

Wybrane wzory matematyczne

$$\begin{aligned}
 & A' = (x, -y) \quad \text{tg } \alpha \quad (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \\
 & y = ax + b \quad b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\
 & P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n) \\
 & \frac{1}{2}(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}) \quad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad \sin \alpha \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \quad A' = (x, -y) \\
 & \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{tg } \alpha + \text{tg } \beta \quad a \neq 0 \quad (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \quad \bar{u} = [u_1, u_2], \bar{v} = [v_1, v_2] \quad \text{tg } \alpha - \text{tg } \beta \\
 & \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \cos \beta \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{tg } \alpha \\
 & \alpha [^\circ] \quad A' = (x, -y) \quad P = (x_0, y_0) \quad y = ax + b \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \beta [^\circ] \quad P = (x_0, y_0) \quad \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{tg } \alpha \\
 & \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \quad \frac{a_{n+1}}{2} \quad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \text{tg } \alpha, \quad k - \text{całkowite} \\
 & \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} \quad n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \beta [^\circ] \quad y \neq 0 \quad \text{tg } \alpha \quad P(B_i) > 0 \text{ dla } 1 \leq i \leq n \\
 & (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \quad \overline{AB} \quad \sin \alpha \quad (n-k)! \\
 & y = ax + b \quad \text{tg } \alpha \quad \beta [^\circ] \\
 & f'(x) = \frac{-a}{x^2} \quad M = (x, y) \quad r \quad \frac{a_{n+1}}{2} \\
 & \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2 \quad a + c = b + d \quad a_1 = a_2 \quad P = (x_0, y_0) \\
 & (a_n) \quad \text{tg } \alpha \\
 & \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \\
 & A' = (x, -y) \quad x > 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad P = (x_0, y_0) \\
 & a_{n+1} \quad f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0 \leq k \leq n \\
 & \text{tg } \alpha \quad \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{tg } \alpha \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \log_{10} x \\
 & a + c = b + d \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \log_{10} x \\
 & |AB| = |DE|, |\angle BAC| = |\angle EDF|, |\angle ABC| = |\angle DEF| \\
 & y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\
 & \frac{Ax + By + C = 0, \quad b \geq 0}{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Delta \geq 0 \\
 & \Delta > 0 \quad w_1 + w_2 + \dots + w_n \cdot c \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & P(B_i) > 0 \text{ dla } 1 \leq i \leq n \\
 & \frac{a_{n+1}}{2} \quad (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \quad A \\
 & P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)| \\
 & y = ax + b \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a_1 = a_2 \\
 & a = \frac{f'(x_0)}{f'(x_0)} \quad \beta [^\circ] \\
 & \overline{OA'} = s \cdot \overline{OA} \quad \Delta < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y = ax + b \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \\
 & y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad \Delta \geq 0 \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} + 1 \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a_1 = a_2 \\
 & \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} + 1 \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Delta < 0 \\
 & b \geq 0 \quad a + c = b + d \quad y = ax + b \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \quad 3 \\
 & a_1 = a_2 \quad w_1 + w_2 + \dots + w_n \quad a_1 = a_2
 \end{aligned}$$



Spis treści

Wartość bezwzględna liczby	1
Potęgi i pierwiastki	1
Logarytmy	2
Silnia. Współczynnik dwumianowy	2
Wzór dwumianowy Newtona	2
Wzory skróconego mnożenia	3
Ciągi	3
Funkcja kwadratowa	4
Geometria analityczna	4
Planimetria	6
Stereometria	12
Trygonometria	14
Kombinatoryka	16
Rachunek prawdopodobieństwa	17
Parametry danych statystycznych	18
Granica ciągu	18
Pochodna funkcji	19
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	20

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.
Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie.

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Wartość $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Wartość, jeśli $y \neq 0$, to $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$ mamy:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

WŁAŚCIWOŚCI I PIERWIASTKI

Jeśli n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeśli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$. Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Jeśli m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

$$\begin{aligned} - \text{ dla } a \neq 0: & \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{oraz} \quad a^0 = 1 \\ - \text{ dla } a \geq 0: & \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\ - \text{ dla } a > 0: & \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \end{aligned}$$

Jeśli r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b} \right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeśli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich $a, b \neq 0$.

LOGARYTMY

arytmem $\log_a c$ dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik b taki, do którego należy podnieść a , aby otrzymać c :

$$\log_a c = b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^b = c$$

Ważne:

$$a^{\log_a c} = c$$

dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Przebieg na zmianę podstawy logarytmu:

Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Logarytm $\log_{10} x$ można też zapisać jako $\log x$ lub $\lg x$.

FAKTORIAŁ. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

Faktoriał liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Warto przyjąć umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (Czynnik Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ważne równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb a, b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

VZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

dowolnych liczb a, b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

z szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

CIĄGI

ciąg arytmetyczny

or na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

or na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

dla sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

ciąg geometryczny

or na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

or na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

dla sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

procent składany

Jeśli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali miesięcznej i kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n oblicza się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

FUNKCJA KWADRATOWA

Łąć ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Dla każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p, q) . Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$; do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$), zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),

Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

GEOMETRIA ANALITYCZNA

Odcinek

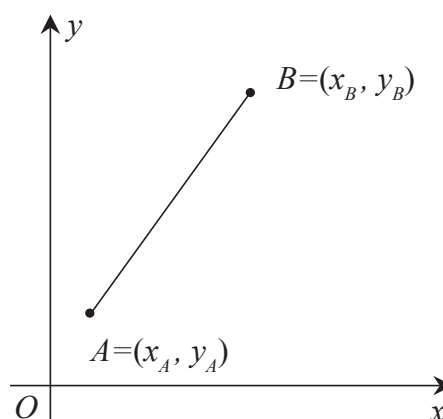
Długość odcinka o końcach w punktach

$A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ jest dana wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



Wektory

wektoru $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeśli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

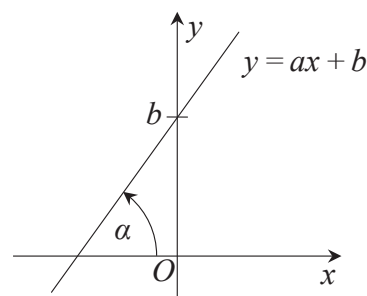
Jeśli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox ; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy ; jeśli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Jeśli prosta nie jest równoległa do osi Oy , to ma ona równanie punktowe:

$$y = ax + b$$

gdzie a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \tan \alpha$$



Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.

Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

Prosta i punkt

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest dana wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Para prostych

Dwie proste o równaniach kierunkowych:

$$y = a_1x + b_1 \qquad y = a_2x + b_2$$

są równoległe, gdy

są równoległe, gdy $a_1 = a_2$

są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$

Wzajemny kąt ostry φ i $\tan \varphi = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2} \right|$

dwie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$

Trójkąt

Trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC , czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Przekształcenia geometryczne

przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x + a, y + b)$

symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$

symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$

symetria względem punktu (a, b) przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (2a - x, 2b - y)$

jednokładność o środku w punkcie O i skali $s \neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'} = s \cdot \overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O = (x_0, y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx + (1-s)x_0, sy + (1-s)y_0)$

Równanie okręgu

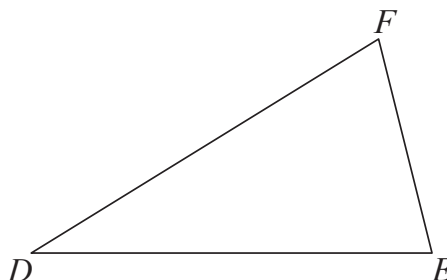
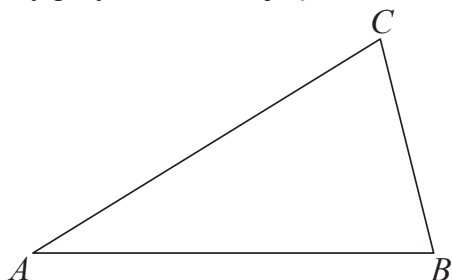
Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ gdy $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$

0. PLANIMETRIA

Cechy przystawiania trójkątów



że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawiania trójkątów**:

cecha przystawiania „bok – bok – bok”:

odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości: $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$

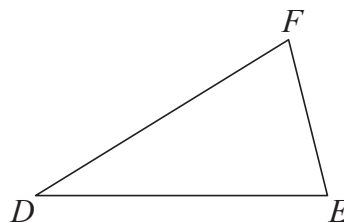
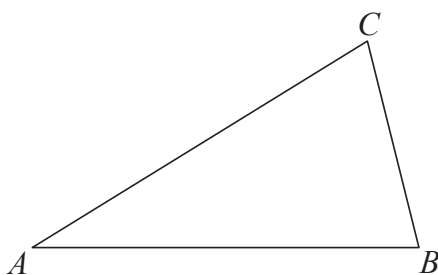
cecha przystawiania „bok – kąt – bok”:

dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$

cecha przystawiania „kąt – bok – kąt”:

jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np. $|AB| = |DE|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$

Cechy podobieństwa trójkątów



że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:

długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta,

$$\text{np. } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

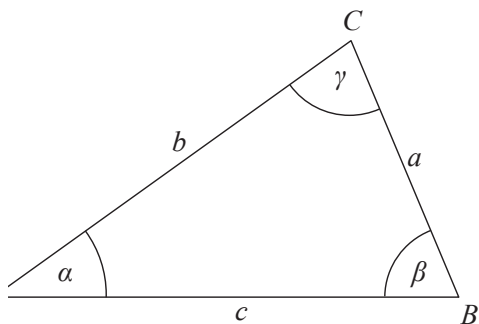
cecha podobieństwa „bok – kąt – bok”:

długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków

drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$

cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:

dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też trzecie kąty obu trójkątów są przystające): $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b, c	– długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C
$2p = a + b + c$	– obwód trójkąta
α, β, γ	– miary kątów przy wierzchołkach A, B, C
h_a, h_b, h_c	– wysokości opuszczone z wierzchołków A, B, C
R, r	– promienie okręgów opisanego i wpisanego

Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

• Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

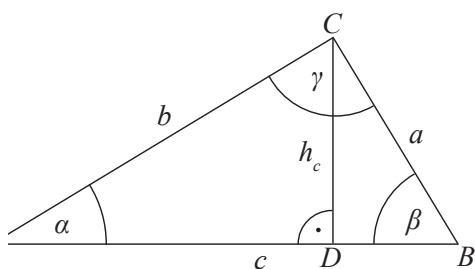
$$P_{\Delta ABC} = rp$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Trójkącie ABC kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

Wiązki miarowe w trójkącie prostokątnym



Założmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

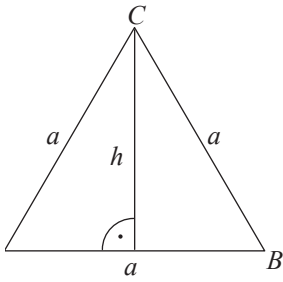
$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta$$

$$a = b \cdot \tan \alpha = b \cdot \frac{1}{\tan \beta}$$

$$R = \frac{1}{2}c \quad r = \frac{a+b-c}{2} = p-c$$

Trójkąt równoboczny



a – długość boku

h – wysokość trójkąta

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad R = \frac{2}{3}h$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad r = \frac{1}{3}h$$

Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

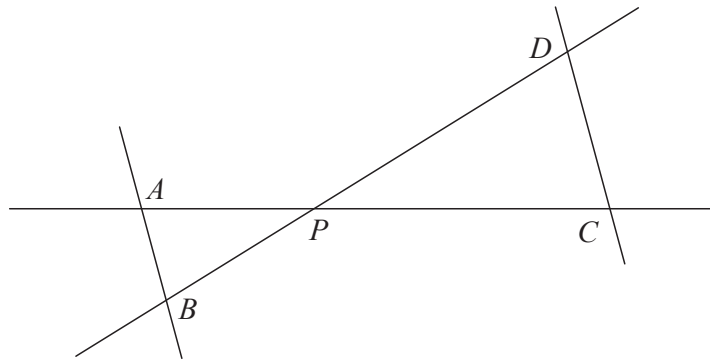
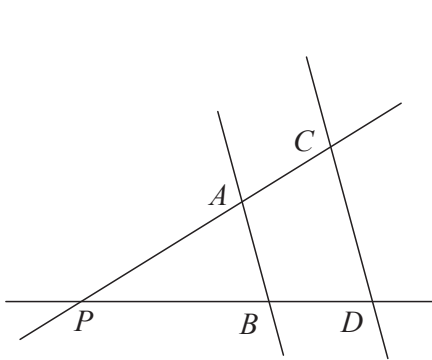
ne proste AC i BD przecinają się w punkcie P , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

punkt A leży wewnątrz odcinka PC oraz punkt B leży wewnątrz odcinka PD

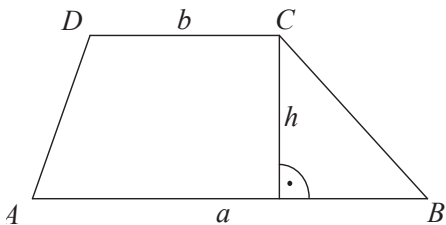
punkt A leży na zewnątrz odcinka PC oraz punkt B leży na zewnątrz odcinka PD .

wczas proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|PA|}{|AC|} = \frac{|PB|}{|BD|}$$



Czworokąty

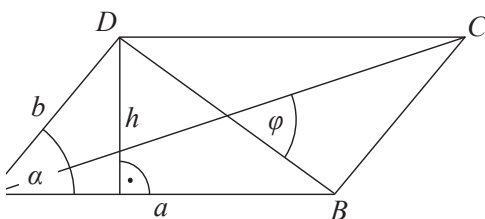


Trapez

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

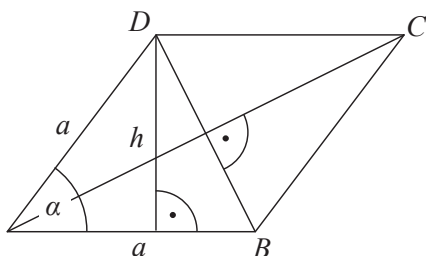


Równoległobok

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \varphi$$

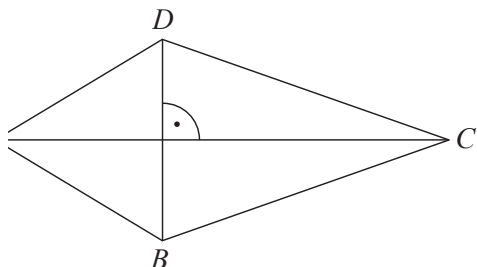


Romb

Czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$P = ah = a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



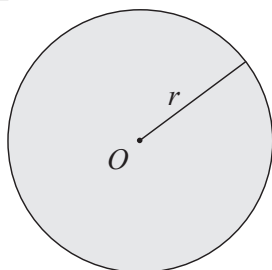
Deltoid

Czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

Łoło



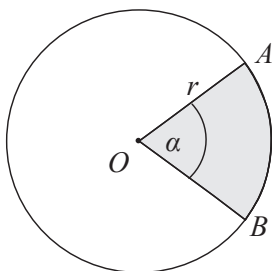
Wzór na pole koła o promieniu r :

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu r :

$$L = 2\pi r$$

Wycinek koła



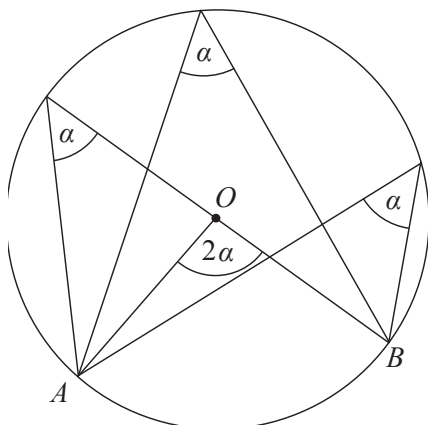
Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Długość łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Łąty w okręgu

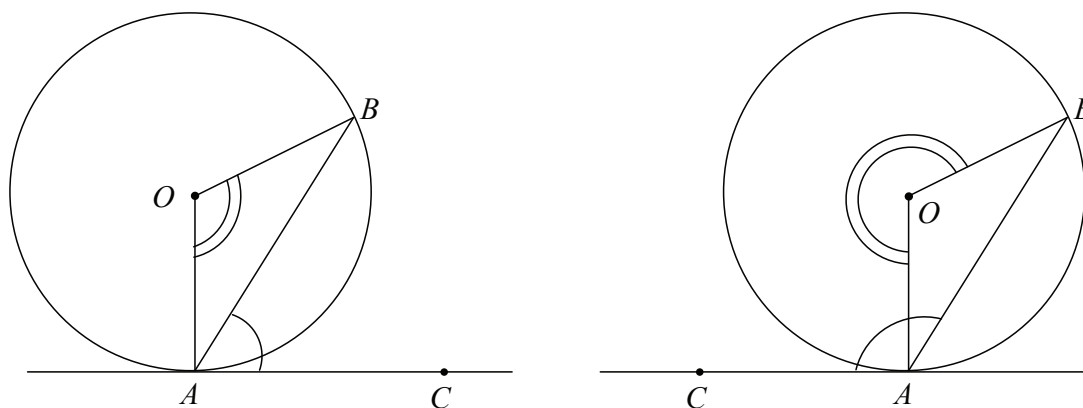


Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na łukach równych, są równe.

[wierdzenie o kącie między styczną i cięciwą]

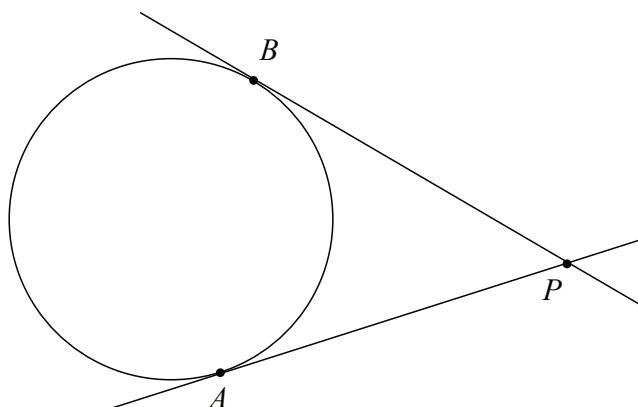


y jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB . Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A .
dy $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku
dującym się wewnątrz kąta CAB .

[wierdzenie o odcinkach stycznych]

li styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to

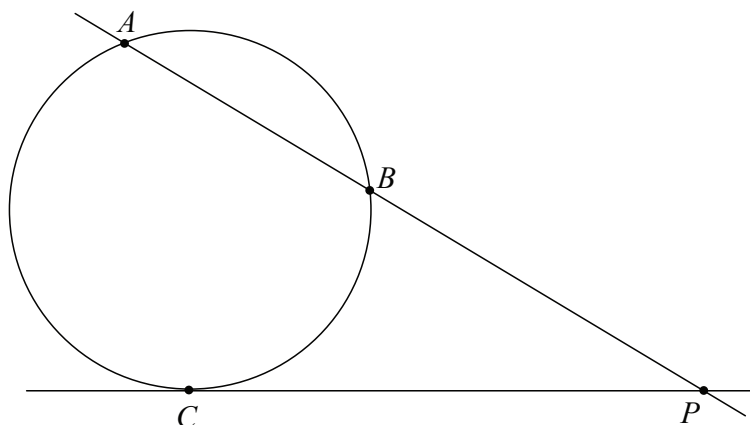
$$|PA| = |PB|$$



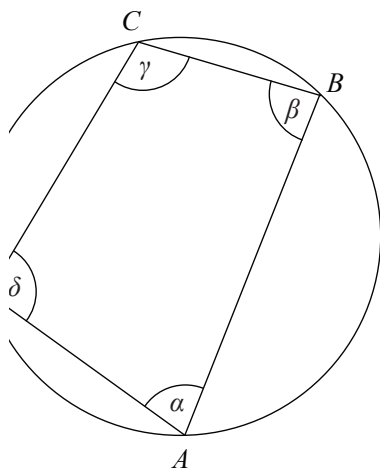
[wierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej]

e są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli
te te przecinają się w punkcie P , to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



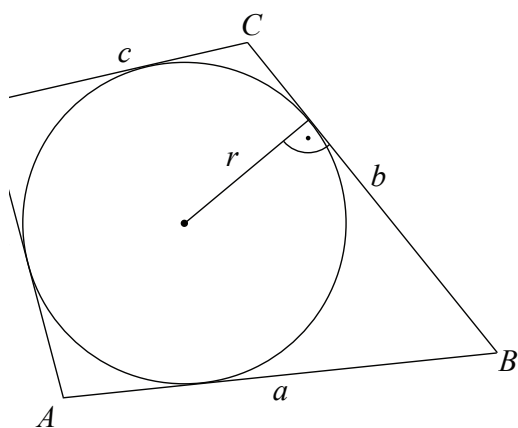
Okąg opisany na czworokącie



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180° :

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

Okąg wpisany w czworokąt

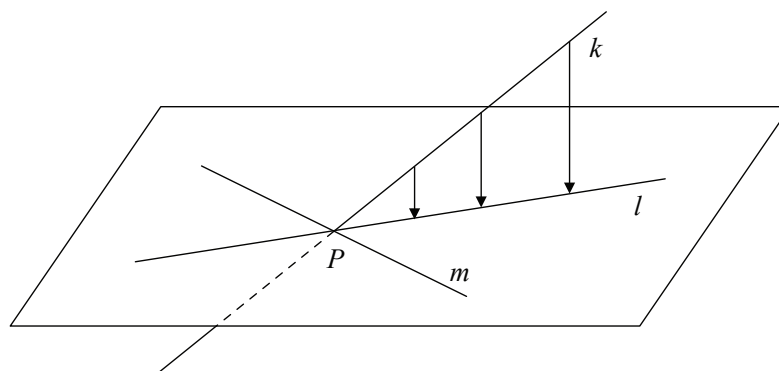


W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

STEREOMETRIA

Wzajemność trzech prostych prostopadłych



Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P . Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P . Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l .

Używamy oznaczenia:

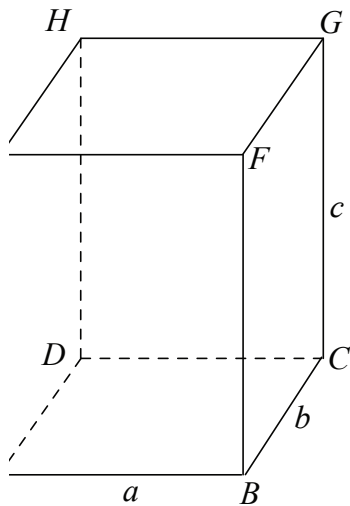
pole powierzchni całkowitej

pole podstawy

pole powierzchni bocznej

objętość

Prostopadłościan

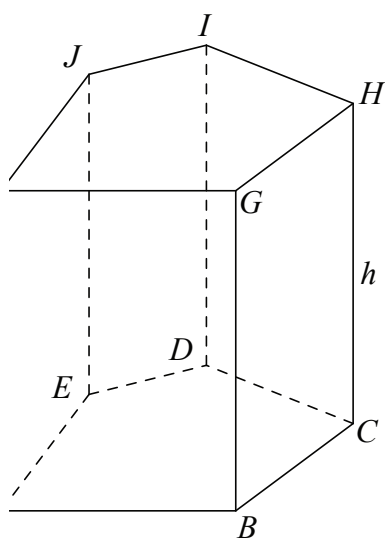


$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

Graniastosłup prosty

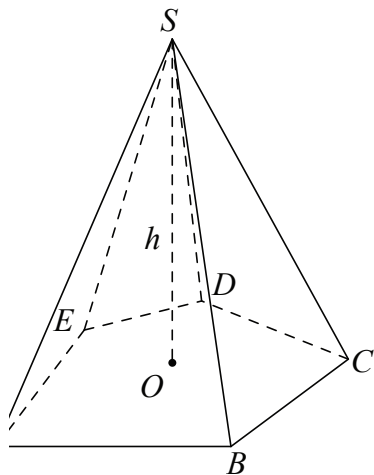


$$P_b = 2p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa

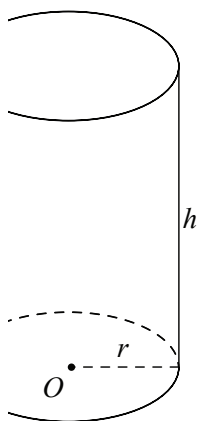
Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

Walec



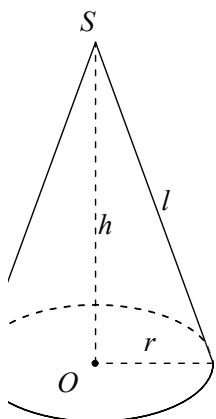
$$P_b = 2\pi rh$$

$$P = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h – wysokością walca

Stożek



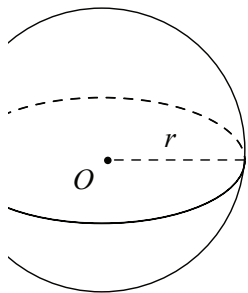
$$P_b = \pi rl$$

$$P = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h – wysokością, l – długością tworzącej stożka

Kula



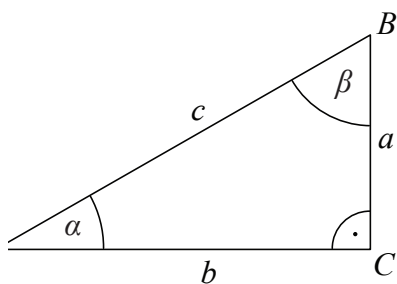
$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

TRYGONOMETRIA

Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

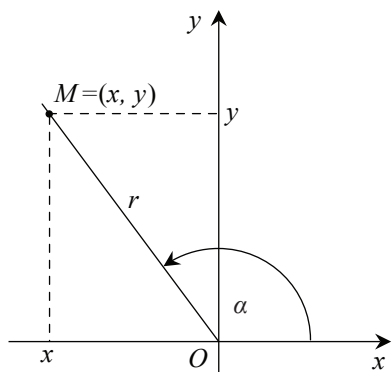
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

Definicje funkcji trygonometrycznych



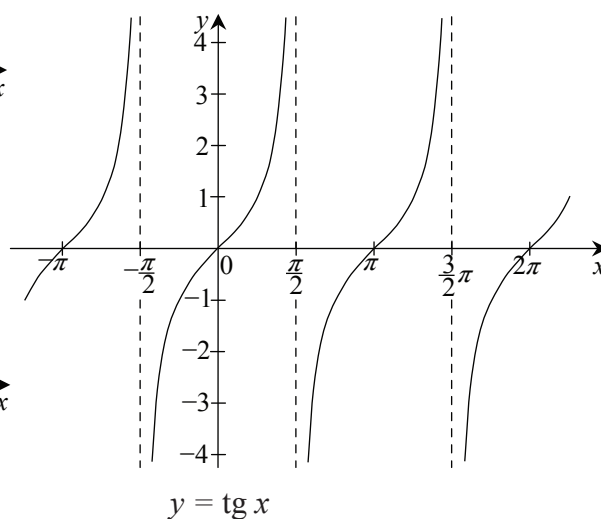
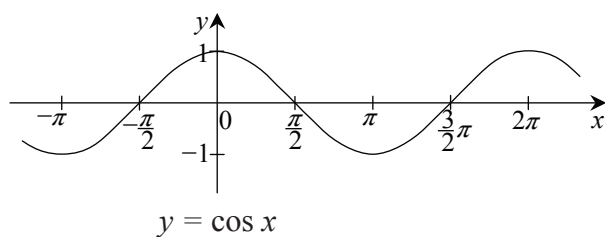
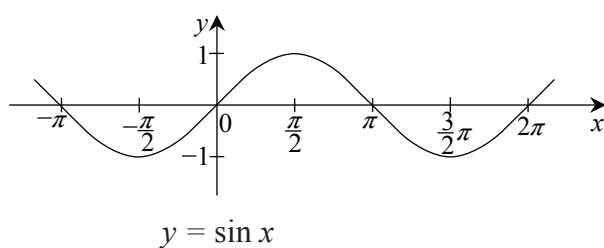
$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest
promieniem wodzącym punktu M

Vykresy funkcji trygonometrycznych



Źwiązki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k - \text{całkowite}$$

Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Funkcje sumy i różnicy kątów

dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

adto mamy równości:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

e zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

Funkcje podwojonego kąta

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}\end{aligned}$$

Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

Wybrane wzory redukcyjne

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

Okresowość funkcji trygonometrycznych

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \quad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \quad \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha, \quad k - \text{całkowite}$$

KOMBINATORYKA

Variacje z powtórzeniami

Ilość sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k .

Variacje bez powtórzeń

Ilość sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k ($1 \leq k \leq n$) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutacje

Liczba sposobów, na które n ($n \geq 1$) różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

Kombinacje

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k ($0 \leq k \leq n$) elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Własności prawdopodobieństwa

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\Omega) = 1 \quad \Omega - \text{zdarzenie pewne}$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad \emptyset - \text{zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór } \Omega)$$

$$P(A) \leq P(B), \text{ gdy } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A), \text{ gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \text{ dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeżeli Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A , zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω .

Prawdopodobieństwo warunkowe

Jeżeli A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω , przy czym $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \dots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \dots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$,
2. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$,

dla każdego zdarzenia losowego A zawartego w Ω zachodzi równość

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Średnia ważona

Średnia ważona n liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, \dots, w_n$ jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Średnia geometryczna

Średnia geometryczna n nieujemnych liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$

dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

dla n parzystych: $\frac{1}{2}(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancją n danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ jest liczba:

$$s^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

GRANICA CIĄGU

Granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów

są ciągi (a_n) i (b_n) , określone dla $n \geq 1$.

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeśli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $b \neq 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

Jeżeli jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$, o ilorazie q .

Jeżeli (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n) , to znaczy ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ dla $n \geq 1$. Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) ma granicę

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Granice nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n) .

POCHODNA FUNKCJI

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \text{ dla } c \in R$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ gdy } g(x) \neq 0$$

Pochodne niektórych funkcji

Jeżeli a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, n dowolną liczbą całkowitą.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \frac{a}{x}, x \neq 0$	$f'(x) = \frac{-a}{x^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

Równanie stycznej

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 , to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest wzorem

$$y = ax + b,$$

gdzie współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pochodnej funkcji f w punkcie x_0 , to znaczy $f'(x_0)$, natomiast $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Równanie stycznej możemy zapisać w postaci

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	—	0

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (22) 53-66-500, fax (22) 53-66-504
www.cke.edu.pl, e-mail: ckesekr@cke.edu.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. (58) 32-05-590, fax (58) 32-05-591
www.oke.gda.pl, e-mail: komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. (42) 63-49-133, fax (42) 63-49-154
www.oke.lodz.pl, e-mail: komisja@komisja.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. (32) 78-41-615, fax (32) 78-41-608
www.oke.jaw.pl, e-mail: oke@oke.jaw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. (61) 85-40-160, fax (61) 85-21-441
www.oke.poznan.pl, e-mail: sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. (12) 68-32-101, fax (12) 68-32-100
www.oke.krakow.pl, e-mail: oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
Plac Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. (22) 45-70-335, fax (22) 45-70-345
www.oke.waw.pl, e-mail: info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
Al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. (86) 47-37-120, fax (86) 47-36-817
www.oke.lomza.pl, e-mail: sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. (71) 78-51-894, fax (71) 78-51-866
www.oke.wroc.pl, e-mail: sekretariat@oke.wroc.pl