

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA DO 2014  
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**(Wersja uaktualniona; 30 czerwca 2015r.)**

**MAJ 2015**

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

**Zadanie 1. (0–1)**

| Obszar standardów              | Opis wymagań                                                                                        | Poprawna odp. (1 p.) |                  |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d). | <b>Wersja I</b>      | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                     | <b>C</b>             | <b>A</b>         |

**Zadanie 2. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                |                 |                  |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $ x - a  = b$ , $ x - a  > b$ , $ x - a  < b$ (1.f). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                | <b>B</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 3. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                 |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                 | <b>D</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 4. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                               |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                               | <b>A</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 5. (0–1)**

|                                                    |                                                                                               |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (2.f). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                               | <b>B</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 6. (0–1)**

|                                          |                                                                                                                                                                                                                                    |                 |                  |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych (2.d). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                          |                                                                                                                                                                                                                                    | <b>A</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 7. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                              |                 |                  |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$ , $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.e). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                              | <b>B</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 8. (0–1)**

|                                          |                                                                                                                  |                 |                  |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji miejsce zerowe oraz sporządza wykresy funkcji liniowych (4.b,e). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                          |                                                                                                                  | <b>B</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 9. (0–1)**

|                                                    |                                                           |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej (4.f). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                           | <b>C</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 10. (0–1)**

|                                          |                                                                                                 |                 |                  |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                          |                                                                                                 | <b>B</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 11. (0–1)**

|                                |                                                                                                                                             |                 |                  |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                                             | <b>A</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 12. (0–1)**

|                                |                                                                                                                                             |                 |                  |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                |                                                                                                                                             | <b>C</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 13. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                          |                 |                  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicję i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych (6.a). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                          | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 14. (0–1)**

|                                   |                                                                                                                                                      |                 |                  |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.d). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                   |                                                                                                                                                      | <b>D</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 15. (0–1)**

|                                   |                                                                             |                 |                  |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                   |                                                                             | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 16. (0–1)**

|                                                    |                                                                                   |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (7.b). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                   | <b>B</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 17. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                             |                 |                  |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątność prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                             | <b>A</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 18. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                |                 |                  |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej, mając dane dwa jej punkty (8.b). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                | <b>A</b>        | <b>C</b>         |

**Zadanie 19. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                       |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej (8.e). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                       | <b>C</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 20. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                 |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.f). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                 | <b>A</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 21. (0–1)**

|                                                    |                                                                                            |                 |                  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu (8.g). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                            | <b>C</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 22. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                        |                 |                  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii (9.b). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                        | <b>C</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 23. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                             |                 |                  |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                             | <b>D</b>        | <b>A</b>         |

**Zadanie 24. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                            |                 |                  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe zestawu danych (10.a). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                                            | <b>D</b>        | <b>B</b>         |

**Zadanie 25. (0–1)**

|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                        |                 |                  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenia znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d). | <b>Wersja I</b> | <b>Wersja II</b> |
|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>B</b>        | <b>D</b>         |

**Zadanie 26. (0–2)**

Rozwiąż nierówność  $2x^2 - 4x > (x + 3)(x - 2)$ .

|                                |                                                                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia (2.a). |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$  przekształcamy w sposób równoważny

$$y^2 + 4x^2 - 8xy + 4y^2 \geq 0,$$

$$y^2 + (2x - 2y)^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ , gdyż kwadrat każdej liczby jest nieujemny i suma kwadratów liczb nieujemnych również jest nieujemna.

To kończy dowód.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej  $y^2 + (2x - 2y)^2 \geq 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**II sposób rozwiązania**

Nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$  możemy potraktować jak nierówność kwadratową z niewiadomą  $x$  lub – analogicznie – z niewiadomą  $y$ . Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie nierówności jest równy

$$\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (5y^2) = -16y^2 \leq 0.$$

Stąd i z faktu, że współczynnik przy  $x^2$  trójmianu  $f(x) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$  jest dodatni wynika, że trójmian ten przyjmuje tylko wartości nieujemne. To kończy dowód.

**Schemat oceniania II sposobu**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu  $f(x) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$ :  $\Delta = -16y^2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje.....2 p.**  
gdy wyznaczy wyróżnik trójmianu  $f(x) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$ , zapisze, że jest on niedodatni i wyciągnie wniosek, że trójmian przyjmuje tylko wartości nieujemne.

### III sposób rozwiązania

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ . Stąd wynika, że prawdziwa jest nierówność  $4x^2 + 4y^2 \geq 8xy$ , czyli  $4x^2 - 8xy + 4y^2 \geq 0$ .  
Zatem, dla dowolnych liczb  $x, y$  mamy  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 4x^2 - 8xy + 4y^2 \geq 0$ .  
To kończy dowód.

### Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje.....1 p.**  
gdy zapisze, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwe są nierówności  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 4x^2 - 8xy + 4y^2$  oraz  $4x^2 + 4y^2 \geq 8xy$  (lub  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ).

**Zdający otrzymuje.....2 p.**  
gdy przeprowadzi pełny dowód.

### IV sposób rozwiązania

Gdy co najmniej jedna z liczb  $x, y$  jest równa 0, to nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$  jest prawdziwa, gdyż suma trzech liczb, z których co najmniej dwie są równe 0, a trzecia nieujemna, jest nieujemna.

Gdy liczby  $x, y$  są przeciwnych znaków, to  $xy < 0$ , więc  $-8xy > 0$ . Zatem nierówność  $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$  jest prawdziwa, gdyż lewa jej strona jest sumą trzech liczb dodatnich.

Pozostaje wykazać prawdziwość nierówności w przypadku, gdy liczby  $x, y$  są tego samego znaku.

Zauważmy najpierw, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność

$$(2x - \sqrt{5}y)^2 \geq 0, \text{ czyli } 4x^2 - 4\sqrt{5}xy + 5y^2 \geq 0.$$

Wykażemy teraz prawdziwość nierówności

$$4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 4x^2 - 4\sqrt{5}xy + 5y^2,$$

równoważnie

$$-8xy \geq -4\sqrt{5}xy,$$

$$xy \leq \frac{\sqrt{5}}{2}xy.$$

Skoro  $x$  i  $y$  są tego samego znaku, to  $xy > 0$ , więc dzieląc obie strony nierówności przez  $xy$ , otrzymujemy nierówność równoważną  $1 \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ , co jest prawdą. To kończy dowód.

### Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje.....1 p.**  
gdy wykaże prawdziwość nierówności w przypadku, gdy co najmniej jedna z liczb  $x, y$  jest równa 0 oraz w przypadku, gdy liczby  $x, y$  są przeciwnych znaków, a w przypadku, gdy  $x, y$  są tego samego znaku zauważy, że prawdziwa jest nierówność  $(2x - \sqrt{5}y)^2 \geq 0$ .

**Zdający otrzymuje .....** 2 p.  
gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Uwaga**

Gdy zdający sprawdza jedynie prawdziwość nierówności dla konkretnych liczb  $x$  i  $y$ , to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 27. (0–2)**

Rozwiąż nierówność  $2x^2 - 4x \geq x - 2$ .

|                                                    |                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a). |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego, a następnie wybranie i zapisanie odpowiedniego zbioru rozwiązań.

Pierwszy etap może być realizowany na 2 sposoby:

I sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Zapisujemy nierówność w postaci  $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$  i znajdujemy pierwiastki trójmianu  $2x^2 - 5x + 2$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \text{ i stąd } x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

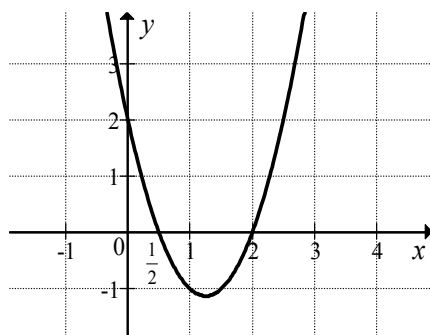
$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = 1, \text{ stąd } x_1 = \frac{1}{2} \text{ oraz } x_2 = 2$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu, lub zaznaczając je na wykresie

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2 \text{ lub } (x-2)[2x-1] \text{ lub } 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$$

lub



## II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 5x + 2$  i zapisujemy nierówność w postaci, np.  $2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \geq 0$ , a następnie

- przekształcamy nierówność tak, aby jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej
$$\left[\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}\right] \cdot \left[\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{3}{4}\right] \geq 0,$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{4}{2}\right) \geq 0,$$

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej, korzystając z własności wartości bezwzględnej
$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \geq \frac{9}{16},$$
$$\left|x - \frac{5}{4}\right| \geq \frac{3}{4}.$$

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \langle 2, +\infty)$  lub  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \langle 2, +\infty)$ .

## **Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje..... 1 p.**  
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 2$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np.  $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - 2\right)$  i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność,
  - zapisze nierówność  $\left|x - \frac{5}{4}\right| > \frac{3}{4}$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.:  $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze nierówność, np.  $\left|x + \frac{5}{2}\right| < \frac{1}{2}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje .....** **2 p.**  
gdy:

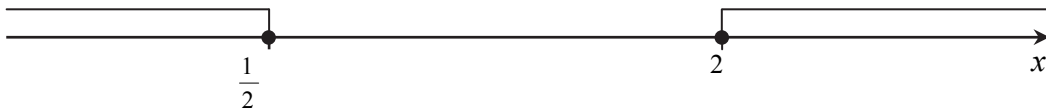
- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \langle 2, +\infty \rangle$  lub  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \langle 2, +\infty \rangle$   
lub  $(x \leq \frac{1}{2} \text{ lub } x \geq 2)$ ,

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności  
w postaci:  $x \leq \frac{1}{2}$  lub  $x \geq 2$ ,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



#### **Uwagi**

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci:  $x \leq \frac{1}{2}$  i  $x \geq 2$ ,  $x \leq \frac{1}{2}$  oraz  $x \geq 2$ , itp.
2. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 2$  i zapisze, np.  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \langle 2, +\infty \rangle$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 28. (0–2)**

Rozwiąż równanie  $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$ .

|                                                    |                                                                                                        |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d). |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie (I sposób)** „grupowanie wyrazów”

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$$x(4x^2 - 1) + (4x^2 - 1) = 0 \quad \text{lub} \quad 4x^2(x+1) - (x+1) = 0.$$

Stąd  $(x+1)(4x^2 - 1) = 0$ , czyli  $(x+1)(2x-1)(2x+1) = 0$ .

Zatem  $x = -1$  lub  $x = -\frac{1}{2}$  lub  $x = \frac{1}{2}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje..... 1 p.**

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu,

$$(x+1)(4x^2 - 1) = 0 \quad \text{lub} \quad (x+1)(2x-1)(2x+1) = 0$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje..... 2 p.**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = -1$  lub  $x = -\frac{1}{2}$  lub  $x = \frac{1}{2}$ .

**Rozwiązanie (II sposób)** „metoda dzielenia”

Stwierdzamy, że liczba  $-1$  jest pierwiastkiem wielomianu  $4x^3 + 4x^2 - x - 1$ . Dzielimy wielomian przez dwumian  $x+1$ . Otrzymujemy iloraz  $4x^2 - 1$ . Zapisujemy równanie w postaci  $(x+1)(4x^2 - 1) = 0$ . Stąd  $(x+1)(2x-1)(2x+1) = 0$ , czyli  $x = -1$  lub  $x = -\frac{1}{2}$  lub

$$x = \frac{1}{2}$$

albo

stwierdzamy, że liczba  $-\frac{1}{2}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $4x^3 + 4x^2 - x - 1$ . Dzielimy wielomian przez dwumian  $x + \frac{1}{2}$ . Otrzymujemy iloraz  $4x^2 + 2x - 2$ . Zapisujemy równanie w postaci  $\left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 2x - 2) = 0$ .

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 2x - 2) = 0.$$

Stąd  $4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) = 0$ , czyli  $x = -\frac{1}{2}$  lub  $x = \frac{1}{2}$  lub  $x = -1$ ,

albo

stwierdzamy, że liczba  $\frac{1}{2}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $4x^3 + 4x^2 - x - 1$ . Dzielimy wielomian przez dwumian  $x - \frac{1}{2}$ . Otrzymujemy iloraz  $4x^2 + 6x + 2$ . Zapisujemy równanie w postaci  $\left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 6x + 2) = 0$ .

Stąd  $4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = 0$ , czyli  $x = \frac{1}{2}$  lub  $x = -1$  lub  $x = -\frac{1}{2}$ .

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- podzieli wielomian  $4x^3 + 4x^2 - x - 1$  przez dwumian  $x + 1$ , otrzyma iloraz  $4x^2 - 1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- podzieli wielomian  $4x^3 + 4x^2 - x - 1$  przez dwumian  $x + \frac{1}{2}$ , otrzyma iloraz  $4x^2 + 2x - 2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- podzieli wielomian  $4x^3 + 4x^2 - x - 1$  przez dwumian  $x - \frac{1}{2}$ , otrzyma iloraz  $4x^2 + 6x + 2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

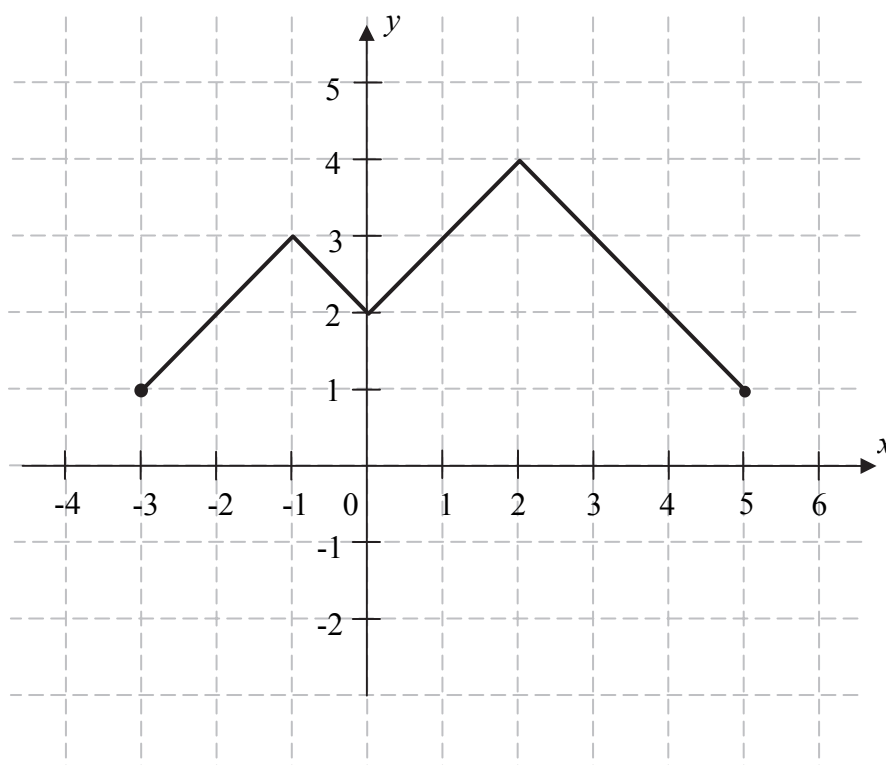
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = -1$  lub  $x = -\frac{1}{2}$  lub  $x = \frac{1}{2}$ .

### Uwaga

Jeżeli w trakcie doprowadzania lewej strony równania do postaci iloczynu zdający popełni więcej niż jedną usterkę, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 29. (0–2)**

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$ .



Funkcja  $h$  określona jest dla  $x \in \langle -3, 5 \rangle$  wzorem  $h(x) = f(x) + q$ , gdzie  $q$  jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiemy, że jednym z miejsc zerowych funkcji  $h$  jest liczba  $x_0 = -1$ .

- Wyznacz  $q$ .
- Podaj wszystkie pozostałe miejsca zerowe funkcji  $h$ .

|                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę i zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, ma stały znak, szkicuje na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ wykresy funkcji $y = f(x+a)$ , $y = f(x)+a$ , $y = -f(x)$ , $y = f(-x)$ (4.b,d). |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

a) Zauważamy, że wykres funkcji  $h$  otrzymamy z wykresu funkcji  $f$  przesuwając go o 3 jednostki w dół wzdłuż osi  $Oy$ . Wzór funkcji  $h$  ma zatem postać  $h(x) = f(x) - 3$ . Stąd  $q = -3$ .

b) Podajemy pozostałe miejsca zerowe funkcji  $h$ :  $x = 1$ ,  $x = 3$ .

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje..... 1 p.  
gdy:

- poda  $q = -3$  i nie poda pozostałych miejsc zerowych funkcji  $h$  lub poda je błędnie

albo

- poda pozostałe miejsca zerowe funkcji  $h$ : 1, 3 oraz nie poda wartości  $q$  lub poda ją błędnie, np.  $q = 3$ .

#### Uwaga

Jeżeli zdający sporządzi poprawny wykres funkcji  $h$  oraz poda jedno z miejsc zerowych  $x = 1$  lub  $x = 3$ , to otrzymuje **1 punkt**.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy poprawnie poda  $q = -3$  oraz zapisze pozostałe miejsca zerowe funkcji  $h$ : 1, 3.

#### Uwaga

Jeżeli zdający poda współrzędne punktu  $(1,0)$  lub  $(3,0)$  zamiast miejsc zerowych, to nie przyznajemy punktu za miejsca zerowe.

#### Zadanie 30. (0–2)

Dany jest skończony ciąg, w którym pierwszy wyraz jest równy 444, a ostatni jest równy 653. Każdy wyraz tego ciągu, począwszy od drugiego, jest o 11 większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

|                                |                                                                                                                                             |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c). |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### Rozwiązanie

Zauważamy, że ciąg jest arytmetyczny.

Przyjmijmy oznaczenia:  $a_1 = 444$ , różnica ciągu  $r = 11$ . Wtedy  $a_n = 653$ . Zapisujemy równanie  $444 + (n-1) \cdot 11 = 653$ , a stąd  $n = 20$ .

Obliczamy zatem  $S_{20}$ :

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{444 + 653}{2} \cdot 20 = 1097 \cdot 10 = 10970.$$

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- poprawnie poda liczbę wyrazów danego ciągu ( $n = 20$ ) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd podczas obliczania liczby składników tej sumy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy sumę wyrazów tego ciągu.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy zapisze, że suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 10970.

**Uwaga**

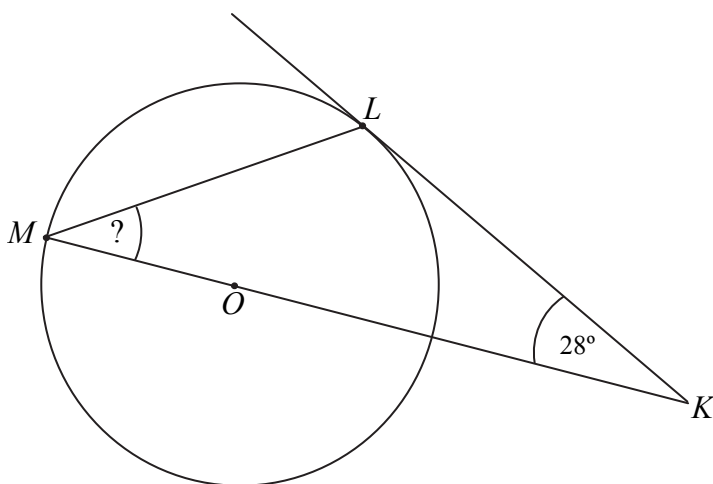
Jeżeli zdający wypisze wszystkie wyrazy danego ciągu i nie poda ich sumy lub tę sumę poda błędnie, to otrzymuje **1 punkt**.

**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeżeli zdający wypisze poprawnie wszystkie wyrazy danego ciągu i przy zapisaniu sumy pominie jeden ze składników lub przepisze go błędnie i konsekwentnie obliczy tę sumę, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 31. (0–2)**

Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$ . Prosta  $KL$  jest styczna do tego okręgu w punkcie  $L$ , a środek  $O$  tego okręgu leży na odcinku  $KM$  (zobacz rysunek). Udowodnij, że kąt  $KML$  ma miarę  $31^\circ$ .

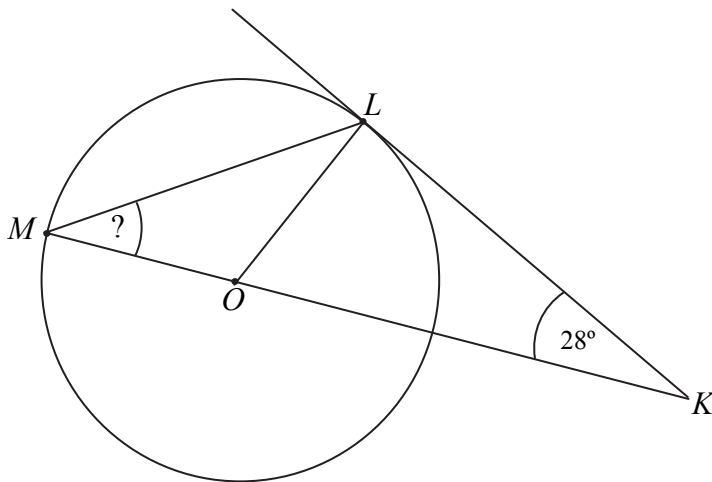


V. Rozumowanie  
i argumentacja.

7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).

### I sposób rozwiązania

Rysujemy odcinek  $OL$ .



Kąt  $OLK$  jest prosty. Zatem  $|\sphericalangle KOL| = 62^\circ$ .

Czyli  $|\sphericalangle MOL| = 118^\circ$ .

Zatem  $|\sphericalangle OML| + |\sphericalangle MLO| = 62^\circ$ .

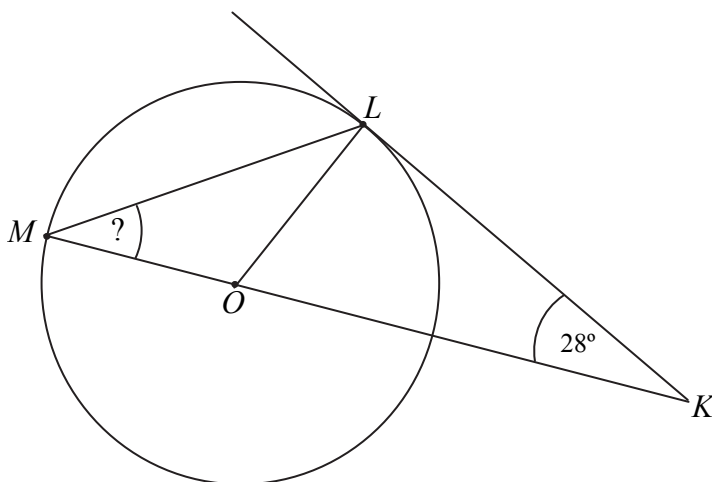
Kąty  $OML$  i  $MLO$  są równe, bo są kątami równymi w trójkącie równoramiennym.

Zatem  $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle OML| = 31^\circ$ .

To kończy dowód.

### II sposób rozwiązania

Rysujemy odcinek  $OL$ .



Kąty  $OML$  i  $MLO$  są równe, bo są kątami równymi w trójkącie równoramiennym.

Kąt  $OLK$  jest prosty. Suma miar kątów trójkąta  $KLM$  jest równa  $180^\circ$ .

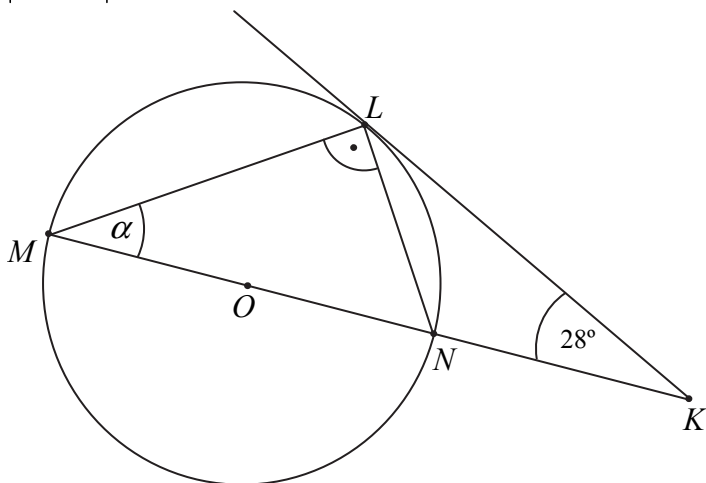
Zatem  $2|\sphericalangle KML| + 90^\circ + 28^\circ = 180^\circ$ . Stąd  $2|\sphericalangle KML| = 62^\circ$ .

Zatem  $|\sphericalangle KML| = 31^\circ$ .

To kończy dowód.

### III sposób rozwiązania

Rysujemy cięciwę  $LN$ , gdzie  $N$  jest końcem średnicy  $MN$  (zobacz rysunek). Niech  $|\sphericalangle KML| = \alpha$ .



Kąt  $MLN$  jest kątem wpisanym opartym na średnicy  $MN$ , więc jest prosty. Kąt między styczną do okręgu w punkcie  $L$  i cięciwą wychodzącą z punktu  $L$  jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie, zatem  $|\sphericalangle KLN| = |\sphericalangle KML| = \alpha$ .

Zapisujemy równanie wynikające z bilansu kątów w trójkącie  $KLM$ :

$$\alpha + 90^\circ + \alpha + 28^\circ = 180^\circ, \text{ stąd } \alpha = |\sphericalangle KML| = 31^\circ.$$

To kończy dowód.

### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje.....1 p.**  
jeżeli:

- zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt  $KLO$  jest kątem prostym i  $|\sphericalangle LOK| = 2 \cdot |\sphericalangle LMO|$ ,

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt  $KLO$  jest kątem prostym i  $|\sphericalangle LMO| = |\sphericalangle MLO|$ ,

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku, że kąt  $MLN$  jest kątem prostym i  $|\sphericalangle NLK| = |\sphericalangle LMN|$ ,

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje.....2 p.**  
jeżeli przeprowadzi pełne poprawne rozumowanie.

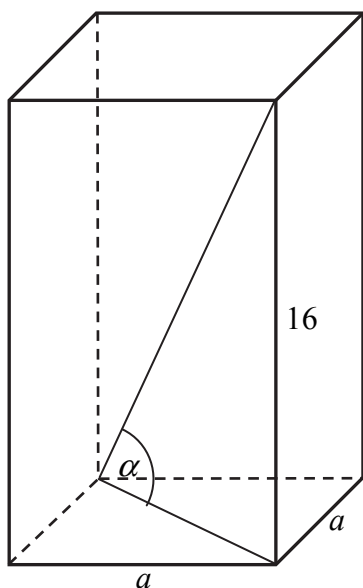
**Zadania 32. (0–4)**

Wysokość graniastoslupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastoslupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy  $\frac{3}{5}$ . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.

|                                   |                                                                                                        |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii (9.b). |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Niech  $a$  oznacza długość krawędzi podstawy tego graniastoslupa i niech  $\alpha$  będzie kątem nachylenia przekątnej graniastoslupa do płaszczyzny jego podstawy (zob. rysunek).



Ponieważ  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ , więc kąt  $\alpha$  jest ostry oraz  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Stąd wynika, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ .

Z drugiej strony  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{a\sqrt{2}}$ . Obliczamy długość krawędzi podstawy graniastoslupa.

Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{16}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{3}, \text{ skąd } a = 6\sqrt{2}.$$

Szukane pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa jest równe:

$$P_c = 2 \cdot (6\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 = 144 + 384\sqrt{2} = 48(3 + 8\sqrt{2}).$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze**

**do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający:

- zapisze, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć skalę  $x$  podobieństwa trójkąta o bokach długości 3, 4 i 5 do trójkąta o przyprostokątnej długości 16 leżącej naprzeciw kąta  $\alpha$ , np.  $(3x)^2 + 16^2 = (5x)^2$

albo

- poda skalę  $x$  podobieństwa trójkątów: trójkąta o bokach długości 3, 4 i 5 oraz trójkąta o przyprostokątnej długości 16 leżącej naprzeciw kąta  $\alpha$ ,  $x = 4$

albo

- zaznaczy na rysunku kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy

albo

- zapisze, że długość  $d$  przekątnej graniastosłupa jest równa 20

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający:

- obliczy długość  $e$  przekątnej podstawy tego graniastosłupa  $e = 12$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, np.  $16^2 + (a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{5a\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$$16^2 + (a\sqrt{2})^2 = 20^2 \text{ lub } \frac{16}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$$

albo

- zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, np.

$$\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}}{d} = \frac{3}{5} \\ (a\sqrt{2})^2 + 16^2 = d^2 \end{cases}$$

gdzie  $d$  oznacza długość przekątnej tego graniastosłupa

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa:  $a = 6\sqrt{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa:  $P_c = 48(3 + 8\sqrt{2})$ .

**Uwagi**

1. Akceptujemy sytuację, w której zdający zapisze, że  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  dla  $\alpha \approx 53^\circ$  i w dalszej części rozwiązania poprawnie posługuje się przyjętym przybliżeniem.
2. Akceptujemy sytuację, w której zdający wprowadza do rozwiązania poprawne przybliżenia dziesiętne liczb rzeczywistych i w obliczeniach poprawnie stosuje regułę zaokrąglania.
3. Jeżeli zdający błędnie zaznaczy na rysunku podany kąt i korzysta z tego kąta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

4. Jeżeli zdający zapisze, że  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  i korzysta z tej równości, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający przyjmie miarę kąta nachylenia, która nie wynika z treści zadania (np.  $\alpha = 30^\circ$ ), i w rozwiązaniu z tego korzysta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeżeli zdający zapisze błędnie, że  $e = a\sqrt{3}$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
7. Jeżeli zdający rozważa „trójkąt prostokątny” o bokach 3, 5, 16 (nieistniejący), to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadania 33. (0–4)**

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

| Rodzaj biletów | Liczba osób |
|----------------|-------------|
| ulgowe         | 76          |
| normalne       | 41          |

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenia znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d). |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Oznaczmy:

$A$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która kupiła bilet ulgowy,

$B$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która kupiła bilet normalny,

$C$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego z wymienionych biletów.

Ankietę przeprowadzono wśród 115 osób, zatem  $|\Omega| = 115$ .

Ponieważ wśród badanych występują osoby, które kupiły bilety obu rodzajów, więc

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$\text{Stąd } |A \cup B| = 76 + 41 - 27 = 90.$$

$$\text{Zatem } |C| = |\Omega| - |A \cup B| = 25, \text{ więc}$$

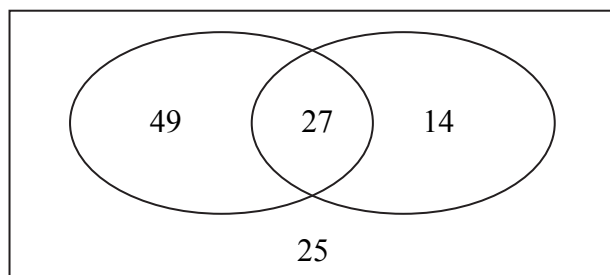
$$P(C) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$$

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe  $\frac{5}{23}$ .

## II sposób rozwiązania

Oznaczmy:

$C$  – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie kupiła żadnego biletu.



Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 115$ .

Liczba wszystkich osób, które kupiły co najmniej jeden bilet jest równa  $49 + 27 + 14 = 90$ .

Zatem  $|C| = 115 - 90 = 25$ .

Stąd  $P(C) = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$ .

Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że losowo wybrana spośród badanych osoba nie zakupiła żadnego z wymienionych biletów jest równe  $\frac{5}{23}$ .

### Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 115$

albo

- zapisze liczbę wszystkich osób, które kupiły tylko bilet ulgowy: 49

albo

- zapisze liczbę wszystkich osób, które kupiły tylko bilet normalny: 14

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczbę wszystkich osób, które kupiły tylko bilet ulgowy:  $|\Omega| = 115$ , 49

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczbę wszystkich osób, które kupiły tylko bilet normalny:  $|\Omega| = 115$ , 14

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczbę wszystkich osób,

które kupiły co najmniej jeden bilet:  $|\Omega| = 115, 90$

albo

- zapisze liczbę wszystkich osób, które nie kupiły żadnego biletu: 25

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 p.**

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz wyznaczy liczbę osób, które nie kupiły żadnego biletu:  $|\Omega| = 115, 25$

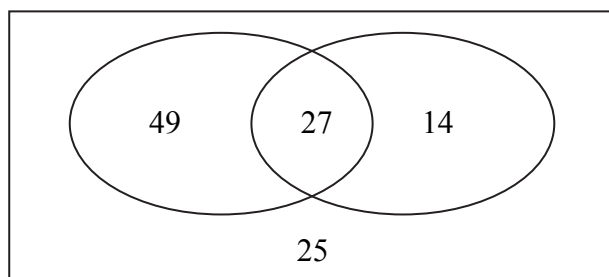
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne .....4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która nie kupiła żadnego biletu i zapisze je w postaci ułamka nieskracalnego:  $\frac{5}{23}$ .

### Uwagi

1. Zdający nie musi zapisywać explicite liczby wszystkich zdarzeń elementarnych, wystarczy, że liczba 115 wystąpi w mianowniku ułamka, o ile ułamek ten będzie liczbą dodatnią i mniejszą od 1.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$  lub  $P(A) < 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający poda tylko wynik końcowy  $P(C) = \frac{5}{23}$  lub  $P(C) = \frac{25}{115}$ , to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający obliczy  $P(C) = \frac{25}{115}$  i nie przedstawi wyniku w postaci ułamka nieskracalnego, to otrzymuje **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu  $|A \cup B|$  lub  $|C|$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający sporządził diagram, na którym zapisał liczby 49, 27, 14 i 25,



i na tym zakończył, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadania 34. (0–5)**

Biegacz narciarski Borys wyruszył na trasę biegu o 10 minut później niż inny zawodnik, Adam. Metę zawodów, po przebyciu 15-kilometrowej trasy biegu, obaj zawodnicy pokonali równocześnie. Okazało się, że wartość średniej prędkości na całej trasie w przypadku Borysa była o  $4,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  większa niż w przypadku Adama. Oblicz, w jakim czasie Adam pokonał całą trasę biegu.

|                                   |                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do równań i nierówności kwadratowych (3.b). |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie (I sposób)**

Niech  $v$  oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką Adam pokonał całą trasę biegu, a  $t$  czas, wyrażony w godzinach, w jakim Adam pokonał całą trasę biegu. Wówczas zależność między tą prędkością, czasem i przebytą drogą możemy zapisać w postaci

$$v \cdot t = 15.$$

Średnia prędkość, z jaką Borys pokonał całą trasę biegu, jest zatem równa  $v + 4,5$ , natomiast czas, w jakim Borys pokonał całą trasę biegu, jest równy  $t - \frac{1}{6}$ . Możemy więc zapisać drugie równanie

$$(v + 4,5) \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 15.$$

Stąd otrzymujemy

$$v \cdot t - \frac{1}{6}v + 4,5t - \frac{3}{4} = 15.$$

Po podstawieniu  $v \cdot t = 15$  otrzymujemy

$$54t = 2v + 9,$$

$$t = \frac{2v + 9}{54}.$$

Podstawiając  $t = \frac{2v + 9}{54}$  w równaniu  $v \cdot t = 15$ , otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą  $v$

$$v \cdot \frac{2v + 9}{54} = 15,$$

$$2v^2 + 9v - 15 \cdot 54 = 0,$$

$$2v^2 + 9v - 810 = 0,$$

$$\Delta = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 810 = 81 + 8 \cdot 810 = 81 \cdot 81, \sqrt{\Delta} = 81$$

$$v_1 = \frac{-9 - 81}{2 \cdot 2} < 0, v_2 = \frac{-9 + 81}{2 \cdot 2} = \frac{72}{4} = 18.$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość biegacza byłaby ujemna, co jest niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania. Wówczas

$$t = \frac{2v + 9}{54} = \frac{5}{6}.$$

Odpowiedź: Adam pokonał trasę biegu w 50 minut.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Niech  $v$  oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką Adam pokonał całą trasę biegu.

Wówczas czas  $t$ , w jakim pokonał całą trasę biegu, wyrażony w godzinach, jest równy  $t = \frac{15}{v}$ .

Czas potrzebny na pokonanie trasy biegu w przypadku Borysa był o  $\frac{1}{6}$  h krótszy, ale w tym drugim przypadku prędkość była większa o 4,5 km/h. Zatem możemy to opisać równaniem

$$t - \frac{1}{6} = \frac{15}{v + 4,5}.$$

Po podstawieniu  $t = \frac{15}{v}$  otrzymujemy równanie z niewiadomą  $v$ :  $\frac{15}{v} - \frac{1}{6} = \frac{15}{v + 4,5}$ .

$$15 \cdot 6(v + 4,5) - v(v + 4,5) = 15 \cdot 6v,$$

$$-v^2 - 4,5v + 405 = 0,$$

$$-2v^2 - 9v + 810 = 0,$$

$$2v^2 + 9v - 810 = 0.$$

$$\Delta = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 810 = 81 + 8 \cdot 810 = 81 \cdot 81, \sqrt{\Delta} = 81$$

$$v_1 = \frac{-9 - 81}{2 \cdot 2} < 0, \quad v_2 = \frac{-9 + 81}{2 \cdot 2} = \frac{72}{4} = 18.$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość biegacza byłaby ujemna, a to niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania. Wówczas

$$t = \frac{2v + 9}{54} = \frac{5}{6}.$$

Odpowiedź: Adam pokonał trasę biegu w 50 minut.

**Rozwiązanie (III sposób)**

Niech  $v$  oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką Adam pokonał całą trasę biegu,  $t$  czas, wyrażony w godzinach, w jakim Adam pokonał całą trasę biegu. Wówczas zależność między tą prędkością, czasem i przebytą drogą możemy zapisać w postaci

$$v \cdot t = 15.$$

Średnia prędkość, z jaką Borys pokonał całą trasę biegu, jest zatem równa  $v + 4,5$ , natomiast czas, w jakim Borys pokonał całą trasę biegu, jest równy  $t - \frac{1}{6}$ . Możemy więc zapisać drugie

równanie

$$(v + 4,5) \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 15.$$

Stąd otrzymujemy

$$v \cdot t - \frac{1}{6}v + 4,5t - \frac{3}{4} = 15.$$

Po podstawieniu  $v \cdot t = 15$  otrzymujemy

$$54t = 2v + 9,$$

$$v = 27t - 4,5.$$

Podstawiamy  $v = 27t - 4,5$  w równaniu  $v \cdot t = 15$  i otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą  $v$

$$(27t - 4,5)t = 15,$$

$$27t^2 - 4,5t - 15 = 0,$$

$$18t^2 - 3t - 10 = 0,$$

$$\Delta = 9 + 40 \cdot 18 = 729, \sqrt{\Delta} = 27$$

$$t_1 = \frac{3-27}{36} < 0, t_2 = \frac{3+27}{36} = \frac{5}{6}.$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy czas biegu byłby ujemny, a to niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Adam pokonał trasę biegu w 50 minut.

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający oznaczy prędkość średnią biegu Adama, wyrażoną w km/h, oraz czas, wyrażony w godzinach

w jakim Adam pokonał trasę i zapisze zależność między średnią prędkością biegu Borysa i czasem, w jakim Borys pokonał trasę, np.:

$v$  – średnia prędkość (w km/h), z jaką biegł Adam,

$t$  – czas (w h), w jakim Adam pokonał trasę

$$(v+4,5) \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 15 \text{ albo } t - \frac{1}{6} = \frac{15}{v+4,5}$$

### Uwaga

Zdający nie otrzymuje punktu, jeśli zapisze jedynie  $v \cdot t = 15$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi  $v$ ,  $t$  – odpowiednio prędkość i czas biegu Adama, np.;

$$\begin{cases} (v+4,5) \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 15 \\ v \cdot t = 15 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} t - \frac{1}{6} = \frac{15}{v+4,5} \\ v \cdot t = 15 \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.; gdy  $v$  – prędkość pokonania trasy biegu przez Adama,

$$v \cdot \frac{2v+9}{54} = 15 \quad \text{lub} \quad \frac{15}{v} - \frac{1}{6} = \frac{15}{v+4,5} \quad \text{lub} \quad (27t - 4,5)t = 15$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

### Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 4 p.**

Zdający

- rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np.  $v$  jako średnią prędkością biegu Adama i nie obliczy czasu biegu Adama

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą  $t$  (czas biegu Adama) z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy czas biegu Adama: 50 minut.

### Uwagi

1. Oceniamy na **0 punktów** rozwiązania, w których ułożone równania zawierają niezgodność typu wielkości po obu stronach: po jednej stronie prędkość, po drugiej czas lub niezgodność jednostek: prędkość w kilometrach na godzinę, czas w minutach, o ile nie są zapisane jednostki.
2. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozwiązania i stosuje je konsekwentnie.
3. Zdający może stosować inne jednostki prędkości niż km/h.
4. Jeżeli zdający oznaczy prędkość Adama przez  $v$  (w km/h), przez  $t$  czas biegu Adama, a potem zapisze, że prędkość Borysa jest równa  $v-4,5$  i czas jego biegu jest

równy  $t + \frac{1}{6}$ , a następnie zapisze układ równań  $v \cdot t = 15$  i  $(v-4,5) \cdot \left(t + \frac{1}{6}\right) = 15$

i doprowadzi go do równania z jedną niewiadomą, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli rozwiąże to równanie, to otrzymuje **2 punkty**, a jeśli doprowadzi rozwiązanie zadania do końca, konsekwentnie do ułożonego układu równań lub przyjętych oznaczeń, to otrzymuje **3 punkty** (zdający otrzyma wtedy odpowiedź  $t = 40$  minut – czas biegu Adama).

### Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

#### Przykład 1.

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  – średnia prędkość (w km/h), z jaką biegł Adam,  $t$  – czas (w h), w jakim Adam pokonał trasę

$$v + 4,5 = \frac{15}{t - \frac{1}{6}}$$

$$\begin{cases} 15 = v \cdot t \\ 15 = (v + 4,5) \left(t - \frac{1}{6}\right) \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie

ujął wyrażenia  $t - \frac{1}{6}$  w nawias. Zapis równania  $v + 4,5 = \frac{15}{t - \frac{1}{6}}$  wskazuje na poprawną

interpretację zależności między wielkościami.

#### Przykład 2.

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  – średnia prędkość (w km/h), z jaką biegł Adam,  $t$  – czas (w h), w jakim Adam pokonał trasę

$$v + 4,5 = \frac{15}{t - \frac{1}{6}} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{15}{t} \\ v + 4,5 = \frac{15}{t - \frac{1}{6}} \end{array} \right. \quad \frac{51}{t} + 4,5 = \frac{15}{t - \frac{1}{6}}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty**, mimo że w równaniu  $\frac{51}{t} + 4,5 = \frac{15}{t - \frac{1}{6}}$  zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 15 i pominął liczbę  $\frac{1}{6}$  w mianowniku ułamka.

### Przykład 3.

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np.  $2v^2 - 9v - 810 = 0$  zamiast równania  $2v^2 - 9v + 810 = 0$  (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realną prędkością, z jaką biegł Adam, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.