie de separación aire-aceite.

i. Haga un esquema de la trayectoria que sigue el rayo en los diferentes medios (aire, aceite y agua), en el que se incluyan los valores de los ángulos que forman con la normal los rayos refractados en el aceite y en el agua.



En el diagrama se muestra el rayo de luz incidente desde el aire hacia la capa de aceite, formando un ángulo de 50° con la normal. Al entrar en el aceite, el rayo se refracta formando un ángulo θ_1 con la normal, y al pasar al agua, se refracta nuevamente formando un ángulo θ_2.

Por lo tanto, el esquema muestra la trayectoria del rayo con los ángulos refractados $\boldsymbol{\theta_1}$ en el aceite y $\boldsymbol{\theta_2}$ en el agua.

ii. Calcule la velocidad de la luz en el agua.

La velocidad de la luz en un medio está relacionada con su índice de refracción mediante la fórmula:

$$v = \frac{c}{n},$$

donde $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción del medio. Para el agua, con $n_{\text{agua}} = 1{,}33$, la velocidad de la luz es:

$$v_{\text{agua}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{1{,}33} = 2{,}26 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Por lo tanto, la velocidad de la luz en el agua es $\mathbf{2{,}26 \cdot 10^8\,m \cdot s^{-1}}$.

Andalucía, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Pregunta C. Opción 1

a)
i. Justifique que en una onda estacionaria la amplitud varía en cada punto.
ii. Realice una representación gráfica de una onda estacionaria en función del espacio, y explique qué se entiende por un nodo en este tipo de ondas.

b) Una onda estacionaria queda descrita mediante la ecuación:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \cos(40\pi t)\ (\text{S.I.}).}$$

Determine razonadamente:
i. Amplitud, longitud de onda y velocidad de propagación de las ondas armónicas cuya superposición da lugar a esta onda estacionaria.
ii. Posición de los vientres y amplitud de los mismos.

Solución:

a)
i. Justifique que en una onda estacionaria la amplitud varía en cada punto.

Una onda estacionaria puede describirse mediante la expresión:

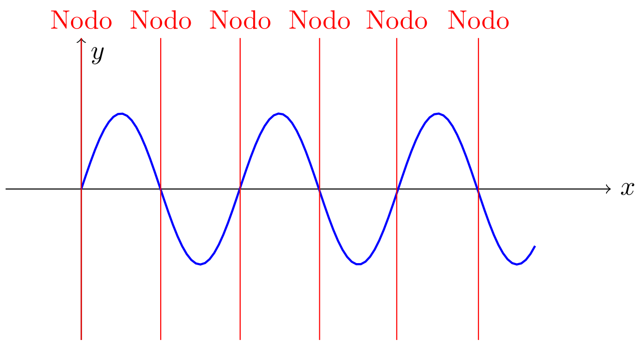
$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

Al fijar un instante de tiempo t, la posición x determina la amplitud de la onda en ese punto. Nótese que $2A\sin(kx)$ representa la amplitud local en cada punto x. Como $\sin(kx)$ varía con x, la amplitud de la onda no es constante en todos los puntos, sino que depende de la posición x.

Por lo tanto, en una onda estacionaria, la amplitud varía en cada punto.

ii. Realice una representación gráfica de una onda estacionaria en función del espacio, y explique qué se entiende por un nodo en este tipo de ondas.

A continuación, se muestra una representación gráfica de una onda estacionaria:



En una onda estacionaria, un *nodo* es un punto en el espacio donde la amplitud de la onda es siempre cero, es decir, no se produce desplazamiento en esos puntos. Los nodos se encuentran equidistantes entre sí y son puntos donde las ondas que se superponen interfieren destructivamente.

Por lo tanto, un nodo es un punto de amplitud nula en una onda estacionaria.

b) Una onda estacionaria queda descrita mediante la ecuación:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \cos(40\pi t)\ (\text{S.I.}).}$$

Determine razonadamente:

i. Amplitud, longitud de onda y velocidad de propagación de las ondas armónicas cuya superposición da lugar a esta onda estacionaria.

La onda estacionaria está dada por:

$$y(x,t) = 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \cos(40\pi t).$$

Esta expresión puede compararse con la forma general de una onda estacionaria:

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t).$$

De esta comparación, se identifican los siguientes parámetros:

* Amplitud: $2A = 0{,}5 \Rightarrow A = 0{,}25\,\mathrm{m}$
* Número de onda: $k = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad/m}$
* Frecuencia angular: $\omega = 40\pi\,\mathrm{rad/s}$

Longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6\,\mathrm{m}.$$

Velocidad de propagación:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi}{\pi/3} = 120\,\mathrm{m/s}$$

Por lo tanto:

$$\textbf{Amplitud} = \mathbf{0{,}25\,m},$$
$$\textbf{Longitud de onda} = \mathbf{6\,m},$$
$$\textbf{Velocidad de propagación} = \mathbf{120\,m/s}.$$

ii. Posición de los vientres y amplitud de los mismos.

En una onda estacionaria, los *vientres* (antíodos) son los puntos donde la amplitud de la onda es máxima, es decir, $y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t) = \pm 2A$. Nótese que la distancia entre dos vientres consecutivos es $\lambda/2 = 3\,\mathrm{m}$.
Para encontrar las posiciones de los vientres, buscamos los puntos donde $\sin(kx) = \pm 1$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \pm 1$$

Resolviendo para x:

$$\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} + 3n\,\mathrm{m}, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Así, las posiciones de los vientres son:

$$x = \frac{3}{2}\,\mathrm{m}, \quad \frac{9}{2}\,\mathrm{m}, \quad \frac{15}{2}\,\mathrm{m}, \quad \ldots$$

Es decir, a $x = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $x = 4{,}5\,\mathrm{m}$, $x = 7{,}5\,\mathrm{m}$, etc., cada $3\,\mathrm{m}$.

Amplitud de los vientres: La amplitud máxima en los vientres es $2A = 0{,}5\,\mathrm{m}$.

Por lo tanto:

$$\textbf{Posición de los vientres}: \boldsymbol{x} = \mathbf{1{,}5\,m}, \quad \mathbf{4{,}5\,m}, \quad \mathbf{7{,}5\,m}, \quad \ldots$$
$$\textbf{Amplitud de los vientres}: \mathbf{0{,}5\,m}$$

Pregunta C. Opción 2

a) **Razone y justifique la veracidad o falsedad de las siguientes frases:**
   i. **Cuando la luz pasa de un medio a otro experimenta un aumento de su velocidad si el segundo medio tiene un índice de refracción mayor que el primero.**
   ii. **La reflexión total de la luz en la superficie de separación de dos medios puede producirse cuando el índice de refracción del segundo medio es mayor que el del primero.**

b) **Un rayo de luz con componentes azul y roja de longitudes de onda en el aire de $4{,}5 \cdot 10^{-7}$ m y $6{,}9 \cdot 10^{-7}$ m, respectivamente, incide desde el aire sobre una placa de un determinado material con un ángulo de 40° respecto a la normal a la superficie de la placa.**
   i. **Mediante un esquema, y de manera razonada, indique la trayectoria de los rayos azul y rojo, tanto en el aire como en el material.**
   ii. **Deduzca cuál de las dos componentes (azul o roja) se propaga más rápidamente en el interior de la lámina.**
   iii. **Determine las frecuencias de los rayos en el aire.**

Datos: $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $n_{\text{aire}} = 1$; $n_{\text{material (azul)}} = 1{,}47$; $n_{\text{material (roja)}} = 1{,}44$

Solución:

a) **Razone y justifique la veracidad o falsedad de las siguientes frases:**
   i. **Cuando la luz pasa de un medio a otro experimenta un aumento de su velocidad si el segundo medio tiene un índice de refracción mayor que el primero.**

La velocidad de la luz en un medio está relacionada con el índice de refracción n por la fórmula:

$$v = \frac{c}{n},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Si el segundo medio tiene un índice de refracción mayor que el primero ($n_2 > n_1$), entonces:

$$v_2 = \frac{c}{n_2} < v_1 = \frac{c}{n_1}.$$

Entonces, la velocidad de la luz disminuye al pasar al segundo medio con mayor índice de refracción.

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

   ii. **La reflexión total de la luz en la superficie de separación de dos medios puede producirse cuando el índice de refracción del segundo medio es mayor que el del primero.**

La reflexión total interna ocurre cuando la luz incide desde un medio con mayor índice de refracción hacia uno con menor índice de refracción, y el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico. Matemáticamente, se cumple:

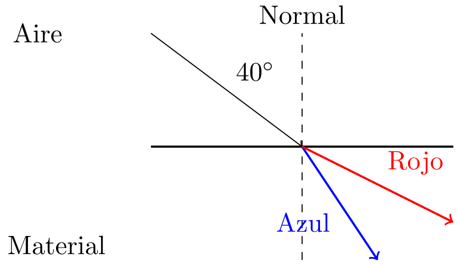
$$n_1 \sin\theta_i > n_2,$$

donde $n_1 > n_2$. Por lo tanto, si el índice de refracción del segundo medio es mayor que el del primero ($n_2 > n_1$), no se puede alcanzar la reflexión total interna.

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

b) **Un rayo de luz con componentes azul y roja de longitudes de onda en el aire de $4{,}5 \cdot 10^{-7}$ m y $6{,}9 \cdot 10^{-7}$ m, respectivamente, incide desde el aire sobre una placa de un determinado material con un ángulo de 40° respecto a la normal a la superficie de la placa.**
   i. **Mediante un esquema, y de manera razonada, indique la trayectoria de los rayos azul y rojo, tanto en el aire como en el material.**

A continuación, se presenta un esquema que muestra la trayectoria de los rayos azul y rojo al incidir sobre la placa:



En el aire, ambos rayos inciden con un ángulo de 40° respecto a la normal. Al entrar en el material, debido a la mayor densidad óptica, se produce refracción. Según la Ley de Snell:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \hat{r} = \arcsin\left(\frac{n_1 \cdot \sin \hat{i}}{n_2}\right).$$

Para la luz azul se tiene que $\hat{r}_{\text{azul}} = 25,93°$, mientras que para la luz roja: $\hat{r}_{\text{roja}} = 26,51°$.

Por lo tanto, los rayos azul y rojo se refractan al ingresar al material, con el rayo azul desviándose más debido a su mayor índice de refracción.

ii. Deduzca cuál de las dos componentes (azul o roja) se propaga más rápidamente en el interior de la lámina.

La velocidad de propagación de la luz en un medio está dada por:

$$v = \frac{c}{n},$$

donde n es el índice de refracción del medio. Dado que el rayo rojo tiene un índice de refracción menor ($n_{\text{roja}} = 1{,}44$) que el rayo azul ($n_{\text{azul}} = 1{,}47$), su velocidad en el material será:

$$v_{\text{roja}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}44} = 2{,}08 \cdot 10^8\,\text{m/s},$$

$$v_{\text{azul}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}47} = 2{,}04 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

Así, el rayo rojo se propaga más rápidamente que el rayo azul en el interior de la lámina.

Por lo tanto, la componente roja se propaga más rápidamente en el interior de la lámina.

iii. Determine las frecuencias de los rayos en el aire.

La frecuencia de una onda no cambia al pasar de un medio a otro, ya que $f = \frac{v}{\lambda}$. Por lo tanto, las frecuencias de los rayos en el aire son:

$$f = \frac{c}{\lambda}.$$

Para el rayo azul:

$$f_{\text{azul}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{4{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}} = 6{,}67 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.$$

Para el rayo rojo:

$$f_{\text{roja}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\text{m}} = 4{,}35 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

Por lo tanto, las frecuencias de los rayos en el aire son:

$$\boldsymbol{f_{\text{azul}} = 6{,}67 \cdot 10^{14}\,\text{Hz},}$$
$$\boldsymbol{f_{\text{roja}} = 4{,}35 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.}$$

Andalucía, Junio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Ejercicio 7

a) ¿Qué significa que una onda armónica viajera tenga doble periodicidad? Realice las gráficas necesarias para representar ambas periodicidades.

b) Una onda viajera viene dada por la ecuación:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 20\cos(10t - 50x)\ \text{(S.I.)}.}$$

Calcule:

i. Su velocidad de propagación.

ii. La ecuación de la velocidad de oscilación y su valor máximo.

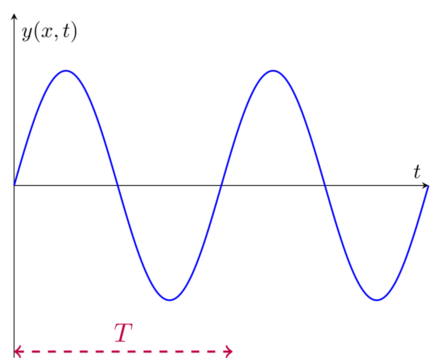
iii. La ecuación de la aceleración y su valor máximo.

Solución:

a) ¿Qué significa que una onda armónica viajera tenga doble periodicidad? Realice las gráficas necesarias para representar ambas periodicidades.

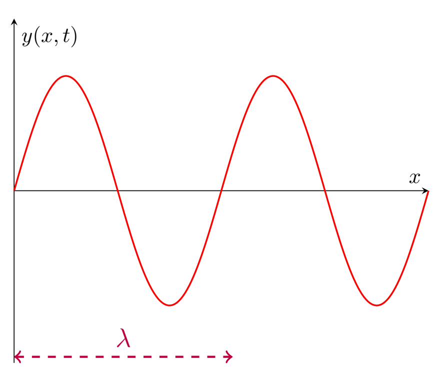
Significa que la onda es periódica tanto en el tiempo como en el espacio, es decir, se repite cada cierto intervalo de tiempo T (periodo) y cada cierta distancia λ (longitud de onda). Para demostrarlo, sustituimos en la ecuación general de una onda $y(x,t)$ por $t+T$ o bien por $x+\lambda$ y observamos que la ecuación no se modifica:

$$y(x,t+T) = A\sin\left(\omega(t+T) - kx\right) = A\sin(\omega t + \frac{2\pi}{T}T - kx) = A\sin\left(\omega t - kx\right) = y(x,t).$$



De manera similar, sustituyendo x por $x+\lambda$:

$$y(x+\lambda,t) = A\sin\left(\omega t - k(x+\lambda)\right) = A\sin(\omega t - kx - \frac{2\pi}{\lambda}\lambda) = A\sin\left(\omega t - kx\right) = y(x,t).$$



Por lo tanto, una onda tiene doble periodicidad cuando es periódica tanto en el tiempo como en el espacio, es decir, se repite cada cierto intervalo de tiempo T (periodo) y cada cierta distancia λ (longitud de onda).

b) **Una onda viajera viene dada por la ecuación:**

$$\boldsymbol{y(x,t) = 20\cos(10t - 50x)\ \text{(S.I.)}.}$$

Calcule:

i. **Su velocidad de propagación.**

Comparando la ecuación dada con la forma general de una onda armónica viajera $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$, identificamos que:

$$\omega = 10\,\mathrm{s}^{-1}, \quad k = 50\,\mathrm{m}^{-1}.$$

La velocidad de propagación v se calcula como:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{10}{50} = 0.2\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación es $v = 0.2\,\mathrm{m/s}$.

ii. **La ecuación de la velocidad de oscilación y su valor máximo.**

La velocidad de oscilación $v(x,t)$ se obtiene derivando $y(x,t)$ con respecto al tiempo t:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -20 \cdot 10 \cdot \sin(10t - 50x) = -200\sin(10t - 50x)\,\mathrm{m/s}.$$

El valor máximo de la velocidad de oscilación es:

$$v_{\text{máx}} = 200\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la velocidad de oscilación es $v(x,t) = -200\sin(10t - 50x)\,\mathrm{m/s}$ y su valor máximo es $200\,\mathrm{m/s}$.

iii. **La ecuación de la aceleración y su valor máximo.**

La aceleración $a(x,t)$ se obtiene derivando $v(x,t)$ con respecto al tiempo t:

$$a(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} = -200 \cdot 10 \cdot \cos(10t - 50x) = -2000\cos(10t - 50x)\,\mathrm{m/s}^2.$$

El valor máximo de la aceleración es:

$$a_{\text{máx}} = 2000\,\mathrm{m/s}^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la aceleración es $a(x,t) = -2000\cos(10t - 50x)\,\mathrm{m/s}^2$ y su valor máximo es $2000\,\mathrm{m/s}^2$.

Andalucía, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Ejercicio 3

a) **Dos ondas armónicas se propagan por el mismo medio a igual velocidad, con la misma amplitud, la misma dirección de propagación y la frecuencia de la primera es el doble que la de la segunda.**
   i. **Compare la longitud de onda y el periodo de ambas ondas.**
   ii. **Escriba la ecuación de la segunda onda en función de las magnitudes de la primera.**

b) **La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda tensa es:**

$$\boldsymbol{y(x,t) = 5\sin(50\pi t - 20\pi x)\ \text{(S.I.)}.}$$

Calcule:
   i. **La velocidad de propagación de la onda.**
   ii. **La velocidad del punto $x = 0$ de la cuerda en el instante $t = 1\,\text{s}$.**
   iii. **La diferencia de fase, en un mismo instante, entre dos puntos separados 1 m.**

Solución:

a) **Dos ondas armónicas se propagan por el mismo medio a igual velocidad, con la misma amplitud, la misma dirección de propagación y la frecuencia de la primera es el doble que la de la segunda.**
   i. **Compare la longitud de onda y el periodo de ambas ondas.**

Denotemos las magnitudes de la primera onda como $y_1(x,t) = A\sin(\omega_1 t - k_1 x)$ y las de la segunda onda como $y_2(x,t) = A\sin(\omega_2 t - k_2 x)$, donde A es la amplitud común, ω la frecuencia angular y k el número de onda. Según el enunciado, la frecuencia de la primera onda es el doble que la de la segunda:

$$f_1 = 2f_2.$$

Recordemos que la frecuencia angular está relacionada con la frecuencia mediante:

$$\omega = 2\pi f.$$

Entonces,

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi(2f_2) = 4\pi f_2 = 2\omega_2.$$

Además, como ambas ondas se propagan a la misma velocidad v, y la velocidad de propagación está dada por:

$$v = \lambda f,$$

donde λ es la longitud de onda y f la frecuencia, por lo que

$$v = \lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2.$$

Sustituyendo $f_1 = 2f_2$:

$$v = \lambda_1(2f_2) = \lambda_2 f_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2}.$$

En cuanto al periodo T, que es el inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f}.$$

Entonces,

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{2f_2} = \frac{T_2}{2}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda de la primera onda es la mitad que la de la segunda, y su periodo es la mitad también.

ii. **Escriba la ecuación de la segunda onda en función de las magnitudes de la primera.**

Sabemos que la primera onda está dada por:

$$y_1(x,t) = A\sin(\omega_1 t - k_1 x).$$

Dado que

$$\omega_1 = 2\omega_2 \quad \text{y} \quad k_1 = 2k_2,$$

la segunda onda se puede expresar en términos de y_1 de la siguiente manera:

$$y_2(x,t) = A\sin\left(\frac{\omega_1}{2}t - \frac{k_1}{2}x\right) = A\sin\left(\omega_2 t - k_2 x\right).$$

Por lo tanto, la ecuación de la segunda onda es $\boldsymbol{y_2(x,t) = A\sin\left(\omega_2 t - k_2 x\right)}$, donde $\boldsymbol{\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}}$ y $\boldsymbol{k_2 = \frac{k_1}{2}}$.

b) **La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda tensa es:**

$$\boldsymbol{y(x,t) = 5\sin(50\pi t - 20\pi x)\ \text{(S.I.)}.}$$

Calcule:

i. **La velocidad de propagación de la onda.**

La ecuación de la onda está dada por:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx),$$

donde:

$$A = 5\,\text{m}, \quad \omega = 50\pi\,\text{rad/s}, \quad k = 20\pi\,\text{rad/m}.$$

La velocidad de propagación v de la onda está relacionada con la frecuencia angular y el número de onda mediante:

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v = \frac{50\pi}{20\pi} = \frac{50}{20} = 2{,}5\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es $\boldsymbol{v = 2{,}5\,\text{m/s}}$.

ii. **La velocidad del punto $\boldsymbol{x = 0}$ de la cuerda en el instante $\boldsymbol{t = 1\,\text{s}}$.**

La velocidad de un punto en la cuerda está dada por la derivada de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = 5\cdot 50\pi\cos(50\pi t - 20\pi x) = 250\pi\cos(50\pi t - 20\pi x).$$

Para $x = 0$ y $t = 1\,\text{s}$:

$$v(0,1) = 250\pi\cos(50\pi\cdot 1 - 0) = 250\pi\cos(50\pi) = 785{,}4\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad del punto $\boldsymbol{x = 0}$ de la cuerda en el instante $\boldsymbol{t = 1\,\text{s}}$ es $\boldsymbol{v(0,1) = 785{,}4\,\text{m/s}}$.

iii. La diferencia de fase, en un mismo instante, entre dos puntos separados 1 m.

La diferencia de fase ($\Delta\phi$) entre dos puntos separados una distancia Δx es:

$$\Delta\phi = k \cdot \Delta x.$$

Dado que $k = 20\pi\,\text{rad/m}$ y $\Delta x = 1\,\text{m}$:

$$\Delta\phi = 20\pi \cdot 1 = 20\pi\,\text{rad}.$$

Como la fase es un ángulo periódico con periodo 2π, podemos simplificar:

$$\Delta\phi = 0\,\text{rad}.$$

Esto indica que ambos puntos están en fase.

Por lo tanto, la diferencia de fase entre dos puntos separados 1 m es 0 rad, lo que significa que están en fase.

Ejercicio 7

a) **Un rayo de luz pasa de un medio a otro donde su longitud de onda es mayor.**
   i. **Indique cómo varían la frecuencia y la velocidad de propagación.**
   ii. **Realice un esquema indicando si el haz refractado se aleja o se acerca de la normal.**

b) **Un rayo de luz incide sobre la superficie que separa dos medios de índices de refracción $n_1 = 2{,}37$ y n_2 desconocido con un ángulo de incidencia de 16° y uno de refracción de 30°.**
   i. **Haga un esquema del proceso y determine n_2.**
   ii. **Calcule a partir de qué ángulo de incidencia no se produce refracción.**

Solución:

a) **Un rayo de luz pasa de un medio a otro donde su longitud de onda es mayor.**
   i. **Indique cómo varían la frecuencia y la velocidad de propagación.**

Sabemos que la velocidad de una onda está dada por:

$$v = \lambda \cdot f,$$

donde v es la velocidad de propagación, λ es la longitud de onda y f es la frecuencia. Dado que la longitud de onda λ aumenta al pasar al segundo medio ($\lambda_2 > \lambda_1$) y que la velocidad de la luz disminuye al entrar en un medio con mayor índice de refracción, tenemos que:

$$v_1 = \lambda_1 \cdot f_1 \quad \text{y} \quad v_2 = \lambda_2 \cdot f_2.$$

Como la frecuencia de la luz permanece constante al pasar de un medio a otro ($f_1 = f_2$), entonces:

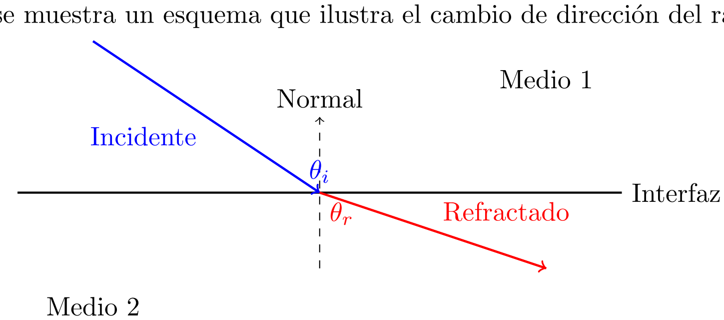
$$v_2 = \lambda_2 \cdot f \quad \text{y} \quad v_1 = \lambda_1 \cdot f.$$

Así, si $\lambda_2 > \lambda_1$, entonces $v_2 > v_1$.

Por lo tanto, la frecuencia permanece constante y la velocidad de propagación aumenta al pasar a un medio donde la longitud de onda es mayor.

   ii. **Realice un esquema indicando si el haz refractado se aleja o se acerca de la normal.**

A continuación se muestra un esquema que ilustra el cambio de dirección del rayo refractado:



Por la Ley de Snell:

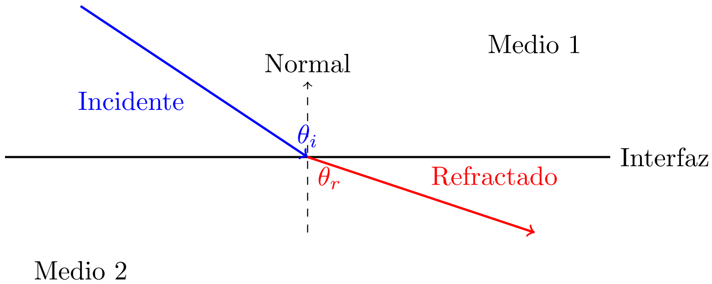
$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_i < \sin\theta_r \quad \Rightarrow \quad \theta_i < \theta_r.$$

Por lo tanto, el haz refractado se aleja de la normal al entrar en el medio donde la longitud de onda es mayor.

b) Un rayo de luz incide sobre la superficie que separa dos medios de índices de refracción $n_1 = 2{,}37$ y n_2 desconocido con un ángulo de incidencia de 16° y uno de refracción de 30°.

i. Haga un esquema del proceso y determine n_2.

A continuación se muestra un esquema del proceso de refracción:



Aplicamos la Ley de Snell:

$$n_1 \cdot \sin\theta_i = n_2 \cdot \sin\theta_r.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$2{,}37 \cdot \sin 16^\circ = n_2 \cdot \sin 30^\circ \quad \Rightarrow \quad n_2 = 1{,}3046.$$

Por lo tanto, el índice de refracción del segundo medio es $n_2 = 1{,}30$.

ii. Calcule a partir de qué ángulo de incidencia no se produce refracción.

Este ángulo se conoce como el ángulo crítico, que ocurre cuando el ángulo de refracción es de 90°. Aplicamos la Ley de Snell para encontrar el ángulo crítico θ_c:

$$n_1 \cdot \sin\theta_c = n_2 \cdot \sin 90^\circ.$$

Como $\sin 90^\circ = 1$, tenemos:

$$n_1 \cdot \sin\theta_c = n_2.$$

Despejamos $\sin\theta_c$:

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\sin\theta_c = \frac{1{,}30}{2{,}37} = 0{,}5485.$$

Calculamos θ_c:

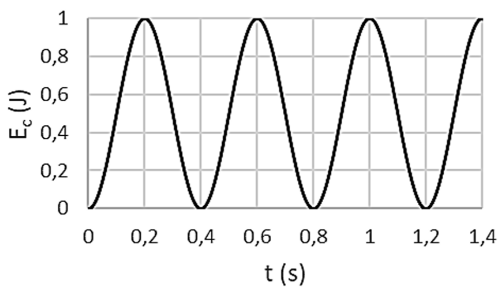
$$\theta_c = \arcsin(0{,}5485) = 33{,}43^\circ.$$

Por lo tanto, para ángulos de incidencia mayores que 33,43°, no se produce refracción y se produce reflexión total interna.

Comunidad Valenciana, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 5

En la gráfica adjunta se muestra la energía cinética en función del tiempo de una partícula con movimiento armónico simple. Deduce razonadamente el valor de la energía mecánica del cuerpo, su energía potencial en el instante $t = 0{,}4$ s, el periodo del movimiento y la frecuencia angular.



Solución:

Sabemos que la energía mecánica es constante en cada punto del movimiento armónico simple. Además, esta viene dada por

$$E_m = E_c + E_p.$$

En la gráfica se observa que la energía cinética máxima es $E_{c,\text{máx}} = 1$ J, y coincide en este caso con la energía mecánica, puesto que en ese mismo momento no hay elongación ($E_p = 0$ J).

Por lo tanto, la energía mecánica es $\boldsymbol{E_m = 1}$ J.

En el instante $t = 0,4$ s, observamos en la gráfica que $E_c = 0$ J. Entonces,

$$E_p = E_m - E_c = 1 - 0 = 1 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la energía potencial a los 0,4 s es $\boldsymbol{E_p = 1}$ J.

Sabemos que la energía cinética máxima se da en la posición de equilibrio, y su valor mínimo en los extremos (se anula cada media oscilación). En la gráfica, vemos que la partícula tarda 0,4 s en realizar media oscilación, por lo que el periodo es $T = 0,8$ s.

Por lo tanto, el periodo es $\boldsymbol{T = 0,8}$ s.

La frecuencia angular ω está relacionada con el periodo T mediante la relación:

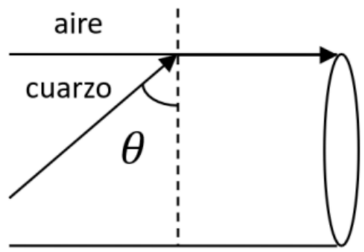
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,8} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}.$$

Por lo tanto, la frecuencia angular es $\boldsymbol{\omega = \frac{5\pi}{2}}$ rad/s.

Cuestión 6

Un rayo de luz se propaga por una fibra de cuarzo rodeada de aire. Tras incidir sobre la superficie cuarzo-aire con un ángulo $\theta = 41{,}8°$, se propaga paralelamente al eje de la fibra como indica la figura. Explica qué ocurre si el ángulo de incidencia es mayor que 41,8° y nombra el fenómeno. Calcula el índice de refracción del cuarzo.

Dato: índice de refracción del aire, $n_a = 1{,}00$



Solución:

Consideremos un rayo de luz que se propaga dentro de una fibra de cuarzo y que incide sobre la superficie cuarzo-aire con un ángulo de incidencia $\theta = 41{,}8°$. En este caso, el rayo se propaga paralelamente al eje de la fibra, lo que indica que θ es el *ángulo crítico* para la reflexión interna total.

Fenómeno cuando el ángulo de incidencia es mayor que 41,8°:

Cuando el ángulo de incidencia θ es mayor que el ángulo crítico $\theta_c = 41{,}8°$, el rayo de luz no atraviesa la interfaz cuarzo-aire, sino que se refleja completamente dentro del cuarzo. Este fenómeno se conoce como *reflexión interna total.*

Por lo tanto, el ángulo de incidencia θ es mayor que el ángulo crítico $\theta_c = 41{,}8°$, se produce reflexión total interna.

Cálculo del índice de refracción del cuarzo:

El ángulo crítico θ_c se relaciona con los índices de refracción de los dos medios (cuarzo y aire) mediante la siguiente ecuación derivada de la Ley de Snell:

$$\sin\theta_c = \frac{n_a}{n_q},$$

donde n_a es el índice de refracción del aire y n_q es el índice de refracción del cuarzo. Despejando n_q:

$$n_q = \frac{n_a}{\sin\theta_c} = \frac{1}{\sin 41{,}8°} = 1{,}5.$$

Por lo tanto, el índice de refracción del cuarzo es $n_q = 1{,}5$.

Problema 2

Una ballena azul emite un sonido de frecuencia 25 Hz por agua de mar. Se considera que es una onda armónica y unidimensional que se propaga en el sentido positivo del eje X a una velocidad de 1500 m/s. En $t = 0$ s y $x = 0$ m la función de onda se encuentra en un máximo, de valor 32 μm. Determina:

a) **La longitud de onda y la fase inicial. Escribe la función de onda en unidades del Sistema Internacional. Utiliza la función seno para resolver el problema.**
b) **El valor de la función de onda y la velocidad de vibración de una partícula del medio situada en $x = 300$ m para el instante $t = 1$ s.**

Solución:

a) **La longitud de onda y la fase inicial. Escribe la función de onda en unidades del Sistema Internacional. Utiliza la función seno para resolver el problema.**

Calculamos la longitud de onda λ. Sabemos que:

$$v = f \cdot \lambda.$$

Despejando λ:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{25 \text{ Hz}} = 60 \text{ m}.$$

Calculamos el número de onda k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{60 \text{ m}} = \frac{\pi}{30} \text{ m}^{-1}.$$

Calculamos la frecuencia angular ω:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 25 \text{ Hz} = 50\pi \text{ rad/s}.$$

Determinamos la fase inicial ϕ_0. La ecuación de la onda armónica unidimensional es:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi_0).$$

En $t = 0$ s y $x = 0$ m:

$$y(0,0) = A\sin(\phi_0) = A \cdot \sin(\phi_0) = A_{\text{máx}} = A.$$

Como $y(0,0) = A$, entonces:

$$\sin(\phi_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tomamos $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ para simplificar.

Por lo tanto, la longitud de onda es 60 m, la fase inicial es $\frac{\pi}{2}$ rad, y la función de onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 32 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{30}\, x - 50\pi\, t + \frac{\pi}{2}\right).}$$

b) **El valor de la función de onda y la velocidad de vibración de una partícula del medio situada en $x = 300$ m para el instante $t = 1$ s.**

Calculamos el valor de la función de onda en $x = 300$ m y $t = 1$ s:

$$y(300 \text{ m},\ 1 \text{ s}) = 32 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 1 = 32 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 32\ \mu\text{m}.$$

La velocidad de vibración es la derivada parcial de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t + \phi_0).$$

Sustituyendo los valores:

$$v(300\ \text{m},\ 1\ \text{s}) = -32 \cdot 10^{-6}\ \text{m} \cdot 50\pi\ \text{rad/s} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ \text{m/s}.$$

Por lo tanto, en $x = 300$ m y $t = 1$ s, la función de onda vale 32 μm y la velocidad de vibración de la partícula es 0 m/s.

Comunidad Valenciana, Julio 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 6

Un rayo de luz monocromática pasa de un medio 1 de índice de refracción n_1 a otro medio 2 con índice de refracción n_2. Si se cumple que $n_1 > n_2$, indica y razona cómo cambia la velocidad v, la frecuencia f, y la longitud de onda λ del rayo al pasar del medio 1 al medio 2.

Solución:

La velocidad de la luz en un medio es:

$$v = \frac{c}{n},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción del medio. Como $n_1 > n_2$, entonces

$$v_1 = \frac{c}{n_1} < v_2 = \frac{c}{n_2}.$$

La frecuencia de la luz depende únicamente de la fuente y no cambia al pasar de un medio a otro. La longitud de onda en un medio se relaciona con la velocidad y la frecuencia:

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

Dado que v aumenta y f es constante, entonces:

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} > \lambda_1 = \frac{v_1}{f}.$$

Por lo tanto, al pasar de un medio con mayor índice de refracción a otro con menor índice, la velocidad y la longitud de onda de la luz aumentan, mientras que la frecuencia permanece constante.

Problema 3

El agua contenida en un depósito está separada del aire por una placa plana horizontal de vidrio, de espesor $d = 10\,\text{cm}$, estando su cara inferior en contacto con el agua. Un rayo de luz monocromática de frecuencia $f = 3 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$, procedente de una lámpara situada en el interior del depósito, incide sobre el vidrio con un ángulo $\theta = 45°$ respecto de la normal a la superficie de la placa. Calcula razonadamente:

a) **El ángulo de refracción entre el agua y el vidrio y el ángulo de refracción entre el vidrio y el aire. Representa los rayos en los tres medios.**

b) **El ángulo de incidencia máximo de entrada del rayo desde el agua a la placa de vidrio, θ_m, para que salga de ésta al aire, así como el tiempo que tarda el rayo en propagarse a través del vidrio cuando incide con este ángulo θ_m. Calcula también la longitud de onda del rayo en el interior de la placa de vidrio.**

Datos: $n_{\text{agua}} = 1,33$; $n_{\text{vidrio}} = 1,62$; $n_{\text{aire}} = 1,00$; velocidad de la luz en el aire, $c = 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}$

Solución:

a) **El ángulo de refracción entre el agua y el vidrio y el ángulo de refracción entre el vidrio y el aire. Representa los rayos en los tres medios.**

Aplicamos la Ley de Snell en la interfaz entre el agua y el vidrio:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin\theta_1 = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin\theta_2,$$

donde:

- $\theta_1 = 45°$ es el ángulo de incidencia en el agua,
- θ_2 es el ángulo de refracción en el vidrio.

Despejamos $\sin\theta_2$:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_{\text{agua}}}{n_{\text{vidrio}}} \cdot \sin\theta_1.$$

Sustituimos los valores:

$$\sin\theta_2 = \frac{1{,}33}{1{,}62} \cdot \sin 45° = \frac{1{,}33}{1{,}62} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}5805.$$

Calculamos θ_2:

$$\theta_2 = \arcsin(0{,}5805) = 35{,}5°.$$

Ahora, aplicamos la Ley de Snell en la interfaz entre el vidrio y el aire:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin\theta_2 = n_{\text{aire}} \cdot \sin\theta_3,$$

donde θ_3 es el ángulo de refracción en el aire. Despejamos $\sin\theta_3$:

$$\sin\theta_3 = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin\theta_2.$$

Sustituimos los valores:

$$\sin\theta_3 = 1{,}62 \cdot 0{,}5805 = 0{,}9404.$$

Calculamos θ_3:

$$\theta_3 = \arcsin(0{,}9404) = 70{,}0°.$$

Por lo tanto, el ángulo de refracción entre el agua y el vidrio es $\boldsymbol{\theta_2 = 35{,}5°}$ y el ángulo de refracción entre el vidrio y el aire es $\boldsymbol{\theta_3 = 70{,}0°}$.

b) El ángulo de incidencia máximo de entrada del rayo desde el agua a la placa de vidrio, $\boldsymbol{\theta_m}$, para que salga de ésta al aire, así como el tiempo que tarda el rayo en propagarse a través del vidrio cuando incide con este ángulo $\boldsymbol{\theta_m}$. Calcula también la longitud de onda del rayo en el interior de la placa de vidrio.

Determinamos el ángulo crítico en la interfaz vidrio-aire. La condición para que el rayo salga al aire es que el ángulo de incidencia en la interfaz vidrio-aire sea menor que el ángulo crítico θ_c, dado por:

$$\sin\theta_c = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{1{,}00}{1{,}62} = 0{,}6173.$$

Entonces,

$$\theta_c = \arcsin(0{,}6173) = 38{,}2^\circ.$$

Usamos la Ley de Snell en la interfaz agua-vidrio para encontrar θ_m:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin\theta_m = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin\theta_c.$$

Despejamos $\sin\theta_m$:

$$\sin\theta_m = \frac{n_{\text{vidrio}}}{n_{\text{agua}}} \cdot \sin\theta_c = \frac{1{,}62}{1{,}33} \cdot 0{,}6173 = 0{,}7526.$$

Calculamos θ_m:

$$\theta_m = \arcsin(0{,}7526) = 48{,}8^\circ.$$

Calculamos el tiempo que tarda el rayo en atravesar el vidrio. La velocidad de la luz en el vidrio es:

$$v_{\text{vidrio}} = \frac{c}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}62} = 1{,}8519 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

El espesor del vidrio es $d = 0{,}10\,\text{m}$. La distancia recorrida en el vidrio es:

$$L = \frac{d}{\cos\theta_c} = \frac{0{,}10\,\text{m}}{\cos 38{,}2^\circ} = \frac{0{,}10\,\text{m}}{0{,}7854} = 0{,}1274\,\text{m}.$$

El tiempo de propagación es:

$$t = \frac{L}{v_{\text{vidrio}}} = \frac{0{,}1274\,\text{m}}{1{,}8519 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = 6{,}88 \cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Calculamos la longitud de onda en el vidrio:

$$\lambda_{\text{vidrio}} = \frac{v_{\text{vidrio}}}{f} = \frac{1{,}8519 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{3 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 6{,}173 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 617{,}3\,\text{nm}.$$

Por lo tanto, el ángulo máximo de incidencia es $\boldsymbol{\theta_m = 48{,}8^\circ}$, el tiempo de propagación a través del vidrio es $\boldsymbol{6{,}88 \cdot 10^{-10}}$ s y la longitud de onda en el vidrio es 617,3 nm.

Comunidad Valenciana, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 4

Una onda armónica está descrita por la función $y(x,t) = A\sin(2\pi ft - kx + \varphi)$, y se propaga por un medio con velocidad v. ¿Cómo cambian su frecuencia, número de onda y fase inicial cuando esta onda pasa a otro medio donde su velocidad de propagación es $2v$?

Solución:

Al pasar a otro medio, la *frecuencia* (f) de la onda permanece constante, ya que depende únicamente de la fuente que genera la onda. La *velocidad* de propagación cambia de v a $v' = 2v$. La longitud de onda en el nuevo medio es:

$$\lambda' = \frac{v'}{f} = \frac{2v}{f} = 2\lambda.$$

El *número de onda* (k) está relacionado con la longitud de onda por:

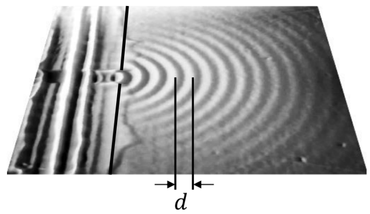
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{k}{2}.$$

La *fase inicial* (φ) no depende del medio de propagación, sino de las condiciones iniciales en el punto de origen de la onda, por lo que permanece inalterada.

Por lo tanto, al cambiar de medio donde la velocidad de propagación es $2v$, la frecuencia f y la fase inicial φ no cambian, mientras que el número de onda k se reduce a la mitad.

Cuestión 5

La figura muestra, en un instante fijo, una onda plana que incide desde la izquierda sobre una pared con un pequeño orificio y pasa a ser una onda circular. ¿Cómo se llama este fenómeno? Explica en qué consiste. ¿Qué magnitud física es la distancia d que se representa en la figura?



Solución:

El fenómeno observado es la *difracción de una onda.* La difracción es la desviación de las ondas al encontrarse con obstáculos o aberturas cuyo tamaño es comparable a su longitud de onda. Al pasar por el orificio, la onda plana se convierte en una onda circular que se propaga en todas direcciones detrás de la barrera.

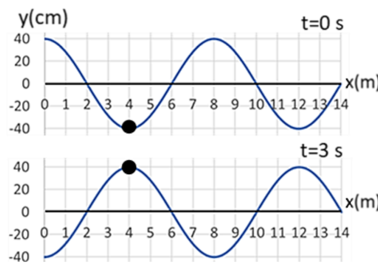
La distancia d representada en la figura, que marca la separación entre dos frentes de onda circulares consecutivos, corresponde a la *longitud de onda* (λ) de la onda, que es la distancia mínima entre dos puntos que están en fase.

Por lo tanto, el fenómeno es la difracción, que ocurre cuando una onda atraviesa una abertura pequeña y se expande en forma circular. La magnitud d es la longitud de onda λ de las ondas.

Problema 3

Una onda armónica se propaga hacia la izquierda por la superficie de un estanque y provoca la oscilación de una boya, que pasa de la posición más baja a la más alta en 3 s. La figura representa la onda y la boya (círculo negro) en los instantes $t = 0$ y $t = 3$ s.

a) **Determina la amplitud, longitud de onda, periodo, frecuencia y velocidad de propagación de la onda.**
b) **Determina la fase inicial y escribe la función de onda (utilizando la función seno). ¿Cuál es la velocidad de la boya en el instante $t = 3$ s?**



Solución:

a) **Determina la amplitud, longitud de onda, periodo, frecuencia y velocidad de propagación de la onda.**

Observando la gráfica, vemso que la *amplitud* (A) es la máxima elongación de la boya, que se observa como $A = 0,4$ m (40 cm), y la *longitud de onda* (λ) es la distancia entre dos puntos consecutivos en fase, que es $\lambda = 8$ m (distancia entre dos crestas consecutivas). Asimismo, el *periodo* (T) es el tiempo que tarda la boya en completar una oscilación completa. Dado que pasa de la posición más baja a la más alta en 3 s, y luego regresa a la posición más baja en otros 3 s, el periodo total es:

$$T = 3 \text{ s} + 3 \text{ s} = 6 \text{ s}.$$

La *frecuencia* (f) es el inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{6 \text{ s}} = 0,1667 \text{ Hz}.$$

La *velocidad de propagación* (v) de la onda es:

$$v = \lambda \cdot f = 8 \text{ m} \cdot 0,1667 \text{ Hz} = 1,333 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, la amplitud es 0,4 m, la longitud de onda es 8 m, el periodo es 6 s, la frecuencia es 0,1667 Hz y la velocidad de propagación es 1,333 m/s.

b) **Determina la fase inicial y escribe la función de onda (utilizando la función seno). ¿Cuál es la velocidad de la boya en el instante $t = 3$ s?**

- La onda se propaga hacia la izquierda, por lo que su función de onda es:

$$y(x,t) = A \sin(kx + \omega t + \varphi),$$

donde:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{8 \text{ m}} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/m},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6 \text{ s}} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}.$$

En la gráfica se observa que la fase inicial es $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dado que la onda parte desde la máxima amplitud positiva. La función de onda es:

$$y(x,t) = 0,4 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = 0,4 \text{ m} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Evaluando en $x = 4$ m y $t = 3$ s:

$$v(4,3) = 0,4 \text{ m} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\pi + \pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, la fase inicial es $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ radianes, la función de onda es $\boldsymbol{y(x,t) = 0,4 \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)}$, y la velocidad de la boya en $\boldsymbol{t = 3}$ s es 0 m/s.

Comunidad Valenciana, Julio 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 5

Determina el periodo, la longitud de onda, el número de ondas y la velocidad de propagación de una onda sísmica transversal cuya función es $y(x,t) = 2\sin(50\pi t - \frac{\pi}{2}x)$ (todos los valores se expresan en unidades del Sistema Internacional). Si $y(0,t) = 2$ m, determina razonadamente el valor de $y(8,t)$ y el valor de $y(0,t+0,04)$.

Solución:

La ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx),$$

donde:

- Amplitud: $A = 2$ m,
- Frecuencia angular: $\omega = 50\pi$ rad/s,
- Número de onda: $k = \dfrac{\pi}{2}$ rad/m.

El periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25}\ \text{s} = 0,04\ \text{s}.$$

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi \cdot 2}{\pi} = 4\ \text{m}.$$

La velocidad de propagación es:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{50\pi}{\frac{\pi}{2}} = 50\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 100\ \text{m/s}.$$

Vamos a calcular $y(8,t)$ dado que $y(0,t) = 2$ m. En $x = 0$:

$$y(0,t) = 2\sin(50\pi t).$$

Dado que $y(0,t) = 2$ m, entonces:

$$2\sin(50\pi t) = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin(50\pi t) = 1.$$

Esto ocurre cuando:

$$50\pi t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{100} + \frac{n}{25},$$

para cualquier entero n. Ahora, calculamos $y(8,t)$:

$$y(8,t) = 2\sin(50\pi t - \frac{\pi}{2}\cdot 8) = 2\sin(50\pi t - 4\pi) = 2\sin(50\pi t - 4\pi),$$

pero $\sin(\theta - 4\pi) = \sin(\theta)$, ya que el seno es una función periódica con periodo 2π. Entonces,

$$y(8,t) = 2\sin(50\pi t) \quad \Rightarrow \quad y(8,t) = y(0,t) = 2\ \text{m}.$$

Calculamos ahora $y(0,t+0,04)$. Recordando que el periodo $T = 0,04$ s, entonces:

$$y(0,t+0,04) = 2\sin(50\pi(t+0,04)) = 2\sin(50\pi t + 50\pi \cdot 0,04) = 2\sin(50\pi t + 2\pi).$$

Como $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$, entonces

$$y(0, t + 0,04) = 2\sin(50\pi t) = y(0, t = 2 \text{ m}.$$

Por lo tanto, el periodo es $0,04$ s, la longitud de onda es 4 m, el número de onda es $k = \frac{\pi}{2}$ rad/m y la velocidad de propagación es 100 m/s. Los valores de $y(8, t)$ y $y(0, t + 0,04)$ son ambos 2 m.

Cuestión 6

Escribe la expresión del nivel sonoro (en dB) en función de la intensidad de un sonido. Demuestra que una persona expuesta a un nivel sonoro de 70 dB recibe una intensidad 100 veces menor que aquella que está expuesta a un nivel sonoro de 90 dB.

Solución:

El *nivel sonoro* β en decibelios (dB) se define como:

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

donde I es la intensidad del sonido e I_0 es la intensidad de referencia ($I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W/m^2). Sea $\beta_1 = 70$ dB e $\beta_2 = 90$ dB. Calculamos las intensidades correspondientes I_1 e I_2:

$$70 = 10 \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_0} \right) \quad \Rightarrow \quad \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_0} = 10^7 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10^7 I_0,$$

$$90 = 10 \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_0} \right) \quad \Rightarrow \quad \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_0} \right) = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_2}{I_0} = 10^9 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 10^9 I_0.$$

Calculamos la relación entre las intensidades:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^9 I_0}{10^7 I_0} = \frac{10^9}{10^7} = 10^2 = 100$$

Por lo tanto, la expresión del nivel sonoro es $\boldsymbol{\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)}$ y una persona expuesta a un nivel sonoro de 70 dB recibe una intensidad 100 veces menor que aquella expuesta a 90 dB.

Comunidad Valenciana, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 5

Una fuente sonora puntual de potencia $1,26 \cdot 10^{-4}$ W emite uniformemente en todas las direcciones. Calcula la intensidad, I, a 10 m de la fuente. ¿Cuál es el nivel de intensidad sonora en decibelios a dicha distancia de la fuente?-

Dato: intensidad física umbral $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

La intensidad de una onda esférica se define como la potencia por unidad de superficie:

$$I = \frac{P}{S}.$$

Como la fuente sonora emite uniformemente en todas las direcciones, la superficie es la de una esfera de radio r:

$$S = 4\pi \cdot r^2.$$

Por lo tanto, la intensidad a una distancia r es:

$$I = \frac{P}{4\pi \cdot r^2}.$$

Calculamos la intensidad a $r = 10$ m:

$$I = \frac{1.26 \cdot 10^{-4}\ \text{W}}{4\pi \cdot (10\ \text{m})^2} = 1 \cdot 10^{-7}\ \text{W/m}^2.$$

La expresión del nivel sonoro (en decibelios) en función de la intensidad es:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

- β: nivel sonoro (decibelios, dB),
- I: intensidad del sonido (W/m^2),
- I_0: intensidad umbral de referencia ($I_0 = 1 \cdot 10^{-12}$ W/m^2).

Sustituimos los valores:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1 \cdot 10^{-7}\ \text{W/m}^2}{1 \cdot 10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 50\ \text{dB}.$$

Por lo tanto, la intensidad a 10 metros de la fuente es $1 \cdot 10^{-7}$ W/m^2 y el nivel de intensidad sonora a 10 metros de la fuente es de 50 dB.

Problema 3

La función que representa una onda es $y(x,t) = 2\sin(\pi t - 8\pi x)$, donde x e y están expresadas en metros y t en segundos. Calcula razonadamente:

a) **La amplitud, el periodo, la frecuencia y la longitud de onda.**
b) **La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración de un punto situado a 1 m del foco emisor, para $t = 8$ s.**

Solución:

a) **La amplitud, el periodo, la frecuencia y la longitud de onda.**

La ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = 2\sin(\pi t - 8\pi x),$$

y la forma general de una onda armónica es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x).$$

Por comparación, identificamos los siguientes parámetros:

– *Amplitud (A)*:

$$A = 2 \text{ m}.$$

– *Frecuencia angular (ω)*:

$$\omega = \pi \text{ rad/s}.$$

– *Número de onda (k)*:

$$k = 8\pi \text{ rad/m}.$$

Ahora, calculamos las magnitudes pedidas:

– *Periodo (T)*:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}.$$

– *Frecuencia (f)*:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0,5 \text{ Hz}.$$

– **Longitud de onda (λ)**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \text{ m} = 0,25 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la amplitud es 2 m, el periodo es 2 s, la frecuencia es 0,5 Hz y la longitud de onda es 0,25 m.

b) **La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración de un punto situado a 1 m del foco emisor, para $t = 8$ s.**

La velocidad de propagación de una onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,25 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 0,125 \text{ m/s}.$$

La velocidad de vibración es la derivada parcial de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x).$$

Sustituimos los valores:

$$v_y = 2 \text{ m} \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot \cos\left(\pi \text{ rad/s} \cdot 8 \text{ s} - 8\pi \text{ rad/m} \cdot 1 \text{ m}\right) = 2\pi \text{ m/s} = 6,2832 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación es $\boldsymbol{0,125}$ m/s y la velocidad de vibración en $\boldsymbol{x = 1}$ m y $\boldsymbol{t = 8}$ s es $\boldsymbol{6,28}$ m/s.

Comunidad Valenciana, Julio 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 5

Una onda transversal en una cuerda viene descrita por la función $y(x,t) = a\sin(2\pi bt - cx)$. ¿Qué magnitudes físicas representan a, b y c? ¿Cuáles son sus unidades en el Sistema Internacional? ¿Qué información aporta sobre la onda el signo negativo de la expresión? ¿Qué magnitud física representa el cociente $2\pi b/c$?

Solución:

Consideremos la función que describe una onda transversal en una cuerda:

$$y(x,t) = a\sin(2\pi bt - cx)$$

donde y está en metros, x en metros y t en segundos. Comparando la función dada con la forma general de una onda transversal:

$$y(x,t) = A\cdot\sin(\omega t - kx),$$

podemos identificar que:

- a representa la *amplitud* de la onda,
- b está relacionado con la *frecuencia angular*,
- c representa el *número de onda.*

Sus unidades en el Sistema Internacional son:

- *Amplitud (a)*: Se mide en metros (m).
- *Frecuencia (b)*: La frecuencia angular ω se relaciona con b mediante $\omega = 2\pi b$, por lo tanto, b se mide en Hz (hercios), que es s^{-1}.
- *Número de onda (c)*: Se mide en rad/m (radianes por metro).

El signo negativo en la expresión $-cx$ indica la dirección de propagación de la onda. Específicamente, señala que la onda se está moviendo en la dirección positiva del eje x. Esto se debe a que la fase de la onda disminuye con el aumento de x, lo que implica un movimiento hacia la derecha.

El cociente $2\pi b/c$ representa la *velocidad de propagación* de la onda (v). Podemos derivar esto a partir de las relaciones entre frecuencia, número de onda y velocidad:

$$v = \lambda\cdot f,$$

donde λ es la longitud de onda (m) y f es la frecuencia (Hz). Sabemos que:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\cdot\lambda.$$

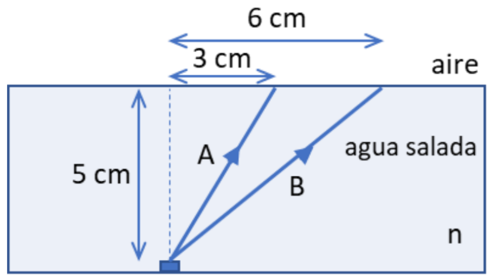
Reemplazando $f = b$ y $k = c$:

$$v = \frac{2\pi b}{c}.$$

Por lo tanto, a es la amplitud de la onda (m), b es la frecuencia (Hz), c es el número de onda (rad/m), el signo negativo indica la dirección de propagación de la onda hacia la derecha, y $2\pi b/c$ representa la velocidad de propagación de la onda (m/s).

Cuestión 6

En el fondo de una piscina llena de agua salada se sitúa un pequeño foco luminoso (ver figura adjunta). Se observa que el rayo A se refracta y sale del agua con un ángulo de refracción de 44°, pero el rayo B no se refracta. Determina el índice de refracción n del líquido y explica razonadamente el motivo por el cual el rayo B no se refracta.



Dato: índice de refracción del aire, $n_{\text{aire}} = 1,00$.

Solución:

Tenemos un foco luminoso en el fondo de una piscina llena de agua salada. Se observa que el rayo A se refracta y sale del agua con un ángulo de refracción de $r_A = 44°$, mientras que el rayo B no se refracta. Para determinar el índice de refracción del agua salada, utilizamos la *Ley de Snell*:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin i_A = n_{\text{aire}} \cdot \sin r_A,$$

donde:

- n_{agua} es el índice de refracción del agua salada,
- $n_{\text{aire}} = 1,00$ es el índice de refracción del aire,
- i_A es el ángulo de incidencia del rayo A en el agua,
- $r_A = 44°$ es el ángulo de refracción del rayo A al salir al aire.

Primero, debemos calcular el ángulo de incidencia i_A utilizando trigonometría. Según la figura, para el rayo A tenemos:

$$\tan i_A = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad i_A = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 30,964°.$$

Ahora, aplicamos la Ley de Snell para el rayo A:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin i_A = n_{\text{aire}} \cdot \sin r_A \quad \Rightarrow \quad n_{\text{agua}} = \frac{n_{\text{aire}} \cdot \sin r_A}{\sin i_A}.$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$n_{\text{agua}} = \frac{1,00 \cdot \sin 44°}{\sin 30,964°} \quad \Rightarrow \quad n_{\text{agua}} = 1,35.$$

El rayo B no se refracta porque su ángulo de incidencia es mayor que el *ángulo límite* para la reflexión total interna. Cuando la luz pasa de un medio más denso (agua salada) a uno menos denso (aire), existe un ángulo de incidencia a partir del cual toda la luz se refleja internamente y no se refracta al otro medio. Según la figura, para el rayo B:

$$\tan i_B = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{6\text{ cm}}{5\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad i_B = \arctan\left(\frac{6}{5}\right) = 50,194°.$$

El ángulo límite se calcula estableciendo que el ángulo de refracción $r = 90°$ (la luz se refracta a lo largo de la superficie):

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin i_{\text{lim}} = n_{\text{aire}} \cdot \sin 90°.$$

Como $\sin 90° = 1$:

$$\sin i_{\text{lim}} = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1,00}{1,35} = 0,7407 \quad \Rightarrow \quad i_{\text{lim}} = \arcsin(0,7407) = 47,794°.$$

Comparamos i_B e i_{lim}:

$$i_B = 50,194° > i_{\text{lim}} = 47,794°.$$

Dado que el ángulo de incidencia del rayo B es mayor que el ángulo límite, se produce *reflexión total interna*, y el rayo B no se refracta al aire sino que se refleja completamente dentro del agua salada.

Por lo tanto, el rayo B no se refracta porque su ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite para la reflexión total interna en el agua salada con índice de refracción $n = 1,35$.

Comunidad Valenciana, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 5

Considera una onda trasversal en una cuerda descrita por $y(x,t) = 0,01\cos[2\pi(10t - x)]$ m, donde x se expresa en metros y t en segundos. Calcula la velocidad de vibración en función de x y t. Dado el punto de la cuerda situado en $x_1 = 0,75$ m, encuentra un punto x_2, que en un mismo instante t, tenga la misma velocidad de vibración que x_1 y el mismo valor y. Indica el razonamiento seguido.

Solución:

La velocidad de vibración $v(x,t)$ se obtiene derivando la función de desplazamiento $y(x,t)$ respecto al tiempo t:

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[0,01\cos(2\pi(10t - x))\right] = -0,01 \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot \sin(2\pi(10t - x)) \text{ m/s} = -0,2\pi \cdot \sin(20\pi t - 2\pi x) \text{ m/s}.$$

Para que dos puntos x_1 y x_2 tengan el mismo desplazamiento y y la misma velocidad v en el mismo instante t, deben vibrar en fase. Esto ocurre si están separados por un múltiplo entero de la longitud de onda λ. Primero, determinamos la longitud de onda λ:

$$k = 2\pi \text{ rad/m} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ m}.$$

Dado $x_1 = 0,75$ m, buscamos x_2 tal que:

$$x_2 = x_1 + n\lambda,$$

donde n es un número entero. Para el punto más cercano, tomamos $n = 1$:

$$x_2 = 0,75 \text{ m} + 1 \text{ m} = 1,75 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la velocidad de vibración en función de x y t es:

$$\boldsymbol{v(x,t) = -0,2\pi \cdot \sin(20\pi t - 2\pi x) \text{ m/s},}$$

y ,dado el punto $x_1 = 0,75$ m, el punto x_2 que en el mismo instante t tiene la misma velocidad de vibración y el mismo desplazamiento es:

$$\boldsymbol{x_2 = 1,75 \text{ m}.}$$

Comunidad Valenciana, Julio 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 5

Escribe la expresión del nivel sonoro (en dB) en función de la intensidad de un sonido. Un auricular produce en la entrada del oído un nivel sonoro de 80 dB. Calcula la intensidad sonora en ese punto en W/m^2.

Dato: intensidad umbral de referencia $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

La expresión del nivel sonoro β (en decibelios, dB) en función de la intensidad del sonido I es:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

- β = nivel sonoro (dB),
- I = intensidad del sonido (W/m^2),
- I_0 = intensidad umbral de referencia (W/m^2), que es el límite de sensibilidad del oído humano para una frecuencia de 1 kHz.

Dado que el auricular produce un nivel sonoro de $\beta = 80$ dB, podemos sustituir los valores conocidos en la fórmula para encontrar la intensidad I:

$$80 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

Dividimos ambos lados de la ecuación por 10:

$$8 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

Aplicamos la definición del logaritmo:

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^8.$$

Despejamos I multiplicando ambos lados por 10^{-12} W/m^2:

$$I = 10^8 \cdot 10^{-12}\ \text{W/m}^2 = 10^{-4}\ \text{W/m}^2.$$

Por lo tanto, la intensidad sonora en la entrada del oído es $I = 10^{-4}$ W/m^2.

Comunidad Valenciana, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Cuestión 5

Escribe la expresión del nivel sonoro (en dB) en función de la intensidad de un sonido. A una cierta distancia del punto de explosión de un petardo se mide una intensidad de 1 W/m^2. ¿Qué nivel de intensidad en dB tendremos en este punto? Calcula la intensidad en W/m^2 que se medirá al duplicar la distancia. (Considera que la onda sonora es esférica).

Dato: intensidad umbral de referencia $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

Para determinar el nivel sonoro en decibelios (dB) y cómo varía la intensidad al duplicar la distancia desde la fuente, utilizamos las siguientes consideraciones y fórmulas fundamentales de la acústica. El nivel sonoro β en decibelios se relaciona con la intensidad del sonido I mediante la siguiente expresión:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

donde:

- β es el nivel sonoro en decibelios (dB),
- I es la intensidad del sonido en W/m^2,
- I_0 es la intensidad umbral de referencia en W/m^2, que en este caso es 10^{-12} W/m^2.

Calculamos el nivel sonoro en el punto con intensidad $I = 1$ W/m^2:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1 \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) = 120 \text{ dB}.$$

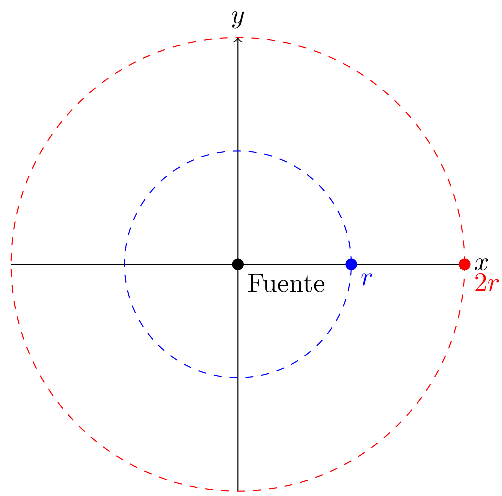
Entonces, el nivel de intensidad sonora en este punto es de 120 dB.

Considerando que la onda sonora se propaga de manera esférica, la intensidad del sonido disminuye inversamente con el cuadrado de la distancia desde la fuente. Es decir, si duplicamos la distancia, la intensidad se reduce a una cuarta parte. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$I \propto \frac{1}{r^2}.$$

Si la intensidad original es $I_1 = 1$ W/m^2 a una distancia r, entonces a una distancia $2r$, la nueva intensidad I_2 será:

$$I_2 = \frac{I_1}{(2)^2} = \frac{1 \text{ W/m}^2}{4} = 0,25 \text{ W/m}^2.$$



Por lo tanto, el nivel sonoro β en decibelios se calcula mediante la fórmula

$$\beta = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right).$$

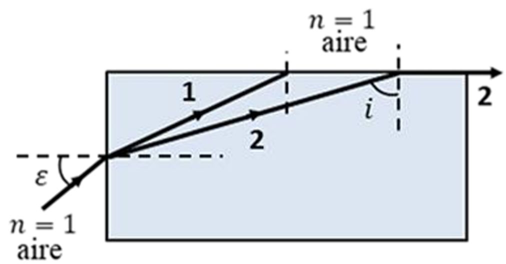
En el punto donde la intensidad es 1 W/m^2, el nivel sonoro es de 120 dB. Al duplicar la distancia desde la fuente, la intensidad del sonido disminuye a $0,25$ W/m^2, conforme a la ley de propagación esférica de las ondas sonoras, donde la intensidad disminuye inversamente con el cuadrado de la distancia.

Problema 3

Se hace incidir un haz de luz blanca sobre una lámina plano-paralela de un cierto material, cuyo índice de refracción para la luz roja es $n_r = 1,19$ y para la luz violeta $n_v = 1,23$.

a) **Explica qué sucede cuando el rayo incidente de luz blanca entra en la lámina e identifica cuál de los rayos 1 y 2 corresponde al rojo y cuál al violeta. Razona la respuesta en base a la ley física que rige este fenómeno.**

b) **Tras incidir en la cara superior de la lámina, el rayo 2 prosigue paralelo a ella, como se ve en la figura. Determina el ángulo, i, con el que incide sobre esta cara y el ángulo de entrada, $\mathcal{E}$.**



Solución:

a) **Explica qué sucede cuando el rayo incidente de luz blanca entra en la lámina e identifica cuál de los rayos 1 y 2 corresponde al rojo y cuál al violeta. Razona la respuesta en base a la ley física que rige este fenómeno.**

Cuando un haz de luz blanca incide sobre una lámina plano-paralela, cada componente de la luz (espectro visible) refracta de manera diferente debido a la variación del índice de refracción con la longitud de onda. Este fenómeno se conoce como *dispersiones de la luz* y está regido por la *Ley de Snell*:

$$n_1 \cdot \sin(\theta_1) = n_2 \cdot \sin(\theta_2),$$

donde:
- n_1 es el índice de refracción del medio incidente,
- n_2 es el índice de refracción del material de la lámina,
- θ_1 es el ángulo de incidencia,
- θ_2 es el ángulo de refracción.

Dado que el índice de refracción para la luz violeta ($n_v = 1,23$) es mayor que para la luz roja ($n_r = 1,19$), la luz violeta se refracta más que la luz roja al entrar en la lámina. En el diagrama, el rayo 1 que se refracta menos corresponde a la luz *roja* ($n_r = 1,19$), mientras que el rayo 2 que se refracta más corresponde a la luz *violeta* ($n_v = 1,23$).

Por lo tanto, el rayo 1 es la luz roja y el rayo 2 es la luz violeta, dado que la mayor refracción de la luz violeta se debe a su mayor índice de refracción en el material de la lámina, lo que implica que se desvía más de su trayectoria original en comparación con la luz roja.

b) **Tras incidir en la cara superior de la lámina, el rayo 2 prosigue paralelo a ella, como se ve en la figura. Determina el ángulo, i, con el que incide sobre esta cara y el ángulo de entrada, $\mathcal{E}$.**

Para que el rayo 2 (violeta) prosiga paralelo a la lámina tras la refracción en la segunda cara, el ángulo de refracción en esta interfaz debe ser de 90°. Aplicando nuevamente la *Ley de Snell* en la segunda interfaz (salida de la lámina):

$$n_v \cdot \sin(i) = n_1 \cdot \sin(\theta_3).$$

Dado que $\theta_3 = 90°$ (el rayo prosigue paralelo), tenemos:

$$n_v \cdot \sin(i) = n_1 \cdot \sin(90°) \quad \Rightarrow \quad n_v \cdot \sin(i) = n_1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_2) = \frac{n_1}{n_v} = \frac{1}{1,23} = 0,8130.$$

Entonces,

$$i = \arcsin(0,8130) = 54,39°.$$

Para poder calcular el ángulo de incidencia en la cara lateral ($\mathcal{E}$), debemos calcular primero el ángulo de refracción en dicha cara (α). Para ello, tenemos ne cuenta que se forma un triángulo:

$$\alpha + i + 90° = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 35,61°.$$

Para determinar el ángulo de entrada $\mathcal{E}$ en la primera interfaz, consideramos que el rayo 2 entra en la lámina con este ángulo de refracción. Aplicando nuevamente la *Ley de Snell* en la primera interfaz:

$$n_1 \cdot \sin(\mathcal{E}) = n_v \cdot \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \sin(\mathcal{E}) = 1,23 \cdot \sin(35,61°) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \arcsin(0,7192) = 45,74°.$$

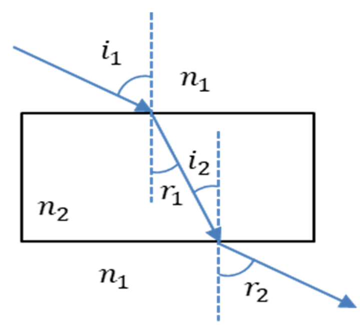
Por lo tanto, la solución es:

$$\begin{cases} \textbf{Ángulo de incidencia sobre la cara superior} & \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 54,39°} \\ \textbf{Ángulo de entrada en la lámina} & \rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{E} = 43,86°} \end{cases}$$

Comunidad Valenciana, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Cuestión 5

Un rayo de luz incide sobre una lámina de caras plano-paralelas de índice de refracción n_2, situada en un medio de índice de refracción n_1. Demuestra que el rayo que emerge de la lámina es paralelo al rayo incidente.



Solución:

Primero, identifiquemos los datos proporcionados en el problema:

- Índice de refracción del medio incidente: n_1.
- Índice de refracción de la lámina: n_2.
- La lámina tiene caras plano-paralelas.
- El rayo de luz incide sobre la lámina con un ángulo de incidencia i_1.

La Ley de Snell relaciona el ángulo de incidencia i_1 con el ángulo de refracción r_1 al pasar de un medio con índice de refracción n_1 a otro con índice n_2:

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin r_1.$$

Al salir de la lámina hacia el medio original, aplicamos nuevamente la ley de Snell, pero esta vez el rayo refractado dentro de la lámina actúa como rayo incidente:

$$n_2 \cdot \sin i_2 = n_1 \cdot \sin r_2,$$

donde i_2 es el ángulo de incidencia dentro de la lámina y r_2 es el ángulo de refracción en el medio original. Debido a que las caras de la lámina son plano-paralelas, el ángulo de incidencia i_2 es igual al ángulo de refracción r_1:

$$i_2 = r_1.$$

Sustituyendo $i_2 = r_1$ en la segunda ecuación de Snell:

$$n_2 \cdot \sin r_1 = n_1 \cdot \sin r_2.$$

De la primera ecuación de Snell:

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin r_1.$$

Igualando ambas expresiones:

$$n_1 \cdot \sin r_2 = n_1 \cdot \sin i_1.$$

Podemos deducir que:

$$\sin r_2 = \sin i_1 \quad \Rightarrow \quad r_2 = i_1.$$

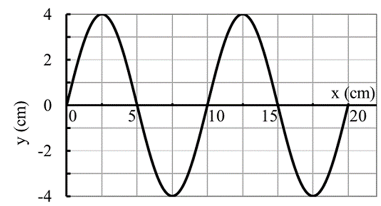
Por lo tanto, hemos comprobado que que el rayo que emerge de la lámina es paralelo al rayo incidente.

Problema 3

Una onda armónica transversal se propaga con velocidad $v = 5$ cm/s en el sentido negativo del eje x. A partir de la información contenida en la figura y justificando la respuesta:

a) **Determina la amplitud, la longitud de onda, el periodo y la diferencia de fase entre dos puntos que distan 15 cm y están separados en el tiempo 3 s.**

b) **Escribe la expresión de la función de onda (usando el seno), suponiendo que la fase inicial es nula. Calcula la velocidad de un punto de la onda situado en $x = 0$ cm para $t = 0$ s.**



Solución:

a) **Determina la amplitud, la longitud de onda, el periodo y la diferencia de fase entre dos puntos que distan 15 cm y están separados en el tiempo 3 s.**

A partir de la gráfica proporcionada, podemos deducir los siguientes datos de la onda armónica transversal:

- *Amplitud:* $A = 4$ cm.
- *Longitud de onda:* $\lambda = 10$ cm.

Además, se nos proporciona la velocidad de propagación de la onda:

$$v = 5 \text{ cm/s}.$$

La relación entre la velocidad de propagación v, la longitud de onda λ y el periodo T es:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\lambda}{v}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$T = \frac{10 \text{ cm}}{5 \text{ cm/s}} = 2 \text{ s}.$$

La diferencia de fase entre dos puntos que están separados por una distancia $\Delta x = 15$ cm y un intervalo de tiempo $\Delta t = 3$ s se calcula mediante:

$$\Delta\phi = \omega\Delta t + k\Delta x,$$

donde:

- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \text{ s}} = \pi$ rad/s,
- $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10 \text{ cm}} = \frac{\pi}{5}$ rad/cm.

Sustituyendo estos valores:

$$\Delta\phi = \pi \text{ rad/s} \cdot 3 \text{ s} + \frac{\pi}{5} \text{ rad/cm} \cdot 15 \text{ cm} = 3\pi + 3\pi = 6\pi \text{ rad}.$$

Por lo tanto, la amplitud es $A = 4$ cm, la longitud de onda es $\lambda = 10$ cm, el periodo es $T = 2$ s y la diferencia de fase entre los dos puntos es $\Delta\phi = 6\pi$ rad.

b) **Escribe la expresión de la función de onda (usando el seno), suponiendo que la fase inicial es nula. Calcula la velocidad de un punto de la onda situado en $x = 0$ cm para $t = 0$ s.**

La ecuación de una onda armónica transversal que se propaga en el sentido negativo del eje x y con fase inicial nula es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t + kx),$$

donde:
- $A = 4$ cm es la amplitud,
- $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s es la frecuencia angular,
- $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{5}$ rad/cm es el número de onda.

Sustituyendo los valores:

$$y(x,t) = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{5}x\right).$$

La velocidad de un punto de la onda está dada por la derivada de la función de onda respecto al tiempo:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + kx)$$

Evaluando en $x = 0$ cm y $t = 0$ s:

$$v_y(0,0) = 4 \text{ cm} \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot \cos(0 + 0) = 4\pi \text{ cm/s} = 12{,}57 \text{ cm/s}.$$

Por lo tanto, la expresión de la función de onda es $y(x,t) = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{5}x\right)$ y la velocidad del punto situado en $x = 0$ cm para $t = 0$ s es $v_y(0,0) = 12{,}57$ cm/s.

Cataluña, Junio 2024 (Convocatoria ordinaria)

Problema 5

L'Ainhoa està intrigada per saber a quina altura exploten els coets llançats a la revetlla de Sant Joan. Per a poder-ho determinar se situa a una distància de 50 m del punt on es llancen els coets i enregistra, amb un sonòmetre, un nivell d'intensitat sonora de 100 decibels en l'explosió d'un coet que no s'ha enlairat.

a) **Quina potència sonora emet el coet en el moment de l'explosió? Si l'explosió ha durat $0,03$ s, quina energia sonora s'ha alliberat?**
b) **Des de la mateixa distància al punt de llançament, enregistra 90 decibels d'intensitat sonora en el cas d'un coet igual a l'anterior que s'ha enlairat verticalment i ha explotat a certa altura. Calculeu a quina altura ha explotat el coet. Si dos coets idèntics a l'anterior exploten simultàniament a la mateixa altura que abans, quin nivell d'intensitat sonora percebrà l'Ainhoa, si està situada a la mateixa posició d'abans?**

Nota:
Considereu que les ones sonores es propaguen en les tres dimensions de l'espai i la seva energia es distribueix en superfícies esfèriques.
Dades:
$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$.
La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.
Superfície esfèrica: $4\pi r^2$.

Solución:

a) **Quina potència sonora emet el coet en el moment de l'explosió? Si l'explosió ha durat $0,03$ s, quina energia sonora s'ha alliberat?**

El nivel de intensidad sonora (β) se relaciona con la intensidad de la onda sonora (I) mediante la siguiente fórmula:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

$$\beta = 100\ \text{dB},$$
$$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}} \quad \text{(intensidad de referencia)}.$$

Despejando I:

$$100 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{10^{-12}} = 10^{10} \quad \Rightarrow \quad I = 10^{-2}\ \mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Considerando que el sonido se propaga en tres dimensiones y que su energía se distribuye uniformemente en una superficie esférica, la potencia emitida se relaciona con la intensidad y la superficie de la esfera mediante:

$$P = I \cdot 4\pi r^2,$$

donde:

$$I = 10^{-2}\ \mathrm{W\,m^{-2}},$$
$$r = 50\ \text{m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$P = 10^{-2}\ \mathrm{W\,m^{-2}} \cdot 4\pi \cdot (50\ \text{m})^2 = 314,16\ \text{W}.$$

La energía sonora liberada se obtiene multiplicando la potencia emitida por la duración de la explosión:

$$E = P \cdot t,$$

donde:

$$\begin{aligned} P &= 314,16 \text{ W}, \\ t &= 0,03 \text{ s}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores:

$$E = 314,16 \text{ W} \cdot 0,03 \text{ s} = 9,42 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la potencia es 314, 16 W y ha liberado 9, 42 J.

b) **Des de la mateixa distància al punt de llançament, enregistra 90 decibels d'intensitat sonora en el cas d'un coet igual a l'anterior que s'ha enlairat verticalment i ha explotat a certa altura. Calculeu a quina altura ha explotat el coet. Si dos coets idèntics a l'anterior exploten simultàniament a la mateixa altura que abans, quin nivell d'intensitat sonora percebrà l'Ainhoa, si està situada a la mateixa posició d'abans?**

Utilizamos la misma fórmula que en el apartado a):

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

$$\begin{aligned} \beta &= 90 \text{ dB}, \\ I_0 &= 10^{-12} \text{ W m}^{-2}. \end{aligned}$$

Despejando I:

$$90 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{10^{-12}} = 10^9 \quad \Rightarrow \quad I = 10^{-3} \text{ W m}^{-2}.$$

Considerando que el sonido se propaga en tres dimensiones y que su energía se distribuye uniformemente en una superficie esférica, la potencia emitida por el cohete es igual a la potencia emitida sin alzarse, ya que ambos son cohetes idénticos. Por lo tanto,

$$P = I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi r_2^2,$$

donde:

$$\begin{aligned} &I_1 = 10^{-3} \text{ W m}^{-2} \quad \text{(intensidad a la nueva altura)}, \\ &r_1 \quad \text{(distancia total desde el punto de lanzamiento)}, \\ &I_2 = 10^{-2} \text{ W m}^{-2} \quad \text{(intensidad sin alzarse)}, \\ &r_2 = 50 \text{ m} \quad \text{(distancia desde el punto de lanzamiento)}. \end{aligned}$$

Igualando las potencias:

$$I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi (50)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{(50)^2}{r_1^2}.$$

Sustituyendo los valores de I_1 e I_2:

$$\frac{10^{-3}}{10^{-2}} = \frac{2500}{r_1^2} \quad \Rightarrow \quad 0{,}1 = \frac{2500}{r_1^2}.$$

Despejando r_1^2:

$$r_1^2 = \frac{2500}{0{,}1} = 25000 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{25000} = 158{,}11 \text{ m}.$$

Entonces, la altura a la que ha explotado el cohete es, usando el Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = \sqrt{158{,}11^2 - 50^2} = 150 \text{ m}.$$

Cuando dos fuentes idénticas emiten simultáneamente, la potencia total emitida es la suma de las potencias individuales:

$$P_{\text{total}} = 2P.$$

La intensidad sonora total se relaciona con la potencia y la superficie:

$$I_{\text{total}} = \frac{P_{\text{total}}}{4\pi r^2} = \frac{2P}{4\pi r^2} = 2 \cdot \frac{P}{4\pi r^2} = 2I,$$

donde:

$$I = 10^{-3} \text{ W m}^{-2} \quad \text{(intensidad de una fuente)}.$$

Entonces,

$$I_{\text{total}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-2}.$$

Calculamos el nuevo nivel de intensidad sonora:

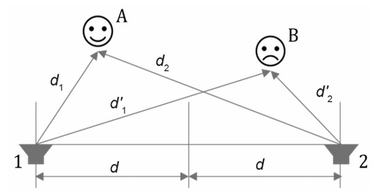
$$\beta_{\text{total}} = 10 \cdot \log\left(\frac{I_{\text{total}}}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}}\right) = 93{,}01 \text{ dB}.$$

Por lo tanto, la altura a la que ha explotado el cohete es 150 m y el nivel de intensidad sonora percibido por Ainhoa será de 93 dB cuando explotan dos cohetes idénticos.

Cataluña, Septiembre 2024 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 2

Dos altaveus estan separats entre si una distància $2d$ i emeten un senyal harmònic i en fase. Provoquem el so amb un generador de senyals que podem ajustar entre els 200 i els 400 Hz. La persona A està situada a $d_1 = 5,00$ m de l'altaveu 1 i a $d_2 = 8,68$ m de l'altaveu 2. Una segona persona B està situada a $d'_1 = 8,14$ m de l'altaveu 1 i a $d'_2 = 4,00$ m de l'altaveu 2.



a) **Calculeu totes les freqüències que podem escollir en el generador perquè la persona A senti els senyals amb una intensitat màxima. Quina freqüència de les anteriors hem d'escollir perquè la persona A senti el senyal amb intensitat màxima i la persona B no el pugui sentir (és a dir, el senti amb intensitat mínima)?**

b) **Ara emetem música pels dos altaveus amb una potència de $2,36 \times 10^{-3}$ W cadascun. Calculeu la intensitat sonora generada per cada altaveu en la posició de la persona A. Determineu el nivell d'intensitat sonora que percep aquesta persona.**

Nota:
Considereu que les ones sonores es propaguen en les tres dimensions de l'espai i la seva energia es distribueix en superfícies esfèriques.
Dades:
$I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.
La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.
Superfície esfèrica: $4\pi r^2$.

Solución:

a) **Calculeu totes les freqüències que podem escollir en el generador perquè la persona A senti els senyals amb una intensitat màxima. Quina freqüència de les anteriors hem d'escollir perquè la persona A senti el senyal amb intensitat màxima i la persona B no el pugui sentir (és a dir, el senti amb intensitat mínima)?**

La intensidad será máxima en el punto A cuando haya interferencia constructiva, es decir, cuando la diferencia de caminos sea un múltiplo entero de la longitud de onda:

$$|d_2 - d_1| = n \cdot \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculamos la diferencia de caminos para la persona A:

$$\Delta d_A = |d_2 - d_1| = |8{,}68 \text{ m} - 5{,}00 \text{ m}| = 3{,}68 \text{ m}.$$

Por lo tanto:

$$3{,}68 \text{ m} = n \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3{,}68 \text{ m}}{n}.$$

La frecuencia correspondiente es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v \cdot n}{3{,}68 \text{ m}} = n \cdot \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{3{,}68 \text{ m}} = n \cdot 92{,}391 \text{ Hz}.$$

Buscamos los valores de n que dan frecuencias entre 200 Hz y 400 Hz:

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad f = 3 \cdot 92{,}391 \text{ Hz} = 277{,}17 \text{ Hz}.$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad f = 4 \cdot 92{,}391 \text{ Hz} = 369{,}56 \text{ Hz}.$$

Por lo tanto, las frecuencias posibles son:

$$f = 277{,}17 \text{ Hz}, \quad f = 369{,}56 \text{ Hz}.$$

Para que la persona B escuche el sonido con intensidad mínima, debe haber interferencia destructiva en su posición, es decir:

$$|d_2' - d_1'| = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculamos la diferencia de caminos para la persona B:

$$\Delta d_B = |d_2' - d_1'| = |4{,}00 \text{ m} - 8{,}14 \text{ m}| = 4{,}14 \text{ m}.$$

Entonces:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \Delta d_B}{2n + 1} = \frac{4{,}14 \text{ m}}{n + \frac{1}{2}}.$$

La frecuencia correspondiente es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{4{,}14 \text{ m}}{n + \frac{1}{2}}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{4{,}14 \text{ m}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 82{,}125 \text{ Hz}.$$

Buscamos los valores de n que dan frecuencias entre 200 Hz y 400 Hz:

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad f = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot 82{,}125 \text{ Hz} = 205{,}31 \text{ Hz}.$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad f = \left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 82{,}125 \text{ Hz} = 287{,}44 \text{ Hz}.$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad f = \left(4 + \frac{1}{2}\right) \cdot 82{,}125 \text{ Hz} = 369{,}56 \text{ Hz}.$$

Observamos que la frecuencia $f = 369{,}56$ Hz cumple ambas condiciones.

Por lo tanto, las frecuencias que podemos escoger son $f = 277{,}17$ Hz y $f = 369{,}56$ Hz, y debemos escoger $f = 369{,}56$ Hz para que la persona A escuche el señal con intensidad máxima y la persona B con intensidad mínima.

b) Ara emetem música pels dos altaveus amb una potència de $2,36 \times 10^{-3}$ W cadascun. Calculeu la intensitat sonora generada per cada altaveu en la posició de la persona A. Determineu el nivell d'intensitat sonora que percep aquesta persona.

La intensidad sonora generada por cada altavoz en la posición de la persona A es:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi d_1^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4\pi (5{,}00 \text{ m})^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4\pi \cdot 25{,}00 \text{ m}^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{314{,}16 \text{ m}^2} = 7{,}51 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2,$$

$$I_2 = \frac{P}{4\pi d_2^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}}{4\pi(8{,}68\ \mathrm{m})^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}}{4\pi \cdot 75{,}38\ \mathrm{m}^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}}{942{,}48\ \mathrm{m}^2} = 2{,}50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}.$$

La intensidad total es la suma de las intensidades:

$$I = I_1 + I_2 = 7{,}51 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2} + 2{,}50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2} = 1{,}00 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}.$$

El nivel de intensidad sonora percibido es:

$$L = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1{,}00 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}}{1{,}00 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 10 \cdot \log_{10}(1{,}00 \cdot 10^{7}) = 70\ \mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, la intensidad sonora generada por cada altavoz en la posición de la persona A es $I_1 = 7{,}51 \cdot 10^{-6}$ W/m^2 y $I_2 = 2{,}50 \cdot 10^{-6}$ W/m^2, y el nivel de intensidad sonora percibido es $L = 70$ dB.

Problema 7

Una massa de 100 g es fa oscil·lar penjada d'una molla. S'observa que fa 40 oscil·lacions en un minut i que la diferència entre la posició més alta i la més baixa és de 15 cm.

a) **Determineu el període, la constant de la molla i l'equació del moviment si comenceu a comptar el moviment quan passa per la posició més baixa. Representeu a la quadrícula de sota la força elàstica durant dos períodes sencers.**
b) **Calculeu l'energia mecànica de l'oscil·lator harmònic i trobeu l'expressió de l'energia cinètica en funció de la posició de la massa. Calculeu el mòdul de la velocitat quan la massa és 3 cm per sobre de la posició d'equilibri.**

Solución:

a) **Determineu el període, la constant de la molla i l'equació del moviment si comenceu a comptar el moviment quan passa per la posició més baixa. Representeu a la quadrícula de sota la força elàstica durant dos períodes sencers.**

Primero, calculamos la frecuencia de oscilación:

$$f = \frac{\text{número de oscilaciones}}{\text{tiempo}} = \frac{40 \text{ oscilaciones}}{60 \text{ s}} = 0{,}667 \text{ Hz}.$$

El período es la inversa de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}667 \text{ Hz}} = 1{,}5 \text{ s}.$$

La constante del muelle se relaciona con la frecuencia angular del movimiento armónico simple:

$$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot (2\pi f)^2.$$

Calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0{,}667 \text{ Hz} = 4{,}19 \text{ rad/s}.$$

Entonces:

$$k = 0{,}1 \text{ kg} \cdot (4{,}19 \text{ rad/s})^2 = 0{,}1 \text{ kg} \cdot 17{,}54 \text{ rad}^2/\text{s}^2 = 1{,}75 \text{ N/m}.$$

La diferencia entre la posición más alta y más baja es $2A = 15$ cm, por lo que la amplitud es:

$$A = \frac{15 \text{ cm}}{2} = 7{,}5 \text{ cm} = 0{,}075 \text{ m}.$$

Como comenzamos a contar el movimiento cuando pasa por la posición más baja ($t = 0$, $y = -A$), la ecuación del movimiento es:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0).$$

En $t = 0$, tenemos:

$$y(0) = -A = A \cdot \sin(\varphi_0) \implies \sin(\varphi_0) = -1.$$

Por lo tanto, el ángulo inicial es:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{o} \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}.$$

Podemos escribir la ecuación del movimiento:

$$y(t) = A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -A \cdot \cos(\omega t).$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$y(t) = -0{,}075 \text{ m} \cdot \cos(4{,}19 \text{ rad/s} \cdot t).$$

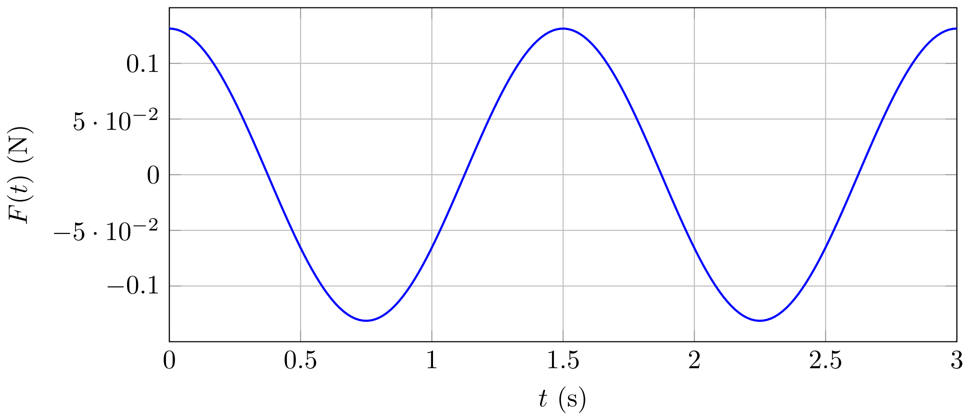
La fuerza elástica es:

$$F(t) = -k \cdot y(t).$$

Sustituyendo:

$$F(t) = -1{,}75 \text{ N/m} \cdot [-0{,}075 \text{ m} \cdot \cos(4{,}19\ t)] = 0{,}13125 \text{ N} \cdot \cos(4{,}19\ t).$$

Representación de la fuerza elástica durante dos períodos completos:



Por lo tanto, el periodo es 0,075 m, la constante del muelle es 1,75 N/m y la ecuación del movimiento es

$$\boldsymbol{y(t) = -0{,}075 \text{ m} \cdot \cos(4{,}19 \text{ rad/s} \cdot t).}$$

b) Calculeu l'energia mecànica de l'oscil·lator harmònic i trobeu l'expressió de l'energia cinètica en funció de la posició de la massa. Calculeu el mòdul de la velocitat quan la massa és 3 cm per sobre de la posició d'equilibri.

La energía mecánica total del oscilador armónico es:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}75 \text{ N/m} \cdot (0{,}075 \text{ m})^2 = 4{,}92 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

La energía cinética en función de la posición y se puede obtener restando la energía potencial elástica de la energía mecánica:

$$E_c = E_m - E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - y^2).$$

Sustituyendo los valores:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 1{,}75 \text{ N/m} \cdot \left((0{,}075 \text{ m})^2 - y^2\right) = 0{,}875 \text{ N/m} \cdot \left(0{,}005625 \text{ m}^2 - y^2\right) = 4{,}92 \cdot 10^{-3} \text{ J} - 0{,}875 \text{ N/m} \cdot y^2.$$

Para $y = +3$ cm $= +0{,}03$ m, calculamos la energía cinética:

$$E_c = 4{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{J} - 0{,}875\ \text{N/m} \cdot (0{,}03\ \text{m})^2 = 4{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{J} - 0{,}875 \cdot 9 \cdot 10^{-4}\ \text{J},$$

$$E_c = 4{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{J} - 7{,}88 \cdot 10^{-4}\ \text{J} = 4{,}13 \cdot 10^{-3}\ \text{J}.$$

La velocidad se obtiene de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \implies v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}},$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}13 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}{0{,}1\ \text{kg}}} = \sqrt{0{,}0826\ \text{m}^2/\text{s}^2} = \pm 0{,}288\ \text{m/s}.$$

Por lo tanto, el módulo de la velocidad es $v = 0{,}288$ m/s cuando la masa está 3 cm por encima de la posición de equilibrio.

Cataluña, Junio 2023 (Convocatoria ordinaria)

Problema 3

Des de la platja, observem que la distància entre les crestes de dues onades consecutives és de 4 m. Per altra banda, tot observant una de les boies que limita la zona de bany, comptem que oscil·la 30 vegades en un minut i que el seu desplaçament vertical total, des de la posició més baixa fins al punt més alt, és de 40 cm.

a) **Determineu la freqüència, la longitud d'ona i la velocitat de propagació de les ones. Escriviu l'equació que descriu el moviment de la boia en funció del temps.**

b) **Deduïu l'expressió de la velocitat i l'acceleració de la boia i calculeu els valors màxims de la velocitat i l'acceleració. Representeu a la quadrícula de sota l'evolució de la velocitat respecte al temps durant un període.**

Nota: Per determinar la fase inicial considereu que al principi la boia es troba en la posició més alta.

Solució:

a) **Determineu la freqüència, la longitud d'ona i la velocitat de propagació de les ones. Escriviu l'equació que descriu el moviment de la boia en funció del temps.**

La frecuencia es el número de ciclos por segundo. La boya oscila 30 veces en un minuto:

$$f = \frac{30 \text{ oscilaciones}}{60 \text{ s}} = 0{,}5 \text{ Hz}.$$

La distancia entre dos crestas consecutivas es la longitud de onda:

$$\lambda = 4 \text{ m}.$$

La velocidad de propagación de las ondas es:

$$v = \lambda \cdot f = 4 \text{ m} \cdot 0{,}5 \text{ Hz} = 2 \text{ m/s}.$$

El desplazamiento vertical total desde la posición más baja hasta la más alta es el doble de la amplitud:

$$2A = 40 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{40 \text{ cm}}{2} = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}.$$

La frecuencia angular (ω) es:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0{,}5 \text{ Hz} = \pi \text{ rad/s}.$$

Para determinar la fase inicial (φ_0), tenemos en cuenta que, como en $t = 0$ la boya está en la posición más alta ($y = A$), si usamos la ecuación del movimiento armónico simple:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

en $t = 0$:

$$y(0) = A = A \cdot \sin(\varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

La ecuación del movimiento de la boya es:

$$y(t) = A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Simplificando, ya que $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$:

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t).$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$y(t) = 0{,}2\ \text{m} \cdot \cos(\pi\ t).$$

Por lo tanto, la ecuación del movimiento de la boya es:

$$\boldsymbol{y(t) = 0{,}2\ \text{m} \cdot \cos(\pi\ t),}$$

donde t está en segundos y $y(t)$ en metros.

b) **Deduïu l'expressió de la velocitat i l'acceleració de la boia i calculeu els valors màxims de la velocitat i l'acceleració. Representeu a la quadrícula de sota l'evolució de la velocitat respecte al temps durant un període.**

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -A\omega \cdot \sin(\omega t).$$

Sustituyendo los valores:

$$v(t) = -0{,}2\ \text{m} \cdot \pi\ \text{rad/s} \cdot \sin(\pi\ t) = -0{,}628\ \text{m/s} \cdot \sin(\pi\ t).$$

El valor máximo de $\sin(\omega t)$ es 1, por lo que:

$$v_{\text{máx}} = A\omega = 0{,}20\ \text{m} \cdot \pi\ \text{rad/s} = 0{,}628\ \text{m/s}.$$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t).$$

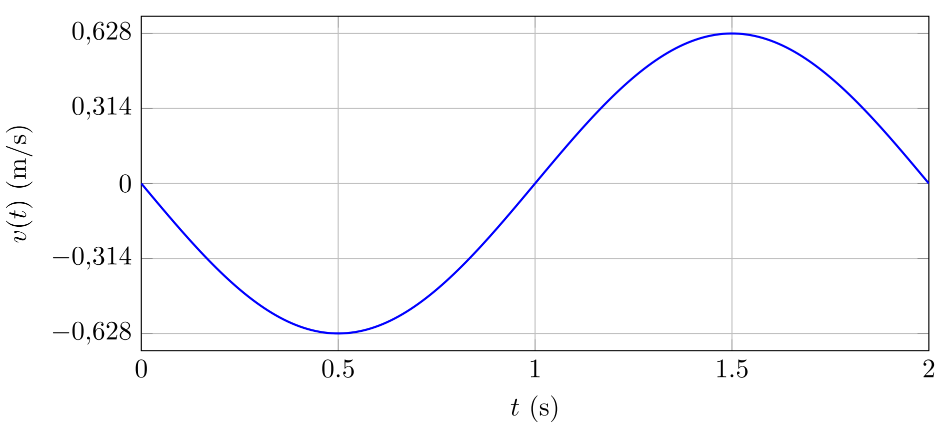
Sustituyendo los valores:

$$a(t) = -0{,}2\ \text{m} \cdot (\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot \cos(\pi\ t) = -0{,}2\ \text{m} \cdot \pi^2\ \text{rad}^2/\text{s}^2 \cdot \cos(\pi\ t) = -1{,}973\ \text{m/s}^2 \cdot \cos(\pi\ t).$$

El valor máximo de $\cos(\omega t)$ es 1, por lo que:

$$a_{\text{máx}} = A\omega^2 = 0{,}20\ \text{m} \cdot \pi^2\ \text{rad}^2/\text{s}^2 = 1{,}973\ \text{m/s}^2.$$

Representación gráfica de la velocidad durante un período (2 s):



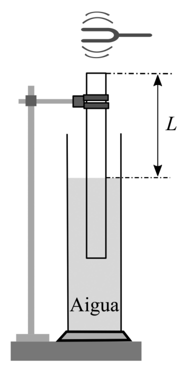
En la gráfica se muestra la evolución de la velocidad $v(t)$ en función del tiempo durante un período completo de 0 a 2 segundos.

Por lo tanto, la velocidad máxima es $0,628$ m/s y la aceleración máxima es 1,973 m/s^2.

Cataluña, Septiembre 2023 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 3

Duem a terme una experiència de ressonància en un tub amb aigua que consisteix a submergir un tub obert pels dos extrems en un recipient que conté aigua, tal com es mostra en la figura de la dreta. Damunt de l'extrem superior del tub fem vibrar un diapasó, que emet un so de freqüència 442 Hz. La longitud de la columna d'aire (L) s'ajusta elevant el tub fora de l'aigua fins a trobar un punt on es produeix la ressonància (se sent una nota intensa). Comencem l'experiència amb tot el tub submergit i observem la primera ressonància quan L = 19,3 cm i la segona ressonància quan L = 58,0 cm.



a) **Dibuixeu la forma de l'ona ressonant per a la primera i segona ressonàncies. Indiqueu en tots dos casos de quin harmònic es tracta i identifiqueu els ventres i els nodes. Justifiqueu per què en tots dos casos la longitud d'ona no varia. Determineu la longitud del tub que ha de quedar per sobre de l'aigua quan ressona el cinquè harmònic.**

b) **A partir dels resultats de l'experiència, determineu la velocitat del so a l'aire. Si substituïm l'aigua per glicerina, variarà aquest resultat? Raoneu la resposta.**

Dades:
La velocitat del so a l'aigua és de 1 493 $\mathrm{m\,s^{-1}}$.
La velocitat del so a la glicerina és de 1 904 $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solució:

a) **Dibuixeu la forma de l'ona ressonant per a la primera i segona ressonàncies. Indiqueu en tots dos casos de quin harmònic es tracta i identifiqueu els ventres i els nodes. Justifiqueu per què en tots dos casos la longitud d'ona no varia. Determineu la longitud del tub que ha de quedar per sobre de l'aigua quan ressona el cinquè harmònic.**

Dado que el tubo está abierto por ambos extremos cuando lo elevamos del agua, la columna de aire actúa como un tubo abierto por ambos extremos mientras la parte sumergida impide el paso del aire. Sin embargo, en este caso, dado que el tubo está abierto en la parte superior y cerrado en la parte inferior (por el agua), se comporta como un *tubo cerrado en un extremo* y *abierto en el otro*. En un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro, las condiciones de resonancia ocurren cuando se forma un nodo en el extremo cerrado (agua) y un vientre en el extremo abierto (superficie del tubo). La

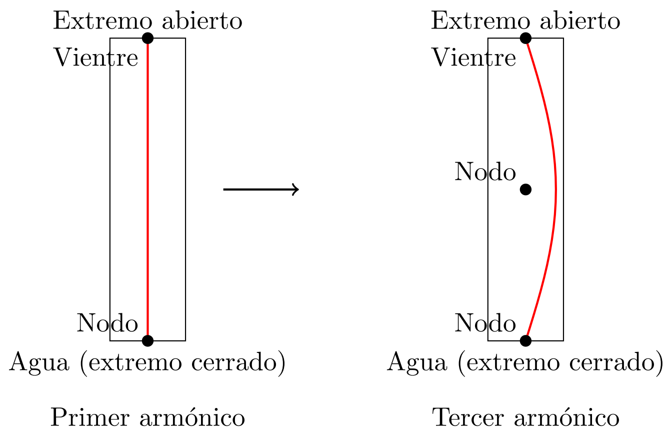
primera resonancia ($L = 19{,}3$ cm) se trata del *primer armónico* o *frecuencia fundamental*. La longitud del tubo corresponde a un cuarto de la longitud de onda:

$$L = \frac{\lambda_1}{4}.$$

La segunda resonancia ($L = 58{,}0$ cm) se trata del *tercer armónico*. La longitud del tubo corresponde a tres cuartos de la longitud de onda:

$$L = \frac{3\lambda_3}{4}.$$

Los diagramas de las ondas estacionarias son:



En ambos casos, hay un *nodo* en el extremo cerrado (agua) y un *vientre* en el extremo abierto. En la segunda resonancia (tercer armónico), aparece un nodo adicional en el centro del tubo.La longitud de onda λ del sonido en el aire depende de la frecuencia y de la velocidad del sonido en el aire:

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

Como la frecuencia del diapasón es constante ($f = 442$ Hz) y la velocidad del sonido en el aire es constante a temperatura ambiente, la longitud de onda es la misma en todos los armónicos. En un tubo cerrado en un extremo, los armónicos permitidos son los impares ($n = 1, 3, 5, \dots$). La relación para el n-ésimo armónico es:

$$L = \frac{n\lambda}{4}.$$

Sabemos que la longitud de onda es:

$$\lambda = 4L_1 = 4 \cdot 0{,}193 \text{ m} = 0{,}772 \text{ m}.$$

Para el quinto armónico ($n = 5$):

$$L = \frac{5\lambda}{4} = \frac{5 \cdot 0{,}772 \text{ m}}{4} = 0{,}965 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la longitud del tubo que debe quedar por encima del agua es $\boldsymbol{L = 96{,}5}$ cm.

b) A partir dels resultats de l'experiència, determineu la velocitat del so a l'aire. Si substituïm l'aigua per glicerina, variarà aquest resultat? Raoneu la resposta.

Utilizando los datos de la primera y segunda resonancias:
- Primera resonancia ($n = 1$): $L_1 = 19{,}3$ cm $= 0{,}193$ m.
- Tercera resonancia ($n = 3$): $L_3 = 58{,}0$ cm $= 0{,}580$ m.

La relación entre la longitud del tubo y la longitud de onda es:

$$L_n = \frac{n\lambda}{4}.$$

Para $n = 1$:

$$L_1 = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4L_1 = 4 \cdot 0{,}193 \text{ m} = 0{,}772 \text{ m}.$$

Para $n = 3$:

$$L_3 = \frac{3\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4L_3}{3} = \frac{4 \cdot 0{,}580 \text{ m}}{3} = 0{,}773 \text{ m}.$$

Ambas mediciones nos dan una longitud de onda muy similar, lo cual es coherente. Calculamos el valor promedio de λ:

$$\lambda = \frac{0{,}772 \text{ m} + 0{,}773 \text{ m}}{2} = 0{,}7725 \text{ m}.$$

Ahora, calculamos la velocidad del sonido en el aire:

$$v = f \cdot \lambda = 442 \text{ Hz} \cdot 0{,}7725 \text{ m} = 341{,}3 \text{ m/s}.$$

Si sustituimos el agua por glicerina, el extremo inferior del tubo sigue siendo un extremo cerrado, ya que la glicerina también impide el movimiento del aire en ese extremo. Dado que el sonido que analizamos es el que se propaga en el aire dentro del tubo, y la glicerina sólo afecta al extremo cerrado, la velocidad del sonido en el aire no varía por cambiar el líquido. Por lo tanto, *el resultado no variará*, ya que la velocidad del sonido en el aire es independiente del líquido utilizado en el extremo inferior.

Por lo tanto, la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente 341 m/s. Si sustituimos el agua por glicerina, este resultado no variará porque la velocidad del sonido en el aire no depende del líquido en el que se sumerge el extremo cerrado del tubo.

Problema 5

a) **Justifiqueu si es podria determinar la massa d'un objecte penjant-lo d'una molla de constant elàstica coneguda (100 N/m) i deixant-lo oscil·lar unes quantes vegades i, en cas afirmatiu, expliqueu com la calcularíeu. Obtindríem el mateix resultat si ho féssim a la Lluna? Negligiu l'efecte de la força de fricció.**

b) **Deduïu l'equació de moviment de l'objecte a partir de l'equació del moviment harmònic simple (MHS) tenint en compte que l'amplitud del moviment és de 6,00 cm, que la freqüència d'oscil·lació és de 10,0 Hz i que el moviment s'inicia quan l'acceleració és màxima i positiva. Calculeu la velocitat i l'acceleració màximes del MHS a partir de l'equació de moviment.**

Solució:

a) **Justifiqueu si es podria determinar la massa d'un objecte penjant-lo d'una molla de constant elàstica coneguda (100 N/m) i deixant-lo oscil·lar unes quantes vegades i, en cas afirmatiu, expliqueu com la calcularíeu. Obtindríem el mateix resultat si ho féssim a la Lluna? Negligiu l'efecte de la força de fricció.**

Sí, es posible determinar la masa de un objeto colgándolo de un muelle de constante elástica conocida y midiendo el período de oscilación. Para un sistema masa-muelle que oscila en movimiento armónico simple (MAS), el período de oscilación viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Despejando la masa m:

$$m = \frac{k}{4\pi^2} \cdot T^2.$$

Por lo tanto, midiendo el período T y conociendo la constante elástica k, podemos calcular la masa m del objeto. Para mejorar la precisión, es recomendable medir el tiempo que tarda en completar un número grande de oscilaciones y luego calcular el período medio dividiendo entre el número de oscilaciones. Respecto a si obtendríamos el mismo resultado en la Luna, la respuesta es **sí**. El período de oscilación de un sistema masa-muelle no depende de la aceleración de la gravedad g, ya que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Por lo tanto, la masa calculada sería la misma tanto en la Tierra como en la Luna. Además, en la Luna podríamos obtener una medida más precisa debido a la ausencia de rozamiento con el aire.

b) **Deduïu l'equació de moviment de l'objecte a partir de l'equació del moviment harmònic simple (MHS) tenint en compte que l'amplitud del moviment és de 6,00 cm, que la freqüència d'oscil·lació és de 10,0 Hz i que el moviment s'inicia quan l'acceleració és màxima i positiva. Calculeu la velocitat i l'acceleració màximes del MHS a partir de l'equació de moviment.**

Cálculo de los parámetros del MAS:

– Amplitud:

$$A = 6,00 \text{ cm} = 0,0600 \text{ m}.$$

– Frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10,0 \text{ Hz} = 20\pi \text{ rad/s}.$$

La ecuación general del movimiento armónico simple es:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

La aceleración es:

$$a(t) = -\omega^2 x(t).$$

Se indica que en $t = 0$ la aceleración es máxima y positiva, lo que implica que:

$$a(0) = a_{\text{máx}} > 0.$$

Como la aceleración es máxima cuando $x = -A$, tenemos:

$$x(0) = A\sin(\varphi_0) = -A \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_0) = -1.$$

Por lo tanto:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

La ecuación del movimiento es:

$$x(t) = A\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Simplificando:

$$x(t) = A\cos(\omega t).$$

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t).$$

La velocidad máxima es:

$$v_{\text{máx}} = A\omega.$$

Sustituyendo valores:

$$v_{\text{máx}} = 0,0600 \text{ m} \cdot 20\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3,770 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La aceleración es:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t).$$

La aceleración máxima es:

$$a_{\text{máx}} = A\omega^2.$$

Sustituyendo valores:

$$a_{\text{máx}} = 0,0600 \text{ m} \cdot (20\pi \text{ rad/s})^2 = 236,87 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación del movimiento es:

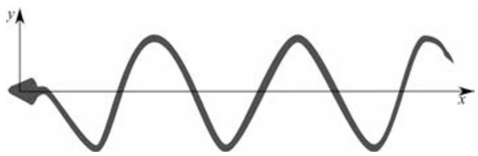
$$\boldsymbol{x(t) = 0,0600 \ \text{m} \cdot \cos(20\pi \ t).}$$

La velocidad máxima es $v_{\text{máx}} = 3,770 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la aceleración máxima es $a_{\text{máx}} = 236,87 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Cataluña, Junio 2022 (Convocatoria ordinaria)

Problema 3

El moviment d'una anguila es pot aproximar al d'una ona harmònica transversal que es propaga des del cap fins a la cua. Per a estudiar-ne el moviment hem de simplificar: no considerem l'aportació al moviment de la resta de músculs del cos, i suposem, simplement, que l'ona es genera al cap de l'anguila, que vibra amb una freqüència de $0,50$ Hz i amb una amplitud de $5,00$ cm. La distància entre dos punts consecutius del cos de l'anguila que estan en el mateix estat de vibració és de $20,0$ cm.



a) **Calculeu la velocitat a la qual es propaga l'ona pel cos de l'anguila, la freqüència angular i el nombre d'ona. Si a l'instant inicial el cap té una elongació zero i la velocitat d'oscil·lació transversal és positiva, determineu l'expressió de l'equació d'ona. Per a l'equació d'ona utilitzeu el sistema de coordenades de la figura superior, on el cap de l'anguila es troba sempre a l'origen de les abscisses.**

b) **A partir de l'equació d'ona, deduïu i calculeu els mòduls de la velocitat i de l'acceleració màximes de l'oscil·lació transversal. Si la longitud total de l'anguila és de $58,0$ cm, calculeu també la velocitat i l'acceleració transversals a la cua 10 s més tard d'haver iniciat el moviment.**

Solució:

a) **Calculeu la velocitat a la qual es propaga l'ona pel cos de l'anguila, la freqüència angular i el nombre d'ona. Si a l'instant inicial el cap té una elongació zero i la velocitat d'oscil·lació transversal és positiva, determineu l'expressió de l'equació d'ona. Per a l'equació d'ona utilitzeu el sistema de coordenades de la figura superior, on el cap de l'anguila es troba sempre a l'origen de les abscisses.**

La distancia entre dos puntos consecutivos en el mismo estado de vibración es la longitud de onda λ:

$$\lambda = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}.$$

La frecuencia es:

$$f = 0{,}5 \text{ Hz}.$$

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \lambda \cdot f = 0{,}2 \text{ m} \cdot 0{,}5 \text{ Hz} = 0{,}1 \text{ m/s}.$$

Hallamos la frecuencia angular ω:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0{,}5 \text{ Hz} = \pi \text{ rad/s} \approx 3{,}14 \text{ rad/s}.$$

Calculamos el número de onda k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}2 \text{ m}} = 10\pi \text{ m}^{-1} \approx 31{,}4 \text{ m}^{-1}.$$

La ecuación general de una onda armónica transversal que se propaga en el eje x es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi_0),$$

donde:
- $A = 5{,}00$ cm $= 0{,}0500$ m es la amplitud,
- $k = 10\pi$ m^{-1} es el número de onda,
- $\omega = \pi$ rad/s es la frecuencia angular.

Aplicamos las condiciones iniciales:
- En $t = 0$ y $x = 0$ (la cabeza), la elongación es cero:

$$y(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot \sin(\varphi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$$

- La velocidad transversal en $t = 0$ y $x = 0$ es positiva. La velocidad transversal es la derivada de la elongación respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi_0).$$

Evaluando en $x = 0$, $t = 0$:

$$v(0,0) = -A\omega \cdot \cos(\varphi_0).$$

Queremos que $v(0,0) > 0$, entonces:

$$-A\omega \cdot \cos(\varphi_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi_0) < 0.$$

Esto ocurre si:

$$\varphi_0 = \pi.$$

Por lo tanto, la ecuación de onda es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \pi).$$

Podemos simplificar usando la identidad $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$:

$$y(x,t) = -A \cdot \sin(kx - \omega t),$$

o también

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx).$$

Por lo tanto, la ecuación de onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot \sin(10\pi x - \pi t + \pi)},$$

o equivalentemente

$$\boldsymbol{y(x,t) = -0{,}05\ \mathrm{m} \cdot \sin(10\pi x - \pi t)}.$$

b) A partir de l'equació d'ona, deduïu i calculeu els mòduls de la velocitat i de l'acceleració màximes de l'oscil·lació transversal. Si la longitud total de l'anguila és de 58, 0 cm, calculeu també la velocitat i l'acceleració transversals a la cua 10 s més tard d'haver iniciat el moviment.

La velocidad transversal es la derivada parcial de la elongación respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega \cdot \cos(kx - \omega t + \pi).$$

El valor máximo del coseno es 1, por lo que la velocidad máxima en módulo es:

$$v_{\text{máx}} = A\omega = 0{,}05 \text{ m} \cdot \pi \text{ rad/s} = 0{,}157 \text{ m/s}.$$

La aceleración transversal es la derivada parcial de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -A\omega^2 \cdot \sin(kx - \omega t + \pi).$$

El valor máximo del seno es 1, por lo que la aceleración máxima en módulo es:

$$a_{\text{máx}} = A\omega^2 = 0{,}05 \text{ m} \cdot (\pi \text{ rad/s})^2 = 0{,}493 \text{ m/s}^2.$$

La posición de la cola es $x = L = 58{,}0$ cm $= 0{,}580$ m. Usando la expresión de la velocidad:

$$v(x,t) = -A\omega \cdot \cos(kx - \omega t + \pi).$$

Calculamos:

$$v(0{,}58 \text{ m},\ 10 \text{ s}) = -0{,}05 \text{ m} \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot \cos(10\pi \cdot 0{,}58 - \pi \cdot 10 + \pi) = 0{,}127 \text{ m/s}.$$

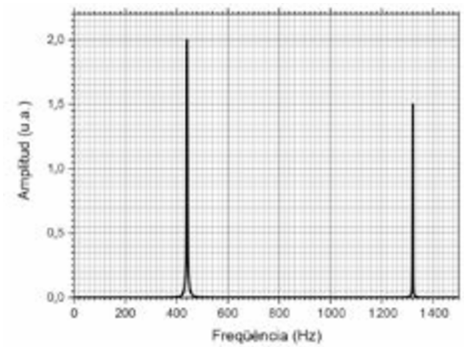
Ahora, calculamos la aceleración:

$$a(x,t) = -A\omega^2 \cdot \sin(kx - \omega t + \pi) \quad \Rightarrow \quad a(0{,}58,\ 10) = -0{,}05 \text{ m} \cdot (\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}5878 = -0{,}29 \text{ m/s}^2.$$

Por lo tanto, la velocidad máxima es $v_{\text{máx}} = 0{,}157$ m/s, la aceleración máxima es $a_{\text{máx}} = 0{,}493$ m/s^2, la velocidad transversal en la cola a $t = 10$ s es $v = 0{,}127$ m/s y la aceleración transversal en la cola a $t = 10$ s es $a = -0{,}29$ m/s^2.

Problema 7

Per a identificar els instruments musicals es pot utilitzar un espectre de freqüències. A la figura següent es representa l'espectre d'un instrument que es vol identificar. L'oboè és un instrument que té un extrem obert i un extrem tancat que és l'embocadura amb una canya. A l'extrem obert, l'amplitud de la vibració de les molècules és màxima: tenim un ventre. En canvi, a l'altre extrem, el tudell per on es bufa és una canya que comunica pressió a l'aire i impedeix que aquest es pugui moure amb llibertat: és un node. D'altra banda, en un piano les cordes estan pinçades pels dos extrems, és a dir, els dos extrems de la corda són nodes.



a) **Quina és la freqüència fonamental d'aquest espectre? Determineu si es tracta d'un oboè o d'un piano, i justifiqueu la resposta. Determineu també la llargària del tub o de la corda.**
b) **Un quintet de vent acostuma a estar format per cinc instrumentistes, normalment flauta travessera, oboè, clarinet, trompa i fagot. A l'inici de la interpretació d'una composició tots 5 toquen de forma suau i amb la mateixa intensitat, generant un nivell d'intensitat sonora de 80 dB a un espectador que es troba a una distància d'1, 5 m. Quina és la potència sonora de cada instrument? Suposeu que aquesta potència es distribueix uniformement per tota l'àrea d'una semiesfera.**

Dades:
$\boldsymbol{I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}}$.
La velocitat del so en l'aire és de 340 $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solució:

a) **Quina és la freqüència fonamental d'aquest espectre? Determineu si es tracta d'un oboè o d'un piano, i justifiqueu la resposta. Determineu també la llargària del tub o de la corda.**

Observamos que la primera frecuencia que aparece en el espectro es $f_1 = 440$ Hz. Esta es la frecuencia fundamental del instrumento. Analizamos las características de los armónicos:
- *Piano:* Las cuerdas de un piano están pinzadas por ambos extremos, lo que significa que ambos extremos son nodos. En este caso, los armónicos presentes son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental: $f_n = n \cdot f_1$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$
- *Oboe:* El oboe tiene un extremo abierto y otro cerrado. Por lo tanto, los armónicos presentes son múltiplos impares de la frecuencia fundamental: $f_n = n \cdot f_1$, donde $n = 1, 3, 5, \ldots$

Observando el espectro, la segunda frecuencia que aparece es 1320 Hz. Si fuera un piano, esperaríamos que la segunda frecuencia sea 880 Hz ($2 \cdot 440$). Sin embargo, la segunda frecuencia observada es 1320 Hz, lo que corresponde al tercer armónico ($3 \cdot 440$ Hz) propio del oboe.

Para un oboe, que es un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro, la frecuencia fundamental se relaciona con la longitud del tubo L mediante la siguiente fórmula:

$$f_1 = \frac{v}{4L}.$$

Despejando L:

$$L = \frac{v}{4f_1}.$$

Sustituyendo los valores:

$$L = \frac{340 \text{ m/s}}{4 \cdot 440 \text{ Hz}} = \frac{340}{1760} \text{ m} = 0{,}193 \text{ m}.$$

Por lo tanto:
- **La frecuencia fundamental es $f_1 = 440$ Hz.**
- **El instrumento es un *oboe*, ya que los armónicos presentes son múltiplos impares de la frecuencia fundamental.**
- **La longitud del tubo del oboe es $L = 0{,}193$ m.**

b) **Un quintet de vent acostuma a estar format per cinc instrumentistes, normalment flauta travessera, oboè, clarinet, trompa i fagot. A l'inici de la interpretació d'una composició tots 5 toquen de forma suau i amb la mateixa intensitat, generant un nivell d'intensitat sonora de 80 dB a un espectador que es troba a una distància d'1, 5 m. Quina és la potència sonora de cada instrument? Suposeu que aquesta potència es distribueix uniformement per tota l'àrea d'una semiesfera.**

El nivel de intensidad sonora β en decibelios se relaciona con la intensidad real I mediante la fórmula:

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2} es la intensidad de referencia. Despejamos I:

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{-12} \text{ W m}^{-2} \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^8 = 10^{-4} \text{ W m}^{-2}.$$

La potencia total P_{total} emitida por los cinco instrumentos se distribuye uniformemente sobre el área de una semiesfera con radio $r = 1,5$ m. El área de una semiesfera es:

$$A = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot (1{,}5 \text{ m})^2 = 2\pi \cdot 2{,}25 \text{ m}^2 = 4{,}5\pi \text{ m}^2.$$

La intensidad sonora total es la potencia total dividida por el área:

$$I = \frac{P_{\text{total}}}{A} \implies P_{\text{total}} = I \cdot A = 10^{-4} \text{ W m}^{-2} \cdot 4{,}5\pi \text{ m}^2 = 1{,}4137 \cdot 10^{-3} \text{ W}.$$

Como hay cinco instrumentos, la potencia de cada uno es:

$$P_{\text{instrumento}} = \frac{P_{\text{total}}}{5} = \frac{1{,}4137 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{5} = 2{,}8274 \cdot 10^{-4} \text{ W}.$$

Por lo tanto, la potencia sonora de cada instrumento es $P_{\text{instrumento}} = 2{,}83 \cdot 10^{-4}$ W.

Cataluña, Septiembre 2022 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 3

El volcà Cumbre Vieja va entrar en erupció el 19 de setembre de 2021 a l'illa de La Palma. El so de l'erupció volcànica va ser mesurat per un equip de vulcanòlegs, que van detectar que estava format per diferents freqüències i que tenia un nivell d'intensitat sonora variant. Pel que fa al so que produeix en alguns moments de l'erupció, un volcà es pot modelitzar com si fos un instrument musical de vent gegant. D'una manera simplificada, podem considerar un volcà com un tub d'aire amb un extrem tancat i l'altre obert, on es produeixen ones estacionàries d'una manera semblant a una trompeta.

a) **En un moment determinat de l'erupció del Cumbre Vieja, es va detectar que la freqüència fonamental del so que emetia era de $5,40$ Hz. Calculeu la longitud d'ona d'aquest so. Dibuixeu el perfil de l'ona estacionària corresponent i calculeu la longitud del tub, que correspon a la longitud del tram de la xemeneia ple d'aire.**

b) **En un moment de l'erupció, es va detectar un nivell d'intensitat sonora de $72,0$ dB a la localitat de Todoque, que és a $5,22$ km del con del volcà. Calculeu el nivell d'intensitat sonora que se sentirà des de la costa de l'illa d'El Hierro, que és a $92,3$ km del volcà Cumbre Vieja. (Suposeu que no hi ha obstacles en la propagació del so entre el volcà Cumbre Vieja i l'illa d'El Hierro.)**

Dades:
$I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.
La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.

Solución:

a) **En un moment determinat de l'erupció del Cumbre Vieja, es va detectar que la freqüència fonamental del so que emetia era de $5,40$ Hz. Calculeu la longitud d'ona d'aquest so. Dibuixeu el perfil de l'ona estacionària corresponent i calculeu la longitud del tub, que correspon a la longitud del tram de la xemeneia ple d'aire.**

La relación entre la velocidad del sonido, la frecuencia y la longitud de onda es:

$$v = \lambda \cdot f.$$

Despejando λ:

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

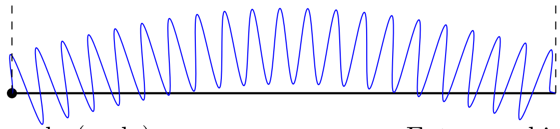
Sustituyendo los valores dados:

$$\lambda = \frac{340 \text{ m/s}}{5,40 \text{ Hz}} = 62,96 \text{ m}.$$

Como el volcán se modela como un tubo con un extremo cerrado y otro abierto, las ondas estacionarias forman un nodo en el extremo cerrado y un vientre (antinodo) en el extremo abierto. En el modo fundamental, la longitud del tubo L está relacionada con la longitud de onda por:

$$L = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{62,96 \text{ m}}{4} = 15,74 \text{ m}.$$

$$L = \frac{\lambda}{4}$$



Por lo tanto, la longitud de onda es $\boldsymbol{\lambda = 62,96}$ m y la longitud del tubo es $\boldsymbol{L = 15,74}$ m.

b) **En un moment de l'erupció, es va detectar un nivell d'intensitat sonora de 72, 0 dB a la localitat de Todoque, que és a 5, 22 km del con del volcà. Calculeu el nivell d'intensitat sonora que se sentirà des de la costa de l'illa d'El Hierro, que és a 92, 3 km del volcà Cumbre Vieja. (Suposeu que no hi ha obstacles en la propagació del so entre el volcà Cumbre Vieja i l'illa d'El Hierro.)**

El nivel de intensidad sonora se relaciona con la intensidad por:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Despejando I:

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Sustituyendo los valores para Todoque:

$$I_1 = (1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}) \cdot 10^{72{,}0/10} = 1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}.$$

Asumiendo que el sonido se propaga esféricamente y sin pérdidas, la intensidad sonora es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$I \propto \frac{1}{r^2}.$$

Entonces,

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 5{,}05 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}.$$

Usando la fórmula del nivel de intensidad sonora:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_0}\right).$$

Sustituyendo los valores:

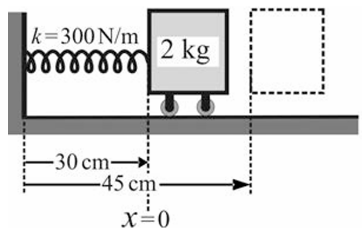
$$\beta_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{5{,}05 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 47{,}0\ \mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora en la costa de El Hierro es de 47,0 dB

Cataluña, Junio 2021 (Convocatoria ordinaria)

Problema 3

Un bloc de massa 2 kg, que inicialment es troba en repòs, està lligat a l'extrem d'una molla de constant elàstica 300 N/m i de longitud natural 30 cm. Per l'altre extrem, la molla està unida a una paret. Desplacem el bloc cap a la dreta fins que la molla assoleix una longitud total de 45 cm i el deixem anar, de manera que el bloc es posa a oscil·lar al voltant de la posició d'equilibri. La fricció entre el terra i el bloc és negligible.



a) **Determineu l'amplitud i el període de l'oscil·lació. Escriviu l'equació del moviment.**
b) **Representeu en la quadrícula adjunta l'evolució de l'energia mecànica, de l'energia cinètica i de l'energia potencial en funció del temps durant un període.**

Solución:

a) **Determineu l'amplitud i el període de l'oscil·lació. Escriviu l'equació del moviment.**

La amplitud de la oscilación es la máxima desplazamiento desde la posición de equilibrio. Dado que la longitud natural del resorte es 30 cm y se desplaza hasta 45 cm, la extensión del resorte es:

$$A = 45 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 15 \text{ cm} = 0{,}15 \text{ m}.$$

La frecuencia angular está dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{300 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = \sqrt{150 \text{ s}^{-2}} = 12{,}247 \text{ rad/s}.$$

El período de la oscilación se calcula como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12{,}247 \text{ rad/s}} = 0{,}513 \text{ s}.$$

Considerando que el bloque se libera desde la posición máxima con velocidad inicial cero, la ecuación del movimiento es:

$$x(t) = A\cos(\omega t) = 0{,}15 \text{ m} \cdot \cos(12{,}247\ t).$$

Por lo tanto, la la amplitud es 0,15 m, el período es 0,513 s y la ecuación del movimiento es $x(t) = 0{,}15 \text{ m} \cdot \cos(12{,}247\ t)$.

b) **Representeu en la quadrícula adjunta l'evolució de l'energia mecànica, de l'energia cinètica i de l'energia potencial en funció del temps durant un període.**

La energía mecánica E_m de un sistema masa-resorte sin fricción es la suma de la energía cinética E_c y la energía potencial elástica E_p:

$$E_m = E_c + E_p,$$

donde:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 \quad \text{y} \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

Dada la ecuación del movimiento $x(t) = A\cos(\omega t)$, la velocidad es:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t).$$

Entonces, la energía cinética es:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m(A\omega)^2\sin^2(\omega t) = 3,38 \ \sin^2(12,247t) \text{ J},$$

y la energía potencial es:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) = 3,38 \ \cos^2(12,247t) \text{ J}.$$

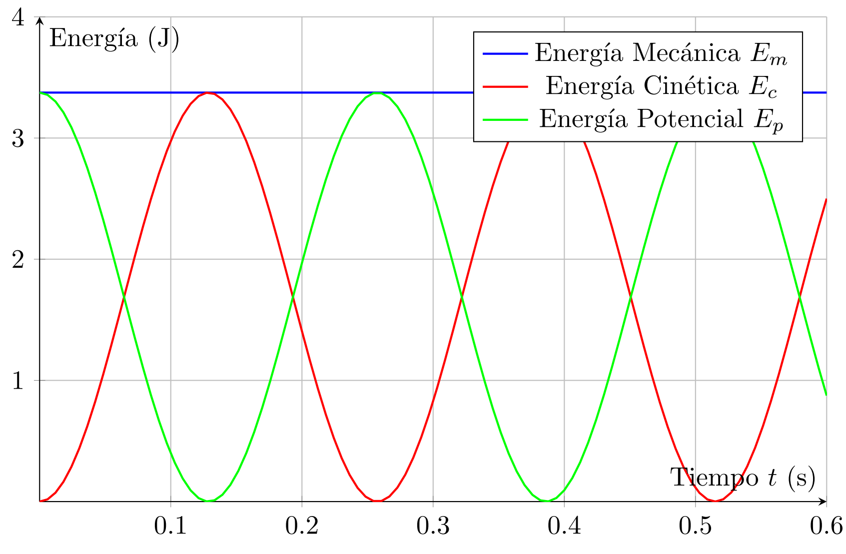
La energía mecánica total es:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}m(A\omega)^2\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) \text{ J}.$$

Simplificando, dado que $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}kA^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \frac{1}{2}kA^2 = 3,38 \text{ J}.$$

A continuación se presenta una representación gráfica de la evolución de las energías mecánica, cinética y potencial en función del tiempo durante un período:



Descripción del gráfico:

- *Energía Mecánica* E_m: Es constante y igual a $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 300 \text{ N/m} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 = 3{,}375$ J.
- *Energía Cinética* E_c: Varía sinusoidalmente, alcanzando su máximo cuando la energía potencial es mínima.
- *Energía Potencial* E_p: Varía sinusoidalmente, alcanzando su máximo cuando la energía cinética es mínima.

Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema es constante durante la oscilación., y la energía cinética y la energía potencial intercambian sus valores a lo largo del tiempo, manteniendo constante la suma total.

Problema 7

***Magnificat en re major* (BWV 243) és una de les grans obres vocals de Johann Sebastian Bach, publicada el 1723 i escrita per a cor a cinc veus i orquestra. La corda d'un violí fa 32, 5 cm de llargària i la freqüència fonamental corresponent al re major és de 38, 89 Hz.**

a) **Dibuixeu l'harmònic fonamental i el tercer harmònic i indiqueu-ne els nodes i els ventres. Determineu les longituds d'ona de cadascun dels harmònics i calculeu la velocitat de propagació de l'ona que produeix aquesta nota en la corda del violí. Quina serà la freqüència de l'harmònic fonamental si reduïm la llargària de la corda a 27 cm tot mantenint la mateixa tensió a la corda?**

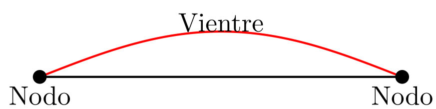
b) **Un espectador situat al segon pis del Palau de la Música Catalana percep un nivell d'intensitat sonora de 30 dB, corresponent al so dels violins, situats a 23 m. Quina és la potència amb què els violins emeten el so? Si, degut a les restriccions per la COVID-19, el nombre de violinistes es redueix a la meitat, quin serà el nivell de la intensitat sonora generada pels violins a 23 m de distància?**

Dada: $I_0 = 10^{-12}$ **W m^{-2}.**

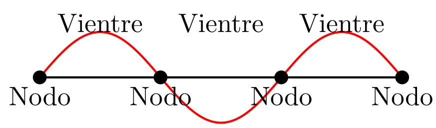
Solución:

a) **Dibuixeu l'harmònic fonamental i el tercer harmònic i indiqueu-ne els nodes i els ventres. Determineu les longituds d'ona de cadascun dels harmònics i calculeu la velocitat de propagació de l'ona que produeix aquesta nota en la corda del violí. Quina serà la freqüència de l'harmònic fonamental si reduïm la llargària de la corda a 27 cm tot mantenint la mateixa tensió a la corda?**

Dibujo del armónico fundamental y del tercer armónico:



Tercer armónico



Armónico fundamental

Para una cuerda fija en ambos extremos, las longitudes de onda de los armónicos vienen dadas por:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},$$

donde n es el número de armónico y L es la longitud de la cuerda.

Longitud de onda del armónico fundamental ($n = 1$):

$$\lambda_1 = \frac{2L}{1} = 2L = 2 \cdot 0{,}325 \text{ m} = 0{,}650 \text{ m}.$$

Longitud de onda del tercer armónico ($n = 3$):

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 0{,}325 \text{ m}}{3} = 0{,}2167 \text{ m}.$$

La velocidad de propagación v se calcula usando la relación:

$$v = f \cdot \lambda.$$

Para el armónico fundamental:

$$v = f_1 \cdot \lambda_1 = 38{,}89 \text{ Hz} \cdot 0{,}650 \text{ m} = 25{,}2785 \text{ m/s}.$$

Para encontrar la nueva frecuencia al reducir la longitud a 27 cm, tenemos en cuenta que, manteniendo la misma tensión en la cuerda, la velocidad de propagación v permanece constante:

$$v' = v = 25{,}28 \text{ m/s}.$$

La nueva longitud de la cuerda es:

$$L' = 27 \text{ cm} = 0{,}27 \text{ m}.$$

Longitud de onda del armónico fundamental con la nueva longitud:

$$\lambda_1' = 2L' = 2 \cdot 0{,}27 \text{ m} = 0{,}54 \text{ m}.$$

Nueva frecuencia:

$$f_1' = \frac{v'}{\lambda_1'} = \frac{25{,}28 \text{ m/s}}{0{,}54 \text{ m}} = 46{,}81 \text{ Hz}.$$

Por lo tanto, la solución es:

– **Las longitudes de onda son:**

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}650 \text{ m}, \quad \lambda_3 = 0{,}2167 \text{ m}.}$$

– **La velocidad de propagación es:**

$$\boldsymbol{v = 25{,}28 \text{ m/s}.}$$

– **La nueva frecuencia fundamental al reducir la longitud a 27 cm es:**

$$\boldsymbol{f_1' = 46{,}81 \text{ Hz}.}$$

b) **Un espectador situat al segon pis del Palau de la Música Catalana percep un nivell d'intensitat sonora de 30 dB, corresponent al so dels violins, situats a 23 m. Quina és la potència amb què els violins emeten el so? Si, degut a les restriccions per la COVID-19, el nombre de violinistes es redueix a la meitat, quin serà el nivell de la intensitat sonora generada pels violins a 23 m de distància?**

El nivel de intensidad sonora β está relacionado con la intensidad I por:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Despejando I:

$$\frac{I}{I_0} = 10^{\beta/10} \quad \Rightarrow \quad I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Sustituyendo los valores:

$$I = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^{30/10} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 10^3 = 10^{-9} \text{ W/m}^2.$$

Suponiendo que el sonido se propaga de forma esférica, la potencia se calcula como:

$$I = \frac{P}{A} \quad \Rightarrow \quad P = I \cdot A = I \cdot 4\pi r^2,$$

donde $r = 23$ m es la distancia al espectador. Calculamos:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (23 \text{ m})^2 = 4\pi \cdot 529 \text{ m}^2 = 6645{,}48 \text{ m}^2.$$

Entonces,

$$P = 10^{-9}\ \mathrm{W/m^2} \cdot 6645{,}48\ \mathrm{m^2} = 6{,}6455 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}.$$

Vamos a calcular el nuevo nivel de intensidad sonora al reducir los violinistas a la mitad. Al reducir el número de violinistas a la mitad, la potencia emitida se reduce a la mitad:

$$P' = \frac{P}{2} = 3{,}3228 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}.$$

La nueva intensidad sonora es:

$$I' = \frac{P'}{A} = \frac{P/2}{A} = \frac{I}{2} = \frac{10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}}{2} = 5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}.$$

El nuevo nivel de intensidad sonora es:

$$\beta' = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 26{,}99\ \mathrm{dB} \approx 27\ \mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, la solución es:

- **La potencia emitida por los violines es:**

$$\boldsymbol{P = 6{,}6455 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}.}$$

- **El nuevo nivel de intensidad sonora al reducir los violinistas a la mitad es:**

$$\boldsymbol{\beta' \approx 27\ \mathrm{dB}.}$$

Cataluña, Septiembre 2021 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 3

La corda d'un violí fa 32 cm de llarg i vibra amb una freqüència fonamental de 196 Hz.

a) **Quina és la longitud d'ona del primer harmònic (fonamental)? Justifiqueu la resposta. Representeu el segon harmònic i indiqueu-hi la posició dels nodes i els ventres.**
b) **Quina és la freqüència i la longitud d'ona del so que és produït pel primer harmònic del violí i que es propaga per l'aire?**

Dada: La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.

Solución:

a) **Quina és la longitud d'ona del primer harmònic (fonamental)? Justifiqueu la resposta. Representeu el segon harmònic i indiqueu-hi la posició dels nodes i els ventres.**

Para una cuerda fija en ambos extremos, la longitud de onda del primer armónico está relacionada con la longitud de la cuerda (L) de la siguiente manera:

$$\lambda_1 = 2L,$$

donde λ_1 es la longitud de onda del primer armónico y $L = 0{,}32$ m es la longitud de la cuerda. Sustituyendo los valores:

$$\lambda_1 = 2 \cdot 0{,}32 \text{ m} = 0{,}64 \text{ m}.$$

El primer armónico (fundamental) corresponde a la configuración más simple de una onda estacionaria en la cuerda, donde solo hay dos nodos (los extremos de la cuerda) y un vientre (en el centro de la cuerda). Para el segundo armónico, la longitud de onda está dada por:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{0{,}64 \text{ m}}{2} = 0{,}32 \text{ m}.$$

En el segundo armónico, la cuerda tiene tres nodos: dos en los extremos y uno en el centro, y dos vientres, ubicados entre los nodos. Representación gráfica:

Por lo tanto, la solución es $\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}64}$ m y $\boldsymbol{\lambda_2 = 0{,}32}$ m.

b) **Quina és la freqüència i la longitud d'ona del so que és produït pel primer harmònic del violí i que es propaga per l'aire?**

La frecuencia del sonido que se propaga por el aire es la misma que la frecuencia de la vibración de la cuerda del violín, ya que se transmite directamente:

$$f_{\text{sonido}} = f_{\text{fundamental}} = 196 \text{ Hz}.$$

Usamos la relación entre velocidad, frecuencia y longitud de onda:

$$\lambda_{\text{sonido}} = \frac{v}{f},$$

donde $v = 340$ m/s es la velocidad del sonido en el aire y $f = 196$ Hz es la frecuencia del sonido. Sustituyendo los valores:

$$\lambda_{\text{sonido}} = \frac{340 \text{ m/s}}{196 \text{ Hz}} = 1{,}73 \text{ m}.$$

Por lo tanto, $f_{\text{sonido}} = 196$ Hz y $\lambda_{\text{sonido}} = 1{,}73$ m.

Problema 6

Un violinista interpreta un solo durant un concert. De cop i volta, quatre violins més l'acompanyen, tocant amb la mateixa intensitat que el primer.

a) **Quants decibels ha augmentat el nivell d'intensitat del so?**
b) **Ara els cinc violins passen de *mezzo piano* a *forte* i mesurem un nivell d'intensitat del so de $76,98$ dB. Suposant que tots els violins toquen amb la mateixa intensitat, quina és la intensitat I amb la qual toca un sol violí?**

Dada: $\boldsymbol{I_0 = 10^{-12}}$ **W/m²**.

Solución:

a) **Quants decibels ha augmentat el nivell d'intensitat del so?**

La intensidad total del sonido producido por múltiples fuentes que emiten con la misma intensidad se calcula como la suma de las intensidades individuales. Si un violinista es acompañado por cuatro más, el número total de violines es cinco:

$$I_{\text{total}} = 5 \cdot I.$$

El nivel de intensidad sonora en decibelios (dB) se define como:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde I es la intensidad sonora e $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 es la intensidad de referencia. Inicialmente, el violinista solo produce una intensidad I, con un nivel de intensidad sonora:

$$\beta_{\text{inicial}} = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Cuando se suman los cuatro violines adicionales, la intensidad total se incrementa a $5I$. El nuevo nivel de intensidad sonora es:

$$\beta_{\text{final}} = 10 \cdot \log\left(\frac{5I}{I_0}\right).$$

La diferencia en el nivel de intensidad sonora es:

$$\Delta\beta = \beta_{\text{final}} - \beta_{\text{inicial}} = 10 \cdot \log\left(\frac{5I}{I_0}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Aplicando propiedades de los logaritmos:

$$\Delta\beta = 10 \cdot \log 5 = 6{,}99 \text{ dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora ha aumentado 6,99 dB.

b) **Ara els cinc violins passen de *mezzo piano* a *forte* i mesurem un nivell d'intensitat del so de $76,98$ dB. Suposant que tots els violins toquen amb la mateixa intensitat, quina és la intensitat I amb la qual toca un sol violí?**

Sabemos que el nivel de intensidad sonora total es:

$$\beta_{\text{total}} = 10 \cdot \log\left(\frac{I_{\text{total}}}{I_0}\right) = 76{,}98 \text{ dB},$$

donde $I_{\text{total}} = 5I$. Sustituyendo:

$$76{,}98 = 10 \cdot \log\left(\frac{5I}{10^{-12}}\right).$$

Dividiendo ambos lados por 10:

$$7{,}698 = \log\left(5I \cdot 10^{12}\right).$$

Aplicando la función exponencial:

$$10^{7{,}698} = 5I \cdot 10^{12}.$$

Despejando I:

$$I = \frac{10^{7{,}698}}{5 \cdot 10^{12}} = 9,98 \cdot 10^{-6}\ \text{W/m}^2.$$

Por lo tanto, la intensidad con la que toca un solo violín es $\mathbf{9,98 \cdot 10^{-6}\ W/m^2}$.

Cataluña, Julio 2020 (Convocatoria ordinaria)

Problema 1

Freddie Mercury ha passat a la història com una de les millors veus del rock. La seva màgica veu ha estat objecte de discussió i estudi, també per a la ciència. El biofísic austríac Christian Herbst va estudiar la veu del cantant de Queen i va determinar que Mercury era un barítono amb un registre vocal que anava del fa 2 (al voltant de $92,2$ Hz) al sol 5 (al voltant de 784 Hz).

a) **Calculeu les longituds d'ona dels sons més greus i més aguts que Mercury podia emetre.**

b) **L'any 1985, Queen va actuar al festival Rock in Rio, en un concert que va aplegar unes 350 000 persones. En un moment de molta emoció, els assistents van començar a cantar *a cappella* la famosa cançó *Love of my life*. Si cada assistent al concert cantava amb una potència de 10^{-7} W, quin nivell d'intensitat sonora (en decibels) es podia percebre a 1 km del concert? (A aquesta distància, podeu considerar que el concert és una font puntual de so.)**

Dades:
$I_0 = 10^{-12}$ **W/m²**.
La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.

Solución:

a) **Calculeu les longituds d'ona dels sons més greus i més aguts que Mercury podia emetre.**

La longitud de onda (λ) de una onda sonora se relaciona con la velocidad del sonido (v) y la frecuencia (f) mediante la siguiente fórmula:

$$\lambda = \frac{v}{f},$$

donde $v = 340$ m/s es la velocidad del sonido en el aire y f es la frecuencia del sonido. La frecuencia máxima emitida por Mercury es $f_{\text{máx}} = 784$ Hz. Aplicando la fórmula:

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{340 \text{ m/s}}{784 \text{ Hz}} = 0{,}43 \text{ m}.$$

La frecuencia mínima emitida por Mercury es $f_{\text{mín}} = 92{,}2$ Hz. Aplicando la fórmula:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{340 \text{ m/s}}{92{,}2 \text{ Hz}} = 3{,}69 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la solución es:
- **La longitud de onda más aguda que Mercury podía emitir es $\boldsymbol{\lambda_{\text{mín}} \approx 0{,}43}$ m.**
- **La longitud de onda más grave que Mercury podía emitir es $\boldsymbol{\lambda_{\text{máx}} \approx 3{,}69}$ m.**

b) **L'any 1985, Queen va actuar al festival Rock in Rio, en un concert que va aplegar unes 350 000 persones. En un moment de molta emoció, els assistents van començar a cantar *a cappella* la famosa cançó *Love of my life*. Si cada assistent al concert cantava amb una potència de 10^{-7} W, quin nivell d'intensitat sonora (en decibels) es podia percebre a 1 km del concert? (A aquesta distància, podeu considerar que el concert és una font puntual de so.)**

Tenemos los siguientes datos:
- Número de asistentes: $N = 350\,000$.
- Potencia por asistente: $P_{\text{asistente}} = 10^{-7}$ W.
- Distancia: $r = 1$ km $= 1000$ m.

– Intensidad sonora de referencia: $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$.

Considerando que el concierto es una fuente puntual, la energía se distribuye uniformemente en una esfera con radio r:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(1000\ \text{m})^2 = 4\pi \cdot 10^6\ \text{m}^2 = 1{,}26 \cdot 10^7\ \text{m}^2.$$

Cálculo de la potencia total emitida (P_{total}):

$$P_{\text{total}} = N \cdot P_{\text{asistente}} = 350\,000 \cdot 10^{-7}\ \text{W} = 3{,}50 \cdot 10^{-2}\ \text{W}.$$

Cálculo de la intensidad sonora (I) a 1 km:

$$I = \frac{P_{\text{total}}}{A} = \frac{3{,}50 \cdot 10^{-2}\ \text{W}}{1{,}26 \cdot 10^7\ \text{m}^2} = 2{,}78 \cdot 10^{-9}\ \text{W/m}^2.$$

Cálculo del nivel de intensidad sonora (β) en decibelios:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{2{,}78 \cdot 10^{-9}\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 10 \cdot \log(2780) = 10 \cdot 3{,}44 = 34{,}4\ \text{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora percibido a 1 km del concierto es 34,4 dB.

Cataluña, Septiembre 2020 (Convocatoria extraordinaria)

Problema 3

El moviment dels insectes en la teranyina feta per les aranyes és un moviment harmònic simple (MHS), és a dir, es pot modelitzar com una massa a l'extrem d'una molla. S'ha observat que quan l'aranya està sola a la teranyina produeix una vibració de freqüència 12 Hz. Si un insecte d'$1,00$ g de massa queda atrapat a la teranyina, el conjunt aranya i insecte produeix una vibració de 10 Hz.

a) **Calculeu la massa de l'aranya.**
b) **Calculeu la constant elàstica d'aquesta teranyina. En quines posicions aquest MHS assoleix la màxima velocitat? I la màxima acceleració?**

Solución:

a) **Calculeu la massa de l'aranya.**

Para determinar la masa de la araña ($m_{\text{araña}}$), utilizamos la fórmula de la frecuencia en un movimiento armónico simple:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

donde:
- f es la frecuencia de vibración,
- k es la constante elástica del resorte,
- m es la masa total del sistema (araña + insecto).

Dado que en el primer caso solo está la araña:

$$f_{\text{araña}} = 12 \text{ Hz}.$$

Y en el segundo caso, con la araña e insecto:

$$f_{\text{total}} = 10 \text{ Hz}.$$

La masa total en el segundo caso es:

$$m_{\text{total}} = m_{\text{araña}} + m_{\text{insecto}} = m_{\text{araña}} + 1,00 \text{ g} = m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Utilizamos la relación de las frecuencias:

$$\frac{f_{\text{total}}}{f_{\text{araña}}} = \frac{10}{12} = \sqrt{\frac{m_{\text{araña}}}{m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}}}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$\left(\frac{10}{12}\right)^2 = \frac{m_{\text{araña}}}{m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}}.$$

Simplificamos:

$$\frac{100}{144} = \frac{m_{\text{araña}}}{m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{36} = \frac{m_{\text{araña}}}{m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}}.$$

Resolviendo para $m_{\text{araña}}$:

$$25(m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}) = 36 m_{\text{araña}} \Rightarrow 25 m_{\text{araña}} + 25 \cdot 10^{-3} = 36 m_{\text{araña}} \Rightarrow 25 \cdot 10^{-3} = 11 m_{\text{araña}}.$$

Entonces,

$$m_{\text{araña}} = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{11} = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 2,27 \text{ g}.$$

Por lo tanto, la masa de la araña es de $\mathbf{2,27}$ g.

b) **Calculeu la constant elàstica d'aquesta teranyina. En quines posicions aquest MHS assoleix la màxima velocitat? I la màxima acceleració?**

Utilizamos la fórmula de la frecuencia en movimiento armónico simple para el caso con la araña e insecto:

$$f_{\text{total}} = 10 \text{ Hz} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}},$$

donde:

$$m_{\text{total}} = m_{\text{araña}} + m_{\text{insecto}} = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Despejamos k:

$$f_{\text{total}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}} = 2\pi f_{\text{total}} \Rightarrow \frac{k}{m_{\text{total}}} = (2\pi f_{\text{total}})^2 \Rightarrow k = m_{\text{total}}(2\pi f_{\text{total}})^2.$$

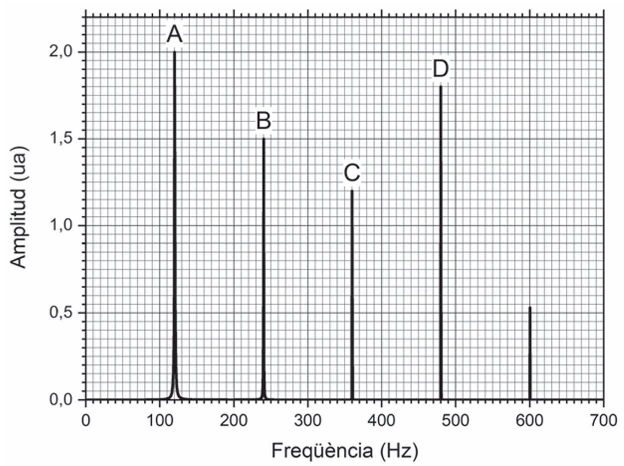
Sustituyendo los valores:

$$k = 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (2\pi \cdot 10 \text{ Hz})^2 = 12,9 \text{ N/m}.$$

Por lo tanto, la constante elástica de la telaraña es $\mathbf{12,9}$ N/m.

Problema 7

Quan es fa vibrar una corda de $40,0$ cm de llargada i fixada pels dos extrems, emet un so que, un cop analitzat, produeix l'espectre següent:



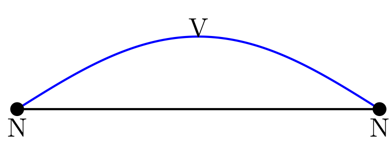
a) **Representeu esquemàticament les ones estacionàries corresponents als pics A, B, C i D indicant tots els nodes i tots els ventres. Calculeu la longitud d'ona de cadascuna d'aquestes quatre ones estacionàries. Quina és la velocitat de propagació?**

b) **La longitud de la corda disminueix fins a $20,0$ cm sense que canviï la velocitat de propagació de les ones per la corda. Quines seran les freqüències i les longituds d'ona de les quatre primeres ones estacionàries?**

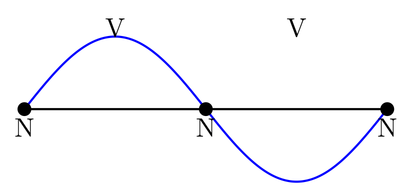
Solución:

a) **Representeu esquemàticament les ones estacionàries corresponents als pics A, B, C i D indicant tots els nodes i tots els ventres. Calculeu la longitud d'ona de cadascuna d'aquestes quatre ones estacionàries. Quina és la velocitat de propagació?**

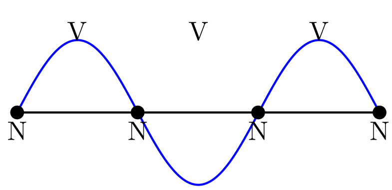
Las ondas estacionarias correspondientes a los picos A, B, C y D son los primeros cuatro modos normales de vibración de la cuerda (n = 1, 2, 3 y 4). A continuación se muestran las representaciones esquemáticas indicando los nodos (N) y los vientres (V):



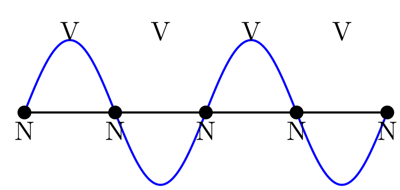
Modo n=1 (Pico A)



Modo n=2 (Pico B)



Modo n=3 (Pico C)



Modo n=4 (Pico D)

Para una cuerda fija en ambos extremos, las longitudes de onda permitidas están dadas por:

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

donde L es la longitud de la cuerda. Dado que $L = 40,0$ cm $= 0,400$ m:

– Para n = 1 (Pico A):

$$\lambda_1 = \frac{2L}{1} = 2 \cdot 0,400 \text{ m} = 0,800 \text{ m}.$$

– Para n = 2 (Pico B):

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = 0,400 \text{ m}.$$

– Para n = 3 (Pico C):

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{0,800 \text{ m}}{3} \approx 0,267 \text{ m}.$$

– Para n = 4 (Pico D):

$$\lambda_4 = \frac{2L}{4} = 0,200 \text{ m}.$$

La velocidad de propagación v es constante y puede calcularse utilizando:

$$v = \lambda_n \cdot f_n = 0,8 \text{ m} \cdot 120 \text{ Hz} = 96,0 \text{ m/s}$$

Verificamos con otro modo (n = 2):

$$v = \lambda_2 \cdot f_2 = 0,400 \text{ m} \cdot 240 \text{ Hz} = 96,0 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, la longitud de onda y la velocidad de propagación son:

– **Pico A: $\boldsymbol{\lambda_1 = 0,800}$ m, $\boldsymbol{v = 96,0}$ m/s.**
– **Pico B: $\boldsymbol{\lambda_2 = 0,400}$ m, $\boldsymbol{v = 96,0}$ m/s.**
– **Pico C: $\boldsymbol{\lambda_3 = 0,267}$ m, $\boldsymbol{v = 96,0}$ m/s.**
– **Pico D: $\boldsymbol{\lambda_4 = 0,200}$ m, $\boldsymbol{v = 96,0}$ m/s.**

b) **La longitud de la corda disminueix fins a 20, 0 cm sense que canviï la velocitat de propagació de les ones per la corda. Quines seran les freqüències i les longituds d'ona de les quatre primeres ones estacionàries?**

La nueva longitud de la cuerda es $L' = 20,0$ cm $= 0,200$ m. Las nuevas longitudes de onda son:

$$\lambda'_n = \frac{2L'}{n}.$$

– Para n = 1:

$$\lambda'_1 = \frac{2 \times 0,200 \text{ m}}{1} = 0,400 \text{ m}.$$

– Para n = 2:

$$\lambda'_2 = \frac{2 \times 0,200 \text{ m}}{2} = 0,200 \text{ m}.$$

– Para n = 3:

$$\lambda'_3 = \frac{2 \times 0,200 \text{ m}}{3} = 0,133 \text{ m}.$$

– Para n = 4:

$$\lambda'_4 = \frac{2 \times 0,200 \text{ m}}{4} = 0,100 \text{ m}.$$

Las frecuencias correspondientes, utilizando $v = 96,0$ m/s, son:

$$f'_n = \frac{v}{\lambda'_n}.$$

– Para n = 1:

$$f_1' = \frac{96,0 \text{ m/s}}{0,400 \text{ m}} = 240 \text{ Hz}.$$

– Para n = 2:

$$f_2' = \frac{96,0 \text{ m/s}}{0,200 \text{ m}} = 480 \text{ Hz}.$$

– Para n = 3:

$$f_3' = \frac{96,0 \text{ m/s}}{0,133 \text{ m}} = 720 \text{ Hz}.$$

– Para n = 4:

$$f_4' = \frac{96,0 \text{ m/s}}{0,100 \text{ m}} = 960 \text{ Hz}.$$

Al reducir la longitud de la cuerda a la mitad, las longitudes de onda se reducen a la mitad y las frecuencias se duplican.

Por lo tanto, las nuevas longitudes de onda y frecuencias son:

- **Primer armónico (n = 1): $\lambda_1' = 0,400$ m, $f_1' = 240$ Hz.**
- **Segundo armónico (n = 2): $\lambda_2' = 0,200$ m, $f_2' = 480$ Hz.**
- **Tercer armónico (n = 3): $\lambda_3' = 0,133$ m, $f_3' = 720$ Hz.**
- **Cuarto armónico (n = 4): $\lambda_4' = 0,100$ m, $f_4' = 960$ Hz.**