



**CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA**

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA
ARKUSZE
MMA-P1**

SIERPIEŃ 2015

Klucz punktowania zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	D	D	B	C	D	A	C	B	A	C	A	B	C	B	B	C	B	A	D	A	A	D	C	D

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$, gdzie $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

Rozwiązanie

Równanie ma sens, gdy $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

Przekształcając równanie w sposób równoważny, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{2x-4}{x} - \frac{x}{2x-4} &= 0, \\ \frac{(2x-4)^2 - x^2}{x(2x-4)} &= 0.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}(2x-4)^2 - x^2 &= 0, \\ 3x^2 - 16x + 16 &= 0.\end{aligned}$$

Wyróżnik trójmianu $3x^2 - 16x + 16$ jest równy $\Delta = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64$, więc pierwiastkami tego trójmianu są liczby $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 4$. Obie te liczby są rozwiązaniami równania.

Uwaga

Możemy także wykorzystać własność proporcji (iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych) i wówczas otrzymujemy $(2x-4)^2 = x^2$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze równanie w postaci równania kwadratowego, np.: $(2x-4)^2 - x^2 = 0$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy wyznaczy rozwiązania równania: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 4$.

Zadanie 27. (2 pkt)

Mamy dwa pudełka: w pierwszym znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 6, a w drugim – 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka i tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że numer kuli wylosowanej z pierwszego pudełka jest cyfrą dziesiątek, a numer kuli wylosowanej z drugiego – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 11.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są liczby dwucyfrowe, w których cyfra dziesiątek jest jedną spośród: 1, 2, 3, 4, 5, 6, a cyfra jedności – jedną spośród: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Zatem

$$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, \\ 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, \\ 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że utworzona liczba jest podzielna przez 11.

Zdarzeniu A sprzyja 6 zdarzeń elementarnych: 11, 22, 33, 44, 55, 66. Zatem

$$|A| = 6.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6 \cdot 8} = \frac{1}{8}.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy poda

- liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$

albo

- liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 6$

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A : 11, 22, 33, 44, 55, 66.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{6}{48}$ lub $P(A) = \frac{1}{8}$.

Uwagi

1. Jeżeli otrzymany wynik końcowy jest liczbą większą od 1, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający poda jedynie $P(A) = \frac{6}{48}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $20x \geq 4x^2 + 24$.

Rozwiązanie

Przekształcamy nierówność do postaci równoważnej $4x^2 - 20x + 24 \leq 0$,

a następnie do postaci $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 6$:

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ lub $(x-2)(x-3)$

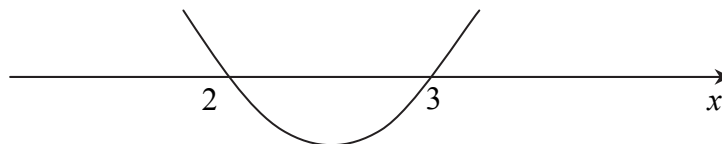
albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1, \quad x_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $2 \leq x \leq 3$ lub $\langle 2, 3 \rangle$ lub $x \in \langle 2, 3 \rangle$, np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(x-2)(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 6$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy:

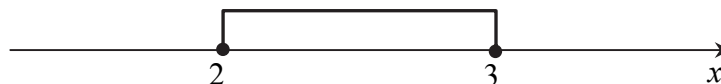
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $2 \leq x \leq 3$ lub $\langle 2, 3 \rangle$ lub $x \in \langle 2, 3 \rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $2 \leq x \leq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

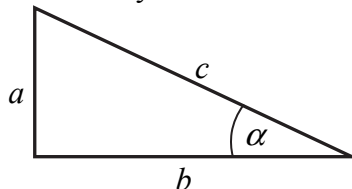
1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i zapisze, np. $x \in \langle 2, -3 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków. Za takie rozwiązanie zdający otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 3, 2 \rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 29. (2 pkt)

Kąt α jest ostry i spełnia równość $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

I sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji tangens w trójkącie prostokątnym, lewą stronę równości $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{2}$ możemy zapisać, a następnie przekształcić następująco:

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{c^2}{ab}.$$

Z drugiej strony zauważmy, że szukane wyrażenie $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równe $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c^2}$.

Ponieważ $\frac{c^2}{ab} = \frac{7}{2}$, więc $\frac{ab}{c^2} = \frac{2}{7}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy wykorzysta definicje lub własności funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym,
doprowadzi wyrażenie $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ do postaci $\frac{c^2}{ab}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równa $\frac{2}{7}$.

II sposób rozwiązania

Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, więc z równości $\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{7}{2}$ wynika, że szukany iloczyn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ przyjmuje wartość $\frac{2}{7}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy zapisze

- $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

albo

- $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ równa się $\frac{2}{7}$.

III sposób rozwiązania

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc $\operatorname{tg} \alpha > 0$ i równość $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{2}$ możemy zapisać w postaci

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{7}{2} \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0.$$

Równanie powyższe ma dwa rozwiązania:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}.$$

Gdy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}$, to $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{98 + 14\sqrt{33}}}$ i $\sin \alpha = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{33}}{14}}$. Wtedy

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{98 + 14\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{16}{98 + 14\sqrt{33}} = \sqrt{\frac{16(7 + \sqrt{33})}{14 \cdot 14(7 + \sqrt{33})}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Gdy zaś $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$, to $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{98 - 14\sqrt{33}}}$ i $\sin \alpha = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{14}}$. Wtedy

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{98 - 14\sqrt{33}}} = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{14}} \cdot \frac{16}{98 - 14\sqrt{33}} = \sqrt{\frac{16(7 - \sqrt{33})}{14 \cdot 14(7 - \sqrt{33})}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze, że równanie $\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{7}{2} \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$, a ponadto w jednym przypadku obliczy wartość $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy i zapisze, że wartość szukanego wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ równa się $\frac{2}{7}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy jedną z wartości $\operatorname{tg} \alpha$, np.: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$, poda jej wartość

przybliżoną 0,3139, odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta $\alpha \approx 17^\circ$ oraz przybliżone wartości $\sin \alpha \approx 0,2924$, $\cos \alpha \approx 0,9563$ i na tej podstawie obliczy przybliżoną wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \approx 0,2924 \cdot 0,9563 \approx 0,2762$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 30. (2 pkt)

Udowodnij, że dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.

I sposób rozwiązania

Nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 &\geq 0, \\(x^3 - x^2y) + (y^3 - xy^2) &\geq 0, \\x^2(x - y) - y^2(x - y) &\geq 0, \\(x - y)(x^2 - y^2) &\geq 0, \\(x - y)^2(x + y) &\geq 0,\end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż $(x - y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y oraz $x + y \geq 0$, gdyż liczby x i y są nieujemne. To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 &\geq 0, \\(x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2) &\geq 0, \\(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) &\geq 0, \\(x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy) &\geq 0, \\(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) &\geq 0, \\(x + y)(x - y)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż $(x - y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y oraz $x + y \geq 0$, gdyż liczby x i y są nieujemne. To kończy dowód.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- zapisze nierówność w postaci $(x - y)(x^2 - y^2) \geq 0$

albo

- zapisze nierówność w postaci $(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

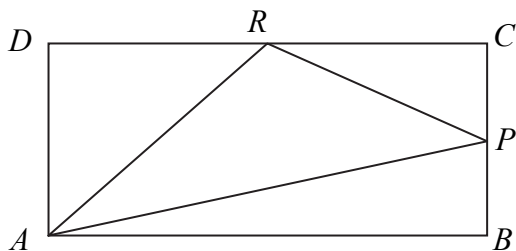
gdy uzasadni prawdziwość nierówności $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.

Uwaga

Jeżeli zdający przejdzie w swoim rozumowaniu z postaci $(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) \geq 0$ do postaci $x^2 - xy + y^2 - xy \geq 0$ bez zaznaczenia, że skoro x i y są nieujemne, to ich suma też jest nieujemna, ale dokona dzielenia obu stron nierówności przez $x + y$ i dalej przeprowadzi poprawne rozumowanie, to otrzymuje **1 punkt**.

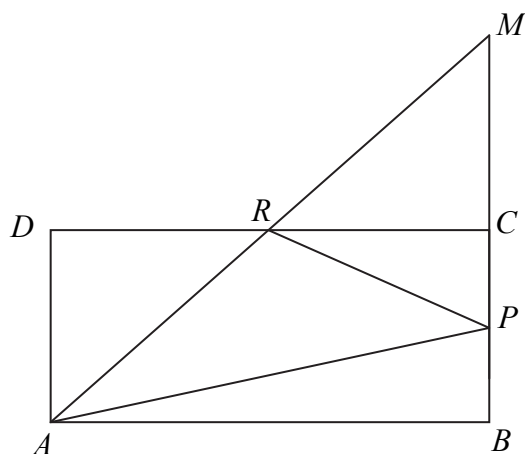
Zadanie 31. (2 pkt)

W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku BC , a punkt R jest środkiem boku CD . Wykaż, że pole trójkąta APR jest równe sumie pól trójkątów ADR oraz PCR .



I sposób rozwiązania

Przedłużamy prostą AR oraz bok prostokąta BC . Proste te przecinają się w punkcie M . Rozpatrujemy trójkąty ADR oraz RCM .



$|\sphericalangle ARD| = |\sphericalangle CRM|$ (kąty wierzchołkowe), kąty przy wierzchołkach D i C są proste oraz $|DR| = |RC|$, stąd na podstawie cechy przystawania trójkątów kbk wnioskujemy, że trójkąt ADR jest przystający do trójkąta RCM . Z przystawania trójkątów mamy $|AR| = |RM|$.

Pole trójkąta APR jest równe polu trójkąta RPM , ponieważ oba trójkąty mają równe podstawy ($|AR| = |RM|$) oraz taką samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka P .

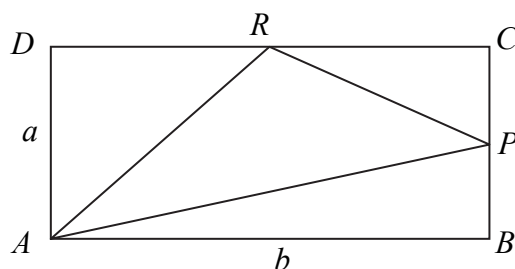
$$P_{\triangle APR} = P_{\triangle RPM} = P_{\triangle PCR} + P_{\triangle RCM}, \text{ a z faktu przystawania trójkątów } RCM \text{ oraz } ADR \text{ mamy:}$$
$$P_{\triangle APR} = P_{\triangle PCR} + P_{\triangle ADR}$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy zapisze, że pole trójkąta APR jest równe polu trójkąta RPM i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania



Oznaczmy: $|AD| = a$ oraz $|AB| = b$, stąd $|BP| = |PC| = \frac{a}{2}$, $|CR| = |RD| = \frac{b}{2}$.

Obliczamy pola trójkątów prostokątnych PCR , RDA : $P_{\Delta PCR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{8}$ oraz

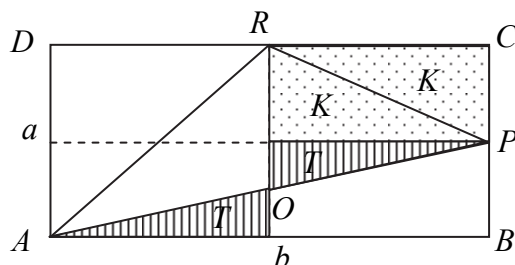
$$P_{\Delta RDA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4} \text{ zatem } P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RDA} = \frac{ab}{8} + \frac{ab}{4} = \frac{3ab}{8}.$$

Trójkąt ABP jest prostokątny i jego pole jest równe $\frac{1}{2}b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$.

Pole trójkąta APR jest różnicą pola prostokąta $ABCD$ i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych ABP , PCR oraz RDA zatem $P_{\Delta APR} = ab - \left(2 \cdot \frac{ab}{4} + \frac{ab}{8}\right) = \frac{3ab}{8}$.

Otrzymaliśmy równość $P_{\Delta APR} = P_{\Delta PCR} + P_{\Delta RDA}$.

III sposób rozwiązania



Podzielimy prostokąt $ABCD$ na części, jak na rysunku.

Pole trójkąta APR zapisujemy w następujący sposób:

jest to suma pól trójkątów $K = \frac{1}{8}ab$, $T = \frac{1}{2}K = \frac{1}{16}ab$ oraz pola trójkąta AOR , którego pole jest

$$\text{równe: } P_{AOR} = \frac{1}{4}ab - T = \frac{1}{4}ab - \frac{1}{16}ab = \frac{3}{16}ab.$$

$$\text{Zapisujemy sumę: } P_{APR} = \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}ab + \frac{3}{16}ab = \frac{3}{8}ab$$

Pole trójkąta ARD jest równe $2K = \frac{1}{4}ab$. Sumujemy pola trójkąta ARD oraz PCR

i otrzymujemy: $P_{ARD} + P_{PCR} = \frac{1}{4}ab + \frac{1}{8}ab = \frac{3}{8}ab$, czyli wykazaliśmy, że $P_{ARD} + P_{PCR} = P_{APR}$.

Uwaga

Zamiast zapisywać pole prostokąta $ABCD$ w zależności od długości boków możemy użyć innego oznaczenia, np. P , wtedy otrzymujemy: $K = \frac{1}{8}P$, $T = \frac{1}{16}P$, $P_{AOR} = \frac{3}{16}P$ i dalej

$$P_{APR} = \frac{1}{8}P + \frac{1}{16}P + \frac{3}{16}P = \frac{3}{8}P \text{ oraz } P_{ARD} + P_{PCR} = \frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P = \frac{3}{8}P.$$

Schemat oceniania II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze, że pole trójkąta APR stanowi $\frac{3}{8}$ pola prostokąta $ABCD$, np. zapisze

$$P_{APR} = \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}ab + \frac{3}{16}ab = \frac{3}{8}ab \text{ lub } P_{\Delta APR} = ab - \left(2 \cdot \frac{ab}{4} + \frac{ab}{8}\right) = \frac{3ab}{8} \text{ i na tym poprzestanie}$$

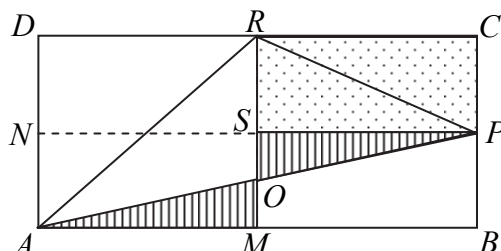
lub dalej popelni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinki PN i RM łączące środki boków prostokąta. Niech S będzie punktem ich przecięcia.



Trójkąty ADR i RMA są przystające, więc mają równe pola, trójkąty PCR i RSP też są przystające, więc ich pola też są równe, także trójkąty AMO i PSO są przystające, więc ich pola też są równe. Zatem

$$\begin{aligned} P_{ADR} + P_{PCR} &= P_{AMR} + P_{RSP} = (P_{AOR} + P_{AMO}) + P_{RSP} = (P_{AOR} + P_{PSO}) + P_{RSP} = \\ &= P_{AOR} + (P_{PSO} + P_{RSP}) = P_{AOR} + P_{OPR} = P_{APR} \end{aligned}$$

co należało wykazać.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy ustali, że trójkąty ADR i RMA są przystające, trójkąty PCR i RSP są przystające oraz trójkąty AMO i PSO są przystające i na tym poprzestanie lub dalej popelni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 32. (4 pkt)

Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 2)$, $B = (6, -2)$, $C = (10, 6)$.

I sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta ABC : $|AB| = 4\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = 4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna odcinka AC . By znaleźć równanie osi symetrii trójkąta wyznaczamy współrzędne środka odcinka AC : $S = (4, 4)$.

Wyznaczamy równanie prostej BS , korzystając ze wzoru na prostą przechodzącą przez dwa punkty:

$$y - 4 = \frac{-2-4}{6-4}(x-4),$$
$$y = -3x + 16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta ABC ma postać: $y = -3x + 16$.

II sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta ABC : $|AB| = 4\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = 4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna odcinka AC .

By znaleźć równanie osi symetrii trójkąta, wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AC : $a_{AC} = \frac{1}{3}$, a następnie współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do AC : $a = -\frac{1}{a_{AC}} = -3$.

Wyznaczamy równanie prostej zawierającej symetralną boku AC i przechodzącej przez punkt B :

$$y + 2 = -3(x - 6),$$
$$y = -3x + 16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta ABC ma postać: $y = -3x + 16$.

III sposób rozwiązania

Obliczamy długości boków trójkąta ABC : $|AB| = 4\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = 4\sqrt{10}$.

Zauważamy, że jest to trójkąt równoramienny, w którym $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$, więc osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna odcinka AC . Zatem jego osią symetrii jest symetralna boku AC , będąca zbiorem punktów równo oddalonych od obu końców odcinka.

Niech $K(x, y)$ będzie punktem należącym do symetralnej boku AC . Zatem $|AK| = |KC|$.

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(10-x)^2 + (6-y)^2},$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 100 - 20x + x^2 + 36 - 12y + y^2,$$
$$24x + 8y - 128 = 0,$$
$$3x + y - 16 = 0,$$
$$y = -3x + 16.$$

Odpowiedź: Równanie osi symetrii trójkąta ABC ma postać: $y = -3x + 16$.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający

- obliczy długości dwóch boków trójkąta ABC : $|AB| = 4\sqrt{5}$, $|AC| = 4\sqrt{10}$ i $|BC| = 4\sqrt{5}$
albo
- obliczy współrzędne środka odcinka AC : $S = (4, 4)$
albo
- obliczy współczynnik kierunkowy prostej AC : $a_{AC} = \frac{1}{3}$
albo

- obliczy współrzędne wektora AC
- albo
- zapisze, że szukaną osią symetrii jest symetralna boku AC
- i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- obliczy współrzędne środka odcinka AC : $S = (4, 4)$ i współczynnik kierunkowy prostej AC : $a_{AC} = \frac{1}{3}$

albo

- uzasadni, że szukaną osią symetrii jest symetralna boku AC
- i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Przyjmujemy, że jako uzasadnienie wystarczy rysunek w układzie współrzędnych.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- obliczy współrzędne środka odcinka AC : $S = (4, 4)$ oraz współczynnik kierunkowy symetralnej boku AC : $a = -3$

albo

- obliczy współrzędne środka odcinka AC : $S = (4, 4)$ oraz zapisze, że oś symetrii tego trójkąta przechodzi przez punkt B

albo

- obliczy współrzędne wektora AC oraz zapisze, że oś symetrii tego trójkąta przechodzi przez punkt B i jest prostopadła do wektora AC

albo

- zapisze równanie symetralnej boku AC : $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(10-x)^2 + (6-y)^2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

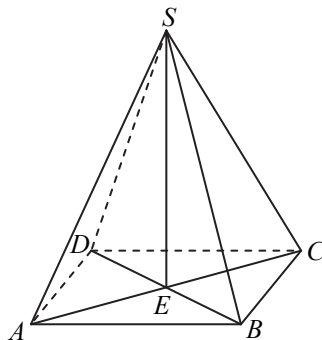
Zdający wyznaczy równanie osi symetrii trójkąta ABC : $y = -3x + 16$ ($3x + y - 16 = 0$).

Uwaga

Jeżeli zdający nie uzasadni, że osią symetrii trójkąta ABC jest symetralna boku AC (np. nie sporządzi rysunku w układzie współrzędnych albo po wyznaczeniu równania symetralnej boku AC nie sprawdzi, że punkt B leży na tej symetralnej), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

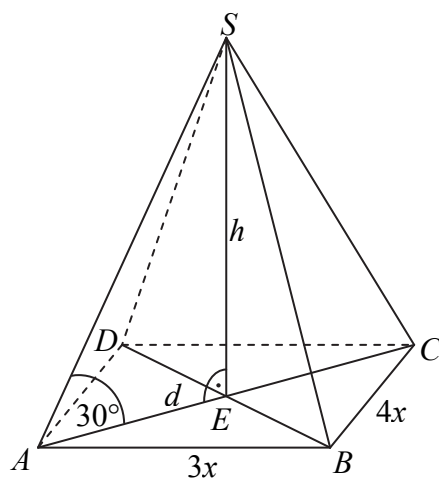
Zadanie 33. (4 pkt)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 3 : 4, a pole jest równe 192 (zobacz rysunek). Punkt E jest wyznaczony przez przecinające się przekątne podstawy, a odcinek SE jest wysokością ostrosłupa. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość ostrosłupa.



Rozwiązanie

Ponieważ stosunek długości boków prostokąta $ABCD$ jest równy $3:4$, więc możemy przyjąć, że $|AB| = 3x$ i $|BC| = 4x$. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak na rysunku.



Pole podstawy ostrosłupa jest równe

$$P_{ABCD} = 3x \cdot 4x = 12x^2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} 12x^2 &= 192, \\ x^2 &= 16. \end{aligned}$$

Stąd $x = 4$, więc $|AB| = 3 \cdot 4 = 12$ i $|BC| = 4 \cdot 4 = 16$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400.$$

Stąd $|AC| = 20$.

Tangens kąta SAE w trójkącie prostokątnym AES jest równy $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$. Stąd

$$h = \frac{1}{2}d \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot 192 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{640\sqrt{3}}{3}.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{640\sqrt{3}}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający obliczy długości boków prostokąta, będącego podstawą ostrosłupa: 16 i 12.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający obliczy długość przekątnej prostokąta $ABCD$: $|AC| = 20$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{640\sqrt{3}}{3}$.

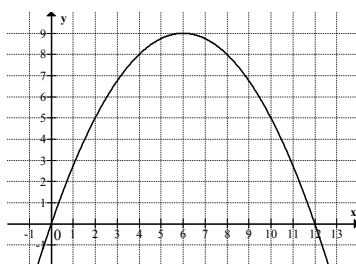
Zadanie 34. (5 pkt)

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0, 12)$. Największa wartość funkcji f jest równa 9. Oblicz współczynniki a , b i c funkcji f .

I sposób rozwiązania

Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest kwadratowa, więc $a \neq 0$. Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa $y_w = 9$ oraz $a < 0$.

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0, 12)$, więc miejscami zerowymi funkcji f są liczby 0 i 12. Możemy też narysować wykres funkcji f .



Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli – wykresu funkcji f jest równa

$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 12}{2} = 6$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = a \cdot (x - 6)^2 + 9$.

Dla argumentu 0 wartość funkcji jest równa 0, więc otrzymujemy równanie

$$0 = a \cdot (0 - 6)^2 + 9,$$

$$a = -\frac{1}{4}.$$

Wzór funkcji f ma więc postać $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 9$, a po przekształceniu do postaci ogólnej

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x.$$

Współczynniki a, b, c funkcji f są więc równe: $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$, $c = 0$.

II sposób rozwiązania

Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest kwadratowa, więc $a \neq 0$. Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa $y_w = 9$ oraz $a < 0$.

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0, 12)$, więc miejscami zerowymi funkcji f są liczby: 0 i 12. Stąd wynika, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f , jest równa $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 12}{2} = 6$.

Możemy więc zapisać wzór funkcji f w postaci iloczynowej

$$f(x) = a \cdot x \cdot (x - 12).$$

Wierzchołek $W(6, 9)$ paraboli będącej wykresem funkcji f jest jednym z punktów tego wykresu, więc

$$9 = a \cdot 6 \cdot (6 - 12),$$
$$a = -\frac{1}{4}.$$

Wzór funkcji f ma więc postać $f(x) = -\frac{1}{4}x(x - 12)$, a po przekształceniu do postaci ogólnej

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x,$$

z której odczytujemy współczynniki a, b, c : $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$, $c = 0$.

III sposób rozwiązania

Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest kwadratowa, więc $a \neq 0$. Przyjmuje ona największą wartość równą 9, zatem druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest równa $y_w = 9$ oraz $a < 0$.

Ponieważ zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0, 12)$, więc miejscami zerowymi funkcji f są liczby: 0 i 12. Stąd wynika, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f , jest równa $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 12}{2} = 6$.

Mamy zatem trzy punkty o współrzędnych $(0, 0)$, $(12, 0)$, $(6, 9)$ leżące na wykresie funkcji f .
Zatem

$$f(0) = 0 \text{ i } f(12) = 0 \text{ i } f(6) = 9,$$

czyli

$$c = 0 \text{ i } a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c = 0 \text{ i } a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 9,$$
$$c = 0, 12a + b = 0, 12a + 2b = 3,$$

Stąd $a = -\frac{1}{4}$ i $b = 3$ i $c = 0$.

Odpowiedź: $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$, $c = 0$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający zapisze

-m
iejsca zerowe funkcji f : $x_1 = 0$ i $x_2 = 12$

albo

-
drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f : $y_w = 9$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

-Z
apisze wzór funkcji f w postaci $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 12)$

albo

-O
bliczy współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji: $W = (6, 9)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający zapisze

- wzór funkcji f w postaci $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 12)$ i obliczy współrzędne wierzchołka jej wykresu: $W = (6, 9)$

albo

- wzór funkcji f w postaci $f(x) = a \cdot (x - 6)^2 + 9$

albo

- zapisze, że współczynnik $c = 0$ oraz zapisze jedno z równań wynikających z podstawienia do wzoru funkcji współrzędnych wierzchołka paraboli lub współrzędnych punktu przecięcia z osią Ox niebędącego początkiem układu współrzędnych: np.: $36a + 6b = 9$ lub $144a + 12b = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.

Zdający

- zapisze, że współczynnik $c = 0$ oraz zapisze układ równań
$$\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 9 \end{cases}$$

albo

- wyznaczy współczynnik a : $a = -\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający wyznaczy współczynniki a, b, c : $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$, $c = 0$.