

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)
FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

CZERWIEC 2016

Klucz punktowania zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	B	D	B	D	A	C	B	C	A	C	A	A	D	B	A	C	C	B	D	B	D	B	A	D

Schematy oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{2x} = \frac{2x+1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$ i $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Równanie ma sens liczbowy dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -1$ i $x \neq 0$.

I sposób rozwiązania

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{2x} - \frac{2x+1}{x+1} &= 0, \\ \frac{(2x+1)(x+1) - 2x(2x+1)}{2x(x+1)} &= 0, \\ \frac{2x^2 + 3x + 1 - 4x^2 - 2x}{2x(x+1)} &= 0, \\ \frac{-2x^2 + x + 1}{2x(x+1)} &= 0.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe

$$-2x^2 + x + 1 = 0.$$

Ponieważ $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9$, to równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 1.$$

Każda z otrzymanych liczb jest różna od -1 i od 0 . Zatem każda z tych liczb jest rozwiązaniem naszego równania.

II sposób rozwiązania

Przedstawiamy równanie w postaci równoważnej

$$(2x+1)\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1}\right) = 0.$$

Z własności iloczynu, otrzymujemy

$$2x+1 = 0 \text{ lub } \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} = 0.$$

Rozwiązaniem pierwszego z równań jest liczba $x = -\frac{1}{2}$.

Zapiszmy równanie $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} = 0$ w postaci równoważnej

$$\frac{(x+1) - 2x}{2x(x+1)} = 0,$$

$$\frac{-x+1}{2x(x+1)} = 0.$$

Stąd $x = 1$.

Każda z otrzymanych liczb jest różna od -1 i od 0 . Zatem każda z tych liczb jest rozwiązaniem naszego równania.

III sposób rozwiązania

Z własności proporcji możemy równanie zapisać w postaci równoważnej

$$(2x+1)(x+1) - 2x(2x+1) = 0,$$

$$(2x+1)(x+1-2x) = 0,$$

$$(2x+1)(1-x) = 0.$$

Stąd

$$2x+1=0 \text{ lub } 1-x=0,$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ lub } x = 1.$$

Każda z otrzymanych liczb jest różna od -1 i od 0 . Zatem każda z tych liczb jest rozwiązaniem naszego równania.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze równanie w postaci

- równania kwadratowego w postaci uporządkowanej lub iloczynowej:
 $-2x^2 + x + 1 = 0$, $(2x+1)(1-x) = 0$

albo

- alternatywy równań, np.: $2x+1=0$ lub $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} = 0$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy wyznaczy rozwiązania równania: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

Uwaga:

Jeżeli zdający podzieli obie strony równania $\frac{2x+1}{2x} = \frac{2x+1}{x+1}$ i nie zapisze, że $2x+1 \neq 0$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

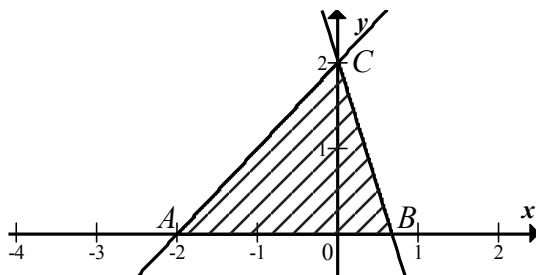
Zadanie 27. (0–2)

Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi Ox .

Rozwiązanie

Zauważmy, że prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina oś Oy w punkcie $(0, 2)$. Zatem współczynnik b w równaniu $y = -3x + b$ jest równy 2, a więc druga z prostych ma równanie postaci $y = -3x + 2$.

Geometryczną ilustracją opisaną sytuacji jest trójkąt wskazany na wykresie.



Podstawa trójkąta ma długość $2\frac{2}{3}$, a jego wysokość jest równa 2. Zatem pole tego trójkąta jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- zapisze wartość współczynnika b w równaniu prostej $y = -3x + b$: $b = 2$

albo

- prawidłowo narysuje wykresy obu funkcji i zaznaczy punkt $(0, 2)$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy pole trójkąta: $\frac{8}{3}$.

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3).$$

Rozwiązanie**I sposób rozwiązania**

Zapiszmy nierówność $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3)$ w postaci równoważnej

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + y^4 - 2y^3 + y^2 \geq 0,$$

$$(x^2 - x)^2 + (y^2 - y)^2 \geq 0.$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc $(x^2 - x)^2 \geq 0$ i $(y^2 - y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y . Suma dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna, więc otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y .

II sposób rozwiązania

Zapiszmy nierówność $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3)$ w postaci równoważnej

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + x^2 + y^4 - 2y^3 + y^2 &\geq 0, \\ x^2(x^2 - 2x + 1) + y^2(y^2 - 2y + 1) &\geq 0, \\ x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc $x^2 \geq 0$, $(x-1)^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$ i $(y-1)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y . Iloczyn liczb nieujemnych jest nieujemny, więc dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwe są nierówności $x^2(x-1)^2 \geq 0$ i $y^2(y-1)^2 \geq 0$. Suma dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna, więc otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y .

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- zapisze nierówność w postaci $(x^2 - x)^2 + (y^2 - y)^2 \geq 0$ i popełni błędy przy jej uzasadnianiu, np. przez zapisanie, że po lewej stronie są składniki dodatnie

albo

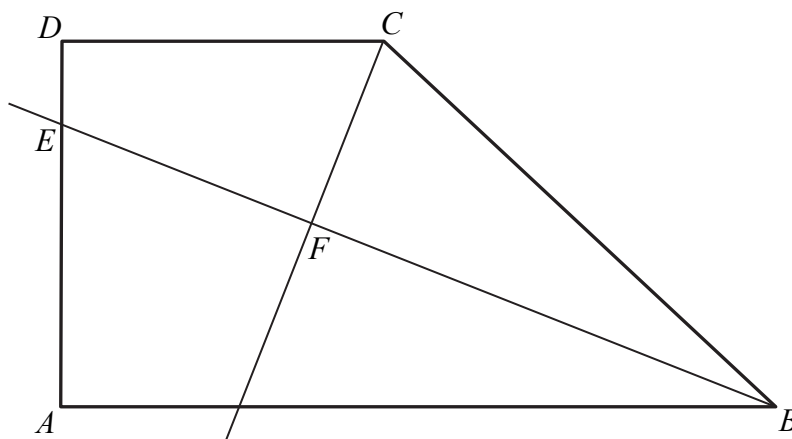
- $x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 \geq 0$ i popełnia błędy przy jej uzasadnianiu, np. przez zapisanie, że po lewej stronie są składniki dodatnie

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy zapisze wyrażenie w postaci sumy nieujemnych składników i sformułuje wniosek.

Zadanie 29. (0–2)

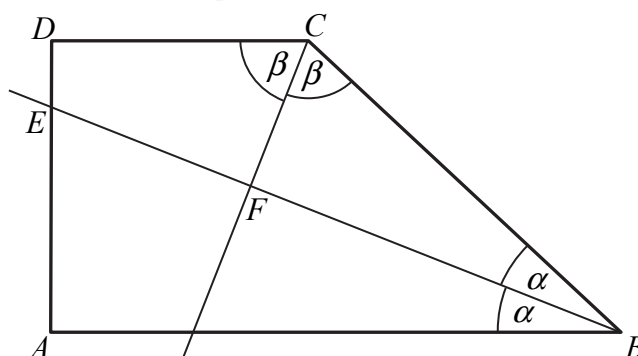
Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz wysokości AD . Dwusieczna kąta ABC przecina ramię AD w punkcie E oraz dwusieczną kąta BCD w punkcie F (zobacz rysunek).



Wykaż, że w czworokącie $CDEF$ sumy miar przeciwległych kątów są sobie równe.

Rozwiązanie**I sposób rozwiązania**

Półproste BF i CF to dwusieczne kątów ABC i BCD przy ramieniu BC trapezu $ABCD$. Oznaczmy zatem miary tych kątów odpowiednio 2α i 2β jak na rysunku.



Suma miar kątów trapezu przy jego ramieniu jest równa 180° , więc

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180° , więc miara kąta BFC jest równa

$$|\sphericalangle BFC| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Stąd wynika, że

$$|\sphericalangle CFE| = 180^\circ - |\sphericalangle BFC| = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Kąt CDE jest prosty, gdyż trapez jest prostokątny, więc suma miar przeciwległych kątów CDE i CFE czworokąta $CDEF$ jest równa

$$|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CFE| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

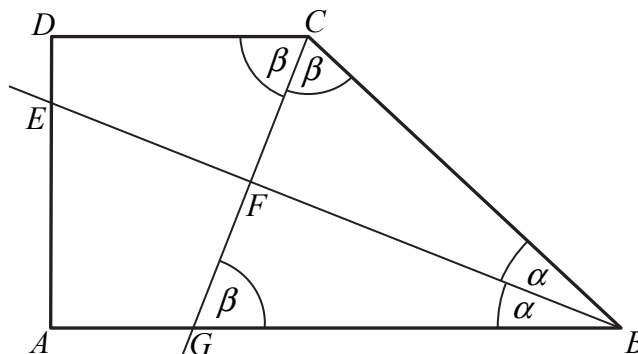
Suma miar kątów czworokąta jest równa 360° , więc suma miar dwóch pozostałych kątów czworokąta $CDEF$ jest równa

$$|\sphericalangle DCF| + |\sphericalangle DEF| = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

Zatem $|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CFE| = |\sphericalangle DCF| + |\sphericalangle DEF|$, co kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Półproste BF i CF to dwusieczne kątów ABC i BCD przy ramieniu BC trapezu $ABCD$. Oznaczmy zatem miary tych kątów odpowiednio 2α i 2β jak na rysunku.



Proste AB i CD są równoległe, więc naprzemianległe kąty BGC i DCG są równe, czyli $|\angle BGC| = \beta$.

Zatem trójkąt BCG jest równoramienny. Stąd i z równości kątów CBF i GBF wynika z kolei, że trójkąty BCF i BFG są przystające. Zatem ich kąty przy wierzchołku F są równe. Są to jednak kąty przyległe, więc są to kąty proste. W rezultacie

$$|\angle CFE| = 180^\circ - |\angle BFC| = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Dalsza część dowodu przebiega tak, jak w I sposobie.

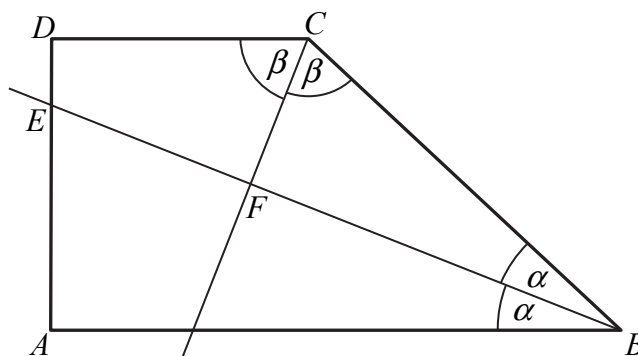
Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy wyznaczy miarę kąta BFC : 90° i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi pełny dowód.

III sposób rozwiązania

Półproste BF i CF to dwusieczne kątów ABC i BCD przy ramieniu BC trapezu $ABCD$. Oznaczmy zatem miary tych kątów odpowiednio 2α i 2β jak na rysunku.



Trójkąt ABE jest prostokątny, więc $|\angle BEA| = 90^\circ - \alpha$. Zatem

$$|\angle DEF| = 180^\circ - |\angle BEA| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha.$$

Suma miar przeciwnych kątów DEF i DCF w czworokącie $CDEF$ jest zatem równa

$$(1) \quad |\angle DEF| + |\angle DCF| = (90^\circ + \alpha) + \beta = 90^\circ + \alpha + \beta.$$

Kąt $\angle CFE$ jest kątem zewnętrznym trójkąta CBF , więc

$$|\angle CFE| = \alpha + \beta.$$

Kąt $\angle EDC$ jest prosty, gdyż trapez jest prostokątny, więc suma miar przeciwległych kątów $\angle CDE$ i $\angle CFE$ czworokąta $CDEF$ jest równa

$$|\angle CDE| + |\angle CFE| = 90^\circ + \alpha + \beta.$$

Stąd i z (1) otrzymujemy $|\angle DEF| + |\angle DCF| = |\angle CDE| + |\angle CFE|$. To kończy dowód.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

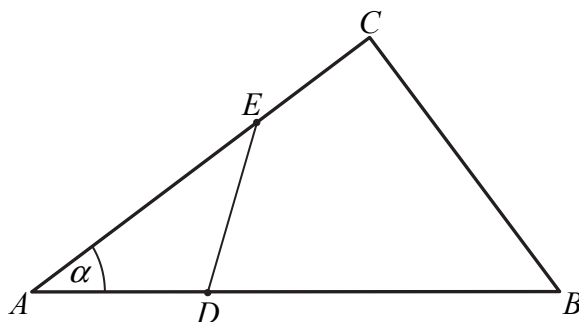
gdy wyznaczy miary kątów przy wierzchołkach E i F czworokąta $CDEF$ w zależności od α i β : $|\angle AEB| = 90^\circ - \alpha$, $|\angle CFE| = \alpha + \beta$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 30. (0–4)

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$ oraz $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, gdzie $\alpha = \angle BAC$. Na bokach AB i AC tego trójkąta obrano punkty odpowiednio D i E takie, że $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole

a) trójkąta ADE .

b) czworokąta $BCED$.

Rozwiązanie I sposób

Ponieważ $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ oraz $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$, więc

$$|AD| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5 \text{ oraz } |AE| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8.$$

Z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Zatem pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 \cdot \frac{3}{5} = 54,$$

a pole trójkąta ADE jest równe

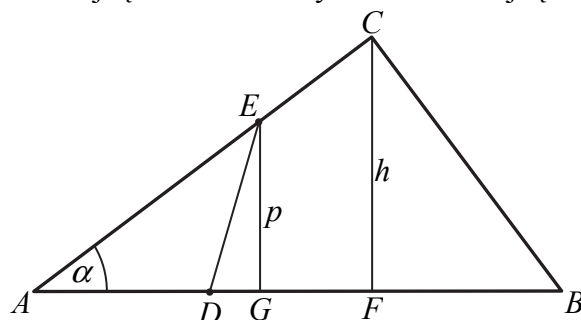
$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AE| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{3}{5} = 12.$$

Zatem pole czworokąta $BCDE$ jest równe

$$P_{BCDE} = P_{ABC} - P_{ADE} = 54 - 12 = 42.$$

Rozwiązanie II sposób

Poprowadźmy wysokość CF trójkąta ABC oraz wysokość EG trójkąta ADE jak na rysunku.



Z trójkąta prostokątnego AFC otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|AF|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{4}{5} = \frac{|AF|}{12}.$$

$$\text{Stąd } |AF| = \frac{48}{5}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa natomiast

$$|AC|^2 = |AF|^2 + |CF|^2,$$

$$12^2 = \left(\frac{48}{5}\right)^2 + h^2.$$

$$\text{Stąd } h = \sqrt{12^2 - \left(\frac{48}{5}\right)^2} = \frac{36}{5}.$$

Pole trójkąta ABC jest zatem równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{36}{5} = 54.$$

Trójkąty AFC i AGE są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A . Zatem

$$\frac{|EG|}{|CF|} = \frac{|AE|}{|AC|}.$$

Ponieważ $|AE| = 2|CE|$, więc $|AE| = \frac{2}{3}|AC|$. Otrzymujemy zatem

$$\frac{p}{\frac{36}{5}} = \frac{\frac{2}{3}|AC|}{|AC|} = \frac{2}{3}.$$

Stąd $p = \frac{2}{3} \cdot \frac{36}{5} = \frac{24}{5}$. Skoro $|BD| = 2|AD|$ i $|AB| = 15$, to $|AD| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$. Pole trójkąta ADE jest zatem równe

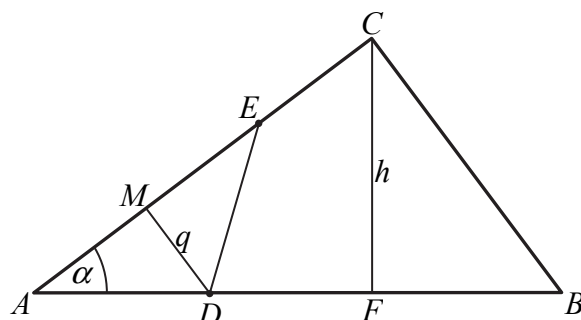
$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot p = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{24}{5} = 12.$$

Zatem pole czworokąta $BCDE$ jest równe

$$P_{BCDE} = P_{ABC} - P_{ADE} = 54 - 12 = 42.$$

Uwaga:

Pole trójkąta ADE możemy też obliczyć inaczej. Poprowadźmy wysokość tego trójkąta z wierzchołka D .



Ponieważ $|BD| = 2|AD|$ i $|AB| = 15$, więc $|AD| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$.

Z trójkąta prostokątnego ADM otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|AM|}{|AD|}, \text{ czyli } \frac{4}{5} = \frac{|AM|}{5}.$$

Stąd $|AM| = 4$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta

$$q = \sqrt{|AD|^2 - |AM|^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Skoro $|AE| = 2|EC|$ i $|AC| = 12$, to $|AE| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$. Pole trójkąta ADE jest zatem równe

$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot q = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12.$$

Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- obliczy sinus kąta BAC : $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

albo

- długość jednego z odcinków AD, AE : $|AD| = 5, |AE| = 8$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy

- pole trójkąta ABC : $P_{ABC} = 54$

albo

- obliczy $\sin \alpha$ i długości obu odcinków AD i AE : $\sin \alpha = \frac{3}{5}, |AD| = 5, |AE| = 8$,

albo

- wysokość trójkąta ADE opuszczoną z wierzchołka E : $p = \frac{24}{5}$,

albo

- wysokość trójkąta ADE opuszczoną z wierzchołka D : $q = 3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający obliczy pole trójkąta ADE : $P_{ADE} = 12$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy pole czworokąta $BCDE$: $P_{BCDE} = 42$.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie z wykorzystaniem faktu, że rozważany trójkąt jest prostokątny i nie przedstawia uzasadnienia tego faktu, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów za całe rozwiązanie.

Zadanie 31. (0–5)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n) .

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów. Pierwszy polega na obliczeniu pierwszego wyrazu i różnicy ciągu (a_n) . Drugi etap polega na wyznaczeniu najmniejszego dodatniego wyrazu tego ciągu.

I sposób rozwiązania I etapu

Z warunków zadania wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ i $a_5 + a_6 + \dots + a_{12} = 2016$.

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) &= 2016 \text{ i } (a_1 + 4r) + (a_1 + 5r) + \dots + (a_1 + 11r) = 2016, \\ 4a_1 + 6r &= 2016 \text{ i } 8a_1 + 60r = 2016, \\ 2a_1 + 3r &= 1008 \text{ i } 2a_1 + 15r = 504. \end{aligned}$$

Odejmując stronami równania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 12r &= -504, \\ r &= -42. \end{aligned}$$

Zatem $2a_1 + 3 \cdot (-42) = 1008$, więc $a_1 = 504 + 3 \cdot 21 = 567$.

II sposób rozwiązania I etapu

Z warunków zadania wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ i $a_5 + a_6 + \dots + a_{12} = 2016$.

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) &= 2016, \\ 4a_1 + 6r &= 2016, \\ 2a_1 + 3r &= 1008. \end{aligned}$$

Zauważmy, że lewa strona równania $a_5 + a_6 + \dots + a_{12} = 2016$ jest sumą ośmiu wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_5, a_6, a_7, \dots, a_{12})$ o różnicy r . Ze wzoru na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{a_5 + a_{12}}{2} \cdot 8 &= 2016, \\ a_5 + a_{12} &= 504. \end{aligned}$$

Stąd i ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1 + 4r + a_1 + 11r = 504,$$

$$2a_1 + 15r = 504.$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymujemy $a_1 = 567$ i $r = -42$.

III sposób rozwiązania I etapu

Z warunków zadania wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ i $a_5 + a_6 + \dots + a_{12} = 2016$.

Zauważmy, że sumując te równania stronami, otrzymujemy $a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 4032$.

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań

$$S_4 = 2016 \text{ i } S_{12} = 4032,$$

który, korzystając ze wzoru na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, możemy zapisać w postaci

$$\frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 2016 \text{ i } \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = 4032,$$

$$a_1 + a_4 = 1008 \text{ i } a_1 + a_{12} = 672.$$

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1 + (a_1 + 3r) = 1008 \text{ i } a_1 + (a_1 + 11r) = 672,$$

$$2a_1 + 3r = 1008 \text{ i } 2a_1 + 11r = 672.$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymujemy $a_1 = 567$ i $r = -42$.

IV sposób rozwiązania I etapu

Z warunków zadania wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ i $a_5 + a_6 + \dots + a_{12} = 2016$.

Zauważmy, że

$$a_5 + a_6 + \dots + a_{12} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{12}) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4),$$

czyli

$$a_5 + a_6 + \dots + a_{12} = S_{12} - S_4.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań

$$S_4 = 2016 \text{ i } S_{12} - S_4 = 2016,$$

który, korzystając ze wzoru na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, możemy zapisać w postaci

$$\frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 2016 \text{ i } \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 - \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 2016,$$

$$a_1 + a_4 = 1008 \text{ i } 6a_1 + 6a_{12} - 2a_1 - 2a_4 = 2016.$$

$$a_1 + a_4 = 1008 \text{ i } 4a_1 - 2a_4 + 6a_{12} = 2016.$$

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1 + (a_1 + 3r) = 1008 \text{ i } 4a_1 - 2(a_1 + 3r) + 6(a_1 + 11r) = 2016,$$

$$2a_1 + 3r = 1008 \text{ i } 8a_1 + 60r = 2016,$$

$$2a_1 + 3r = 1008 \text{ i } 2a_1 + 15r = 504.$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymujemy $a_1 = 567$ i $r = -42$.

Rozwiązanie II etapu

Ciąg (a_n) jest więc opisany wzorem ogólnym $a_n = 567 + (n-1) \cdot (-42) = 609 - 42n$ dla $n \geq 1$.

Wyznaczymy numery wszystkich dodatnich wyrazów ciągu.

$$\begin{aligned}a_n &> 0, \\609 - 42n &> 0, \\n &< \frac{609}{42} = 14\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ponieważ $r = -42 < 0$, więc ciąg (a_n) jest malejący. Wynika stąd, że najmniejszym dodatnim wyrazem ciągu jest $a_{14} = 609 - 42 \cdot 14 = 21$.

Uwaga:

Najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n) możemy też wyznaczyć w inny sposób. Ponieważ $r = -42 < 0$, więc ciąg (a_n) jest malejący. Zauważmy, że jednym z wyrazów ciągu (a_n) jest $567 - 14 \cdot 42 = 21$, a następnym $21 - 42 = -21 < 0$. Stąd wynika, że najmniejszy dodatni wyraz ciągu to 21.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 p.

Zdający zastosuje

- wzór na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisze jedno z równań wynikających z treści zadania:

$$\frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 2016, \quad 4a_1 + 6r = 2016, \quad \frac{a_5 + a_{12}}{2} \cdot 8 = 2016, \quad 8a_1 + 60r = 2016,$$

$$\frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = 4032$$

albo

- wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i wyznaczy jeden z wyrazów a_n dla $n > 1$ w zależności od a_1 i r , np. $a_2 = a_1 + r$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze, że $S_{12} = 4032$, to otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze dwa równania wynikające z podanych sum wyrazów ciągu i wyznaczy jeden z wyrazów a_n dla $n > 1$ w zależności od a_1 i r , np.:

$$\frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 2016 \quad \text{ i } \quad \frac{a_5 + a_{12}}{2} \cdot 8 = 2016 \quad \text{ i } \quad a_4 = a_1 + 3r.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi pozwalający obliczyć pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) , np.:

$$\frac{a_1 + a_1 + 3r}{2} \cdot 4 = 2016 \quad \text{ i } \quad \frac{a_1 + 4r + a_1 + 11r}{2} \cdot 8 = 2016.$$

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający

- obliczy pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) : $a_1 = 567$, $r = -42$

albo

- obliczy pierwszy wyraz, różnicę i najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n) , popełniając po drodze błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n) :

$$a_1 = 567, r = -42, a_{14} = 21.$$

Uwagi:

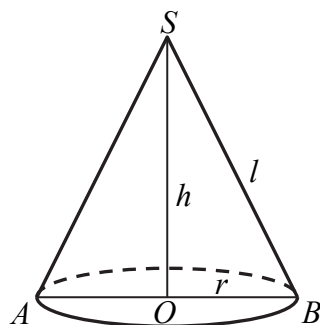
1. Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje treść zadania przyjmując, że $a_5 + a_6 + \dots + a_{12}$ jest sumą 12 początkowych wyrazów ciągu, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zauważy, że $a_5 + a_6 + \dots + a_{12}$ jest sumą 8 wyrazów ciągu, ale zapisze błędnie, że jest ona równa $\frac{2a_1 + (8-1)r}{2} \cdot 8$, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze, że $a_5 + a_6 + \dots + a_{12}$ jest sumą 7 wyrazów ciągu i konsekwentnie zapisze tę sumę w postaci $\frac{2a_5 + (7-1)r}{2} \cdot 7$, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 32. (0–4)

Dany jest stożek o objętości 8π , w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy $3:8$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

Rozwiązanie

Niech r , h i l oznaczają odpowiednio promień podstawy, wysokość i tworzącą danego stożka.



Objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Stąd

$$\begin{aligned} 8\pi &= \frac{1}{3}\pi r^2 h, \\ r^2 h &= 24. \end{aligned}$$

Z treści zadania wynika, że $\frac{h}{r} = \frac{3}{8}$, skąd $h = \frac{3}{8}r$.

Otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} r^2 \cdot \frac{3}{8}r &= 24, \\ r^3 &= 64, \\ r &= 4. \end{aligned}$$

Zatem $h = \frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BSO otrzymujemy

$$r^2 + h^2 = l^2, \\ l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe

$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} = 2\sqrt{73} \pi.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze zależność między wysokością i promieniem podstawy stożka

- wynikającą z podanego stosunku, np.: $\frac{h}{r} = \frac{3}{8}$

albo

- wynikającą z podanej objętości: $r^2 h = 24$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $r^2 \cdot \frac{3}{8} r = 24$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy promień podstawy lub wysokość stożka: $r = 4$, $h = \frac{3}{2}$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy pole powierzchni bocznej danego stożka: $P_b = 2\sqrt{73} \pi$.

Zadanie 33. (0–4)

Rejsowy samolot z Warszawy do Rzymu przelatuje nad Austrią każdorazowo tą samą trasą z taką samą zakładaną prędkością przelotową. We wtorek jego średnia prędkość była o 10% większa niż prędkość przelotowa, a w czwartek średnia prędkość była o 10% mniejsza od zakładanej prędkości przelotowej. Czas przelotu nad Austrią w czwartek różnił się od wtorkowego o 12 minut. Jak długo trwał przelot tego samolotu nad Austrią we wtorek?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez v prędkość, z jaką zwykle leci samolot na tej trasie, przez s oznaczmy długość trasy, gdy samolot znajduje się nad terytorium Austrii, a przez t oznaczmy czas przelotu we wtorek. Zatem prędkość, z jaką samolot leciał we wtorek była równa $1,1v$, a prędkość, z jaką samolot leciał w czwartek była równa $0,9v$. Czas przelotu w czwartek był równy $t+12$ minut. Zatem

$$1,1v \cdot t = s \text{ oraz } 0,9v \cdot (t+12) = s.$$

Stąd

$$1,1v \cdot t = 0,9v \cdot (t+12),$$

$$11t = 9(t+12),$$

$$2t = 9 \cdot 12,$$

$$t = 9 \cdot 6 = 54.$$

Odpowiedź: Czas, w jakim samolot przelatywał we wtorek nad Austrią był równy 54 minuty.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze jedno z równań opisujących zależność prędkości i czasu przelotu nad Austrią,

np.: $1,1v \cdot t = s$ lub $0,9v \cdot (t + 12) = s$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze oba równania pozwalające obliczyć czas przelotu nad Austrią we wtorek lub

w czwartek, np.: $1,1v \cdot t = 0,9v \cdot (t + 12)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą t , np.: $1,1t = 9(t + 12)$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający wyznaczy czas przelotu: 54 minuty (lub 0,9 godziny).

Uwaga:

Jeżeli zdający stosuje błędny model, np. przyjmuje, że wzrostowi prędkości o 10% odpowiada skrócenie czasu o 10% albo przyjmuje, że wzrostowi prędkości odpowiada wydłużenie czasu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.