

# Matura próbna 2025

test diagnostyczny przed sesją maj 2025

|                                   |                                         |
|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| <i>Rodzaj dokumentu:</i>          | <b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b> |
| <i>Egzamin:</i>                   | <b>Egzamin maturalny</b>                |
| <i>Przedmiot:</i>                 | <b>Matematyka</b>                       |
| <i>Poziom:</i>                    | <b>Poziom rozszerzony</b>               |
| <i>Formy arkusza:</i>             | <b>MMAP-R0-100</b>                      |
| <i>Termin egzaminu:</i>           | <b>6 marca 2025 r.</b>                  |
| <i>Data publikacji dokumentu:</i> | <b>7 marca 2025 r.</b>                  |

### Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 1. (0–2)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                              |                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                      | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                |
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>XI.R2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych. |

### Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnej odpowiedzi:  $\frac{366080}{729} \cdot x^8$

1 pkt – rozpisanie wzoru Newtona:  $\binom{16}{8} \cdot x^8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^8$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Środkowy wyraz rozwinięcia jest ósmym wyrazem. Po zastosowaniu wzoru Newtona

otrzymujemy:  $\binom{16}{8} \cdot x^8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^8$ , co po przekształceniu do postaci  $a \cdot x^n$  daje  $\frac{366080}{729} \cdot x^8$ .

**Zadanie 2. (0–2)**

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                      | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                |
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.<br>I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawne zastosowanie wzorów logarytmicznych i poprawny wynik:  $\frac{5}{2}$

1 pkt – obliczenie liczby  $a$ :  $a = 25$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy liczbę  $a$ . Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu

$36^{\left(\frac{\log_6 2\sqrt{5}}{\log_6 4} \log_6 16 - 2\log_6 2\right)}$ . Następnie przekształcamy równoważnie do postaci

$36^{\left(\frac{\log_6 2\sqrt{5}}{\log_6 4} \cdot 2\log_6 4 - \log_6 4\right)}$ . Po skróceniu:  $36^{(2\log_6 2\sqrt{5} - \log_6 4)}$ . Otrzymujemy  $36^{\log_6 5}$ . Następnie przekształcamy do postaci  $6^{2\log_6 5}$  i obliczamy  $6^{\log_6 25}$ :  $a = 25$

Obliczamy liczbę  $b$ . Stosujemy podstawowe wzory logarytmiczne i wzór na zamianę podstawy logarytmu otrzymując  $8 \cdot \frac{3}{2} \log_4 2 - \log_4 4 \cdot \log_3 9$ , więc  $8 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2 = b$

co daje  $b = 4$ .

Obliczamy  $\sqrt{\frac{a}{b}}$ :  $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

### Zadanie 3. (0–2)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                      | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                                          |
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>VI.R2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$ , $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach; |

#### Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik: 14

1 pkt – ograniczenie wyrażenia  $12^n + 13^n + 14^n$  dwoma wyrażeniami o wspólnej granicy:

$$14^n \leq 12^n + 13^n + 14^n \leq 3 \cdot 14^n$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach. Ograniczamy wyrażenie  $12^n + 13^n + 14^n$ :

$$14^n \leq 12^n + 13^n + 14^n \leq 3 \cdot 14^n$$

Wtedy:

$$14 \leq \sqrt[n]{12^n + 13^n + 14^n} \leq \sqrt[n]{3} \cdot 14$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 14 = 14$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \cdot 14 = 1 \cdot 14 = 14$$

a także granice tych funkcji są sobie równe, to na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{12^n + 13^n + 14^n} = 14$$

**Zadanie 4. (0–3)**

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                                                             |                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                                     | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                 |
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Zdający:<br>XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym; |

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 30%

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru Bayesa:  $P(M|E) = \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,07}$

1 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństw warunkowych:  $P(E|M)$  oraz  $P(K|E)$ :

$$P(E|M) = 0,02 \text{ oraz } P(K|E) = 0,07$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający poprawnie oblicza prawdopodobieństwo, natomiast wynik przedstawia w postaci innej niż procentu, to za zadanie otrzymuje **2 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

Przyjmujemy oznaczenia:

$M$ – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba jest mężczyzną

$K$ – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba jest kobietą

$E$ – zdarzenie polegające na tym, że wybrana osoba jest zwolennikiem eutanazji

Z polecenia:

$$P(M) = 0,6$$

$$P(K) = 0,4$$

$$P(E|M) = 0,02$$

$$P(K|E) = 0,07$$

Korzystamy ze wzoru Bayesa:

$$P(M|E) = \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,07} = 0,3 = 30\%$$

### Zadanie 5. (0–3)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                                                             |                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                                     | Wymaganie szczegółowe                                                                             |
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Zdający:<br>XIII.R2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji; |

#### Zasady oceniania

- 3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj. wykazanie, że funkcja  $f(x)$  posiada co najmniej dwa miejsca zerowe takie, że jedno jest ujemne a drugie dodatnie
- 2 pkt – uzasadnienie zmiany znaku funkcji  $f$  dla dowolnych dodatnich i ujemnych argumentów, np. że  $f(1) > 0$  i  $f(2) < 0$  oraz  $f(0) > 0$  i  $f(-1) < 0$ .
- 1 pkt – uzasadnienie, że funkcja  $f(x)$  jest ciągła
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja  $f$  jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ jest to funkcja wielomianowa. Zatem posiada własność Darboux.

Zauważmy, że  $f(1) > 0$  oraz  $f(2) < 0$ . Zatem funkcja  $f$  przyjmuje wszystkie wartości pośrednie z przedziału  $(f(1), f(2))$ , więc istnieje taki dodatni argument  $x$ , dla którego  $y = 0$ . Analogicznie,  $f(0) > 0$  oraz  $f(-1) < 0$ . Zatem funkcja  $f$  przyjmuje wszystkie wartości pośrednie z przedziału  $(f(-1), f(0))$ , więc istnieje taki ujemny argument  $x$ , dla którego  $y = 0$ .

Zatem na mocy twierdzenia Darboux funkcja posiada co najmniej dwa miejsca zerowe w przedziale  $[-1, 2]$ , z czego jedno jest ujemne a jedno dodatnie. ■

**Zadanie 6. (0–3)**

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                      | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej;<br>XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej<br>V.R2) posługuje się złożeniami funkcji;. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz podanie poprawnej odpowiedzi:  $y = \frac{9}{10}x + \frac{41}{10}$

2 pkt – wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej:  $a = \frac{9}{10}$

1 pkt – obliczenie  $x_0 = 1$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy  $x_0$ :

$$5 = \sqrt{9x_0 + 16}$$

Obie strony równania są nieujemne, z tego wynika, że

$$25 = 9x_0 + 16$$

$$x_0 = 1$$

Zatem punkt  $P = (1,5)$  należy do wykresu tej funkcji. Wyznaczamy pochodną funkcji korzystając z pochodnej funkcji złożonej:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9x+16}} \cdot 9 = \frac{9}{2\sqrt{9x+16}}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy stycznej:

$$a = f'(1) = \frac{9}{10}$$

Obliczamy punkt przecięcia stycznej z osią  $OY$  wykorzystując współrzędne punktu  $P$ .

Zatem równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P$  to  $y = \frac{9}{10}x + \frac{41}{10}$ .

### Zadanie 7. (0–4)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                                          |                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                  | Wymaganie szczegółowe                                                          |
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający:<br>VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę. |

#### Zasady oceniania

- 4 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej  $x$ , dla których suma szeregu istnieje oraz poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej  $x$ , dla których suma jest większa od 9:  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- 3 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej  $x$ , dla których suma jest większa od 9:  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- 2 pkt – zapisanie sumy szeregu:  $S = \frac{2x^3}{x-3}$  dla  $x \neq 3$
- 1 pkt – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości zmiennej  $x$ , dla których istnieje skończona suma szeregu:  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwaga:

Jeżeli zdający nie wyznaczy wszystkich wartości zmiennej  $x$  dla której nieskończona suma szeregu istnieje i rozwiązuje nierówność to otrzymuje maksymalnie **2 punkty** za całe rozwiązanie.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ  $a_1 = 2x^2$  oraz  $q = \frac{3}{x}$  wyznaczamy zbiór wartości  $x$ , dla których istnieje skończona suma szeregu:  $|q| < 1$ :  $\left|\frac{3}{x}\right| < 1$  oraz  $x \neq 0$ . Otrzymujemy  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ .

Zapisujemy sumę szeregu geometrycznego:  $S = \frac{2x^3}{x-3}$ . Następnie wyznaczamy wszystkie wartości zmiennej  $x$ , dla których suma jest większa od 9:  $\frac{2x^3}{x-3} > 9$ . Otrzymujemy wtedy  $(x-3)(2x^3 - 9x + 27) > 0$ . Na mocy twierdzenia Bézouta stwierdzamy całkowity pierwiastek wielomianu  $2x^3 - 9x + 27$ :  $(-3)$ . Dzielimy wielomian przy użyciu schematu Hornera i zapisujemy w postaci wielomianowej:

|    |   |    |    |    |
|----|---|----|----|----|
|    | 2 | 0  | -9 | 27 |
| -3 | 2 | -6 | 9  | 0  |

$(2x^2 - 6x + 9)(x + 3)(x - 3) > 0$ . Rozwiązaniem nierówności jest przedział  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ . Po uwzględnieniu dziedziny:  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$  (zbioru wartości zmiennej  $x$  dla których suma istnieje) otrzymujemy:  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ .

### Zadanie 8. (0–4)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                          |
| IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji; |

#### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik: 273 280

3 pkt – poprawne rozpatrzenie dwóch przypadków i obliczenie ile liczb spełnia podane

założenia (dla *sposobu I*)

ALBO

– obliczenie wszystkich liczb, w których cyfra 2 występuje dokładnie dwa razy, a liczba 3 trzy razy (dla *sposobu II*)

2 pkt – poprawne rozpatrzenie jednego przypadku i obliczenie ile liczb spełnia podane

założenia (dla *sposobu I*)

ALBO

– obliczenie wszystkich takich liczb, które zaczynają się od zera (dla *sposobu II*)

1 pkt – zapisanie, że rozpatrujemy trzy przypadki w zależności jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu (dla *sposobu I*)

ALBO

– zapisanie, że rozpatrujemy osobno przypadek z pominięciem występowania cyfry 0 na początku oraz przypadek z jej występowaniem (dla *sposobu II*)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązania

##### *Sposób I*

Niech  $x$  oznacza cyfrę różną od 2 i 3 a  $A$  zbiór elementów wszystkich takich  $x$ .

Wtedy  $A = \{0,1,4,5,6,7,8,9\}$  oraz  $|A| = 8$ .

Rozpatrujemy trzy przypadki:

1° – pierwszą cyfrą jest 2

2° – pierwszą cyfrą jest 3

3° – pierwszą cyfrą jest  $x$

Przypadek 1 – pierwszą cyfrą jest 2:

$$1 \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot 8^3 = 71680$$

Przypadek 2 – pierwszą cyfrą jest 3:

$$1 \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot 8^3 = 107520$$

Przypadek 3 – pierwszą cyfrą jest  $x$ :

Na pierwszym miejscu nie może stać cyfra 0 więc  $x \neq 0$ :

$$7 \cdot \binom{7}{2} \cdot 8^2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 94080$$

Sumujemy wszystkie przypadki i otrzymujemy wynik:

$$71680 + 107520 + 94080 = 273280$$

### Sposób II

Obliczymy wszystkie liczby, w których cyfra 2 występuje dokładnie dwa razy, a liczba 3 trzy razy.

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot 8^3 = 286720$$

Takich liczb, zaczynających się od cyfry 0 jest wtedy

$$1 \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2 = 13440$$

Zatem wszystkich liczb spełniających podane warunki jest

$$286720 - 13440 = 273280$$

### Zadanie 9. (0–4)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                          |
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;<br>VIII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); [...] |

#### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $|AC| = \frac{4\sqrt{10}}{3}$

3 pkt – obliczenie długości odcinka  $|AD|$ :  $|AD| = \frac{4}{3}$

2 pkt – uzasadnienie, że trójkąty  $GBE$  oraz  $CDB$  są podobne **ORAZ** wyznaczenie skali podobieństwa:  $k = \frac{3}{4}$

(lub  $k = \frac{4}{3}$  przy uzasadnieniu podobieństwa trójkąta  $CDB$  do trójkąta  $GBE$ )

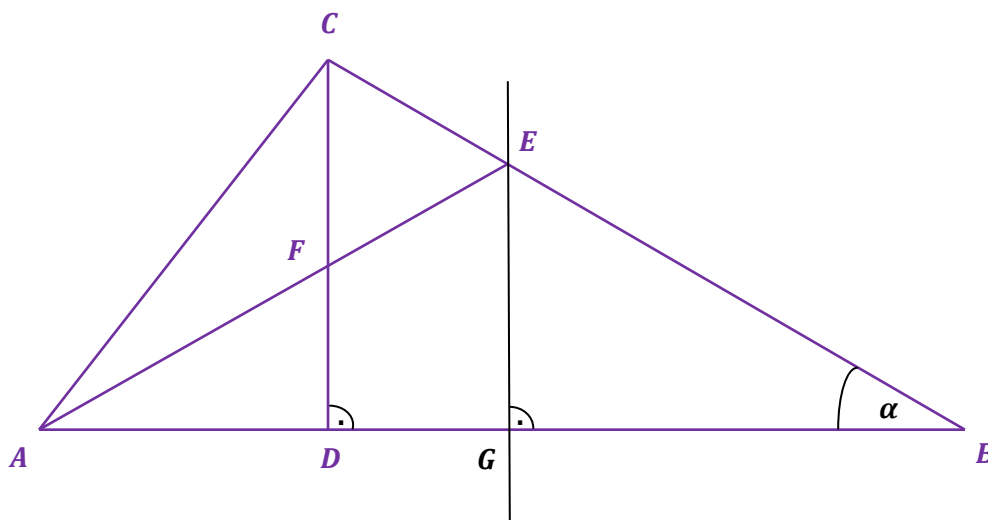
1 pkt – obliczenie wysokości  $|EG|$ :  $|EG| = 3$

*ALBO*

– uzasadnienie, że trójkąty  $EGB$  oraz  $AGE$  są przystające

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie



Prowadzimy symetralną odcinka  $|AB|$  przez punkt  $E$  oraz  $G$ .

Następnie obliczamy wysokość trójkąta  $ABC$  z jego pola:  $\frac{4 \cdot |CD|}{2} = 8$  więc  $|CD| = 4$ .

Z symetralnej wynika, że  $|AG| = |GB| = 2$

Obliczamy długość odcinka  $|EG|$  korzystając z twierdzenia Pitagorasa:  $|EG|^2 + 2^2 = (\sqrt{13})^2$  stąd  $|EG| = 3$ .

Trójkąty  $GBE$  oraz  $CDB$  są podobne, co stwierdzamy na cesze kąt-kąt-kąt: każdy z nich ma kąt prosty, kąt  $\alpha$  oraz kąt  $90^\circ - \alpha$ .

Określamy skalę  $k$  tego podobieństwa:  $k = \frac{3}{4}$ .

Dlatego też układamy zależność:  $\frac{2}{|DG|+2} = \frac{3}{4}$  oraz z tego otrzymujemy  $|DG| = \frac{2}{3}$ .

Wtedy  $|AD| = 4 - 2 - \frac{2}{3}$  co daje  $|AD| = \frac{4}{3}$ .

Następnie obliczamy długość boku  $|AC|$  z twierdzenia Pitagorasa:  $\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2 = |AC|^2$  co

końcowo daje nam  $|AC| = \frac{4\sqrt{10}}{3}$ .

### Zadanie 10. (0–5)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                    |
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>IV.R1) rozwiązuje układy równań liniowych i kwadratowych z dwiema niewiadomymi, które można sprowadzić do równania kwadratowego lub liniowego, a które nie są trudniejsze niż $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey = f \end{cases}$ |

#### Zasady oceniania

- 5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie pola trójkąta: 10
- 4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów przecięcia paraboli z okręgiem **oraz** odrzucenie współrzędnych punktów, które nie są kratowe:  $A = (2,6)$  oraz  $B = (4,2)$
- 3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów przecięcia paraboli z okręgiem:  $A = (2,6)$ ,  
 $B = (4,2)$ ,  $C = (1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$  i  $D = (1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$
- 2 pkt – obliczenie dwóch spośród czterech pierwszych współrzędnych punktów przecięcia,  
 np.  $x = 2$  i  $x = 4$  albo  $x = 1 - \sqrt{2}$  i  $x = 1 + \sqrt{2}$
- 1 pkt – obliczenie jednej spośród czterech pierwszych współrzędnych punktów przecięcia,  
 np.  $x = 2$ ,  $x = 4$ ,  $x = 1 - \sqrt{2}$  albo  $x = 1 + \sqrt{2}$   
**ALBO**  
 – podanie współrzędnych punktu  $S$  (początku kartezjańskiego układu współrzędnych):  
 $S = (0,0)$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Szukamy współrzędnych przecięcia paraboli z okręgiem. Zatem

$$(x - 1)^2 + (-x^2 + 4x + 2 - 3)^2 = 10$$

Po rozwinięciu otrzymujemy:

$$x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 10x - 8 = 0$$

Na mocy twierdzenia Bézouta stwierdzamy całkowity pierwiastek wielomianu: 2.

Po podzieleniu przez dwumian  $(x - 2)$  otrzymujemy:

$$(x - 2)(x^3 - 6x^2 + 7x + 4) = 0$$

Ponownie, na mocy twierdzenia Bézouta stwierdzamy całkowity pierwiastek wielomianu: 4.

Po podzieleniu przez dwumian  $(x - 4)$  otrzymujemy:

$$(x - 2)(x - 4)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

Zatem  $x = 2$  lub  $x = 4$  lub  $x = 1 - \sqrt{2}$  lub  $x = 1 + \sqrt{2}$

Obliczamy drugie współrzędne punktów i otrzymujemy:

$$A = (2,6), \quad B = (4,2), \quad C = (1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}) \quad \text{i} \quad D = (1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$$

Jedynie punkty  $A$  i  $B$  spełniają warunek punktu kratowego. Punkt  $S$  – początek

kartezjańskiego układu współrzędnych ma współrzędne  $S = (0,0)$ . Obliczamy pole trójkąta

$ABS$ :

$$P = \frac{1}{2} \cdot |(4 - 2)(0 - 6) - (2 - 6)(0 - 2)| = 10$$

**Zadanie 11. (0–6)**

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                |
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.<br>IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.. | Zdający:<br>VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie<br>$4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$ . |

**Zasady oceniania**

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:

$$x \in \{-2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\}$$

5 pkt – rozwiązanie równania w zbiorze liczb rzeczywistych:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  oraz  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

z uwzględnieniem dziedziny  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  i  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

4 pkt – przekształcenie równania do postaci  $\sin x = 0$  lub  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (*sposób I*)

ALBO

– zapisanie, że  $t = 0$  lub  $t = 1$  (*sposób II*)

3 pkt – zapisanie równania w postaci  $\sin x = 0$  lub  $\cos 2x + \sin 2x = 1$  (*sposób I*)

ALBO

– zastosowanie zmiennej pomocniczej  $t = \tan x$  **oraz** zapisanie równania w postaci

$$\frac{2t}{1+t} = \frac{2t}{1+t^2} \quad (\text{sposób II})$$

2 pkt – zapisanie równania w postaci  $2 \sin x \cos x = \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x}$  (*sposób I*)

ALBO

– zapisanie, że  $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$  (*sposób II*)

1 pkt – zapisanie koniecznych założeń i wyznaczenie dziedziny:  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,

$k \in \mathbb{Z}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający nie zapisuje założeń, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **3 punkty**.  
 Jeżeli zdający zapisze poprawne założenia natomiast niepoprawnie rozwiązuje je, to za całe rozwiązanie otrzymuje maksymalnie **5 punktów**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie***Sposób I*

Zapisujemy konieczne założenia spełniające sens liczbowy:  $\operatorname{tg} x \neq 0$  oraz  $\operatorname{tg} x + 1 \neq 0$ .

Po rozwiązaniu ich otrzymujemy dziedzinę równania:  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Zamienimy  $\operatorname{tg} x$  na funkcję sinus i cosinus przy użyciu wzoru  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  oraz rozpiszemy  $\sin 2x$  ze wzoru na podwojony sinus. Po uproszczeniu:

$$\sin(2x) = \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x}$$

Wyciągamy  $2\sin x$  przed nawias

$$2 \sin x \cos x - \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x} = 0$$

$$2 \sin x \left( \cos x - \frac{1}{\cos x + \sin x} \right) = 0$$

Otrzymujemy

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x - \frac{1}{\cos x + \sin x} = 0$$

Przekształcamy drugie równanie do prostszej postaci. Sprowadzamy wyrażenie do wspólnego mianownika

$$\frac{\cos x (\cos x + \sin x) - 1}{\cos x + \sin x} = 0$$

Stąd

$$\cos x (\cos x + \sin x) - 1 = 0$$

$$\cos^2 x + \sin x \cos x - 1 = 0$$

Mnożymy równanie obustronnie przez 2 otrzymując

$$2\cos^2 x - 1 + 2\sin x \cos x = 1$$

Korzystając ze wzoru na podwojony sinus i cosinus otrzymujemy

$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$

Zamieniamy  $\sin 2x$  ze wzoru redukcyjnego

$$\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$$

Korzystamy ze wzoru na sumę cosinusów

$$2 \cos \frac{2x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \cdot \cos \frac{2x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2} = 1$$

Po uproszczeniu

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Dzielimy obustronnie przez 2 otrzymując

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Po podzieleniu obustronnie przez  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = k\pi$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Zapisujemy rozwiązania należące do przedziału  $[-2\pi, 2\pi]$ :

$$x \in \left\{-2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\right\}$$

### Sposób II

Zapisujemy konieczne założenia spełniające sens liczbowy:  $\operatorname{tg} x \neq 0$  oraz  $\operatorname{tg} x + 1 \neq 0$ .

Po rozwiązaniu ich otrzymujemy dziedzinę równania:  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Do przekształcenia równania zastosujemy wzór na podwojony sinus:

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

Niech  $t = \operatorname{tg} x$ .

$$\frac{2t}{1+t} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2t(1+t^2) = 2t(1+t)$$

$$2t(1+t^2) - 2t(1+t) = 0$$

$$2t(1 + t^2 - 1 - t) = 0$$

$$2t(t^2 - t) = 0$$

$$2t^2(t - 1) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{lub} \quad t = 1$$

Zatem

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{oraz} \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zapisujemy rozwiązania należące do przedziału  $[-2\pi, 2\pi]$ :

$$x \in \left\{-2\pi, -\frac{7\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\right\}$$

#### *Komentarz do zadania*

Równanie to posiada wiele różnych sposobów rozwiązania wykorzystujących podstawowe wzory i przekształcenia wyrażeń trygonometrycznych, natomiast w kluczu odpowiedzi uwzględniono najprostsze oraz najszybsze sposoby rozwiązania. Ze względu na długą drogę prowadzącą do rozwiązania oraz skomplikowane obliczenia, zadanie punktowane jest najwyższą możliwą liczbą punktów oraz posiada dużo miejsca do rozwiązania w arkuszu, co sprawia, że zdający może zapisywać wszystkie rozważania oraz podejmować wiele prób rozwiązania problemu.

## Zadanie 12. (0–6)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                  |
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.<br>3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu | Zdający:<br>III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych;<br>III.R5) analizuje równania [...] kwadratowe z parametrami [...]. |

### Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na rozwiązaniu warunku  $a \neq 0$  oraz nierówności  $\Delta > 0$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie warunku  $a \neq 0$  oraz poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek  $\Delta \geq 0$  to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Jeżeli zdający rozważa opcje dla której  $a = 0$  lub nie rozważy warunku  $a \neq 0$  to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu tych wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony

warunek:  $x_1 \neq 0$  oraz  $x_2 \neq 0$  oraz  $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$ . Za poprawne wykonanie tego

etapu zdający otrzymuje **4 punkty**. Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

4 pkt – rozwiązanie warunku i poprawna odpowiedź:  $m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$

3 pkt – przekształcenie nierówności do postaci  $\frac{(1-m)(m^2-5m-5)}{(m+2)^3} \geq -10$  **ORAZ** rozwiązanie

warunku  $W(0) \neq 0$  bądź  $x_1 x_2 \neq 0$ :  $m \neq -2 \wedge m \neq -1$

2 pkt – zapisanie nierówności  $\frac{(1-m)((1-m)^2-3(m+2))}{(m+2)^3} \geq -10$  **ORAZ** zapisanie warunku

$W(0) \neq 0$  **ALBO** zapisanie warunku  $x_1 x_2 \neq 0$

1 pkt – przekształcenie warunku do postaci pozwalającej na bezpośrednie jednokrotne

zastosowanie wzorów Viète'a, np.  $\frac{(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)}{x_1^3x_2^3} \geq -10$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwaga:

Jeżeli zdający nie rozwiązuje założeń  $x_1 \neq 0$  i  $x_2 \neq 0$  ale rozwiązuje pozostałą część etapu to za tę część rozwiązania otrzymuje maksymalnie **2 punkty**.

**Trzeci etap** polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru  $m$ , które spełniają

jednocześnie warunki:  $\Delta > 0$  i  $x_1 \neq 0$  i  $x_2 \neq 0$  i  $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$ .

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru  $m$ , które spełniają

jednocześnie warunki:  $\Delta > 0$  i  $x_1 \neq 0$  i  $x_2 \neq 0$  i  $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$ :

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (7, +\infty)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

#### Uwagi:

Jeżeli zdający w etapie I lub II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.

Jeżeli zdający w etapach I i II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

##### I etap

Aby równanie  $(m+1) \cdot x^2 + (m^2-1) \cdot x + m^2 + 3m + 2 = 0$  miało dwa różne rozwiązania rzeczywiste, to funkcja zmiennej rzeczywistej  $x$  musi być kwadratowa. Zatem współczynnik  $a \neq 0$ :

$$m+1 \neq 0$$

Otrzymujemy:

$$m \neq -1$$

### Sposób I

Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik  $\Delta$  trójmianu kwadratowego  $(m+1) \cdot x^2 + (m^2-1) \cdot x + m^2+3m+2 = 0$  jest dodatni.

Rozwiązujemy warunek  $\Delta > 0$ :

$$(m^2-1)^2 - 4(m+1)(m^2+3m+2) > 0$$

$$(m-1)^2(m+1)^2 - 4(m+1)^2(m+2) > 0$$

$$(m+1)^2[(m-1)^2 - 4(m+2)] > 0$$

$$(m+1)^3(m-7) > 0$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$$

### Sposób II

Zauważamy, że równanie  $(m+1) \cdot x^2 + (m^2-1) \cdot x + m^2+3m+2 = 0$  można zapisać w postaci  $(m+1) \cdot x^2 + (m+1)(m-1) \cdot x + (m+1)(m+2) = 0$ . Z założenia  $m \neq -1$  więc dzielimy równanie obustronnie przez  $(m+1)$  otrzymując:

$$x^2 + (m-1) \cdot x + m+2 = 0$$

Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik  $\Delta$  trójmianu kwadratowego  $x^2 + (m-1) \cdot x + m+2 = 0$  jest dodatni. Rozwiązujemy warunek  $\Delta > 0$ :

$$(m-1)^2 - 4(m+2) > 0$$

$$(m+1)(m-7) > 0$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$$

Zatem z obu warunków wynika:

$$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty) \quad \wedge \quad m \neq -1$$

Stąd

$$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$$

**II etap**

Zapisujemy wzory Viète'a przy użyciu parametrów we współczynnikach:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(m+1)(m-1)}{m+1} = 1-m$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{(m+1)(m+2)}{m+1} = m+2$$

Rozwiązujemy warunki:  $x_1 \neq 0$  i  $x_2 \neq 0$ .

*Sposób I*

Zapisujemy, że  $W(0) \neq 0$ . Wtedy  $m^2 + 3m + 2 \neq 0$ . Z tego wynika, że

$$m \neq -2 \quad \wedge \quad m \neq -1$$

*Sposób II*

Zapisujemy, że  $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ . Wtedy  $m^2 + 3m + 2 \neq 0$ . Z tego wynika, że

$$m \neq -2 \quad \wedge \quad m \neq -1$$

Przekształcamy warunek  $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \geq -10$  do postaci, w której możemy zastosować wzory

Viète'a. Zatem

$$\frac{(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2)}{x_1^3x_2^3} \geq -10$$

Następnie wstawiamy wzory Viète'a:

$$\frac{(1-m)((1-m)^2 - 3(m+2))}{(m+2)^3} \geq -10$$

Nierówność doprowadzamy do postaci

$$\frac{-m^3 + 6m^2 - 5}{(m+2)^3} \geq -10$$

Po czym sprowadzamy do wspólnego mianownika i postaci iloczynowej

$$3(m+2)^3(3m^3 + 22m^2 + 40m + 25) \geq 0$$

Korzystając z twierdzenia Bézouta stwierdzamy możliwe całkowite pierwiastki wielomianu

$3m^3 + 22m^2 + 40m + 25$ . Jako, iż jest on zapisany jako suma czterech składników, zatem jedynie ujemne liczby mogą stanowić jego pierwiastki. Zapisujemy zbiór:  $\mathbb{M} = \{-1, -5, -25\}$ .

Sprawdzamy, która liczba zeruje wielomian i otrzymujemy  $W(-5) = 0$ . Dzielimy zatem

wielomian  $3m^3 + 22m^2 + 40m + 25$  przez dwumian  $(m + 5)$  przy użyciu schematu Hornera.

|    |   |    |    |    |
|----|---|----|----|----|
|    | 3 | 22 | 40 | 25 |
| -5 | 3 | 7  | 5  | 0  |

Zapisujemy w postaci iloczynowej

$$3(m + 2)^3(m + 5)(3m^2 + 7m + 5) \geq 0$$

Trójmian  $3m^2 + 7m + 5$  nie posiada pierwiastków. Dlatego rozwiązaniem nierówności jest przedział

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, +\infty)$$

Zatem z obu warunków wynika:

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, +\infty) \quad \wedge \quad m \neq -2 \quad \wedge \quad m \neq -1$$

Stąd

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$$

### Etap III

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , które spełniają oba warunki:

$m \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$  oraz  $m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$ . Stąd też odpowiedź:

$$m \in (-\infty, -5] \cup (-2, -1) \cup (7, +\infty)$$

**Zadanie 13.1. (0–2)**

| Podstawa programowa 2024                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                                     | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                                |
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Zdający:<br>V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą [...] wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – uzależnienie tworzącej stożka od jego promienia **ORAZ** wysokości od jego tworzącej

$$\text{i promienia: } l = \frac{9\sqrt{3}}{r} \quad \text{i} \quad h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Ze wzoru na pole powierzchni bocznej stożka:

$$9\sqrt{3}\pi = \pi r \cdot l$$

$$l = \frac{9\sqrt{3}}{r}$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 + r^2 = l^2$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{r}\right)^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{243 - r^4}{r^2}}$$

$$h = \frac{\sqrt{243 - r^4}}{r}$$

Ze wzoru na objętość stożka:

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{\sqrt{243 - r^4}}{r} = \frac{\pi}{3}\sqrt{243r^2 - r^6} \quad \blacksquare$$

### Zadanie 13.2. (0–4)

| Podstawa programowa 2024                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej<br>XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;<br>XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.<br>V.R2) posługuje się złożeniami funkcji |

#### Zasady oceniania

- 4 pkt – uzasadnienie, że funkcja  $V$  przyjmuje wartość największą dla  $r = 3$  i obliczenie tej największej objętości:  $9\sqrt{2}\pi$
- 3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja  $V$  przyjmuje wartość największą dla  $r = 3$
- 2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji:  $r = 3$
- 1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji złożonej  $V$ , np.:  $V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{486r - 6r^5}{2\sqrt{243r^2 - r^6}}$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

- Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości  $r$ , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:
  - opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji  $V$  LUB
  - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $r$  funkcja  $V$  ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość LUB
  - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $r$  funkcja  $V$  ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
- Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

3. Jeżeli zdający nie sprawdzi czy dla  $r = 2\sqrt{3}$  objętość stożka jest największa to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji  $V$ . Skorzystamy ze wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{243r^2 - r^6}} \cdot (486r - 6r^5)$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{486r - 6r^5}{2\sqrt{243r^2 - r^6}} = 0$$

$$486r - 6r^5 = 0$$

$$6r(81 - r^4) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{lub} \quad r^4 = 81$$

$$r = 0 \notin (0, 2\sqrt{3}] \quad \vee \quad r = 3 \quad \vee \quad r = -3 \notin (0, 2\sqrt{3}]$$

Badamy znak pochodnej:

| $r$     | $(0, 3)$   | $3$                       | $(3, 2\sqrt{3})$ | $2\sqrt{3}$                                                                           |
|---------|------------|---------------------------|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $V'(r)$ | $+$        | $0$                       | $-$              |  |
| $V(r)$  | $\nearrow$ | $y_{\max} = 9\sqrt{2}\pi$ | $\searrow$       | $2\sqrt{33}\pi$                                                                       |

Zatem dla  $r = 3$  objętość tego stożka jest największa i wynosi  $9\sqrt{2}\pi$ .