

Rodzaj dokumentu:	Zasady oceniania rozwiązań zadań
Egzamin:	Egzamin maturalny
Przedmiot:	Matematyka
Poziom:	Poziom rozszerzony

Zasady oceniania są zgodne z podstawą programową kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej z 2024 r., <https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20240001019/O/D20241019.pdf> (dostęp: 20.09.2024).

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilku-etapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi oraz zamiany podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne rozwiązanie: $\log_2 8 = 3, 3 \in \mathbb{N}$

2 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci: $\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, przekształcamy wyrażenie:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$$

$$\text{do postaci: } \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$$

$$\text{Po wykonaniu skracania ułamków: } \cancel{\log_2 3} \cdot \frac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 5}}{\cancel{\log_2 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 6}}{\cancel{\log_2 5}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 7}}{\cancel{\log_2 6}} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7}$$

otrzymujemy: $\log_2 8 = 3, 3 \in \mathbb{N}$

Co należało wykazać.

Zadanie 2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

3 pkt – na podstawie cechy przystawania trójkątów stwierdzenie, że $|AC| = |EG|$

2 pkt – wykazanie, że $|\angle ABC| = |\angle ECG|$

1 pkt – stwierdzenie, że $|AB| = |CD| = |CE|$ oraz $|AD| = |BC| = |CG|$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Odcinki $|AB| = |CD| = |CE|$;

$|AD| = |BC| = |CG|$

Ponieważ równoległobok jest trapezem, to suma kątów przy jednym z ramion jest równa 180° :

$$|\angle ABC| + |\angle BCD| = 180^\circ$$

$$|\angle DCE| + |\angle BCG| = 90^\circ$$

$$|\angle BCG| + |\angle BCD| + |\angle DCE| + |\angle ECG| = 360^\circ$$

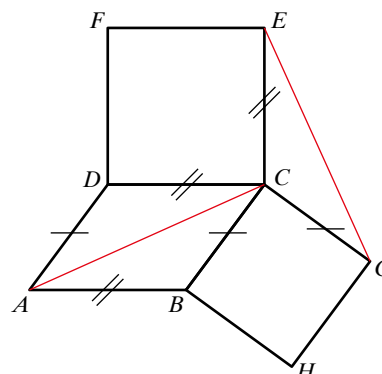
$$\text{zatem } |\angle BCD| + |\angle ECG| = 180^\circ$$

$$|\angle ABC| + |\angle BCD| = |\angle BCD| + |\angle ECG|$$

$$|\angle ABC| = |\angle ECG|$$

Na podstawie cechy przystawania trójkątów *bkb* stwierdzamy, że $\triangle ABC \equiv \triangle CEG$, zatem na podstawie cechy *bbb* także $|AC| = |EG|$.

Co należało wykazać.



Zadanie 3. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji; XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i podanie rozwiązania $n = 21$

3 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:

$$|\Omega| = \frac{(n-1) \cdot n}{2},$$

wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A : $|A| = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$, za-

stosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n-3}{n-1}$

oraz utworzenie równania wynikającego z treści zadania: $0,9 = \frac{n-3}{n-1}$

2 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:

$$|\Omega| = C_2^n = \frac{(n-1) \cdot n}{2},$$

wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta): $|A| = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$, oraz zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-3)}{(n-1) \cdot \cancel{n}} = \frac{n-3}{n-1}$$

1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:

$$|\Omega| = C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{\cancel{(n-2)!} \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} = \frac{(n-1) \cdot n}{2} \text{ oraz wyznaczenie liczby wszystkich}$$

możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta): $|A| = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, gdzie $n > 3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:

$$|\Omega| = C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{\cancel{(n-2)!} \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia A (wzór na liczbę przekątnych wielokąta):

$$|A| = \frac{n \cdot (n-3)}{2}, \text{ gdzie } n > 3$$

Wyznaczenie, ze wzoru klasycznej definicji prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwa zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-3)}{(n-1) \cdot \cancel{n}} = \frac{n-3}{n-1}$$

Utworzenie równania wynikającego z treści zadania:

$$0,9 = \frac{n-3}{n-1}$$

Rozwiązanie równania:

$$\frac{9}{10} = \frac{n-3}{n-1}$$

$$9(n-1) = 10(n-3)$$

$$9n - 9 = 10n - 30$$

$$n = 21$$

Odpowiedź: Poszukiwany wielokąt ma 21 wierzchołków.

Zadanie 4. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi; XIII.R3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Zasady oceniania

6 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, podanie wartości współczynników a i b oraz wyznaczenie współrzędnych punktów ekstremalnych

5 pkt – wykonanie czynności za 4 punkty oraz sprawdzenie, czy zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum $f'(x) = 0$

4 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P : $y = -10$ i wyznaczenie pochodnej funkcji f :
 $f'(x) = \frac{x^2 - 6}{x^2}$, obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f w punkcie

P : $a = f'(-2) = -\frac{1}{2}$ oraz napisanie równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P :

$y = -\frac{1}{2}x - 11$ i wskazanie wartości współczynnika $b = -11$

3 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P : $y = -10$ i wyznaczenie pochodnej funkcji f :
 $f(x)' = \frac{x^2 - 6}{x^2}$ oraz obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f

w punkcie P : $a = f'(-2) = -\frac{1}{2}$

2 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P : $y = -10$ oraz wyznaczenie pochodnej funkcji f :
 $f(x)' = \frac{x^2 - 6}{x^2}$

1 pkt – obliczenie drugiej współrzędnej punktu P : $y = -10$ lub wyznaczenie pochodnej $f(x)' = \frac{x^2 - 6}{x^2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy drugą współrzędną punktu P : $f(-2) = \frac{(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6}{-2} = \frac{4 + 10 + 6}{-2} = \frac{20}{-2} = -10$

$P = (-2; -10)$

Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{(2x - 5) \cdot x - (x^2 - 5x + 6) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 5x - x^2 + 5x - 6}{x^2} = \frac{x^2 - 6}{x^2}, x \neq 0$$

Równanie stycznej do funkcji w punkcie $P(x_0; f(x_0))$ ma postać: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Obliczamy: $f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 6}{(-2)^2} = \frac{4 - 6}{4} = -\frac{1}{2}$, $f(x_0) = -10$

Zapisujemy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P : $y - (-10) = -\frac{1}{2} \cdot (x - (-2))$

$$y + 10 = -\frac{1}{2} \cdot (x + 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1 - 10$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 11$$

Odczytujemy wartości współczynników: $a = -\frac{1}{2}$, $b = -11$

Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum $f'(x) = 0$:

$$\frac{x^2 - 6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{6} \text{ i } x_2 = \sqrt{6}$$

Badamy znak pochodnej w otoczeniu punktów podejrzanych o ekstremum (sprawdzamy warunek dostateczny istnienia ekstremum):

dla $x < -\sqrt{6}$ $f'(x) > 0$, a dla $0 > x > -\sqrt{6}$ $f'(x) < 0$, czyli w punkcie $x = -\sqrt{6}$ funkcja ma maksimum

$$\text{lokalne wynoszące: } f(-\sqrt{6}) = \frac{(-\sqrt{6})^2 - 5 \cdot (-\sqrt{6}) + 6}{-\sqrt{6}} = \frac{6 + 5\sqrt{6} + 6}{-\sqrt{6}} = \frac{-30 - 12\sqrt{6}}{6} = -5 - 2\sqrt{6}$$

dla $0 < x < \sqrt{6}$ $f'(x) < 0$, a dla $x > \sqrt{6}$ $f'(x) > 0$, czyli w punkcie $x = \sqrt{6}$ funkcja ma minimum lokalne

$$\text{wynoszące: } f(\sqrt{6}) = \frac{(\sqrt{6})^2 - 5 \cdot \sqrt{6} + 6}{\sqrt{6}} = \frac{6 - 5\sqrt{6} + 6}{\sqrt{6}} = \frac{-30 + 12\sqrt{6}}{6} = -5 + 2\sqrt{6}$$

Współczynniki stycznej: $a = -\frac{1}{2}$, $b = -11$. Funkcja ma dwa ekstrema:

- maksimum w punkcie $x_1 = -\sqrt{6}$ wynoszące: $f(-\sqrt{6}) = -5 - 2\sqrt{6}$

- minimum w punkcie $x_2 = \sqrt{6}$ wynoszące: $f(\sqrt{6}) = -5 + 2\sqrt{6}$

Zadanie 5. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.R) rozwiązuje układy równań liniowych i kwadratowych z dwiema niewiadomymi, które można sprowadzić do równania kwadratowego [...]; VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; VI.5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; VI.6) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i udzielenie poprawnej odpowiedzi uwzględniającej dwa przypadki, pierwszy: $(55, 21, -13)$, drugi: $(25, 21, 17)$

3 pkt – doprowadzenie do równania kwadratowego: $r^2 + 38r + 136 = 0$ i obliczenie: $r_1 = -34$, $r_2 = -4$ oraz $x_1 = 55$, $x_2 = 25$

2 pkt – utworzenie układu równań:
$$\begin{cases} x + x + r + x + 2r = 63 \\ (x + r + 15)^2 = (x - 1) \cdot (x + 2r + 37) \end{cases}$$

1 pkt – wyznaczenie zależności wynikających z treści zadania

x , $x + r$, $x + 2r$ – ciąg arytmetyczny

$x - 1$, $x + r + 15$, $x + 2r + 37$ – ciąg geometryczny

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczamy x pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, r różnica tego ciągu i zapisujemy zależności wynikające z treści zadania:

$x, x+r, x+2r$ – ciąg arytmetyczny

$x-1, x+r+15, x+2r+37$ – ciąg geometryczny

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} x+x+r+x+2r=63 \\ (x+r+15)^2=(x-1)\cdot(x+2r+37) \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 3x+3r=63 \quad |:3 \\ x^2+2rx+30x+30r+r^2+225=x^2+2rx+36x-2r-37 \\ x+r=21 \\ r^2-6x+32r=-262 \\ x=21-r \\ r^2-6(21-r)+32r=-262 \\ x=21-r \\ r^2+38r+136=0 \end{cases}$$

rozwiązujemy równanie kwadratowe $r^2+38r+136=0$

$$\Delta=900 \quad \sqrt{\Delta}=30$$

$$r_1=\frac{-38-30}{2}=-34 \quad r_2=\frac{-38+30}{2}=-4$$

$$\text{zatem: } x_1=21+34=55 \quad x_2=21+4=25$$

Otrzymaliśmy dwie trójki liczb spełniających warunki zadania: $(55, 21, -13)$ i $(25, 21, 17)$

Zadanie 6. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.R2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych; VII.R3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i podanie rozwiązania: $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$

3 pkt – rozwiązanie nierówności $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$

2 pkt – poprawne zapisanie dziedziny wyrażenia: $D = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$ oraz zauważenie, że $\cos^2 x > 0$, zatem $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$

1 pkt – poprawne zapisanie dziedziny wyrażenia: $D = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę wyrażenia wymiernego $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$:

$$\cos x = 0 \text{ dla } x = \frac{\pi}{2} \text{ i } x = \frac{3\pi}{2}, \text{ zatem } D = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$

Zauważamy, że $\cos^2 x > 0$, zatem $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$, gdy $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$.

Rozwiązujemy nierówność $2 \cos x - \sqrt{3} < 0$:

$$2 \cos x < \sqrt{3}$$

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$$

Otrzymujemy rozwiązanie danej nierówności:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$$

Zadanie 7. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych; XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

5 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; wyznaczenie maksymalnego pola trapezu:

$$P\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

Uwaga: przy braku dziedziny maksymalnie 4 pkt.

4 pkt – wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej z ich interpretacją: $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -5 \notin D$;

dla $x_1 = \frac{5}{2}$ funkcja osiąga maksimum

3 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji: $P'(x) = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}$, $x \in (0; 5)$

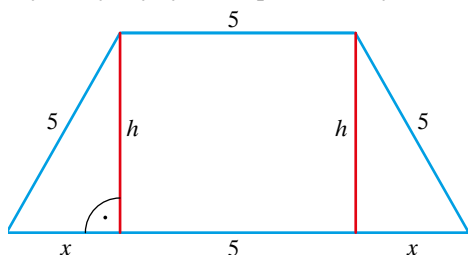
2 pkt – wyznaczenie pola trapezu jako funkcji zmiennej x : $P(x) = (x + 5) \cdot \sqrt{25 - x^2}$, $x \in (0; 5)$

1 pkt – wykonanie rysunku pomocniczego z pełnymi oznaczeniami i wyznaczenie długości wysokości trapezu $h = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in (0; 5)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Wyznaczamy zakres zmiennej x : $x \in \langle 0; 5 \rangle$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy wysokość trapezu:

$$h^2 + x^2 = 5^2$$

$$h^2 = 25 - x^2$$

$$h = \sqrt{25 - x^2}$$

Wyznaczamy wzór na pole trapezu jako funkcję zmiennej x :

$$P(x) = \frac{(5 + 2x + 5) \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2} = \frac{2(x + 5) \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2} = (x + 5) \cdot \sqrt{25 - x^2}, x \in \langle 0; 5 \rangle$$

Wyznaczamy pochodną funkcji $P(x)$: $P'(x) = (x + 5)' \cdot \sqrt{25 - x^2} + (x + 5) \cdot (\sqrt{25 - x^2})'$

$$P'(x) = \sqrt{25 - x^2} + (x + 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Dziedzina pochodnej: $x \in \langle 0; 5 \rangle$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej: $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 5x + 25 = 0$

$$2x^2 + 5x - 25 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-25) = 225$$

$$\sqrt{\Delta} = 15$$

$$x_1 = \frac{-5 + 15}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 15}{2 \cdot 2} = -5 \notin D$$

Dla $x_1 = \frac{5}{2}$ funkcja osiąga maksimum.

$$\text{Obliczamy pole trapezu dla } x_1 = \frac{5}{2}: P\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} + 5\right) \cdot \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

Zadanie 8. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu.

Zasady oceniania

5 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; wyznaczenie współrzędnych wierzchołków $B(-2; -7)$ oraz $D(2; 1)$

4 pkt – wyznaczenie równania okręgu opisanego na kwadracie: $x^2 + (y + 3)^2 = 20$

- 3 pkt – wyznaczenie równania prostej AC : $y = -\frac{1}{2}x - 3$ oraz równania prostej BD : $y = 2x - 3$
2 pkt – wyznaczenie współrzędnych środka okręgu $S(0; -3)$ oraz współrzędnych wierzchołka $C(4; -5)$
1 pkt – zapisanie równania okręgu w postaci kanonicznej: $x^2 + (y + 3)^2 = 10$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie okręgu do postaci kanonicznej i odczytujemy współrzędne środka okręgu:

$$x^2 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 10$$

$$S(0; -3)$$

Po przeciwnej stronie środka okręgu, który jest równocześnie środkiem kwadratu, od punktu $A(-4; -1)$

leży punkt $C(x; y)$, zatem: $\frac{-4 + x}{2} = 0$ oraz $\frac{-1 + y}{2} = -3$

$$x = 4, y = -5, \text{ czyli } C(4; -5)$$

Wyznaczamy równanie prostej AC : $y = ax + b$

$$a = \frac{-5 + 1}{4 + 4} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$-5 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$$

$$b = -3$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 3$$

Wyznaczamy równanie prostej BD prostopadłej do prostej AC :

$$-\frac{1}{2} \cdot a_2 = -1$$

$$a_2 = 2$$

$$y = 2x + b$$

$$-3 = 2 \cdot 0 + b$$

$$b = -3$$

$$y = 2x - 3$$

Wyznaczamy równanie okręgu opisanego na kwadracie:

$$r^2 = |SA|^2 = (-4)^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 20$$

Wyznaczamy współrzędne punktów przecięcia prostej BD z okręgiem opisanym na kwadracie:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 + (y + 3)^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (2x - 3 + 3)^2 = 20 \\ 5x^2 = 20 \end{cases}$$

$$5x^2 = 20$$

$$x^2 = 4$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -7 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$B(-2; -7)$$

$$D(2; 1)$$

$$D(2; 1)$$

Wyznaczone współrzędne wierzchołków kwadratu wynoszą: $B(-2; -7)$ oraz $D(2; 1)$.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilku-etapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą; III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; III.R3) stosuje wzory Viete’a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności: wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają określone znaki bądź należą do określonego przedziału, wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania; podanie odpowiedzi: $m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$

3 pkt – poprawne wyznaczenie przedziałów spełniających trzy warunki

2 pkt – poprawne wyznaczenie przedziałów spełniających dwa warunki

1 pkt – poprawne wyznaczenie przedziału spełniającego jeden z warunków: $\Delta > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$, $x_1 - x_2 < 3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Aby równanie kwadratowe miało dwa różne rozwiązania tego samego znaku, muszą być spełnione warunki:

1. $\Delta > 0$

2. $x_1 \cdot x_2 > 0$

3. $x_1 - x_2 < 3$

Ad. 1 $\Delta > 0$

$$[2(m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m+1) > 0$$

$$4(m^2 + 2m + 1) - 24m - 4 > 0$$

$$4m^2 + 8m - 4 - 24m - 4 > 0$$

$$4m^2 - 16m > 0$$

$$m^2 - 4m > 0$$

$$m(m-4) > 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$$

Ad. 2 $x_1 \cdot x_2 > 0$

$$\frac{6m+1}{1} > 0$$

$$6m+1 > 0$$

$$6m > -1$$

$$m > -\frac{1}{6}$$

$$m \in \left(-\frac{1}{6}; \infty\right)$$

Ad. 3 $x_1 - x_2 < 3$

$$x_1 - x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} + b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a} = -\sqrt{\Delta} = -\sqrt{4m^2 - 16m}$$

$$-\sqrt{4m^2 - 16m} < 3$$

$$4m^2 - 16m < 9$$

$$4m^2 - 16m - 9 < 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9) = 400$$

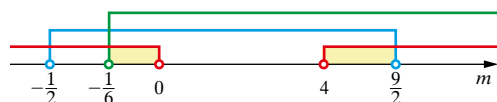
$$\sqrt{\Delta} = 20$$

$$m_1 = \frac{16 - 20}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{16 + 20}{8} = \frac{9}{2}$$

$$m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Zatem:



$$m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \cup \left(4; \frac{9}{2}\right)$$

Zadanie 10. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych; X.R2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{500}{3}$

5 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy a : $a = 10$

4 pkt – wykazanie podobieństwa trójkątów SOC i OCE

3 pkt – wyznaczenie długości odcinka $|EC|$ z trójkąta OCE : $|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

2 pkt – wyznaczenie długości odcinka $|OE|$ z trójkąta EOB : $|OE| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

1 pkt – wyznaczenie długości odcinków $|OB| = |OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

W kwadracie będącym podstawą ostrosłupa oznaczamy $|OB| = |OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ jako połowę długości przekątnej.

Z trójkąta EOB wyznaczamy długość odcinka $|OE|$:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|OE|}{|OB|}$$

$$|OE| = |OB| \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$|OE| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|OE| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Z trójkąta OCE wyznaczamy długość odcinka $|EC|$:

$$|EC|^2 = |OC|^2 - |OE|^2$$

$$|EC|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2$$

$$|EC|^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}$$

$$|EC|^2 = \frac{3a^2}{6} - \frac{a^2}{6}$$

$$|EC|^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$|EC| = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$$

$$|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Na podstawie cechy podobieństwa kkk stwierdzamy, że $\triangle SOC \sim \triangle OEC$, zatem $\frac{|OS|}{|OE|} = \frac{|OC|}{|EC|}$.
Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{5}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{30}{a\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$30\sqrt{12} = 60\sqrt{3}$$

$$a = \frac{60\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$$

$$a = 10$$

Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 5$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 5$$

$$V = \frac{500}{3}$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji; XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

6 pkt – obliczenie liczby dołożonych kul białych: $n = 1$ lub $n = 8$

5 pkt – określenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o różnych kolorach”,

$$P(A) = \frac{12n + 24}{n^2 + 15n + 56}$$

4 pkt – narysowanie drzewka po dodaniu n kul białych

3 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o tych samych kolorach”, $P(B) = \frac{4}{7}$ i stwierdzenie, że $P(B) > P(A)$

2 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia „wylosowano kule o różnych kolorach”, $P(A) = \frac{3}{7}$

1 pkt – narysowanie drzewka doświadczenia losowego

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

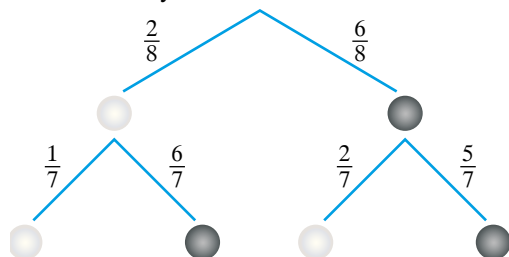
Przykładowe pełne rozwiązanie

Rysujemy drzewko doświadczenia losowego:

2 – liczba kul białych b

6 – liczba kul czarnych c

8 – liczba wszystkich kul



Oznaczamy jako A – wylosowanie kul o różnych kolorach.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} + \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{56} + \frac{12}{56} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

Oznaczamy jako B – wylosowanie kul o tych samych kolorach.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B :

$$P(B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{56} + \frac{30}{56} = \frac{32}{56} = \frac{4}{7}$$

$$P(B) > P(A)$$

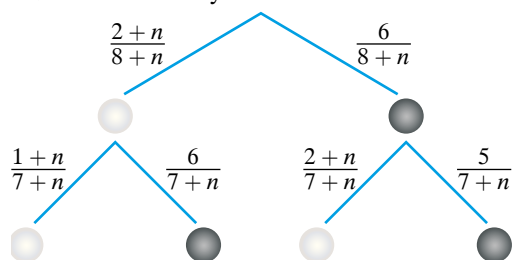
Oznaczamy jako n – liczbę dodanych kul białych.

Rysujemy drzewko doświadczenia losowego po dołożeniu kul białych:

$2 + n$ – liczba kul białych b

6 – liczba kul czarnych c

$8 + n$ – liczba wszystkich kul



Ponieważ zdarzenia A i B mają być jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi $\frac{1}{2}$.

$$P(A) = \frac{2+n}{8+n} \cdot \frac{6}{7+n} + \frac{6}{8+n} \cdot \frac{2+n}{7+n} = \frac{12+6n}{n^2+15n+56} + \frac{12+6n}{n^2+15n+56} = \frac{24+12n}{n^2+15n+56}$$

$$\frac{24+12n}{n^2+15n+56} = \frac{1}{2}$$

$$n^2+15n+56 = 24n+48$$

$$n^2-9n+8=0$$

$$\Delta = 81-32=49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7$$

$$n_1 = \frac{9-7}{2} = 1$$

$$n_2 = \frac{9+7}{2} = 8$$

Należy dołożyć 1 kulę białą lub 8 kul białych.