

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-R1**

**CZERWIEC 2015**

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

|            |   |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|---|
| Nr<br>zad. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Odp.       | D | B | C | C | A |

## Schemat oceniania zadania 6. i zadań otwartych

### Zadanie 6. (0–2)

Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność  $|x| < |x - 1025|$ . W poniższe kratki wpisz – kolejno – cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jednostki otrzymanego wyniku.

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

### Odpowiedź

Szukaną liczbą jest 512.

### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**  
gdy zapisze cyfry: 5, 1, 2.

### Zadanie 7. (0–2)

Prosta o równaniu  $y = \frac{3}{4}x - \frac{61}{14}$  jest styczna do okręgu o środku  $S = (1, -4)$ . Wyznacz promień tego okręgu.

### Rozwiązanie

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej :  $-3x + 4y + \frac{122}{7} = 0$ . Obliczamy długość

$$\text{promienia okręgu: } r = \frac{\left| -3 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + \frac{122}{7} \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{35}.$$

### Odpowiedź

Promień okręgu ma długość  $r = \frac{11}{35}$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze równanie prostej w postaci:  $-3x + 4y + \frac{122}{7} = 0$  oraz wykorzysta wzór na

odległość punktu od prostej i zapisze  $r = \frac{\left| -3 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + \frac{122}{7} \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy promień okręgu  $r = \frac{11}{35}$ .

**Zadanie 8. (0–3)**

Niech  $a = \log_{12} 2$ . Wykaż, że  $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$ .

**I sposób rozwiązania**

Zmieniamy podstawę logarytmu i wykonujemy kolejno przekształcenia

$$\log_6 64 = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6} = \frac{\log_{12} 2^6}{\log_{12} \left( \frac{12}{2} \right)} = \frac{6 \log_{12} 2}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2} = \frac{6a}{1-a}. \text{ To kończy dowód.}$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający zapisze, że

$$\log_6 64 = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający zapisze, że

$$\log_6 64 = \frac{\log_{12} 2^6}{\log_{12} \left( \frac{12}{2} \right)}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

**II sposób rozwiązania**

Zauważamy kolejno, że

$$\frac{6a}{1-a} = \frac{6 \log_{12} 2}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2} = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6} = \log_6 64.$$

A to kończy dowód.

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający zapisze, że

$$\frac{6a}{1-a} = \frac{\log_{12} 2^6}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....2 p.**

Zdający zapisze, że

$$\frac{6a}{1-a} = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

### **III sposób rozwiązania**

Równość  $a = \log_{12} 2$  jest równoważna równości  $12^a = 2$ . Podzielimy tę równość stronami przez dodatnią liczbę  $2^a$ . Otrzymujemy równość

$$\frac{12^a}{2^a} = \frac{2}{2^a}, \text{ a zatem } 6^a = 2^{1-a}.$$

Ponieważ obie strony równości są dodatnie, więc ta równość jest równoważna równości

$$6^{6a} = 64^{1-a}, \text{ a zatem } 6^{\frac{6a}{1-a}} = 64.$$

Ostatnia równość oznacza, że  $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$ . To kończy dowód.

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający zapisze, że

$$\frac{12^a}{2^a} = \frac{2}{2^a}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....2 p.**

Zdający zapisze, że

$$6^{6a} = 64^{1-a}$$

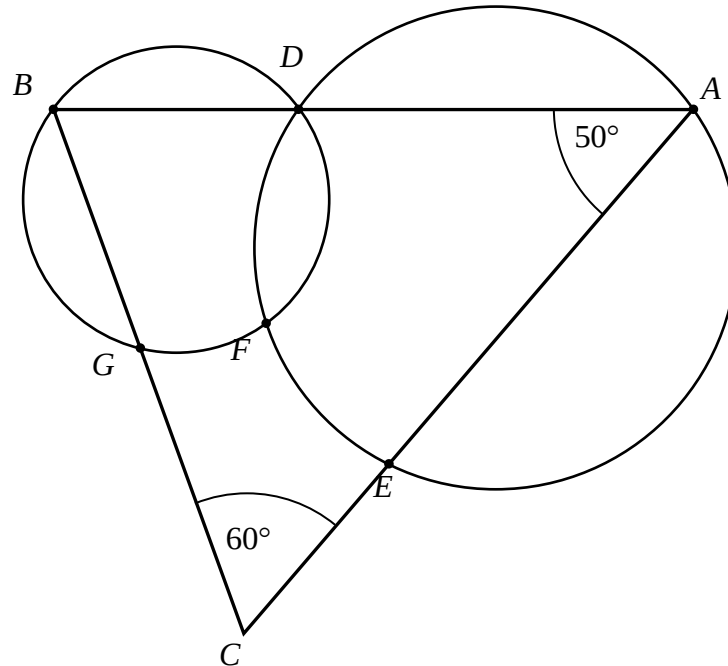
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 9. (0–3)**

W trójkącie  $ABC$  kąt wewnętrzny przy wierzchołku  $A$  ma miarę  $50^\circ$ , a kąt wewnętrzny przy wierzchołku  $C$  ma miarę  $60^\circ$ . Okrąg  $o_1$  przechodzi przez punkt  $A$  i przecina boki  $AB$  i  $AC$  trójkąta odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ . Okrąg  $o_2$  przechodzi przez punkt  $B$ , przecina okrąg  $o_1$  w punkcie  $F$  oraz w punkcie  $G$  leżącym wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Ponadto okrąg  $o_2$  przecina bok  $BC$  trójkąta w punkcie  $G$ .

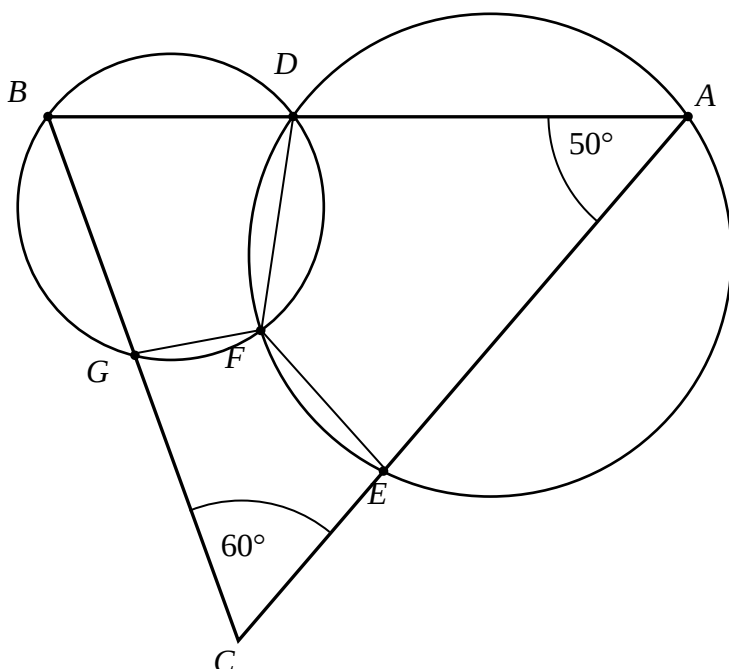


Udowodnij, że na czworokącie  $CEFG$  można opisać okrąg.

### **Rozwiązanie**

Trzeci kąt trójkąta  $ABC$  ma miarę:  $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$ .

Połączmy punkt  $F$  z punktami  $D$ ,  $E$  i  $G$ .



Czworokąty  $ADFE$  i  $BDFG$  są wpisane odpowiednio w okręgi  $O_1$  i  $O_2$ , więc

$|\sphericalangle DFE| = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$  oraz  $|\sphericalangle DFG| = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ . Zatem

$|\sphericalangle EFG| = 360^\circ - (130^\circ + 110^\circ) = 120^\circ$ .

Stąd  $|\sphericalangle EFG| + |\sphericalangle ECG| = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ , zatem na czworokącie  $CEFG$  można opisać okrąg, co kończy dowód.

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

Obliczenie miary kąta  $DFE$ :  $|\sphericalangle DFE| = 130^\circ$  **albo** miary kąta  $DFG$ :  $|\sphericalangle DFG| = 110^\circ$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Obliczenie miary kąta  $EFG$ :  $|\sphericalangle EFG| = 120^\circ$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Pełne uzasadnienie, że na czworokącie  $CEFG$  można opisać okrąg.

**Zadanie 10. (0–4)**

Rozwiąż równanie  $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$ , dla  $x \in (-\pi, 0)$ .

**Rozwiązanie**

Korzystamy ze wzoru  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  i zapisujemy równanie

$(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$  w postaci równoważnej  $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = 1 - 4\sin^2 x$ .

Przekształcamy to równanie i zapisujemy je w postaci iloczynowej:

$$(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x - 1 + 4\sin^2 x = 0,$$

$$(4\sin^2 x - 1) \cdot (\sin x + 1) = 0,$$

$$(2\sin x - 1) \cdot (2\sin x + 1) \cdot (\sin x + 1) = 0.$$

Warunek  $\sin x = \frac{1}{2}$  jest sprzeczny z założeniem  $x \in (-\pi, 0)$ , bo wtedy  $\sin x < 0$ .

Zatem warunki  $\sin x = -\frac{1}{2}$  i  $x \in (-\pi, 0)$  wyznaczają rozwiązanie  $x = -\frac{\pi}{6}$  lub  $x = -\frac{5\pi}{6}$ ,

a warunki  $\sin x = -1$  i  $x \in (-\pi, 0)$  wyznaczają rozwiązanie  $x = -\frac{\pi}{2}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze**

**trudności zadania..... 1 pkt**

Zapisanie równania z niewiadomą  $\sin x$ :  $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = 1 - 4\sin^2 x$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie równania w postaci alternatywy:  $\sin x = \frac{1}{2}$  lub  $\sin x = -\frac{1}{2}$ , lub  $\sin x = -1$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Rozwiązanie jednego z trzech równań w przedziale  $(-\pi, 0)$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Podanie wszystkich rozwiązań należących do przedziału  $(-\pi, 0)$ :

$$x = -\frac{\pi}{6} \text{ lub } x = -\frac{5\pi}{6}, \text{ lub } x = -\frac{\pi}{2}.$$

**Uwagi**

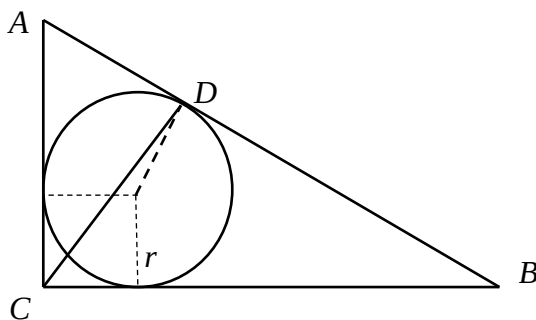
1. Jeżeli zdający nie odrzuci warunku  $\sin x = \frac{1}{2}$  oraz wyznaczy z pozostałych warunków poprawne rozwiązania równania, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający poda ogólne rozwiązania równania bez uwzględnienia przedziału  $(-\pi, 0)$ , to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 11. (0–4)**

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość przeciwprostokątnej  $AB$ :  $|AB| = 25$

i kosinus kąta  $\sphericalangle CAB$ :  $\cos \sphericalangle CAB = \frac{3}{5}$ .

Obliczamy promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny:

$$r = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = \frac{15 + 20 - 25}{2} = 5.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wyznaczamy długość odcinka  $AD$ :  $|AD| = 10$ .

Obliczamy  $|CD|$  stosując twierdzenie kosinusów dla trójkąta  $ACD$ :

$$|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2|AC||AD|\cos \sphericalangle CAD = 225 + 100 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 145.$$

$$\text{Stąd } |CD| = \sqrt{145}.$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt**

Zdający obliczy długość przeciwprostokątnej i kosinusa kąta ostrego trójkąta:

$$|AB| = 25, \cos \sphericalangle CAB = \frac{3}{5}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Zdający obliczy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt:  $r = 5$ .



**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Obliczenie długości odcinka  $AD$ :  $|AD| = 10$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Wyznaczenie długości odcinka  $CD$ :  $|CD| = \sqrt{145}$ .

**Uwaga**

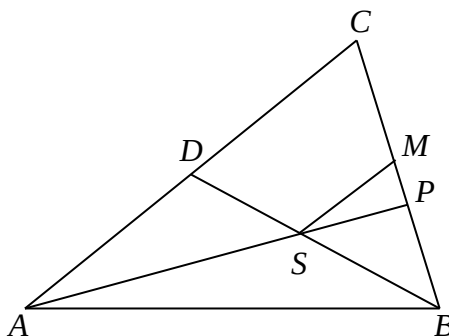
Jeżeli zdający zakłada, że odcinek  $CD$  jest prostopadły do przeciwprostokątnej  $AB$  i z tego korzysta, to za całe zadanie może otrzymać nie więcej niż **1 punkt**.

**Zadanie 12. (0–4)**

Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $|BC| = a$ . Z wierzchołka  $B$  poprowadzono środkową  $BD$  do boku  $AC$ . Punkt  $S$  jest środkiem odcinka  $BD$ . Przez punkty  $A$  i  $S$  poprowadzono prostą, która przecięła bok  $BC$  w punkcie  $P$ . Wykaż, że długość odcinka  $CP$  jest równa  $\frac{2}{3}a$ .

**Rozwiązanie**

Rysujemy trójkąt  $ABC$ , zaznaczamy punkty  $D, S, P$  i rysujemy odcinek  $SM$  równoległy do  $AC$  i taki, że  $M \in BC$ .



Trójkąty  $BSM$  i  $BDC$  są podobne, zatem  $\frac{|BS|}{|DB|} = \frac{|BM|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ , stąd  $|BM| = |CM| = \frac{1}{2}a$

i  $|MS| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{4}|AC|$

Trójkąty  $PSM$  i  $PAC$  są podobne, zatem  $\frac{|PM|}{|MS|} = \frac{|PC|}{|AC|}$ . Stąd  $\frac{|MP|}{|MS|} = \frac{|PM| + |CM|}{|AC|}$

i  $\frac{|MP|}{\frac{1}{4}|AC|} = \frac{|MP| + \frac{1}{2}a}{|AC|}$ , czyli  $4|MP| = |MP| + \frac{1}{2}a$ . Stąd  $|MP| = \frac{1}{6}a$ .

Szukany odcinek ma więc długość:  $|CP| = |MC| + |MP| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a = \frac{2}{3}a$ , co należało wykazać.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający zauważył, że trójkąty  $BSM$  i  $BDC$  są podobne i zapisze proporcję  $\frac{|BS|}{|DB|} = \frac{|BM|}{|BC|} = \frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający obliczy długość odcinka  $CM$  oraz wyznaczy długość odcinka  $MS$  w zależności od długości odcinka  $AC$ :  $|CM| = \frac{1}{2}a$ ,  $|MS| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{4}|AC|$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający obliczy długość odcinka  $MP$ :  $|MP| = \frac{1}{6}a$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowania, tzn. wyznaczy długość odcinka:  $|CP| = \frac{2}{3}a$ .

### Zadanie 13. (0–5)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

#### Rozwiązanie

W zapisie liczby mają być co najwyżej dwie dwójki, tzn. zero dwójek lub jedna dwójka, lub dwie dwójki.

1. Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie nie ma dwójki: na pierwszym miejscu występuje dowolna spośród 8 cyfr (bez zera i dwójki), na drugim jedna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim jedna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym jedna z 9 cyfr (bez dwójki) i na piątym miejscu jedna z cyfr należących do zbioru  $\{0,4,6,8\}$ . Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych bez dwójki jest:  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 23328$ .

2. Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie jest dokładnie jedna dwójka:

a) dwójka występuje na pierwszym miejscu, na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru  $\{0,4,6,8\}$ . Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na pierwszym miejscu jest:  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2916$ .

**b)** dwójka występuje na drugim miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru  $\{0,4,6,8\}$ . Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na drugim miejscu jest:  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$ .

**c)** dwójka występuje na trzecim miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru  $\{0,4,6,8\}$ . Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na trzecim miejscu jest:  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$ .

**d)** dwójka występuje na czwartym miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru  $\{0,4,6,8\}$ . Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na czwartym miejscu jest:  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$ .

**e)** dwójka na piątym miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki). Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na piątym miejscu jest:  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ .

Stąd wszystkich liczb pięciocyfrowych z jedną dwójką jest:

$$2916 + 2592 + 2592 + 2592 + 5832 = 16524.$$

**3.** Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie są dokładnie dwie dwójki:

**a)** jedna dwójka występuje na pierwszym miejscu, druga na drugim, trzecim lub czwartym, zatem każdą z pozostałych środkowych dwóch cyfr wybieramy spośród 9 cyfr (bez dwójki) i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru  $\{0,4,6,8\}$ . Tych liczb jest więc:  
 $3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 972$ .

**b)** jedna dwójka występuje na pierwszym miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem każdą z pozostałych środkowych trzech cyfr wybieramy spośród 9 cyfr (bez dwójki). Tych liczb jest więc:  $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ .

**c)** jedna dwójka występuje na drugim miejscu, a druga dwójka na trzecim lub czwartym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera) pozostałą środkową spośród 9 cyfr (bez dwójki) i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru  $\{0,4,6,8\}$ . Tych liczb jest więc:  $2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 4 = 576$ .

**d)** jedna dwójka występuje na drugim miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), pozostałe dwie środkowe cyfry spośród 9 (bez dwójki). Tych liczb jest więc:  $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ .

**e)** jedna dwójka występuje na trzecim miejscu, a druga dwójka na czwartym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), drugą spośród 9 i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru  $\{0,4,6,8\}$ . Tych liczb jest więc:  $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$ .

f) jedna dwójka występuje na trzecim lub na czwartym miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), drugą spośród 9 (bez dwójki) i trzecią lub czwartą cyfrę spośród 9 (bez dwójki). Tych liczb jest więc:  
 $2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 1296$ .

Stąd wszystkich liczb pięciocyfrowych z dwiema dwójkami jest  
 $972 + 729 + 576 + 648 + 288 + 1296 = 4509$ .

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki jest:  $23328 + 16524 + 4509 = 44361$ .

**Odpowiedź:** Jest 44361 liczb parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 p.

Zapisanie, że szukamy liczb, w których zapisie występuje zero, jedna lub dwie dwójki i obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych bez dwójki:  $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 23328$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 3 p.

Obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie jest dokładnie jedna dwójka:  $2916 + 2592 + 2592 + 2692 + 5832 = 16524$ .

### Uwaga

Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy pominie jeden przypadek.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 p.

Obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie są dwie dwójki:  $972 + 729 + 576 + 648 + 288 + 1296 = 4509$ .

### Uwaga

Zdający otrzymuje **3 punkty**, gdy pominie jeden przypadek.

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 p.

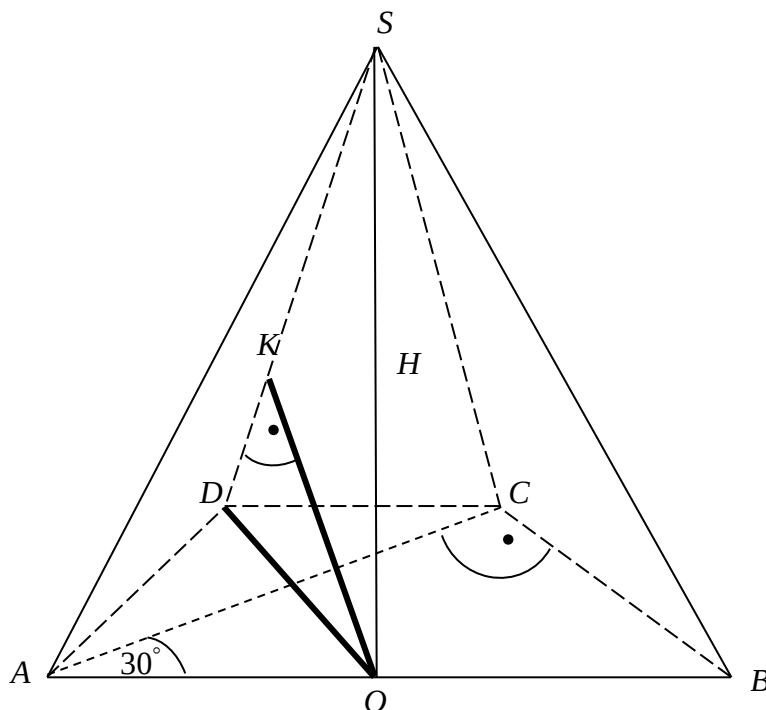
Obliczenie, ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki:  $23328 + 16524 + 4509 = 44361$ .

**Zadanie 14. (0–5)**

Podstawą ostrosłupa  $ABCD$  jest trapez  $ABCD$ . Przekątna  $AC$  tego trapezu ma długość  $8\sqrt{3}$ , jest prostopadła do ramienia  $BC$  i tworzy z dłuższą podstawą  $AB$  tego trapezu kąt o mierze  $30^\circ$ . Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość  $4\sqrt{5}$ . Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej  $SD$ .

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości, zatem spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i trapez  $ABCD$  jest trapezem równoramiennym, gdzie  $|AD|=|BC|$ . Przekątna  $d$  trapezu będącego podstawą ostrosłupa jest prostopadła do ramienia  $|BC|$ . Stąd środek  $O$  okręgu opisanego na podstawie jest środkiem dłuższej podstawy  $AB$  trapezu. Zatem ściana boczna  $ABS$  jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Z trójkąta  $ABC$  mamy  $|BC|=|AD|=8$ .

Dalej wyznaczamy  $|\angle ODA|=60^\circ$  i  $|AO|=|OD|$ , czyli trójkąt  $AOD$  jest trójkątem równobocznym o boku długości 8.

Z trójkąta  $SOD$  lub  $AOS$  mamy  $H^2 + 8^2 = (4\sqrt{5})^2$ . Stąd  $H = 4$ .

Z trójkąta  $SOD$  otrzymujemy:  $|OK| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ . Krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości, zatem spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i trapez  $ABCD$  jest trapezem równoramiennym, gdzie  $|AD|=|BC|$ . Przekątna  $d$

trapezu będącego podstawą ostrosłupa jest prostopadła do ramienia  $|BC|$ . Stąd środek  $O$  okręgu opisanego na podstawie jest środkiem dłuższej podstawy  $AB$  trapezu. Zatem ściana boczna  $ABS$  jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Z trójkąta  $ABC$  mamy  $|BC| = |AD| = 8$ .

Dalej mamy  $|\sphericalangle ODA| = 60^\circ$  i  $|AO| = |OD|$ , czyli trójkąt  $AOD$  jest trójkątem równobocznym o boku długości 8.

Z trójkąta  $SOD$  lub  $AOS$  mamy  $H^2 + 8^2 = (4\sqrt{5})^2$ . Stąd  $H = 4$ .

Z trójkąta  $SOD$  otrzymujemy:  $|OK| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zauważenie, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem krawędzi  $AB$  podstawy i ściana boczna  $ABS$  jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Wyznaczenie długości ramienia trapezu:  $|BC| = |AD| = 8$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Obliczenie wysokości ostrosłupa:  $H = 4$  i poprawnie zinterpretowanie odległości spodka wysokości od krawędzi bocznej  $SD$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....4 pkt**

Obliczenie długości odcinka  $OK$  z błędami rachunkowymi.

**Rozwiązanie pełne .....5 pkt**

Obliczenie długości odcinka  $OK$ :  $|OK| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ .

**Zadanie 15. (0–6)**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{m^2 + m - 6}{m - 5}x^2 - (m - 2)x + m - 5$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Wyznacz całkowite wartości parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

**Rozwiązanie**

Założenie  $m \neq 5$ .

Gdy  $\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} = 0$ , czyli  $(m + 3)(m - 2) = 0$ , a więc dla  $m = -3$  lub  $m = 2$  funkcja jest

liniowa i nie spełnia warunków zadania. Zatem  $m \neq 5$ ,  $m \neq -3$  i  $m \neq 2$ .

Wówczas funkcja  $f$  jest kwadratowa oraz:

- przyjmuje wartość największą, gdy  $\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} < 0$ ,
- ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Delta > 0$ ,
- ma dwa miejsca zerowe o jednakowych znakach, gdy dodatkowo  $x_1 \cdot x_2 > 0$ .

Rozwiązujemy nierówność  $\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} < 0$ , otrzymując kolejno

$$\begin{aligned}\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} &< 0, \\ \frac{(m + 3)(m - 2)}{m - 5} &< 0, \\ (m + 3)(m - 2)(m - 5) &< 0.\end{aligned}$$

Zatem  $m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)$ .

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ , otrzymując kolejno

$$\begin{aligned}(-(m - 2))^2 - 4 \cdot \frac{m^2 + m - 6}{m - 5} \cdot (m - 5) &> 0, \\ (m - 2)^2 - 4 \cdot (m^2 + m - 6) &> 0, \\ (m - 2)^2 - 4 \cdot (m + 3)(m - 2) &> 0, \\ (m - 2)((m - 2) - 4(m + 3)) &> 0, \\ (m - 2)(m - 2 - 4m - 12) &> 0, \\ (m - 2)(-3m - 14) &> 0.\end{aligned}$$

Zatem  $-\frac{14}{3} < m < 2$ .

Rozwiązujemy nierówność  $x_1 \cdot x_2 > 0$ . Możemy wykorzystać wzór Viète'a na iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego i wtedy nierówność ma postać

$$\frac{m - 5}{\frac{m^2 + m - 6}{m - 5}} > 0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność, otrzymując kolejno

$$\frac{(m-5)^2}{m^2+m-6} > 0,$$

$$(m-5)^2(m-2)(m+3) > 0,$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty).$$

Otrzymaliśmy zatem  $m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)$  i  $m \in \left(-\frac{14}{3}, 2\right)$  i  $m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$ .

Stąd  $m \in \left(-\frac{14}{3}, -3\right)$ . Jediną liczbą całkowitą z tego przedziału jest  $m = -4$ .

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na zapisaniu warunku, przy którym funkcja  $f$  jest kwadratowa i ma dwa różne pierwiastki, a następnie rozwiązaniu nierówności

$$\left(-(m-2)\right)^2 - 4 \cdot \frac{m^2+m-6}{m-5} \cdot (m-5) > 0: -\frac{14}{3} < m < 2.$$

Za poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze  $\Delta \geq 0$ , to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na zapisaniu warunku, przy którym funkcja kwadratowa  $f$  przyjmuje

wartość największą:  $\frac{m^2+m-6}{m-5} < 0$

oraz ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach:  $\frac{m-5}{\frac{m^2+m-6}{m-5}} > 0.$

Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

- Za rozwiązanie nierówności  $\frac{m^2+m-6}{m-5} < 0: m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)$  zdający otrzymuje **2 punkty**.

- Za rozwiązanie nierówności  $x_1 \cdot x_2 > 0$  zdający otrzymuje **2 punkty**.

Przy czym w tej części:

**1 punkt** zdający otrzymuje za zapisanie wyrażenia  $x_1 \cdot x_2$  w postaci  $\frac{m-5}{\frac{m^2+m-6}{m-5}},$

**2 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności  $\frac{(m-5)^2}{m^2+m-6} > 0:$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$$



Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego oraz podaniu liczby całkowitej spełniającej warunki zadania:  $m = -4$ .

Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **1 punkt**.

### **Uwaga**

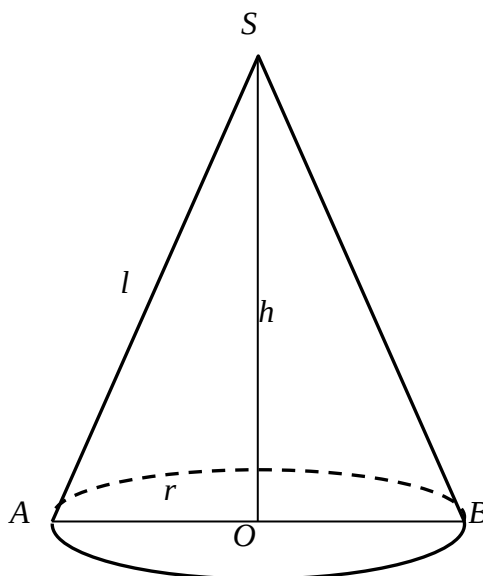
Za ostatni etap **1 punkt** przyznajemy jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I, rozwiąże nierówność i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże co najmniej jedną nierówność z etapu II i poda wszystkie całkowite wartości parametru  $m$ , dla których są spełnione warunki zadania.

### **Zadanie 16. (0–7)**

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

### **Przykładowe rozwiązanie (I sposób)**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z warunków zadania wynika, że  $l + r = 2$ , skąd  $l = 2 - r$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS otrzymujemy  $|AS|^2 = |AO|^2 + |OS|^2$ , czyli

$$l^2 = r^2 + h^2.$$

Stąd  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ . Ale  $l = 2 - r$ , więc

$$h = \sqrt{(2-r)^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r + r^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r} = 2\sqrt{1-r}.$$

Objętość stożka jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2\sqrt{1-r} = \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot \sqrt{1-r} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{r^4(1-r)}.$$

Objętość jest zatem funkcją zmiennej  $r$  i jest określona wzorem

$$V(r) = \frac{2}{3} \pi \sqrt{r^4(1-r)} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{r^4 - r^5}.$$

Z warunków geometrycznych zadania wynika, że  $0 < r < 1$ , a więc dziedziną funkcji  $V$  jest przedział  $(0,1)$ .

Rozważmy funkcję  $f(r) = r^4 - r^5$  określoną dla każdej liczby rzeczywistej  $r$ .

Pochodna funkcji  $f$  jest równa

$$f'(r) = 4r^3 - 5r^4 = r^3(4 - 5r).$$

Miejscami zerowymi pochodnej są  $r = 0$  lub  $r = \frac{4}{5}$ .

Pochodna funkcji jest ujemna dla  $r \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$ , a dodatnia dla  $r \in \left(0, \frac{4}{5}\right)$ .

Zatem w przedziale  $\left(0, \frac{4}{5}\right)$  funkcja  $V$  jest rosnąca, a w przedziale  $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$  malejąca. W punkcie  $r = \frac{4}{5}$  osiąga maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą jej wartością. Wartość ta jest równa

$$V\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3} \pi \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{16}{25} \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{32\sqrt{5}}{375} \pi.$$

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- zapisanie wysokości stożka jako funkcji zmiennej  $r$ :  $h = \sqrt{4-4r}$ ,
- zapisanie objętości stożka jako funkcji jednej zmiennej:  $V(r) = \frac{2}{3} \pi r^2 \sqrt{1-r}$
- określenie dziedziny funkcji:  $0 < r < 1$ .

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

#### **Uwaga**

Jeśli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu dziedziny albo pominie wyznaczenie dziedziny, ale funkcja objętości zostanie zapisana prawidłowo, to otrzymuje za tę część **2 punkty** i może otrzymać punkty, które odpowiadają kolejnym etapom rozwiązania zadania.

b) Drugi etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji  $f(r) = r^4 - r^5$ :  $f'(r) = 4r^3 - 5r^4$
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej:  $r = 0$  lub  $r = \frac{4}{5}$
- uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja  $V$  posiada wartość największą dla  $r = \frac{4}{5}$ .

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap (1 punkt) – końcowe obliczenia.

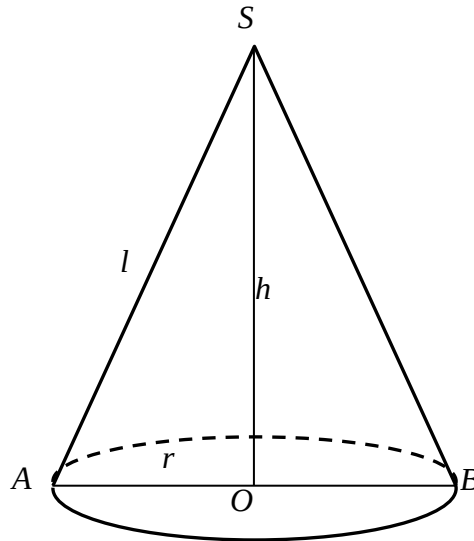
$$\text{Obliczenie objętości stożka dla } r = \frac{4}{5}: V\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi.$$

**Uwaga**

Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.

**Przykładowe rozwiązanie (II sposób)**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z warunków zadania wynika, że  $l + r = 2$ , skąd  $l = 2 - r$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS otrzymujemy  $|AS|^2 = |AO|^2 + |OS|^2$ , czyli

$$l^2 = r^2 + h^2.$$

Stąd  $r^2 = l^2 - h^2$ . Ale  $l = 2 - r$ , więc

$$r^2 = (2 - r)^2 - h^2,$$

$$r^2 = 4 - 4r + r^2 - h^2,$$

$$4r = 4 - h^2,$$

$$r = 1 - \frac{1}{4}h^2.$$

Objętość stożka jest więc równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{4}h^2\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{16}h^4\right) \cdot h = \frac{1}{3}\pi \left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right).$$

Objętość jest zatem funkcją zmiennej  $h$  i jest określona wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right).$$

Z warunków geometrycznych zadania wynika, że  $0 < h < 2$ , a więc dziedziną funkcji  $V$  jest przedział  $(0, 2)$ .

Rozważmy funkcję  $f(h) = h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5$  określoną dla każdej liczby rzeczywistej  $h$ .

Pochodna funkcji  $f$  jest równa

$$f'(h) = 1 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{16}h^4.$$

Miejscami zerowymi pochodnej są  $h = -2$  lub  $h = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$  lub  $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  lub  $h = 2$ .

Pochodna funkcji jest ujemna dla  $h \in \left(-2, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2\right)$ , a dodatnia dla

$$h \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup (2, +\infty).$$

Zatem w przedziale  $\left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$  funkcja  $V$  jest rosnąca, a w przedziale  $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2\right)$  malejąca.

W punkcie  $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  osiąga maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą jej wartością. Wartość ta jest równa

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right)$$

$$V\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^3 + \frac{1}{16}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^5\right) = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi.$$

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- zapisanie promienia podstawy stożka jako funkcji zmiennej  $h$ :  $r = 1 - \frac{1}{4}h^2$ ,
- zapisanie objętości stożka jako funkcji jednej zmiennej:  

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right)$$
- określenie dziedziny funkcji:  $0 < h < 2$ .

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

#### **Uwaga**

Jeśli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu dziedziny albo pominie wyznaczenie dziedziny, ale funkcja objętości zostanie zapisana prawidłowo, to otrzymuje za tę część **2 punkty** i może otrzymać punkty, które odpowiadają kolejnym etapom rozwiązania zadania.

b) Drugi etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji  $f(h) = h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5$ :  $f'(h) = 1 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{16}h^4$

- obliczenie miejsc zerowych pochodnej:  $h = -2$  lub  $h = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$  lub  $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  lub  $h = 2$ .
- uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja  $V$  posiada wartość największą dla  $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap (**1 punkt**) – końcowe obliczenia.

Obliczenie objętości stożka dla  $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ :  $V\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi$ .

**Uwaga**

Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.