

Miejsce na identyfikację szkoły

ARKUSZ PRÓBNEJ MATURY Z OPERONEM MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy: 180 minut

LISTOPAD
2013

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1.–12.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań rachunkowych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie **50 punktów**.

Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

--	--	--

**KOD
ZDAJĄCEGO**

Zadanie 1. (4 pkt)

Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m równanie: $-x^2 + (2m^2 + 3)x - m^4 - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.



Odpowiedź:

Zadanie 2. (5 pkt)

Narysuj wykres funkcji: $f(x) = \begin{cases} -2^{x+1} + 2, & \text{dla } x \leq 0 \\ -|x - 4| + 4, & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

Określ liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$ w zależności od parametru m .



Odpowiedź:

Zadanie 3. (4 pkt)

O wielomianie $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ wiadomo, że liczba 1 jest jego pierwiastkiem dwukrotnym oraz że $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x + 2$. Oblicz współczynniki a, b, c . Dla obliczonych wartości a, b, c rozwiąż nierówność $W(x + 1) < 0$.



Odpowiedź:

Zadanie 4. (3 pkt)

Liczby a, b, k są całkowite i k jest różna od zera. Wykaż, że jeśli liczby $a + b$ oraz $a \cdot b$ są podzielne przez k , to liczba $a^3 - b^3$ też jest podzielna przez k .



Odpowiedź:

Zadanie 5. (4 pkt)

Określ dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \right)}$.



Odpowiedź:

Zadanie 6. (5 pkt)

Wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym oraz wyraz ogólny ciągu (b_n) określony jest wzorem $b_n = 5^{a_n}$, wykaż, że ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz, w zależności od n , iloczyn $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n$, przyjmując, że pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 1, a jego różnica jest równa 3.



Odpowiedź:

Zadanie 7. (5 pkt)

Rozwiąż równanie: $\sin x |\cos x| = 0,25$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

A large rectangular grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for the student to show their work in solving the equation.

Odpowiedź:

Zadanie 8. (4 pkt)

Okrąg o środku A i promieniu długości r jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku B i promieniu długości R ($R > r$). Prosta k jest styczna jednocześnie do obu okręgów i tworzy z prostą AB kąt ostry α . Wyznacz $\sin \alpha$ w zależności od r i R .



Odpowiedź:

Zadanie 9. (4 pkt)

W trójkącie ABC punkty $K = (2, 2)$, $L = (-2, 1)$, i $M = (-1, -1)$ są odpowiednio środkami boków AB , BC , AC . Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.



Odpowiedź:

Zadanie 10. (4 pkt)

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest ostry, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 5 oraz $|AC| = 6$, $|AB| = 10$. Na boku BC wybrano taki punkt K , że $|BK| = 2$. Oblicz długość odcinka AK .



Odpowiedź:

Zadanie 11. (4 pkt)

W zielonym pudełku jest 10 monet pięcioletowych i 5 monet dwuzłotowych, a w białym pudełku są 2 monety pięcioletowe i 3 monety dwuzłotowe. Z zielonego pudełka losujemy jedną monetę i wrzucamy ją do białego pudełka. Następnie z białego pudełka losujemy jednocześnie 2 monety. Oblicz prawdopodobieństwo, że z białego pudełka wylosujemy w sumie 7 złotych.

A large rectangular area filled with a fine grid of squares, intended for the student to perform calculations or draw diagrams.

Odpowiedź:

Zadanie 12. (4 pkt)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a . Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa. Płaszczyzna tego przekroju tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź:

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



