

## WPISUJE ZDAJĄCY

KOD

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

IMIĘ I NAZWISKO \*

\* nieobowiązkowe

# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ MATEMATYKA – POZIOM ROZSZERZONY

☐ dysleksja

### Instrukcja dla zdającego

Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera **22** strony (zadania **1–16**).  
 Ewentualny brak stron zgłoś nauczycielowi nadzorującemu egzamin.  
 Rozwiązania zadań i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym.  
 Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadań otwartych może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.  
 Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.  
 Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.  
 Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.  
 Podczas egzaminu możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.  
 Na tej stronie wpisz swój kod oraz imię i nazwisko.  
 Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla osoby sprawdzającej.

**STYCZEŃ 2016**

**Czas pracy:  
180 minut**

**Liczba punktów  
do uzyskania: 50**

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

**Zadanie 1. (0–1)**

Suma wszystkich rozwiązań równania  $||x - 4| - 2| = 3$  jest równa

- A. 8                                      B. 9                                      C. 12                                      D. 16

**Zadanie 2. (0–1)**

Ciąg  $(a_n)$  jest zdefiniowany rekurencyjnie: 
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$$

Wskaż wzór ogólny ciągu  $(b_n)$ , w którym  $b_n = a_n + a_{n+2}$  dla  $n \geq 1$ .

A.  $b_n = (\sqrt{2})^{n+3}$

B.  $b_n = 2^{n+4}$

C.  $b_n = 3 \cdot 2^{\frac{n+3}{2}}$

D.  $b_n = 4 \cdot (\sqrt{2})^{2n}$

**Zadanie 3. (0–1)**

Jedyny pierwiastek rzeczywisty wielomianu  $w(x) = 2x^3 + (c - 5)x^2 + cx - 5$  o współczynnikach całkowitych jest liczbą pierwszą. Zatem parametr  $c$  jest równy

- A. 19                                      B. 4                                      C. -1                                      D. -4

**Zadanie 4. (0–1)**

Liczby  $x, y, z$  są dodatnie i różne od 1 oraz  $\log_x \sqrt{y} = \frac{1}{3}$  i  $\log_y \sqrt[3]{z} = \frac{1}{4}$ . Wskaż wartość wyrażenia  $\log_z \sqrt[4]{x}$ .

- A. 18                                      B. 1                                      C.  $\frac{1}{2}$                                       D.  $\frac{1}{5}$

**Zadanie 5. (0–1)**

Ile różnych funkcji można utworzyć na zbiorze  $X = \{-2, -1, 3, 4\}$  o wartościach ze zbioru  $Y = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ?

- A. 2880                                      B. 1296                                      C. 360                                      D. 24

[illegible]

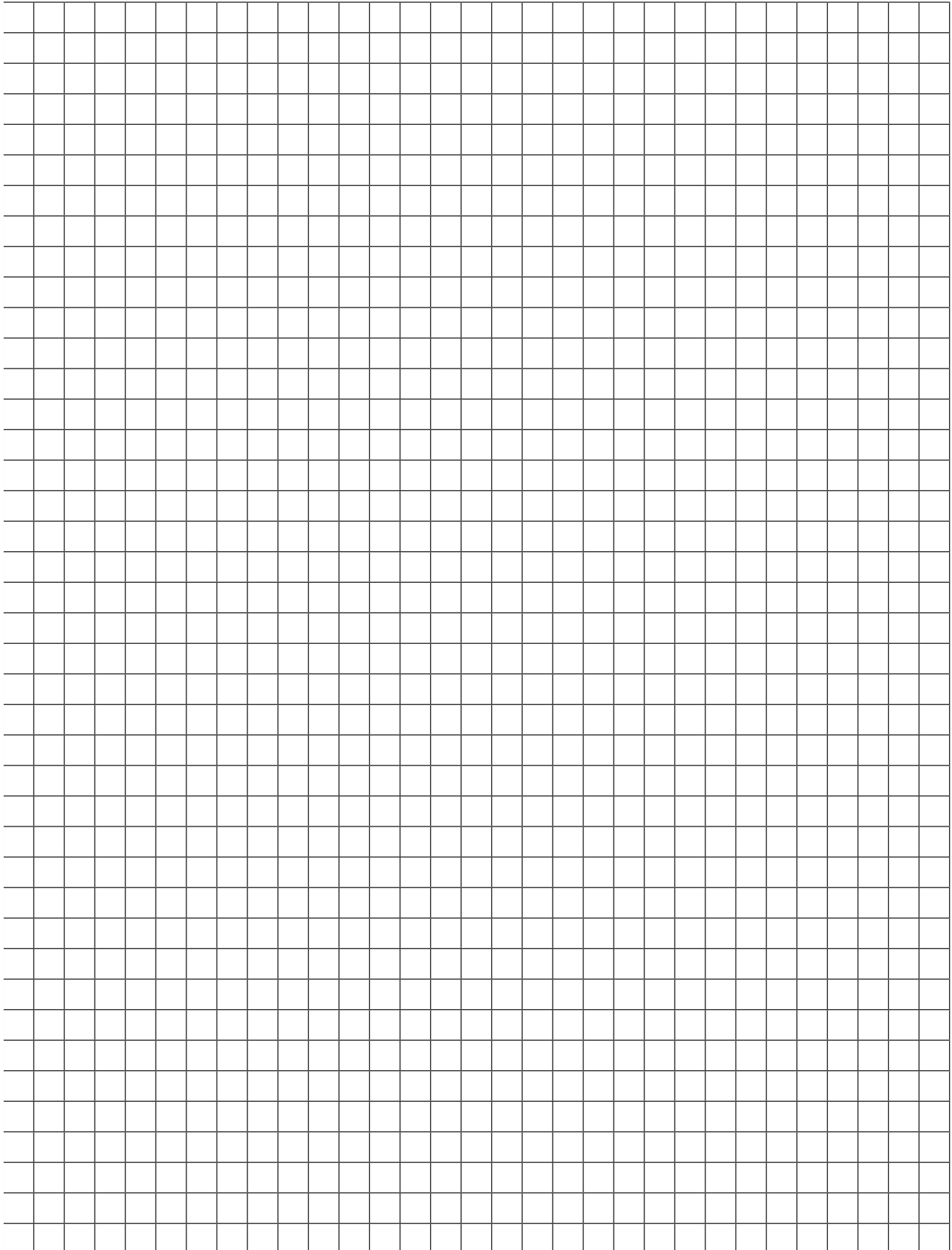
|                                  |                            |          |          |          |          |          |
|----------------------------------|----------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>Wypełnia<br/>sprawdzający</b> | <b>Nr zadania</b>          | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> |
|                                  | <b>Maks. liczba pkt</b>    | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |
|                                  | <b>Uzyskana liczba pkt</b> |          |          |          |          |          |





**Zadanie 8. (0–3)**

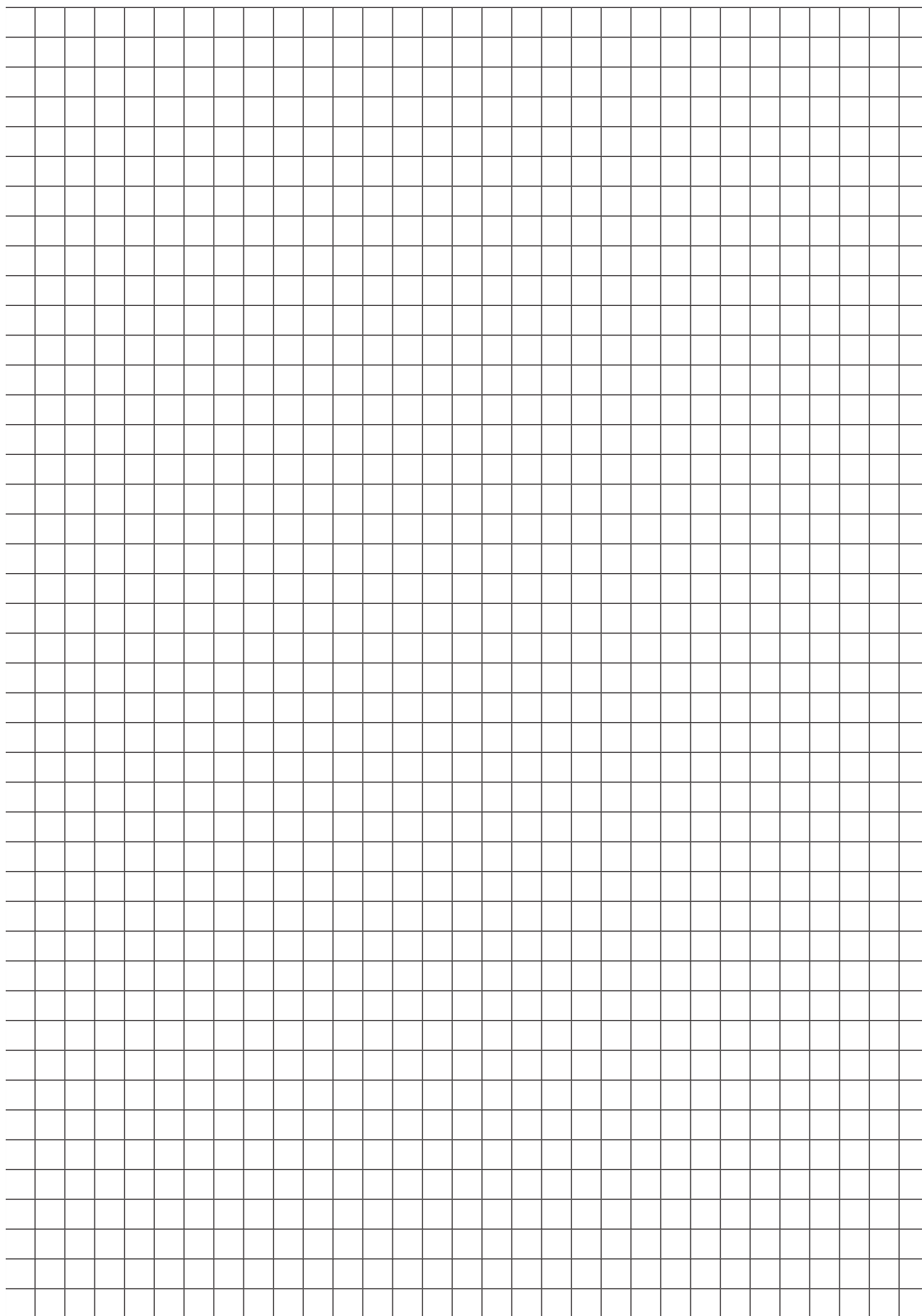
W trójkącie prostokątnym  $ABC$ , w którym bok  $AB$  jest przeciwprostokątną, na boku  $BC$  obrano punkt  $D$  taki, że  $|\sphericalangle DAB| = 2|\sphericalangle CAD|$ . Długość odcinka  $BD$  jest równa  $a$ , a kąt  $CAD$  ma miarę  $\alpha$ . Wykaż, że  $|AD| = \frac{a(1 - 4\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha}$ .



7 z 22

**Zadanie 9. (0–3)**

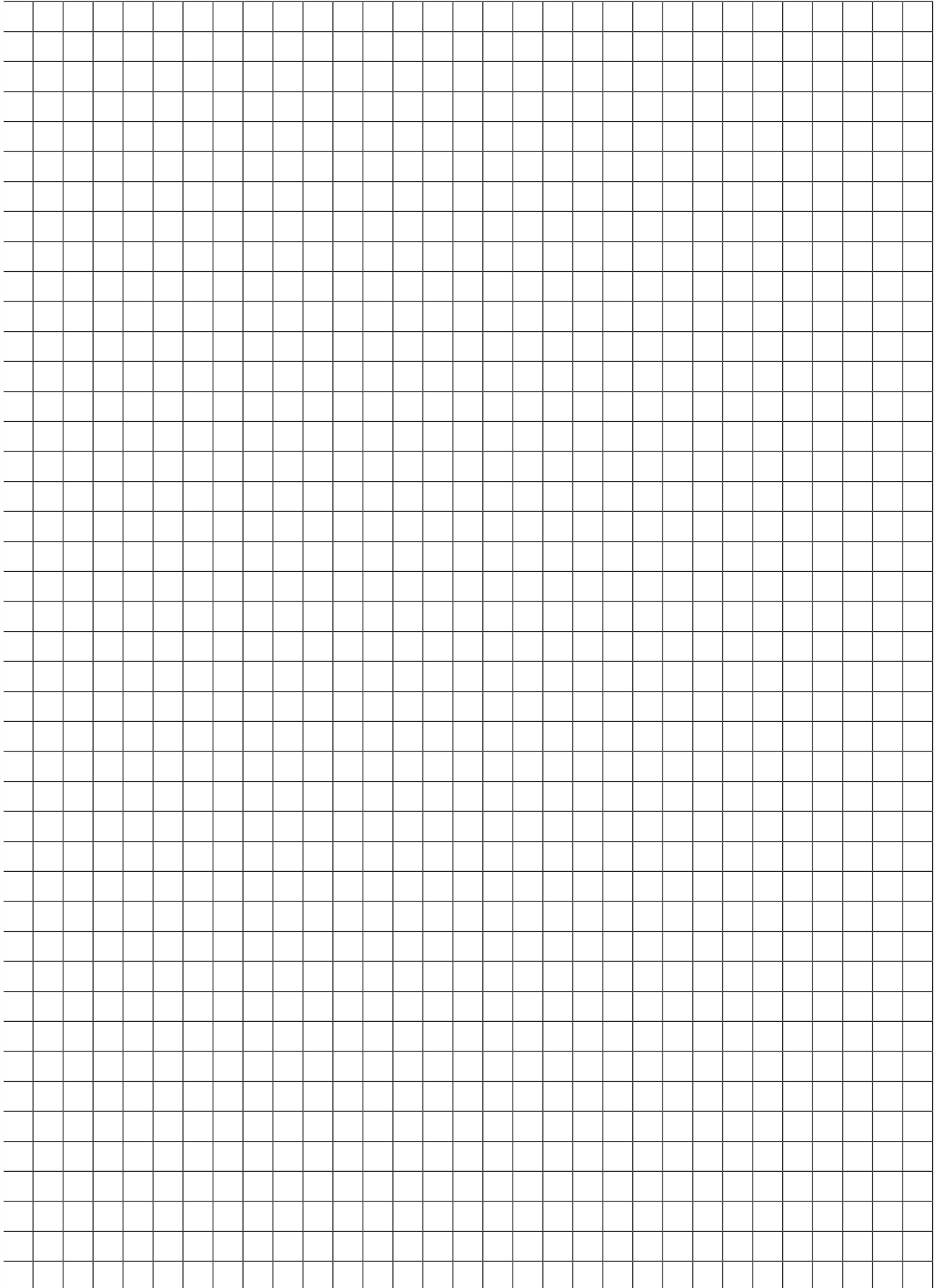
Wykaż, że wielomian  $f(x) = 3x^{10} - 5x^6 + 3$  nie ma pierwiastków rzeczywistych.





**Zadanie 11. (0–4)**

Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x \neq 1$ . Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji  $f$ , które tworzą z osią  $Ox$  kąt  $45^\circ$ .



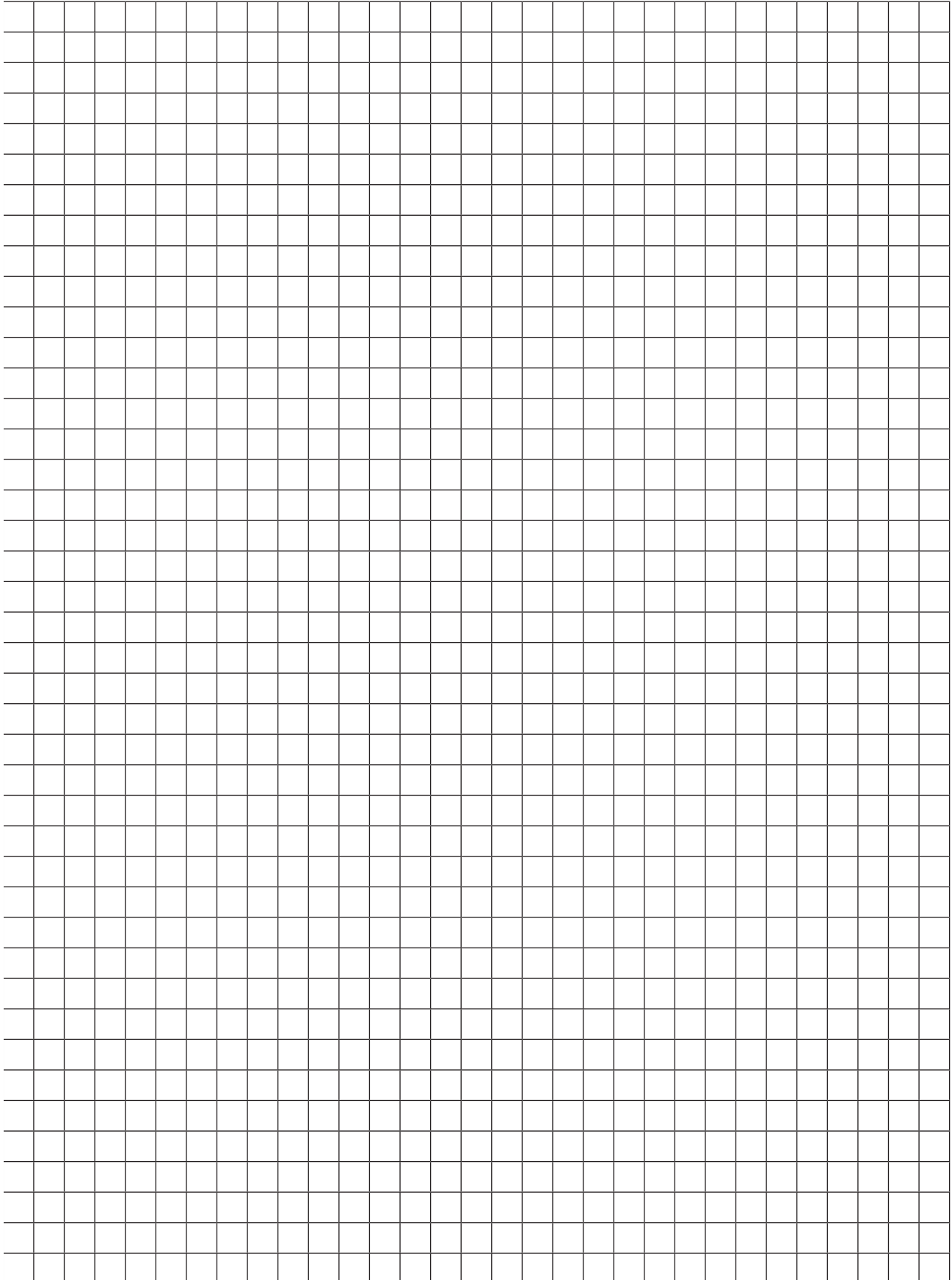
|                                  |                            |           |
|----------------------------------|----------------------------|-----------|
| <b>Wypełnia<br/>sprawdzający</b> | <b>Nr zadania</b>          | <b>11</b> |
|                                  | <b>Maks. liczba pkt</b>    | <b>4</b>  |
|                                  | <b>Uzyskana liczba pkt</b> |           |



|                                  |                            |           |
|----------------------------------|----------------------------|-----------|
| <b>Wypełnia<br/>sprawdzający</b> | <b>Nr zadania</b>          | <b>12</b> |
|                                  | <b>Maks. liczba pkt</b>    | <b>4</b>  |
|                                  | <b>Uzyskana liczba pkt</b> |           |

**Zadanie 13. (0–5)**

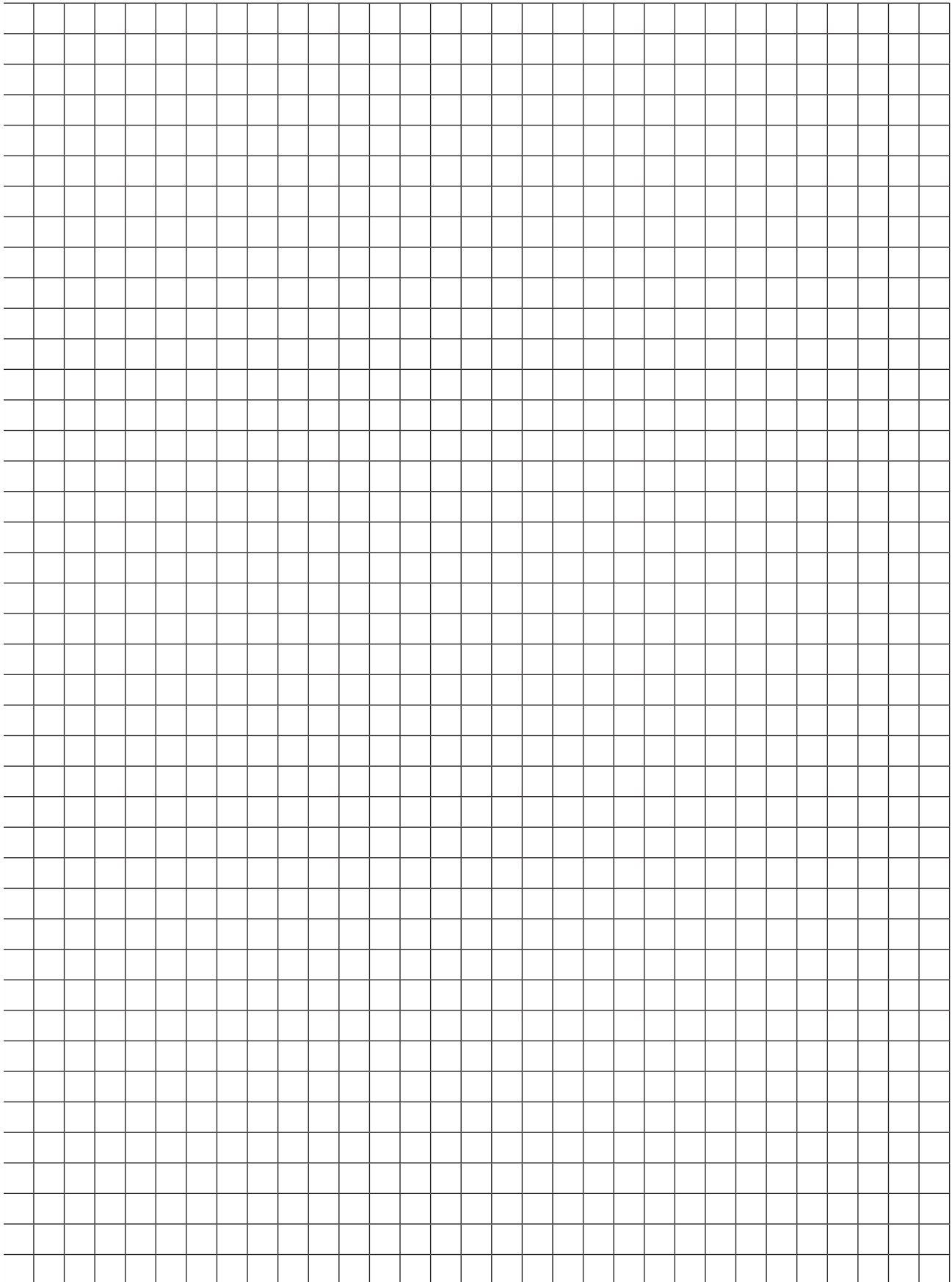
W trapez równoramienny  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$ , wpisano okrąg o środku  $S$ . Odległość punktu  $S$  od końców dłuższej podstawy  $AB$  jest równa 10, a cosinus kąta ostrego tego trapezu jest równy  $\frac{3}{5}$ . Oblicz pole tego trapezu.



|                                  |                            |           |
|----------------------------------|----------------------------|-----------|
| <b>Wypełnia<br/>sprawdzający</b> | <b>Nr zadania</b>          | <b>13</b> |
|                                  | <b>Maks. liczba pkt</b>    | <b>5</b>  |
|                                  | <b>Uzyskana liczba pkt</b> |           |

**Zadanie 14. (0–5)**

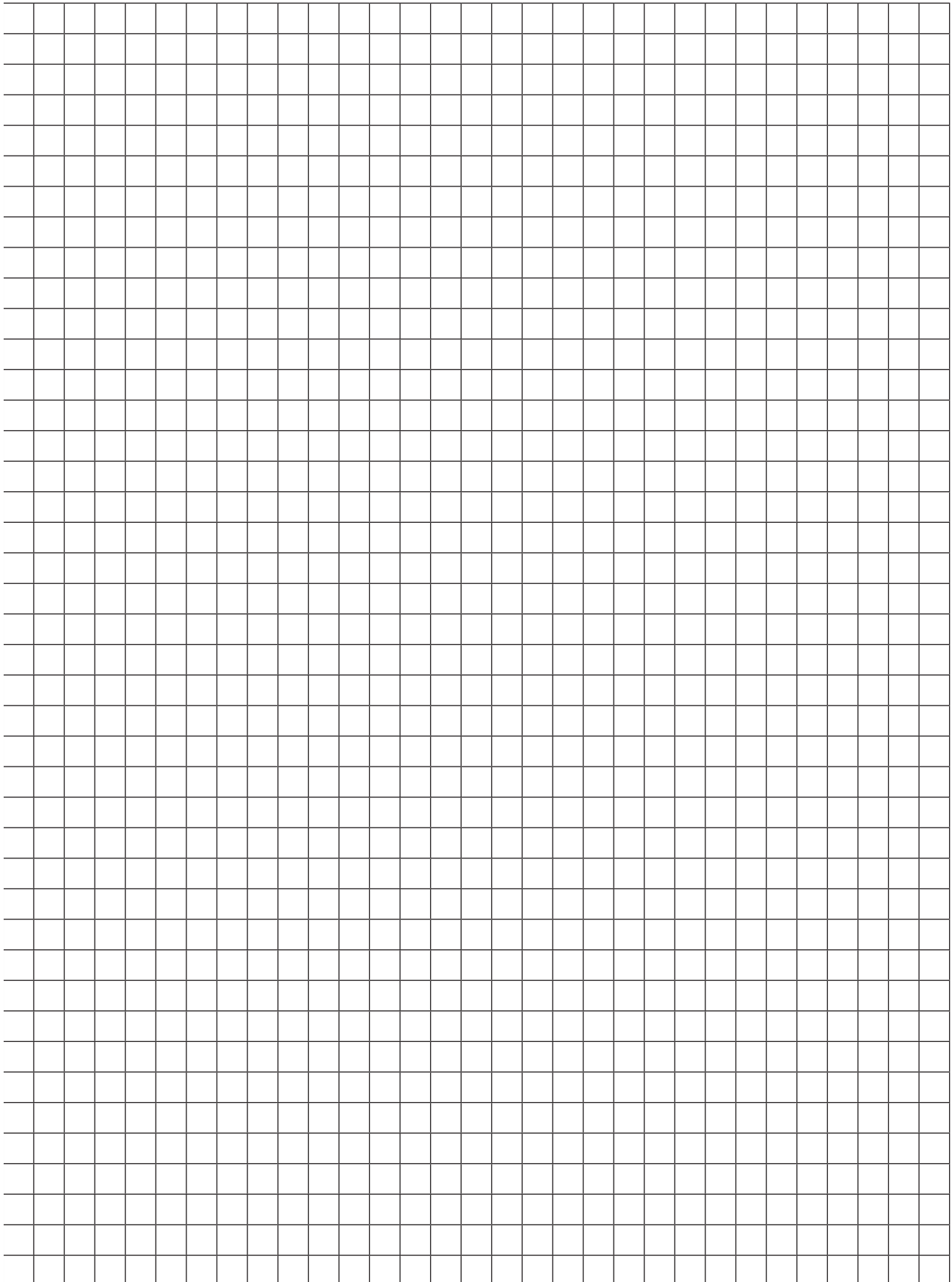
Odcinek  $A'B'$  jest obrazem odcinka o końcach  $A = (2, 6)$  oraz  $B = (-4, 4)$  w jednokładności o środku  $O = (0, 3)$  i skali  $k \neq 0$ . Punkt  $A'$ , który jest obrazem punktu  $A$  w tej jednokładności, leży na prostej o równaniu  $x + 2y + 10 = 0$ . Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek  $A'B'$ .



|                                  |                            |           |
|----------------------------------|----------------------------|-----------|
| <b>Wypełnia<br/>sprawdzający</b> | <b>Nr zadania</b>          | <b>14</b> |
|                                  | <b>Maks. liczba pkt</b>    | <b>5</b>  |
|                                  | <b>Uzyskana liczba pkt</b> |           |

**Zadanie 15. (0–6)**

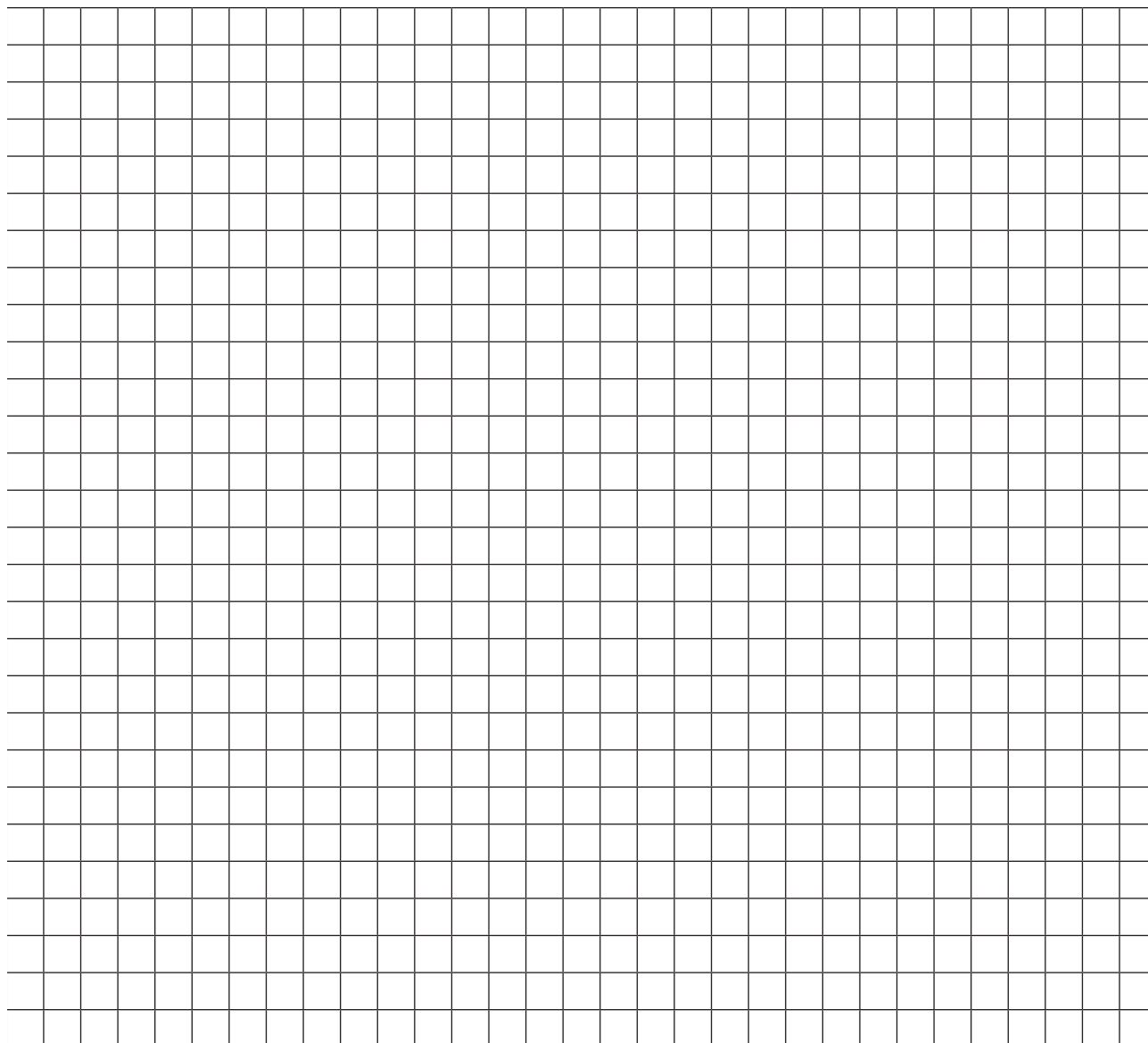
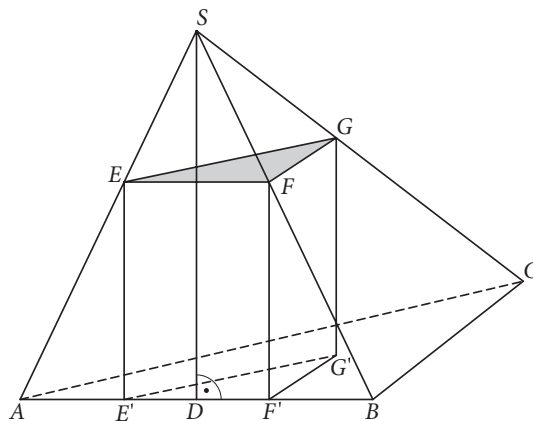
Prosta o równaniu  $y = (a - 3)x + a + 4$  przecina parabolę o równaniu  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + a + 8$  w dwóch punktach o pierwszych współrzędnych  $x_1, x_2$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ , dla których współrzędne  $x_1, x_2$  spełniają nierówność  $x_1^3 + x_2^3 \leq 9x_1x_2$ .



|                                  |                            |           |
|----------------------------------|----------------------------|-----------|
| <b>Wypełnia<br/>sprawdzający</b> | <b>Nr zadania</b>          | <b>15</b> |
|                                  | <b>Maks. liczba pkt</b>    | <b>6</b>  |
|                                  | <b>Uzyskana liczba pkt</b> |           |

**Zadanie 16. (0–7)**

Ostrosłup  $ABCS$  o podstawie  $ABC$ , będącej trójkątem równobocznym, i wysokości  $SD$ , gdzie  $D$  jest środkiem odcinka  $AB$ , przecięto płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy (zobacz rysunek). Punkty  $E, F, G$  są punktami wspólnymi płaszczyzny przekroju i krawędzi bocznych ostrosłupa. Punkty  $E', F', G'$  leżą na podstawie  $ABC$  i odcinki  $EE', FF', GG'$  są do niej prostopadłe. Wiedząc, że  $|AB| = 12$  i  $|SD| = 16$ , oblicz, w jakiej odległości od płaszczyzny podstawy należy poprowadzić przekrój ostrosłupa, aby graniastosłup  $E'F'G'EFG$  miał największą objętość.



|                                  |                            |           |
|----------------------------------|----------------------------|-----------|
| <b>Wypełnia<br/>sprawdzający</b> | <b>Nr zadania</b>          | <b>16</b> |
|                                  | <b>Maks. liczba pkt</b>    | <b>7</b>  |
|                                  | <b>Uzyskana liczba pkt</b> |           |

## This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin, dark gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.