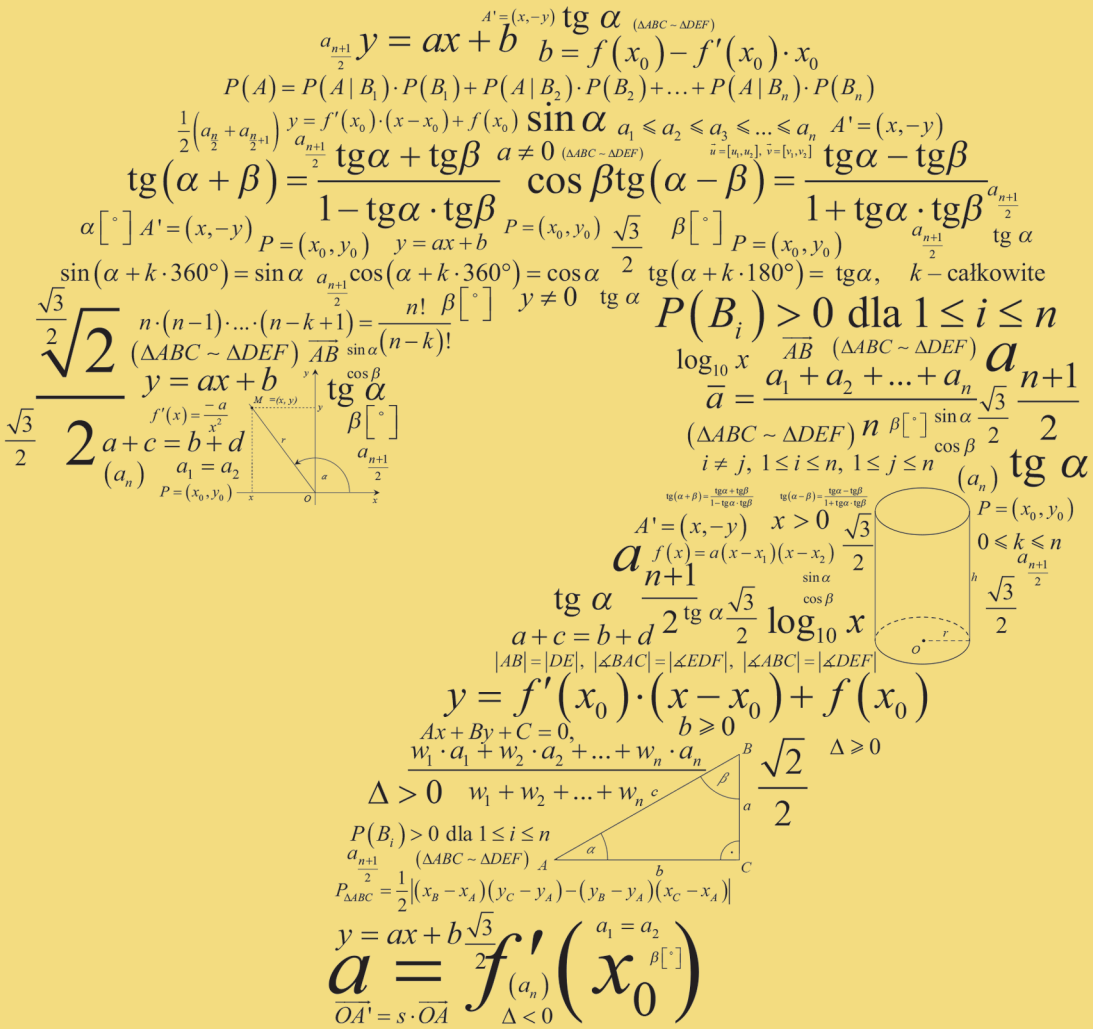
Wybrane wzory matematyczne



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

s treści

Wartość bezwzględna liczby 1
Potęgi i pierwiastki 1
Logarytmy 2
Silnia. Współczynnik dwumianowy 2
Wzór dwumianowy Newtona 2
Wzory skróconego mnożenia 3
Ciągi 3
Funkcja kwadratowa 4
Geometria analityczna 4
Planimetria 6
Stereometria 12
Trygonometria 14
Kombinatoryka 16
Rachunek prawdopodobieństwa 17
Parametry danych statystycznych 18
Granica ciągu 18
Pochodna funkcji 19
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych 20

likacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.
likacja jest dystrybuowana bezpłatnie.

Warszawa 2015

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

ość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

ba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.
dowolnej liczby x mamy:

$|x| \geqslant 0$ $\quad$ $|x| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ $\quad$ $|-x| = |x|$

dowolnych liczb x, y mamy:

$|x+y| \leqslant |x| + |y|$ $\quad$ $|x-y| \leqslant |x| + |y|$ $\quad$ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

dto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

dowolnych liczb a oraz $r \geqslant 0$ mamy:

$|x-a| \leqslant r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - r \leqslant x \leqslant a + r$

$|x-a| \geqslant r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leqslant a - r$ lub $x \geqslant a + r$

OTĘGI I PIERWIASTKI

h n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

wiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geqslant 0$ nazywamy liczbę $b \geqslant 0$ taką, że $b^n = a$.

zczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

li $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.
wiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

h m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla $a \neq 0$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad$ oraz $\quad a^0 = 1$
- dla $a \geqslant 0$: $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: $\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

h r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

li wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich
$a \neq 0$ i $b \neq 0$.

LOGARYTMY

arytmem $\log_a c$ dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik b gi, do której należy podnieść a, aby otrzymać c:

$\log_a c = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^b = c$

/noważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ór na zamianę podstawy logarytmu:
li $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

arytm $\log_{10} x$ można też zapisać jako $\log x$ lub $\lg x$.

SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

ią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

adto przyjmujemy umowę, że 0! = 1.
dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leqslant k \leqslant n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ mbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

hodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb a, b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

dowolnych liczb a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

zczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \qquad a^3 - 1 = (a-1)\left(a^2 + a + 1\right)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \qquad a^3 + 1 = (a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$$
$$a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\right)$$

CIĄGI

Ciąg arytmetyczny

ór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

ór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

dzy sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

Ciąg geometryczny

ór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

ór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$$

dzy sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

Procent składany

eli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi p% w skali nej i kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n aża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

UNKCJA KWADRATOWA

ać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ x \in R.$
r każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \text{ , gdzie } p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{\Delta}{4a},\ \Delta = b^2 - 4ac$$

resem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p,q). Ramiona boli skierowane są do góry, gdy $a > 0$; do dołu, gdy $a < 0$.

ba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu dratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$), zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

eżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków zeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),

eżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden ierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

eżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne ierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta \geqslant 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viéte'a

li $\Delta \geqslant 0$, to

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

EOMETRIA ANALITYCZNA

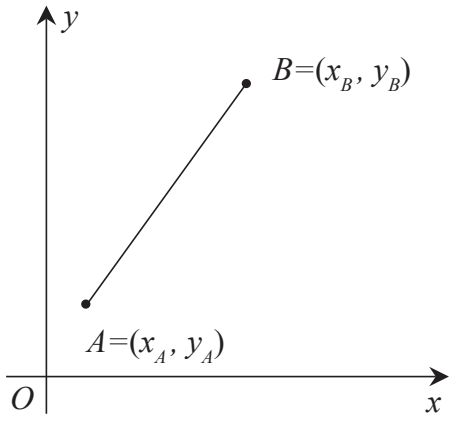
dcinek

gość odcinka o końcach w punktach (x_A, y_A), $B = (x_B, y_B)$ jest dana wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ółrzędne środka odcinka AB:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



Vektory

ółrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

li $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

rosta

vnanie ogólne prostej:

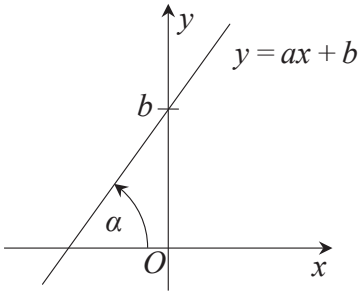
$$Ax + By + C = 0,$$

ie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

li $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy;
li $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

li prosta nie jest równoległa do osi Oy, to ma ona równanie
unkowe:

$$y = ax + b$$



ba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg}\alpha$$

ółczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.

vnanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

vnanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

rosta i punkt

egłość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest dana wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ara prostych

ie proste o równaniach kierunkowych:

$$y = a_1 x + b_1 \qquad y = a_2 x + b_2$$

niają jeden z następujących warunków:

ą równoległe, gdy $a_1 = a_2$

ą prostopadłe, gdy $a_1 a_2 = -1$

worzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}\right|$

wie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$

Trójkąt

ole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$, $C=(x_C,y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$$

rodek ciężkości trójkąta ABC, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Przekształcenia geometryczne

przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a,b]$ przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x+a,y+b)$
symetria względem osi Ox przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(x,-y)$
symetria względem osi Oy przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(-x,y)$
symetria względem punktu (a,b) przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(2a-x,2b-y)$
jednokładność o środku w punkcie O i skali $s\neq 0$ przekształca punkt A na punkt A' taki, że $\overrightarrow{OA'} = s\cdot\overrightarrow{OA}$, a więc, jeśli $O=(x_0,y_0)$, to jednokładność ta przekształca punkt $A=(x,y)$ na punkt $A'=(sx+(1-s)x_0, sy+(1-s)y_0)$

Równanie okręgu

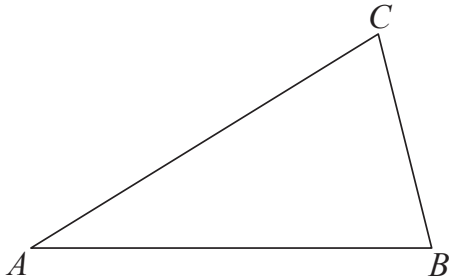
ównanie okręgu o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu $r>0$:

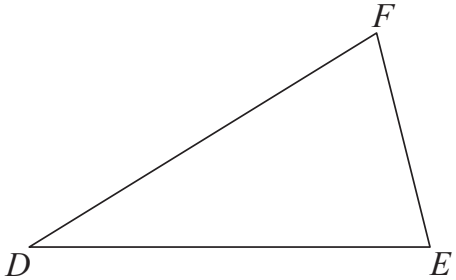
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ıb $\quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad$ gdy $\quad r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$

0. PLANIMETRIA

Cechy przystawania trójkątów





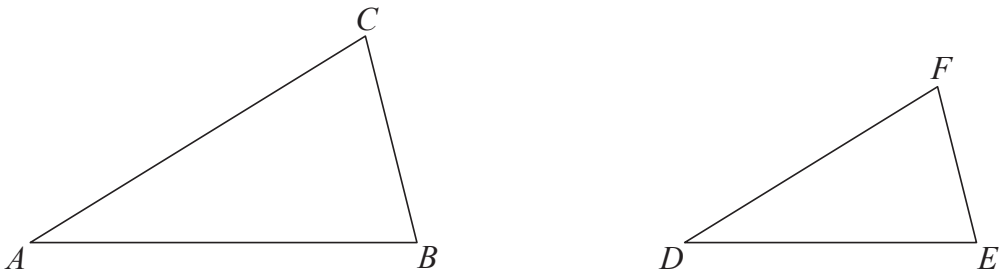
że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające $(\Delta ABC \equiv \Delta DEF)$, możemy stwierdzić na podstawie każdej stępujących **cech przystawania trójkątów**:

:echa przystawania „bok – bok – bok”:
)dpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości: $|AB| = |DE|,\ |AC| = |DF|,\ |BC| = |EF|$

:echa przystawania „bok – kąt – bok”:
lwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty niędzy tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np. $|AB| = |DE|,\ |AC| = |DF|,\ |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$

:echa przystawania „kąt – bok – kąt”:
eden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np. $|AB| = |DE|,\ |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|,\ |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$

Cechy podobieństwa trójkątów



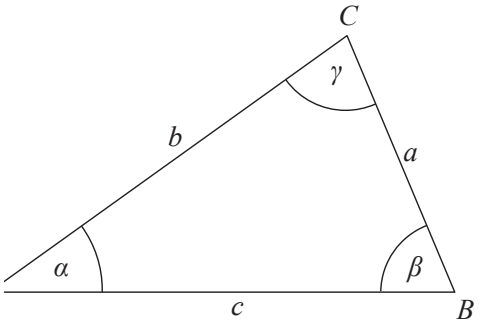
że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne $(\Delta ABC \sim \Delta DEF)$, możemy stwierdzić na podstawie każdej stępujących **cech podobieństwa trójkątów**:

:echa podobieństwa „bok – bok – bok”:
długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta,

np. $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|}$

:echa podobieństwa „bok – kąt – bok”:
długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np. $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|},\ |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$

:echa podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:
lwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też trzecie kąty obu trójkątów są przystające): $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|,\ |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|,\ |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie *ABC*:

a, b, c	– długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C
$2p = a + b + c$	– obwód trójkąta
α, β, γ	– miary kątów przy wierzchołkach A, B, C
h_a, h_b, h_c	– wysokości opuszczone z wierzchołków A, B, C
R, r	– promienie okręgów opisanego i wpisanego

Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha$$

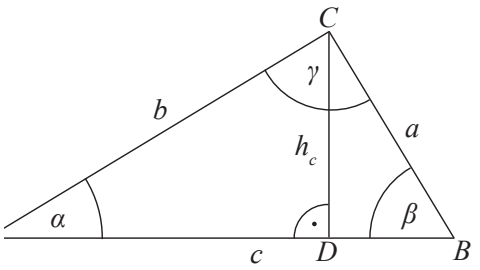
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2\,\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}b^2\,\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{1}{2}c^2\,\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \qquad P_{\Delta ABC} = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = rp \qquad P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)
W trójkącie *ABC* kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD|\cdot|DB|$$

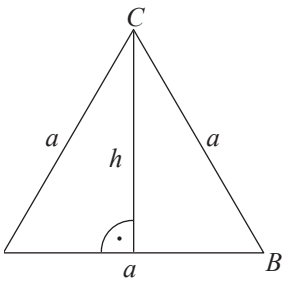
$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c\cdot\sin\alpha = c\cdot\cos\beta$$

$$a = b\cdot\operatorname{tg}\alpha = b\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$R = \frac{1}{2}c \qquad r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$$

Trójkąt równoboczny



a – długość boku
h – wysokość trójkąta

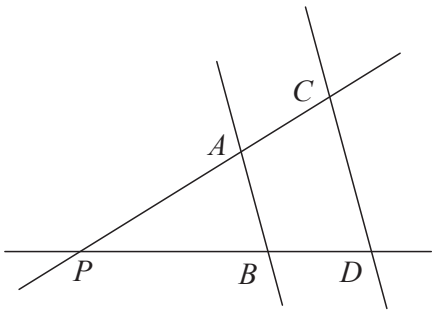
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad R = \frac{2}{3}h$$

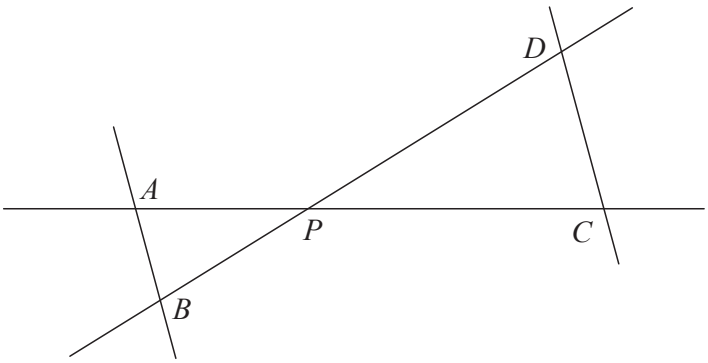
$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad r = \frac{1}{3}h$$

Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)
Dane proste AC i BD przecinają się w punkcie P, przy czym spełniony jest jeden z warunków:
Punkt A leży wewnątrz odcinka PC oraz punkt B leży wewnątrz odcinka PD

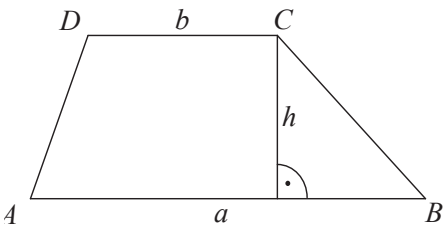
Punkt A leży na zewnątrz odcinka PC oraz punkt B leży na zewnątrz odcinka PD.
Wówczas proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|PA|}{|AC|} = \frac{|PB|}{|BD|}$$



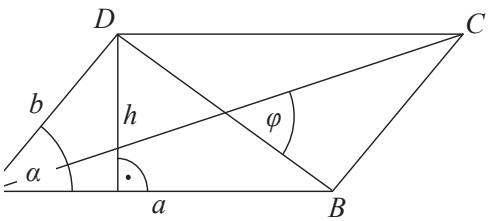


Czworokąty



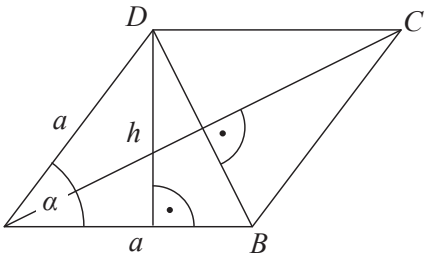
Trapez
Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Równoległobok
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$$

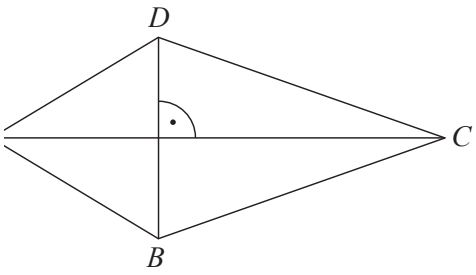


Romb

Czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



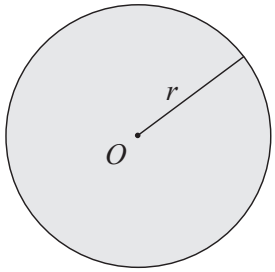
Deltoid

Czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

Koło



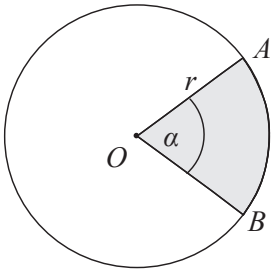
Wzór na pole koła o promieniu r:

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu r:

$$L = 2\pi r$$

Wycinek koła



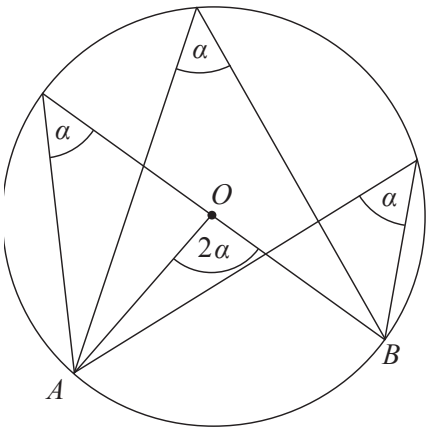
Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

Długość łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

Kąty w okręgu

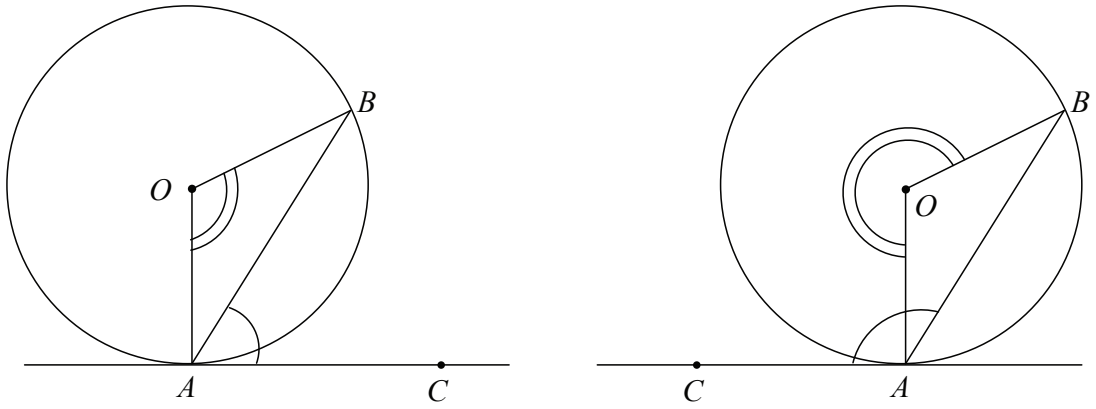


Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na łukach równych, są równe.

Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

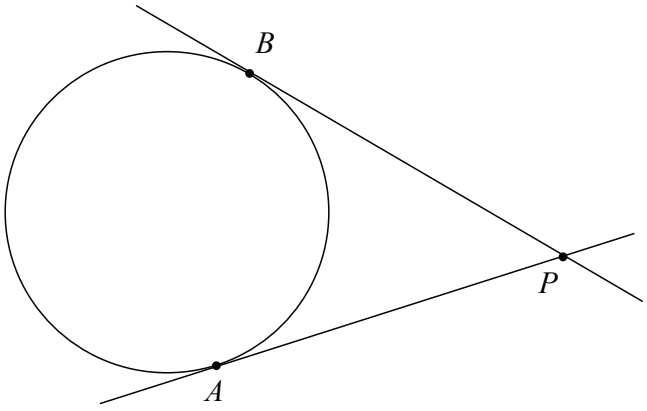


y jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A. dy $\left|\sphericalangle AOB\right| = 2 \cdot \left|\sphericalangle CAB\right|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku dującym się wewnątrz kąta CAB.

Twierdzenie o odcinkach stycznych

li styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to

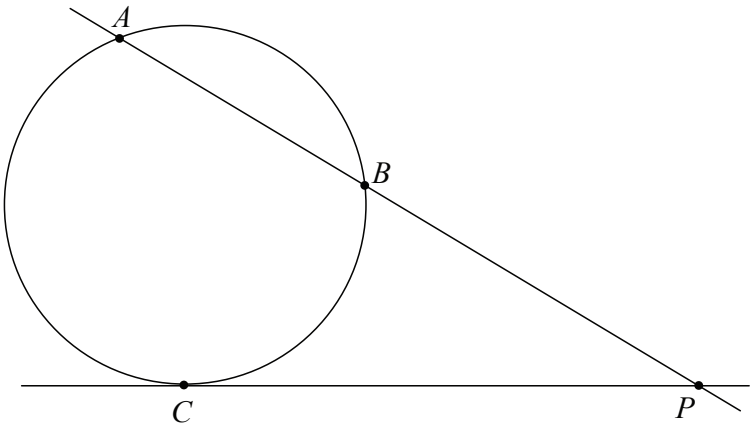
$$\left|PA\right| = \left|PB\right|$$



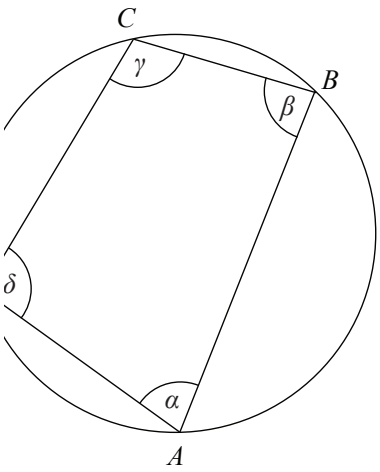
Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

e są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli te te przecinają się w punkcie P, to

$$\left|PA\right| \cdot \left|PB\right| = \left|PC\right|^2$$



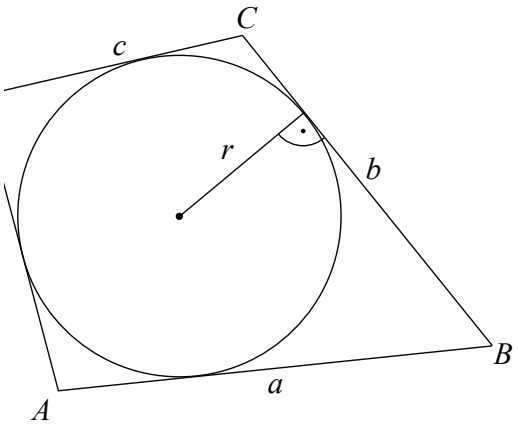
)krąg opisany na czworokącie



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

)krąg wpisany w czworokąt

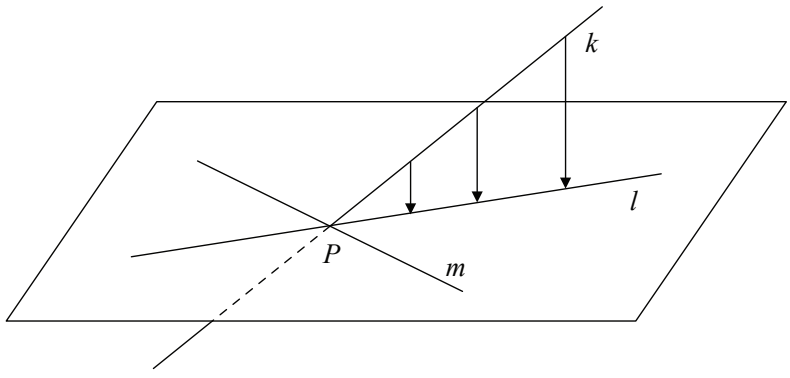


W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

STEREOMETRIA

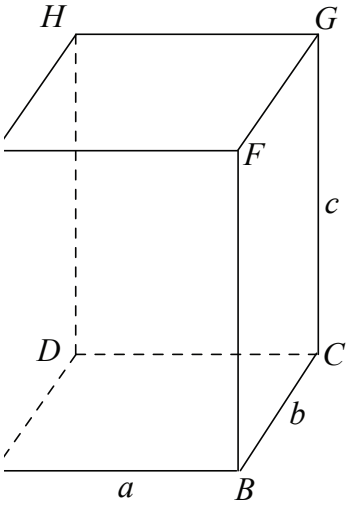
'wierdzenie o trzech prostych prostopadłych



sta *k* przebija płaszczyznę w punkcie *P.* Prosta *l* jest rzutem prostokątnym prostej *k* na tę płaszczyznę.
sta *m* leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt *P*.
wczas prosta *m* jest prostopadła do prostej *k* wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej *l*.

Przyjmujemy oznaczenia:
P pole powierzchni całkowitej
P_p pole podstawy
P_b pole powierzchni bocznej
V objętość

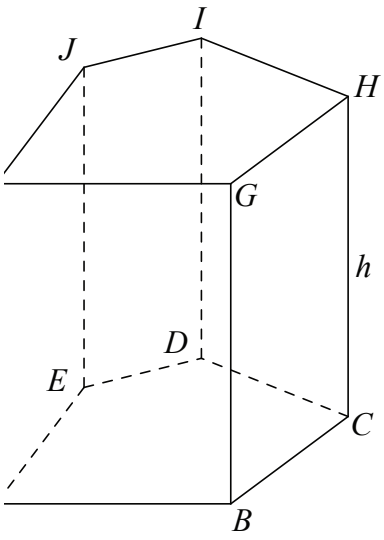
Prostopadłościan



$$P = 2\left(ab + bc + ac\right)$$
$$V = abc$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

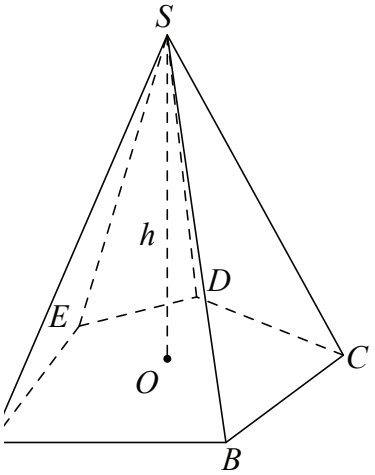
Graniastosłup prosty



$$P_b = 2p \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa

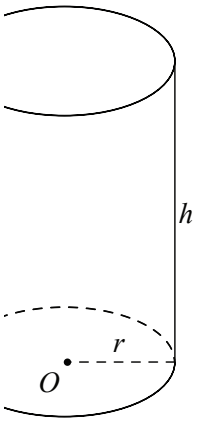
Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

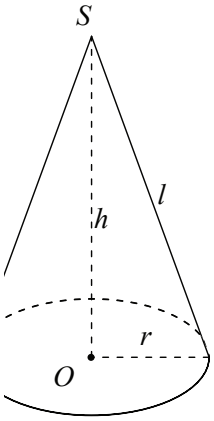
Walec



$$P_b = 2\pi rh$$
$$P = 2\pi r\left(r + h\right)$$
$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h – wysokością walca

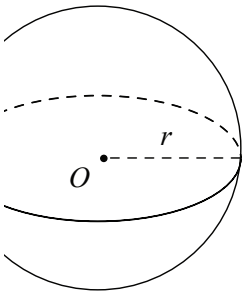
Stożek



$$P_b = \pi rl$$
$$P = \pi r\left(r + l\right)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h – wysokością, l – długością tworzącej stożka

Kula

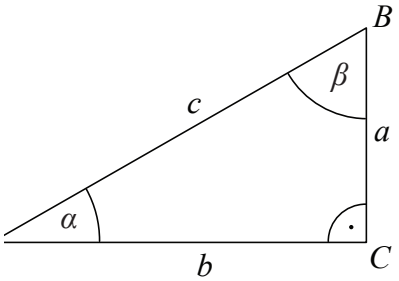


$$P = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

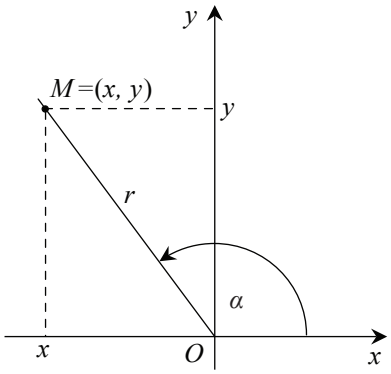
TRYGONOMETRIA

Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

Definicje funkcji trygonometrycznych



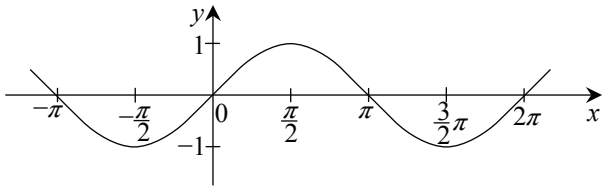
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

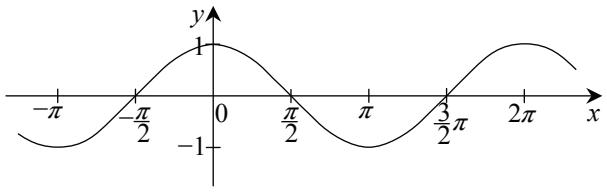
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \text{gdy } x \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M

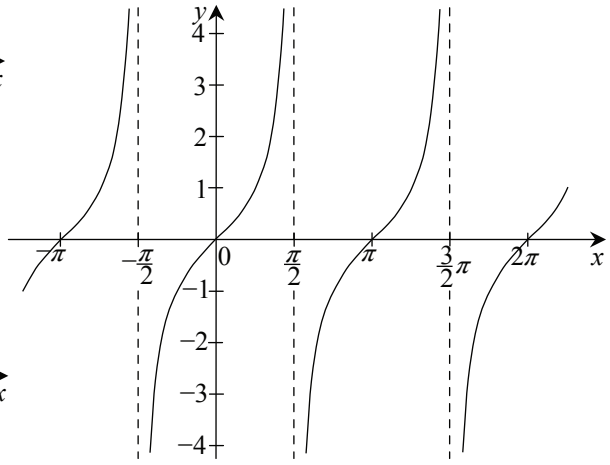
Wykresy funkcji trygonometrycznych



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$

Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k - \text{całkowite}$$

Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

unkcje sumy i różnicy kątów

dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

adto mamy równości:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

e zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

unkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

umy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Vybrane wzory redukcyjne

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$
$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

)kresowość funkcji trygonometrycznych

$$\sin(\alpha+k\cdot360^\circ)=\sin\alpha \qquad \cos(\alpha+k\cdot360^\circ)=\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(\alpha+k\cdot180^\circ)=\operatorname{tg}\alpha,\quad k-\text{całkowite}$$

KOMBINATORYKA

Variacje z powtórzeniami

:ba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie ıych wyrazów, jest równa n^k.

Variacje bez powtórzeń

:ba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k $(1\leqslant k\leqslant n)$ ıych wyrazów, jest równa

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutacje

Liczba sposobów, na które n ($n \geqslant 1$) różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

Kombinacje

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Własności prawdopodobieństwa

$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$ Ω – zdarzenie pewne

$P(\varnothing) = 0$ $\varnothing$ – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A) \leqslant P(B)$, gdy $A \subset B \subset \Omega$

$P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia elementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A \mid B)$ nazywamy liczbę

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeśli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$,
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$,

dla każdego zdarzenia losowego A zawartego w Ω zachodzi równość

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)$$

PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

Średnia arytmetyczna

lnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Średnia ważona

lnia ważona n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, ..., w_n$ jest na:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + ... + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

Średnia geometryczna

lnia geometryczna n nieujemnych liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

Mediana

lianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... \leqslant a_n$

lla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

lla n parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

Wariancja i odchylenie standardowe

iancją n danych liczbowych $a_1, a_2, ..., a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ jest liczba:

$$r^2 = \frac{\left(a_1 - \bar{a}\right)^2 + \left(a_2 - \bar{a}\right)^2 + ... + \left(a_n - \bar{a}\right)^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} - \left(\bar{a}\right)^2$$

hylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

GRANICA CIĄGU

Granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów

e są ciągi $\left(a_n\right)$ i $\left(b_n\right)$, określone dla $n \geqslant 1$.

li $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\right) = a - b \qquad \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = a \cdot b$$

li ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geqslant 1$ oraz $b \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

y jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, o ilorazie q.

ch (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), to znaczy ciąg określony wzorem

$= a_1 + a_2 + ... + a_n$ dla $n \geqslant 1$. Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) ma granicę

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

granicę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

POCHODNA FUNKCJI

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji

$$\left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x) \text{ dla } c \in R$$

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$$

$$\left[f(x) - g(x)\right]' = f'(x) - g'(x)$$

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}, \text{ gdy } g(x) \neq 0$$

Pochodne niektórych funkcji

ch a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, n dowolną liczbą całkowitą.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$	$f'(x) = \frac{-a}{x^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

Równanie stycznej

li funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ e jest wzorem

$$y = ax + b,$$

e współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pochodnej funkcji f w punkcie x_0, to znaczy $f'(x_0)$, natomiast $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Równanie stycznej możemy zapisać w postaci

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

$\alpha\,[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta\,[^\circ]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha\,[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta\,[^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	–	**0**

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (22) 53-66-500, fax (22) 53-66-504
www.cke.edu.pl, e-mail: ckesekr@cke.edu.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. (58) 32-05-590, fax (58) 32-05-591
www.oke.gda.pl, e-mail: komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. (12) 68-32-101, fax (12) 68-32-100
www.oke.krakow.pl, e-mail: oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. (42) 63-49-133, fax (42) 63-49-154
www.oke.lodz.pl, e-mail: komisja@komisja.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
Plac Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. (22) 45-70-335, fax (22) 45-70-345
www.oke.waw.pl, e-mail: info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. (32) 78-41-615, fax (32) 78-41-608
www.oke.jaw.pl, e-mail: oke@oke.jaw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
Al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. (86) 47-37-120, fax (86) 47-36-817
www.oke.lomza.pl, e-mail: sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. (61) 85-40-160, fax (61) 85-21-441
www.oke.poznan.pl, e-mail: sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. (71) 78-51-894, fax (71) 78-51-866
www.oke.wroc.pl, e-mail: sekretariat@oke.wroc.pl

likacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.
likacja jest dystrybuowana bezpłatnie.

ISBN 978-83-940902-1-0