

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w załączniku nr 2 do rozporządzenia
Ministra Edukacji i Nauki z dnia 16 grudnia 2020 r. (Dz.U. poz. 2314)

Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka Poziom rozszerzony 2021/2022

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i tworzenie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej (R1.1).	B

Rozwiązanie zadania

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1+2\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| - |1+2\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 - 1 - 2\sqrt{2} = -(2+\sqrt{2})$$

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i tworzenie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: – stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.2).	A

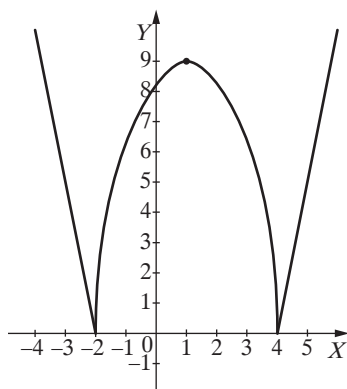
Rozwiązanie zadania

$$\log_2 5 \cdot \log_5 81 \cdot \log_9 216 = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 9^2}{\log 5} \cdot \frac{\log 6^3}{\log 9} = \frac{2\log 9}{\log 2} \cdot \frac{3\log 6}{\log 9} = 6 \cdot \frac{\log 6}{\log 2} = 6\log_2 6$$

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i tworzenie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający: – rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.8). 4. Funkcje. Zdający: – na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x) $ (R4.1).	D

Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$.



Określenie, na podstawie wykresu, maksymalnej liczby argumentów, którym odpowiada dana wartość funkcji.

$0 < m + 1 < 9$, stąd $m \in (-1, 8)$

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i tworzenie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający: – oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.1).	C

Rozwiązanie zadania

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n - n^2)(3n + 1)}{4n^3 + 2n + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + 20n^2 + 7n}{4n^3 + 2n + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(-3 + \frac{20}{n} + \frac{7}{n^2} \right)}{n^3 \left(4 + \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{20}{n} + \frac{7}{n^2}}{4 + \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^3}} = -\frac{3}{4}$$

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający: – rozwiązuje proste nierówności wymierne $\frac{x+1}{x+3} > 2$, $\frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$, $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$ (R3.7).	1 2 0

Propozycja rozwiązania zadania

$$\frac{x-6}{36-x^2} \geq \frac{3x}{x^2-6x}, x \in \mathbb{R} - \{-6, 0, 6\}$$

$$\frac{x(x-6) + 3x(6+x)}{x(6-x)(6+x)} \geq 0$$

$$4x^2(x+3)(6-x)(6+x) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, -6) \cup (-3, 0) \cup (0, 6)$$

Liczby naturalne spełniające tę nierówność: 1, 2, 3, 4, 5

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie pełne (2 pkt)

Wyznaczenie dziedziny nierówności: $x \in \mathbb{R} - \{-6, 0, 6\}$.

Rozwiązanie nierówności:

$$\frac{x-6}{36-x^2} \geq \frac{3x}{x^2-6x}$$

$$\frac{x(x-6)+3x(6+x)}{x(6-x)(6+x)} \geq 0$$

$$4x^2(x+3)(6-x)(6+x) \geq 0$$

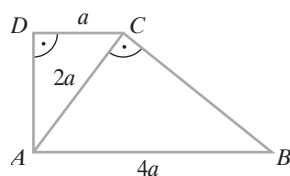
$$x \in (-\infty, -6) \cup (-3, 0) \cup (0, 6)$$

Wyznaczenie iloczynu wszystkich liczb naturalnych spełniających tę nierówność i obliczenie ich iloczynu: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ oraz zakodowanie cyfr: 1, 2, 0.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. Zdający: – rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).

Propozycja rozwiązania zadania



W trójkącie ACD:

$$|AB| = a \text{ i } |AC| = 2a$$

$\triangle ABC \sim \triangle ACD$ w skali $k = 2$, więc $|AB| = 4a$

$$\sin \angle ABC = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}, \angle ABC = 30^\circ$$

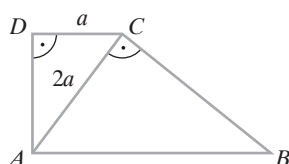
Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

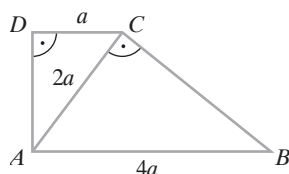
Zauważenie boków odpowiadających w trójkątach podobnych ACD i ABC i zapisanie: bokowi CD odpowiada bok AC, bokowi AD – bok BC, bokowi AC – bok AB.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (2 pkt)

Zaznaczenie na rysunku długości dwóch odcinków: $|AB| = a$ i $|AC| = 2a$ (wykorzystanie skali podobieństwa trójkątów ACD i ABC: $k = 2$).



Wyznaczenie długości boku AB : $|AB| = 4a$.



Rozwiązanie pełne (3 pkt)

Obliczenie sinusa kąta ABC i wyznaczenie miary kąta ABC .

$$\sin \angle ABC = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}, \angle ABC = 30^\circ$$

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający: – używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).

Propozycja rozwiązania zadania

Założenie: $a + b + c = 0$ i $abc = 2$.

Skoro $a + b + c = 0$, to $a + b = -c$.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) + c^3 = -c((-c)^2 - 3ab) + c^3 = \\ &= -c^3 + 3abc + c^3 = 3abc = 3 \cdot 2 = 6, \text{ co kończy dowód.} \end{aligned}$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Zapisanie równania $a + b = -c$ i zastosowanie wzoru skróconego mnożenia $a^3 + b^3$.

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (2 pkt)

Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia $(a + b)^2$.

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) + c^3$$

Rozwiązanie pełne (3 pkt)

Zapisanie pełnego uzasadnienia.

Założenie: $a + b + c = 0$ i $abc = 2$.

Skoro $a + b + c = 0$, to $a + b = -c$.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) + c^3 = -c((-c)^2 - 3ab) + c^3 = \\ &= -c^3 + 3abc + c^3 = 3abc = 3 \cdot 2 = 6, \text{ co kończy dowód.} \end{aligned}$$

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający: – stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (3.4).

Propozycja rozwiązania zadania

$$W(x) = (x - 1) \cdot P(x) + 2 \text{ oraz } W(1) = 2$$

$$W(x) = (x - 2) \cdot Q(x) + 5 \text{ oraz } W(2) = 5$$

$$W(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot S(x) + R(x), \text{ gdzie reszta jest postaci:}$$

$$R(x) = ax + b \text{ (st. } [R(x)] < \text{st. } [(x - 1)(x - 2)])$$

$$\text{Dla } x = 1 \text{ mamy } W(1) = (1 - 1)(1 - 2) \cdot S(1) + a + b, \text{ czyli } a + b = 2$$

$$\text{Dla } x = 2 \text{ mamy } W(2) = (2 - 1)(2 - 2) \cdot S(2) + 2a + b, \text{ czyli } 2a + b = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}, \text{ czyli } a = 3 \text{ i } b = -1$$

$$R(x) = 3x - 1$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Zapisanie wielomianu $W(x)$.

$$W(x) = (x - 1) \cdot P(x) + 2 \text{ oraz } W(x) = (x - 2) \cdot Q(x) + 5$$

albo

$$W(1) = 2 \text{ oraz } W(2) = 5$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Wyznaczenie reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez iloczyn $(x - 1)(x - 2)$.

$$W(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot S(x) + R(x), \text{ gdzie reszta jest postaci:}$$

$$R(x) = ax + b \text{ (st. } [R(x)] < \text{st. } [(x - 1)(x - 2)])$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)

Wyznaczenie zależności pomiędzy współczynnikami liczbowymi reszty $R(x)$.

$$\text{Dla } x = 1 \text{ mamy } W(1) = (1 - 1)(1 - 2) \cdot S(1) + a + b, \text{ czyli } a + b = 2$$

$$\text{Dla } x = 2 \text{ mamy } W(2) = (2 - 1)(2 - 2) \cdot S(2) + 2a + b, \text{ czyli } 2a + b = 5$$

Rozwiązanie pełne (4 pkt)

Obliczenie współczynników liczbowych reszty $R(x)$.

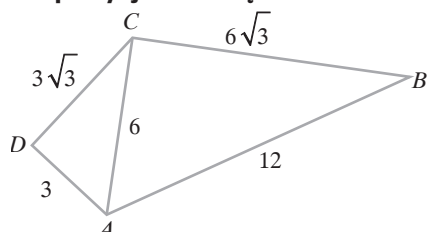
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}, \text{ czyli } a = 3 \text{ i } b = -1$$

$$\text{Wyznaczenie wielomianu } R(x): R(x) = 3x - 1$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający: – znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia cosinusów (R7.4).

Propozycja rozwiązania zadania



Trójkąt ADC jest prostokątny, ponieważ $3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 6^2$. Stąd $\cos \angle DAC = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

czyli $\angle DAC = 60^\circ$.

Trójkąt ACB jest prostokątny, ponieważ $6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 12^2$. Stąd $\cos \angle CAB = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$,

czyli $\angle CAB = 60^\circ$.

$\angle DAB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$$|BD|^2 = 3^2 + 12^2 - 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ$$

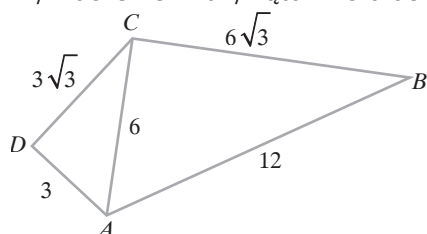
$$|BD|^2 = 153 - 72 \cos(180^\circ - 60^\circ) = 153 + 72 \cos 60^\circ = 189$$

$$|BD| = 3\sqrt{21}$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Wyznaczenie miary kąta DAC albo wyznaczenie miary kąta CAB .



Trójkąt ADC jest prostokątny, ponieważ $3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 6^2$.

Trójkąt ACB jest prostokątny, ponieważ $6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 12^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Wyznaczenie miary kąta BCD .

$$\sin \angle DCA = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ czyli } \angle DCA = 30^\circ$$

$$\angle ACB = 90^\circ$$

Zatem $\angle DCA = 30^\circ$ i $\angle ACB = 90^\circ$

$$\angle DCB = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)

Zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta DAB .

Z twierdzenia cosinusów:

$$BD^2 = 3^2 + 12^2 - 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ$$

Rozwiązanie pełne (4 pkt)

Obliczenie długości przekątnej DB .

$$BD^2 = 153 - 72 \cos(180^\circ - 60^\circ) = 153 + 72 \cos 60^\circ = 189$$

$$BD = 3\sqrt{21}$$

Zadanie 10. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 2. oblicza pochodne funkcji wymiernych (R11.2).

Propozycja rozwiązania zadania

Obliczamy pochodną funkcji f .

$$f'(x) = \frac{-26x}{(x^2 + 1)^2}$$

Oblicz wartość $f'(-3)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu -3 .

$$f'(-3) = \frac{-26 \cdot (-3)}{((-3)^2 + 1)^2} = 0,78$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Obliczenie pochodnej funkcji f .

$$f'(x) = \frac{-26x}{(x^2 + 1)^2}$$

Rozwiązanie pełne (2 pkt)

Obliczenie wartości $f'(-3)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu -3 .

$$f'(-3) = \frac{-26 \cdot (-3)}{((-3)^2 + 1)^2} = 0,78$$

Zadanie 11. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: – wyznacza równanie prostej, która jest równoległa do prostej danej w postaci kierunkowej (8.3); – wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu (R8.3).

Propozycja rozwiązania zadania

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$: $S(1,0)$.

Obliczamy promień.

$$r^2 = 1^2 + 0^2 + 8 = 9, \text{ stąd } r = 3$$

Prostą równoległą do prostej $y = 2x + 5$ opisuje równanie $y = 2x + b$. Zapisujemy równanie w postaci ogólnej $2x - y + b = 0$.

Odległość środka okręgu S od prostej $2x - y + b = 0$ wynosi 3.

Zatem:

$$\frac{|2 \cdot 1 - 0 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$2 + b = 3\sqrt{5}, \text{ stąd } b = -2 + 3\sqrt{5} \text{ lub } b = -2 - 3\sqrt{5}$$

$$\text{Równania prostych stycznych: } y = 2x - 2 - 3\sqrt{5} \text{ i } y = 2x - 2 + 3\sqrt{5}$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu $S(1,0)$ oraz zapisanie równania prostej, która jest równoległa do prostej danej w postaci kierunkowej $y = 2x + b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej do wyznaczenia współczynnika b prostej $y = 2x + b$.

Obliczamy promień:

$$r^2 = 1^2 + 0^2 + 8 = 9, \text{ stąd } r = 3$$

Zapisujemy równanie prostej $y = 2x + b$ w postaci ogólnej $2x - y + b = 0$.

Odległość środka okręgu S od prostej $2x - y + b = 0$ wynosi 3.

Zatem:

$$\frac{|2 \cdot 1 - 0 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$2 + b = 3\sqrt{5}, \text{ stąd } b = -2 + 3\sqrt{5} \text{ lub } b = -2 - 3\sqrt{5}$$

Rozwiązanie pełne (3 pkt)

Wyznaczenie równań prostych stycznych.

$$y = 2x - 2 - 3\sqrt{5} \text{ i } y = 2x - 2 + 3\sqrt{5}$$

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający: – rozwiązuje równania trygonometryczne (R6.6).

Propozycja rozwiązania zadania

$$2\sin^3 x - \sin x \cos x - \sin x = 0 \text{ i } x \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\sin x(2\sin^2 x - \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x(-2\cos^2 x - \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0, \text{ stąd } x = 0 \text{ lub } x = \pi$$

$$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0, t = \cos x, t \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$-2t^2 - t + 1 = 0, \text{ stąd } t = \frac{1}{2} \text{ oraz } t = -1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ lub } \cos x = -1, \text{ stąd } x = \frac{\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{5\pi}{3}, \text{ lub } x = \pi$$

Wszystkie rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = 0$ lub $x = \frac{\pi}{3}$, lub $x = \pi$, lub $x = \frac{5\pi}{3}$, lub $x = 2\pi$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Doprowadzenie równania do postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego kąta.

$$2\sin^3 x - \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2\sin^2 x - \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x(-2\cos^2 x - \cos x + 1) = 0$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Rozwiązanie równania $\sin x = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych albo w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\sin x = 0, \text{ stąd } x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}$$

albo

$$\sin x = 0, \text{ stąd } x = 0 \text{ lub } x = \pi, \text{ lub } x = 2\pi$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)

Rozwiązanie równania $-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych albo w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ i podanie dwóch lub trzech rozwiązań.

$$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0, t = \cos x, t \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$-2t^2 - t + 1 = 0, \text{ stąd } t = \frac{1}{2} \text{ oraz } t = -1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ lub } \cos x = -1, \text{ stąd } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ lub } x = \pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}$$

albo

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ lub } \cos x = -1, \text{ stąd } x = \frac{\pi}{3} \text{ lub } x = \pi, \text{ lub } x = \frac{5\pi}{3}$$

Rozwiązanie prawie pełne (4 pkt)

Rozwiązanie równania $\sin x = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych albo w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ i rozwiązanie równania $-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych albo w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie pełne (5 pkt)

Wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania.

$x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = 0$, lub $x = \pi$, lub $x = \frac{5\pi}{3}$, lub $x = 2\pi$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$

Zadanie 13. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający: – stosuje wzory Viète’a (R3.1).

Propozycja rozwiązania zadania

$$f(x) = -x^2 + mx - m$$

$$\Delta = m^2 - 4m$$

$$\Delta > 0, \text{ gdy } m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$$

$$(x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = -1$$

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 = -1$$

$$3(x_1^2 + x_2^2) + 10x_1x_2 = -1$$

$$3((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 10x_1x_2 = -1$$

$$3(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = -1, \text{ ze wzorów Viète’a: } x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = m$$

$$\text{Zatem } 3m^2 + 4m = -1$$

$$3m^2 + 4m + 1 = 0, \text{ stąd } m_1 = -1 \text{ oraz } m_2 = -\frac{1}{3}$$

$$m_1 = -1 \text{ oraz } m_2 = -\frac{1}{3} \text{ oraz } m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty), \text{ stąd } m_1 = -1, m_2 = -\frac{1}{3}$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ albo przekształcenie warunku w sposób równoważny.

$$f(x) = -x^2 + mx - m$$

$$\Delta = m^2 - 4m$$

$$\Delta > 0, \text{ gdy } m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$$

albo

$$(x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = -1$$

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 = -1$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ oraz zastosowanie wzorów Viète’a do przekształcenia warunku.

$$3(x_1^2 + x_2^2) + 10x_1x_2 = -1$$

$$3((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 7x_1x_2 = 4$$

$$3(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = -1, \text{ ze wzorów Viète'a: } x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = m$$

$$\text{Zatem } 3m^2 + 4m = -1$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)

Rozwiązanie równania $3m^2 + 4m = -1$.

$$3m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$m_1 = -1 \text{ oraz } m_2 = -\frac{1}{3}$$

Rozwiązanie pełne (4 pkt)

Wyznaczenie wartości parametru m dla określonych warunków.

$$m_1 = -1 \text{ oraz } m_2 = -\frac{1}{3}, \text{ oraz } m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty), \text{ stąd } m_1 = -1, m_2 = -\frac{1}{3}$$

Zadanie 14. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający: – korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (R10.3).

Propozycja rozwiązania zadania

Przy oznaczeniach: A_1 – wylosowanie dwóch kul białych, A_2 – wylosowanie dwóch kul czarnych, A_3 – wylosowanie kuli białej i kuli czarnej, mamy:

$$|A_1| = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15, |A_2| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6, |A_3| = 6 \cdot 4 = 24$$

$$|\Omega| = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

$$P(A_1) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}, P(A_2) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}, P(A_3) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

Liczba zdarzeń elementarnych przy drugim losowaniu: $8 \cdot 2 = 16$

Przy oznaczeniu B – wylosowanie dwóch kul czarnych mamy:

$$P(B | A_1) = 0, P(B | A_2) = \frac{2 \cdot 2}{16} = \frac{1}{4}, P(B | A_3) = \frac{3 \cdot 1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$P(B) = P(B | A_1) \cdot P(A_1) + P(B | A_2) \cdot P(A_2) + P(B | A_3) \cdot P(A_3)$$

$$P(B) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających pierwszemu losowaniu (podanie dwóch wielkości).

Przy oznaczeniach: A_1 – wylosowanie dwóch kul białych, A_2 – wylosowanie dwóch kul czarnych,

A_3 – wylosowanie kuli białej i kuli czarnej, mamy:

$$|A_1| = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15, |A_2| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6, |A_3| = 6 \cdot 4 = 24$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzeń sprzyjających zdarzeniom wylosowania dwóch kul z pierwszej urny (podanie dwóch wielkości).

Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

$$P(A_1) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}, P(A_2) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}, P(A_3) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)

Wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających pierwszemu losowaniu i wyznaczenie prawdopodobieństwa tych zdarzeń (podanie wszystkich wielkości).

Rozwiązanie prawie pełne (4 pkt)

Wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzeń sprzyjających drugiemu losowaniu.

Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych przy drugim losowaniu: $8 \cdot 2 = 16$

Przy oznaczeniu B – wylosowanie dwóch kul czarnych mamy:

$$P(B | A_1) = 0, P(B | A_2) = \frac{2 \cdot 2}{16} = \frac{1}{4}, P(B | A_3) = \frac{3 \cdot 1}{16} = \frac{3}{16}$$

Rozwiązanie pełne (5 pkt)

Zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania dwóch kul czarnych.

$$P(B) = P(B | A_1) \cdot P(A_1) + P(B | A_2) \cdot P(A_2) + P(B | A_3) \cdot P(A_3)$$

$$P(B) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$$

Zadanie 15. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający: – bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2). Równania i nierówności. Zdający: – rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych (R3.3).

Propozycja rozwiązania zadania

Przy oznaczeniach: a, b, c – brakujące liczby, mamy:

$$a = \frac{4+b}{2} \text{ oraz } c^2 = 36b$$

$$\begin{cases} 4 + a + b + c + 36 = 90 \\ a = \frac{4+b}{2} \\ c^2 = 36b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + a + b + c + 36 = 90 \\ a = 2 + \frac{c^2}{72} \\ b = \frac{c^2}{36} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2 + \frac{c^2}{72} + \frac{c^2}{36} + c = 50 \\ a = 2 + \frac{c^2}{72} \\ b = \frac{c^2}{36} \end{cases}$$
$$\begin{cases} c = -48 \\ a = 34 \\ b = 64 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} c = 24 \\ a = 10 \\ b = 16 \end{cases}$$

Brakujące wyrazy ciągu: 34, 64, – 48 lub 10, 16, 24

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego.

Zapisanie zależności wynikających z zastosowania własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego.

Przy oznaczeniach: a, b, c – brakujące liczby, mamy:

$$a = \frac{4+b}{2} \text{ oraz } c^2 = 36b$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Zapisanie układu równań prowadzącego do wyznaczenia brakujących wyrazów ciągów.

$$\begin{cases} 4 + a + b + c + 36 = 90 \\ a = \frac{4+b}{2} \\ c^2 = 36b \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)

Rozwiązanie układu równań prowadzącego do wyznaczenia brakujących wyrazów ciągów (wyznaczenie jednej trójki liczb albo popętnienie jednego błędu rachunkowego).

$$\begin{cases} 4 + a + b + c + 36 = 90 \\ a = 2 + \frac{c^2}{72} \\ b = \frac{c^2}{36} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \frac{c^2}{72} + \frac{c^2}{36} + c = 50 \\ a = 2 + \frac{c^2}{72} \\ b = \frac{c^2}{36} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -48 \\ a = 34 \\ b = 64 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} c = 24 \\ a = 10 \\ b = 16 \end{cases}$$

Rozwiązanie pełne (4 pkt)

Wyznaczenia brakujących wyrazów ciągów.

34, 64, – 48 lub 16, 24, 36

Zadanie 16. (0–7)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający: – stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).

Propozycja rozwiązania zadania

Przy oznaczeniu długości krawędzi podstawy graniastopu jako a , a jego wysokości jako H mamy: $H = 3\sqrt{3} - 2a$.

$$V(a) = a^2(3\sqrt{3} - 2a), D_{V(a)} : a \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$V'(a) = -6a^2 + 6\sqrt{3}a$$

Miejsca zerowe pochodnej funkcji: $a = 0$, $a = \sqrt{3}$.

Funkcja $V(a)$ rośnie w $(0, \sqrt{3})$ i maleje w $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Dla $a = \sqrt{3}$ funkcja V osiąga największą wartość.

Wymiary graniastopu: $a = H = \sqrt{3}$

$$V = 3\sqrt{3}$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów:

Etap I polega na wyznaczeniu wysokości graniastopu za pomocą długości jego krawędzi podstawy (lub odwrotnie), zapisaniu objętości bryły jako funkcji jednej zmiennej i wyznaczeniu jej dziedziny. Za ten etap zdający otrzymuje 3 punkty.

Etap II polega na obliczeniu pochodnej funkcji, jej miejsc zerowych i zbadaniu z uzasadnieniem, gdzie funkcja osiąga wartość największą. Za ten etap zdający otrzymuje 3 punkty.

Etap III to podanie rozwiązania (objętości graniastopu). Za ten etap zdający otrzymuje 1 punkt.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Oznaczenie długości krawędzi podstawy graniastostupa jako a , a jego wysokości jako H i zapisanie: $H = 3\sqrt{3} - 2a$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Zapisanie objętości bryły za pomocą zmiennej a .

$$V(a) = a^2(3\sqrt{3} - 2a)$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (3 pkt)

Zapisanie objętości bryły za pomocą zmiennej a oraz wyznaczenie dziedziny funkcji.

$$V(a) = a^2(3\sqrt{3} - 2a), D_{V(a)} : a \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (4 pkt)

Poprawna metoda wyznaczenia pochodnej funkcji.

Rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (5 pkt)

Wyznaczenie pochodnej funkcji $V(a)$.

$$V'(a) = -6a^2 + 6\sqrt{3}a$$

Obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji.

$$a = 0, a = \sqrt{3}$$

Rozwiązanie prawie pełne (6 pkt)

Zbadanie znaku pochodnej i poprawne uzasadnienie, że dla $a = \sqrt{3}$ funkcja V osiąga największą wartość.

Funkcja $V(a)$ rośnie w $(0, \sqrt{3})$ i maleje w $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Rozwiązanie pełne (7 pkt)

Podanie długości krawędzi graniastostupa i obliczenie objętości bryły.

$$a = \sqrt{3}, V = 3\sqrt{3}$$