

KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

Listopad 2015



**Zacznij
przygotowania
do matury już dziś**

Kup vademecum

sklep.operon.pl/matura

danian zamknięte

każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

numer danian	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	D	Funkcja ma wszystkie wartości dodatnie.
2.	D	$\sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
3.	D	$f'(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2$ Funkcja $f'(x)$ przyjmuje tylko wartości nieujemne, zatem funkcja stale rośnie, nie ma więc ekstremów.
4.	C	$ABCS, BCD$ – odpowiednio ostrosłup i przekrój h – wysokość przekroju $h = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$ $P = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow P = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
5.	D	$a_2 = \frac{11}{2}, a_3 = \frac{\frac{33}{2} - 2}{2} = \frac{29}{4}, a_4 = \frac{\frac{87}{4} - 3}{2} = \frac{75}{8}$

Kup vademecum

sklep.operon.pl/matura

danian otwarte – kodowane

numer danian	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
6.	8 5 7	$l : 5x - 3y - 14 = 0$ $d(A, l) = \frac{ 25 - 6 - 14 }{\sqrt{25 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} = 0,857492...$	0-2
7.	6 6 1	$64 = 100 + 144 - 240 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0,66143782...$	0-2
8.	1 7 6	$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow f'(-\sqrt{7}) = \frac{2\sqrt{7}}{3} =$ $= 1,763834...$	0-2

Kup vademecum

sklep.operon.pl/matura

Kup vademecum

sklep.operon.pl/matura

numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
9.	0 9 0	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{11n^2-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+2n}{11n^2-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n}{11n^2-1} = \frac{1}{11} = 0,090909\dots$	0-2
10.	2 5 9	$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{-b^3}{a^3} - 3 \cdot \frac{c}{a} \left(-\frac{b}{a} \right) = -7^3 - 12(-7) = -343 + 84 = -259$	0-2

 Kup uadamecum

sklep.operon.pl/matura

zadania otwarte

numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
11.	Rozwiązanie: $\log_{24} 6 = a \Rightarrow \log_6 24 = \frac{1}{a}$ $\log_6 256 = \log_6 4^4 = 4 \log_6 4$ $4 \log_6 4 = 4 \cdot \log_6 \frac{24}{6} = 4(\log_6 24 - \log_6 6) = 4\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{4(1-a)}{a}$	0-3
	Istotny postęp: Zapisanie równości: $\log_{24} 6 = a \Rightarrow \log_6 24 = \frac{1}{a}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równości: $\log_6 256 = \log_6 4^4 = 4 \log_6 4 = 4 \cdot \log_6 \frac{24}{6}$	2
	Rozwiązanie pełne: Wykazanie tezy zadania: $4(\log_6 24 - \log_6 6) = 4\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{4(1-a)}{a}$	3
12.	Rozwiązanie: $S = (3, -5), r = \sqrt{34}$ $l: 4x + 3y + C = 0$ $d(S, l) = r \Leftrightarrow \frac{ 12 - 15 + C }{\sqrt{16+9}} = \sqrt{34} \Rightarrow C = 5\sqrt{34} + 3 \vee C = -5\sqrt{34} + 3$ Styczne mają wzory: $4x + 3y + 5\sqrt{34} + 3 = 0, 4x + 3y - 5\sqrt{34} + 3 = 0$	0-3
	Istotny postęp: Wyznaczenie środka i promienia okręgu: $S = (3, -5), r = \sqrt{34}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie stycznej w postaci $l: 4x + 3y + C = 0$ i warunku styczności: $d(S, l) = r \Leftrightarrow \frac{ 12 - 15 + C }{\sqrt{16+9}} = \sqrt{34}$	2
	Rozwiązanie pełne: Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C = 5\sqrt{34} + 3 \vee C = -5\sqrt{34} + 3$ Styczne mają wzory: $4x + 3y + 5\sqrt{34} + 3 = 0, 4x + 3y - 5\sqrt{34} + 3 = 0$	3

numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
13.	Rozwiązanie: $a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ $(m+5)^2 = x_1 x_2 \Rightarrow (m+5)^2 = 4 \Rightarrow m+5 = 2 \vee m+5 = -2$ $m = -3 \vee m = -7$ – pierwsza liczba nie spełnia warunku $\Delta > 0$ $m = -7$	0–4
	Postęp: Zapisanie i rozwiązanie warunków: $a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$	1
	Istotny postęp: Zapisanie trzeciego warunku w postaci: $(m+5)^2 = x_1 x_2$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie trzeciego warunku w postaci: $(m+5)^2 = 4 \Rightarrow m+5 = 2 \vee m+5 = -2$	3
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań wszystkich warunków: $m = -7$	4
14.	Rozwiązanie: $h = EF$ – wysokość trójkąta BDE $P_{\triangle BDE} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h \Rightarrow h = \frac{a \sqrt{3}}{8}$ $\frac{ FB }{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a \sqrt{3}}{8}}{\frac{a \sqrt{3}}{2}} \Rightarrow FB = \frac{a}{8} \Rightarrow DF = \frac{3a}{8}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a \sqrt{3}}{8}}{\frac{3a}{8}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$	0–4
	Postęp: Wprowadzenie oznaczeń: $h = EF$ – wysokość trójkąta BDE $P_{\triangle BDE} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h \Rightarrow h = \frac{a \sqrt{3}}{8}$	1
	Istotny postęp: Obliczenie długości odcinka FB: $\frac{ FB }{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a \sqrt{3}}{8}}{\frac{a \sqrt{3}}{2}} \Rightarrow FB = \frac{a}{8}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie długości odcinka DF: $DF = \frac{a}{2} - \frac{a}{8} = \frac{3a}{8}$	3
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie kąta α: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a \sqrt{3}}{8}}{\frac{3a}{8}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$	4

numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
15.	Rozwiązanie: $\sin 2x + \cos 4x = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0$ $2\sin\frac{2x + \frac{\pi}{2} - 4x}{2} \cos\frac{2x - \frac{\pi}{2} + 4x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \vee \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = k\pi \vee \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$	0–4
	Istotny postęp: Zapisanie równania w postaci: $\sin 2x + \cos 4x = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0$ $2\sin\frac{2x + \frac{\pi}{2} - 4x}{2} \cos\frac{2x - \frac{\pi}{2} + 4x}{2} = 0$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie alternatywy równań: $\sin\frac{2x + \frac{\pi}{2} - 4x}{2} = 0 \vee \cos\frac{2x - \frac{\pi}{2} + 4x}{2} = 0$	2
	Rozwiązanie prawie pełne: Zapisanie rozwiązań w postaci: $\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = k\pi \vee \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$	3
	Rozwiązanie pełne: Zapisanie rozwiązań w postaci: $x = \frac{\pi}{4} - k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{C}$	4
16.	Rozwiązanie: $\pi r^2 h = \pi \Rightarrow h = \frac{1}{r^2}$ $P(x) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = \frac{2\pi r}{r^2} + 2\pi r^2, P(x) = 2\pi \frac{1+r^3}{r}, r > 0$ $P'(x) = 2\pi \frac{2r^3 - 1}{r^2}, P'(x) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ Po przeanalizowaniu znaków pochodnej otrzymujemy: w punkcie $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ funkcja osiąga minimum, które jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji.	0–7
	I część: Wyznaczenie wzoru funkcji określającej pole walca Wyznaczenie zależności między promieniem podstawy i wysokością walca: $\pi r^2 h = \pi \Rightarrow h = \frac{1}{r^2}$	1
	Wyznaczenie wzoru na pole całkowite walca: $P(r, h) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = \frac{2\pi r}{r^2} + 2\pi r^2, P(r) = 2\pi \frac{1+r^3}{r}$	2
	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $r \in (0, +\infty)$	3 (za I część przyznaje się 3 pkt)
	II część: Zbadanie pochodnej i wyznaczenie ekstremum Wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji: $P'(r) = 2\pi \frac{2r^3 - 1}{r^2}$	4

numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $P'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	5
	Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego maksimum funkcji: $P'(r) > 0$ dla $r \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$, $P'(r) < 0$ dla $r \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$, a maleje w przedziale $\left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, stąd w punkcie $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ funkcja osiąga minimum będące jednocześnie najmniejszą wartością funkcji, więc wymiary walca: $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $h = \sqrt[3]{4}$.	6 (za II część przyznaje się 3 pkt)
	III część Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji: $P\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 3\pi\sqrt[3]{2}$	7 (za III część przyznaje się 1 pkt)
17.	Rozwiązanie: A – wylosowanie dwóch kul białych z drugiej urny w drugim losowaniu B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie białej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu i wylosowanie czarnej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu $P(B_1) = \frac{3}{10}$, $P(B_2) = \frac{7}{10}$ $P(A / B_1) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45}, P(A / B_2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{10}{45}$ $P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{15}{45} + \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{45} = \frac{23}{90}$	0–5
	Postęp: Wprowadzenie oznaczeń: A – wylosowanie dwóch kul białych z drugiej urny w drugim losowaniu B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie białej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu i wylosowanie czarnej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu	1
	Istotny postęp: Obliczenie prawdopodobieństw: $P(B_1) = \frac{3}{10}$, $P(B_2) = \frac{7}{10}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie prawdopodobieństw: $P(A / B_1) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}, P(A / B_2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$	3
	Rozwiązanie prawie pełne: Zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia w postaci: $P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{7}{10} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$	4
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{23}{90}$	5

zadanie	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
18.	Rozwiązanie: Zapisujemy układ: $\begin{cases} x + y + z = 63 \\ (y + 15)^2 = (x - 1)(z + 37), \text{ po rozwiązaniu otrzymujemy:} \\ y = \frac{x + z}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 25 \\ y = 21 \\ z = 17 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 55 \\ y = 21 \\ z = -13 \end{cases}$	0–5
	Istotny postęp: Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x + y + z = 63 \\ (y + 15)^2 = (x - 1)(z + 37) \\ y = \frac{x + z}{2} \end{cases}$	2 (1 pkt, gdy zapisano tylko dwa równania)
	Pokonanie zasadniczych trudności: Przekształcenie układu do równania kwadratowego, np.: $x^2 - 80x + 1375 = 0$	3
	Rozwiązanie pełne: Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $\begin{cases} x = 25 \\ y = 21 \\ z = 17 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 55 \\ y = 21 \\ z = -13 \end{cases}$	5 (4 pkt, gdy popełniono błąd rachunkowy)



Matura 2016



**JEDYNE
SPRAWDZONE
VADEMECUM
I TESTY
NA RYNKU**



**BEZPŁATNA
PLATFORMA
ON-LINE**

Wybierz pewną metodę!
www.sklep.operon.pl