



Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2013

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Kryteria oceniania odpowiedzi

MAJ 2013

Zadanie 1. (0–1)

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 p.)	
		Wersja arkusza A	Wersja arkusza B
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $ x - a < b$ (II.1.f)	A	D

Zadanie 2. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie pojęcia procentu (III.1.d)	B	C
--------------------------	---	----------	----------

Zadanie 3. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonanie obliczeń z zastosowaniem wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (I.1.h)	B	C
--------------------------------------	--	----------	----------

Zadanie 4. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie układu równań liniowych (I.3.c)	C	A
--------------------------------------	---	----------	----------

Zadanie 5. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (II.4.g)	D	A
---	--	----------	----------

Zadanie 6. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytanie ze wzoru funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli (II.4.b)	D	C
---	---	----------	----------

Zadanie 7. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia (I.2.a)	C	B
--------------------------------------	--	----------	----------

Zadanie 8. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie prostokątów prostych na podstawie ich równań kierunkowych (II.8.c)	D	A
---	--	----------	----------

Zadanie 9. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie współczynników we wzorze funkcji liniowej do określenia położenia prostej w układzie współrzędnych (II.4.g)	A	C
---	---	----------	----------

Zadanie 10. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie nierówności liniowej i wskazanie najmniejszej liczby spełniającej tę nierówność (I.3)	B	C
--------------------------------------	---	----------	----------

Zadanie 11. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie wykresu funkcji $y = f(x)$ do wskazania wykresu funkcji typu $y = f(x+a)$, $y = f(x-a)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ (I.4.d)	C	A
--------------------------------------	--	----------	----------

Zadanie 12. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (II.5.c)	C	B
---	---	----------	----------

Zadanie 13. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (II.5.c)	B	C
---	---	----------	----------

Zadanie 14. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (II.6.c)	A	D
---	---	----------	----------

Zadanie 15. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym (I.7.a)	A	D
--------------------------------------	--	----------	----------

Zadanie 16. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie równania wielomianowego (I.3.d)	C	B
--------------------------------------	---	----------	----------

Zadanie 17. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie i obwodu rombu (II.8.e)	D	B
---	---	----------	----------

Zadanie 18. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie współrzędnych środka odcinka do wyznaczenia jednego z końców tego odcinka (II.8.f)	C	D
---	--	----------	----------

Zadanie 19. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (II.8.g)	A	C
---	--	----------	----------

Zadanie 20. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanie (I.9.b)	B	C
--------------------------------------	---	----------	----------

Zadanie 21. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczanie związków miarowych w bryłach obrotowych (II.9.b)	C	B
---	--	----------	----------

Zadanie 22. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10.d)	B	C
--------------------------	--	----------	----------

Zadanie 23. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, w tym obliczeń na pierwiastkach (I.1.a)	B	C
--------------------------------------	---	----------	----------

Zadanie 24. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie mediany uporządkowanego zestawu danych (II.10.a)	D	A
---	---	----------	----------

Zadanie 25. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie związków miarowych w graniastosłupie do obliczenia jego objętości (II.9.b)	B	C
---	--	----------	----------

Schemat oceniania do zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (II.3.d)
---	--

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu stosując metodę grupowania wyrazów:

$$x(x^2 - 8) + 2(x^2 - 8) = 0 \quad \text{lub} \quad x^2(x + 2) - 8(x + 2) = 0 \\ (x + 2)(x^2 - 8) = 0.$$

Stąd $x = -2$ lub $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.: $(x + 2)(x^2 - 8)$,

$(x + 2)(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})$, przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = -2$, $x = -\sqrt{8}$, $x = \sqrt{8}$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 + 2x^2 - 8x - 16$. Dzielimy wielomian $x^3 + 2x^2 - 8x - 16$ przez dwumian $(x + 2)$. Otrzymujemy iloraz $(x^2 - 8)$.

Zapisujemy równanie w postaci $(x + 2)(x^2 - 8) = 0$. Stąd $(x + 2)(x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8}) = 0$

i $x = -2$ lub $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy podzieli wielomian $x^3 + 2x^2 - 8x - 16$ przez dwumian $(x + 2)$, otrzyma iloraz $(x^2 - 8)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = -2$, $x = -\sqrt{8}$, $x = \sqrt{8}$.

Zadanie 27. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (II.6.c)
---	---

I sposób rozwiązania (wykorzystanie znanych wartości funkcji trygonometrycznych)

Ponieważ α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\alpha = 60^\circ$. Zatem $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

$$\text{Stąd } \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze wartość cosinusa kąta α : $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni

błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy, że $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$.

II sposób rozwiązania (wykorzystanie związków między funkcjami trygonometrycznymi)

Obliczamy $\sin^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, następnie korzystając z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

obliczamy $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$, stąd $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$

albo

korzystając z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, przekształcamy wyrażenie $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha$ do postaci $4 \sin^2 \alpha - 3$, a następnie obliczamy jego wartość: $4 \sin^2 \alpha - 3 = 0$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy:

- obliczy $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$

albo

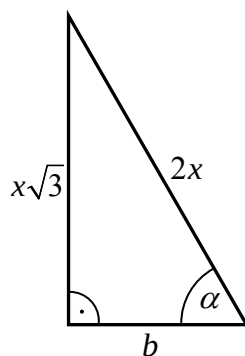
- zapisze wyrażenie w postaci $\sin^2 \alpha - 3(1 - \sin^2 \alpha)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy, że $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$.

III sposób rozwiązania (trójkąt prostokątny)



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $b^2 = (2x)^2 - (\sqrt{3}x)^2$, więc $b = x$.

Stąd $\cos \alpha = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, więc $\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy:

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej długości 2 (lub ich wielokrotności), obliczy długość drugiej przyprostokątnej, zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt, obliczy cosinus tego kąta i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy
- albo
- obliczy długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości $\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej długości 2 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym, obliczy cosinus tego kąta $\cos \alpha$ (o ile otrzymana wartość jest dodatnia i mniejsza od 1) i konsekwentnie obliczy wartość wyrażenia $\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha$.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy obliczy wartość $\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha = 0$.

Zadania 28. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy + yz + zx \leq 0$.

Możesz skorzystać z tożsamości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (V.2.b)
----------------------------	---

I sposób rozwiązania

Podnosimy obie strony równości $x + y + z = 0$ do kwadratu i otrzymujemy równość równoważną

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0.$$

Stąd

$$xy + xz + yz = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ponieważ suma kwadratów liczb x, y, z jest nieujemna, więc $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$, czyli $xy + yz + zx \leq 0$, co kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy podniesie obie strony równości $x + y + z = 0$ do kwadratu i zapisze np.

$$xy + xz + yz = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \quad \text{lub} \quad 2xy + 2xz + 2yz = -x^2 - y^2 - z^2$$

i na tym dowód zakończy nie uzasadniając znaku wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2$ lub $-x^2 - y^2 - z^2$.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy przeprowadzi pełny dowód.

II sposób rozwiązania

Z równości $x + y + z = 0$ wyznaczamy jedną z liczb, np. $z = -x - y$. Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &= xy + x(-x - y) + y(-x - y) = xy - x^2 - xy - xy - y^2 = \\ &= -x^2 - xy - y^2 = -(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

Wyrażenie $x^2 + xy + y^2$ traktujemy jak trójmian kwadratowy zmiennej x . Wówczas jego wyróżnik jest równy $\Delta = y^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2 = -3y^2 \leq 0$. To, wraz z dodatnim znakiem współczynnika przy x^2 , oznacza, że trójmian przyjmuje jedynie wartości nieujemne, czyli $x^2 + xy + y^2 \geq 0$. Stąd $xy + xz + yz = -(x^2 + xy + y^2) \leq 0$.

Możemy również zauważyć, że $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$. Jest to suma dwóch liczb nieujemnych, a więc jest nieujemna. Stąd $xy + xz + yz = -(x^2 + xy + y^2) \leq 0$.

Możemy również zauważyć, że $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}y^2$. Jest to suma trzech liczb nieujemnych, a więc jest nieujemna. Stąd $xy + xz + yz = -(x^2 + xy + y^2) \leq 0$.

To kończy dowód.

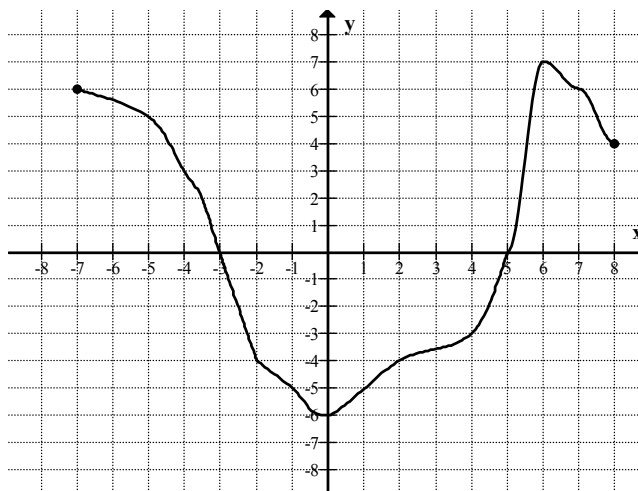
Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy wyznaczy z równości $x + y + z = 0$ jedną z liczb i zapisze wyrażenie $xy + xz + yz$ w zależności od dwóch zmiennych, np. zmiennych x i y : $xy + xz + yz = -x^2 - xy - y^2$
i na tym dowód zakończy nie uzasadniając znaku wyrażenia $-x^2 - xy - y^2$.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadania 29. (0–2)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7, 8 \rangle$.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

- największą wartość funkcji f ,
- zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie z wykresu funkcji zbioru jej wartości oraz przedziałów w których funkcja przyjmuje wartości ujemne (II.4.b)
---	--

Rozwiązanie

Odczytujemy z wykresu największą wartość funkcji f . Jest ona równa 7.

Podajemy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne: $(-3, 5)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy:

- poda największą wartość funkcji: 7 i nie poda zbioru tych wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne

albo

- poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne: $(-3, 5)$ i nie poda największej wartości funkcji f .

Uwaga

Akceptujemy zapisy: $x \in (-3, 5)$ lub $-3 < x < 5$ lub $x > -3$ i $x < 5$
lub $x > -3$, $x < 5$.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy poda największą wartość funkcji oraz poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne: 7, $(-3, 5)$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

W rozwiązaniu podpunktu b) akceptujemy zapisy: $x \in (5, -3)$, $x \in (3, 5)$, $x \in (3, -5)$.

Zadania 30. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie nierówności kwadratowej (II.3.a)
---	--

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 - 7x + 5$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 \text{ i stąd } x_1 = \frac{7-3}{4} = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

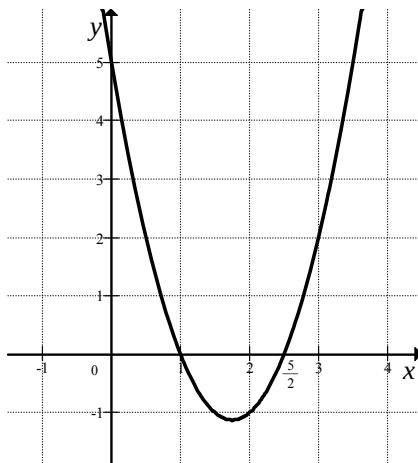
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2} \text{ oraz } x_1 + x_2 = \frac{7}{2}, \text{ stąd } x_1 = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{5}{2}$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając je na wykresie

$$x_1 = 1, x_2 = 2\frac{1}{2} \text{ lub } 2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

Drugi etap rozwiązania:



Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, 1] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, 1] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$ lub $x \leq 1$ lub $x \geq \frac{5}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $2\left(x - \frac{10}{4}\right)\left(x - \frac{4}{4}\right)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność,
- zapisze nierówność $\left|x - \frac{7}{4}\right| \geq \frac{3}{4}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
- błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
- błędnie zapisze nierówność, np. $\left|x + \frac{7}{4}\right| \geq \frac{3}{4}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy:

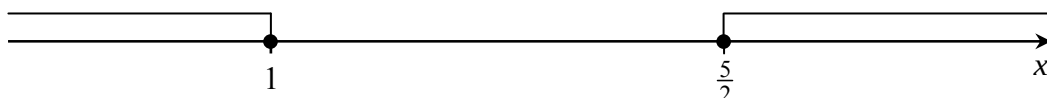
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ lub $(x \leq 1 \text{ lub } x \geq \frac{5}{2})$,

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \leq 1$, $x \geq \frac{5}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ i zapisze, np. $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{2}{5}, +\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in (-\infty, \frac{5}{2}) \cup (1, +\infty)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadania 31. (0–2)

Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.1.g)
----------------------------	---

Rozwiązanie

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias $6^{98} \cdot (6^2 - 2 \cdot 6 + 10)$. Doprowadzamy do postaci $6^{98} \cdot 2 \cdot 17$.

Schemat oceniania rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

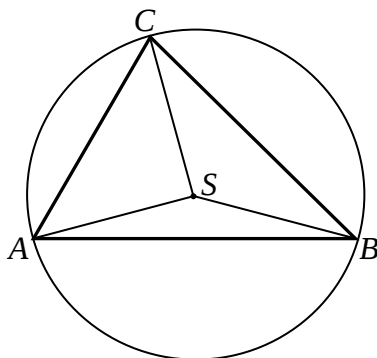
gdy zapisze liczbę $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą 6^k , gdzie $80 \leq k \leq 98$, np. $6^{98} (6^2 - 2 \cdot 6 + 10)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy zapisze liczbę w postaci, w której widać podzielność przez 17 albo przeprowadzi rozumowanie uzasadniające podzielność przez 17.

Zadania 32. (0–4)

Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS. Oblicz kąty trójkąta ABC.

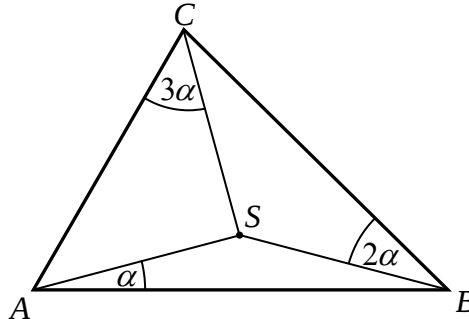


Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)
------------------------------	---

I sposób rozwiązania

Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz tego trójkąta. Niech α oznacza miarę kąta BAS . Wówczas

$$|\sphericalangle CBS| = 2\alpha \text{ i } |\sphericalangle ACS| = 3\alpha.$$



Każdy z trójkątów ABS , BCS i CAS jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = \alpha, |\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS| = 2\alpha, |\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS| = 3\alpha.$$

Miary kątów trójkąta ABC są więc równe

$$|\sphericalangle BAC| = 4\alpha, |\sphericalangle CBA| = 3\alpha, |\sphericalangle ACB| = 5\alpha.$$

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180° , zatem

$$4\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ,$$

$$12\alpha = 180^\circ,$$

$$\alpha = 15^\circ.$$

Więc $|\sphericalangle BAC| = 4\alpha = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 3\alpha = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 5\alpha = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

- Zapisanie miar kątów BAS , ACS i CBS w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$,
 $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

albo

- wykorzystanie faktu, że co najmniej dwa spośród trójkątów ABS , BCS i CAS są równoramienne, np.: $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$, $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

- Zapisanie miar kątów BAS , ACS i CBS w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$,
 $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

oraz

- wykorzystanie faktu, że co najmniej dwa spośród trójkątów ABS , BCS i CAS są równoramienne, np.: $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$, $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

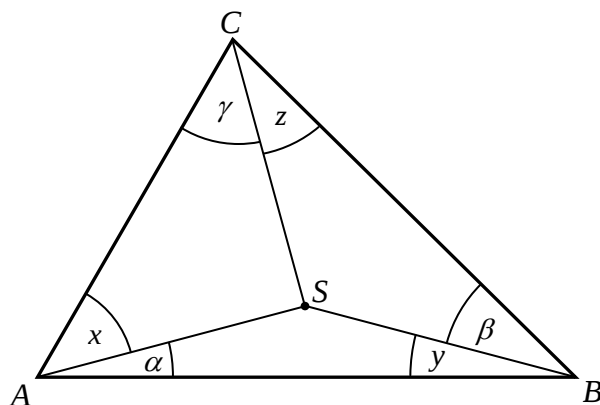
Zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć miary kątów trójkąta ABC , np.: $4\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Obliczenie miar kątów trójkąta ABC : $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$.

II sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz tego trójkąta.

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym otrzymujemy

$$|\sphericalangle ASB| = 2\gamma + 2z, \quad |\sphericalangle BSC| = 2\alpha + 2x, \quad |\sphericalangle CSA| = 2\beta + 2y.$$

Suma kątów w każdym z trójkątów ABS , BCS i CAS jest równa 180° , więc otrzymujemy układ równań

$$\alpha + y + (2\gamma + 2z) = 180^\circ \text{ i } \beta + z + (2\alpha + 2x) = 180^\circ \text{ i } \gamma + x + (2\beta + 2y) = 180^\circ.$$

Ponieważ $\beta = 2\alpha$ i $\gamma = 3\alpha$, więc układ możemy zapisać w postaci

$$\alpha + y + (6\alpha + 2z) = 180^\circ \text{ i } 2\alpha + z + (2\alpha + 2x) = 180^\circ \text{ i } 3\alpha + x + (4\alpha + 2y) = 180^\circ,$$

$$7\alpha + y + 2z = 180^\circ \text{ i } 4\alpha + 2x + z = 180^\circ \text{ i } 7\alpha + x + 2y = 180^\circ.$$

Mnożąc strony pierwszego równania przez -2 , drugiego przez 4 otrzymujemy

$$-14\alpha - 2y - 4z = -360^\circ \text{ i } 16\alpha + 8x + 4z = 720^\circ \text{ i } 7\alpha + x + 2y = 180^\circ.$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$9\alpha + 9x = 540^\circ,$$

$$\alpha + x = 60^\circ,$$

czyli $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$. Zatem $|\sphericalangle BSC| = 120^\circ$.

Trójkąt BSC jest równoramienny, więc $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$, zatem

$2\alpha = 30^\circ$, czyli $\alpha = 15^\circ$. Stąd $|\sphericalangle CBA| = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

- Zapisanie miar kątów BAS , ACS i CBS w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$,
 $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

albo

- wykorzystanie zależności między kątami środkowymi ASB , BSC i ASC oraz odpowiednimi kątami wpisanymi i zapisanie układu co najmniej trzech równań, np.:

$$\alpha + y + (2\gamma + 2z) = 180^\circ \text{ i } \beta + z + (2\alpha + 2x) = 180^\circ \text{ i } \gamma + x + (2\beta + 2y) = 180^\circ,$$

$$\text{gdzie } x = |\sphericalangle CAS|, y = |\sphericalangle ABS|, z = |\sphericalangle BCS|, \beta = |\sphericalangle CBS|, \gamma = |\sphericalangle ACS|.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

- Zapisanie miar kątów BAS , ACS i CBS w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$,
 $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

oraz

- wykorzystanie zależności między kątami środkowymi ASB , BSC , ASC oraz odpowiednimi kątami wpisanymi i zapisanie układu co najmniej trzech równań z czterema niewiadomymi, np.:

$$\alpha + y + (6\alpha + 2z) = 180^\circ \text{ i } 2\alpha + z + (4\alpha + 2y) = 180^\circ \text{ i } 3\alpha + x + (4\alpha + 2y) = 180^\circ.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Obliczenie miary kąta CAB : $\alpha + x = 60^\circ$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Obliczenie miar kątów trójkąta ABC : $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$.

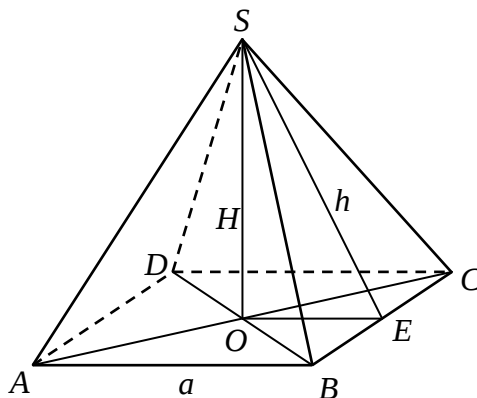
Zadanie 33. (0–4)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2 , a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach. (IV.9.b)
------------------------------	---

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole podstawy ostrosłupa jest równe 100, więc $a^2 = 100$. Stąd $a = 10$.

Pole powierzchni bocznej jest równe 260, więc $4 \cdot \frac{1}{2} ah = 260$. Stąd i z poprzedniego wyniku

$$2 \cdot 10h = 260, \text{ więc } h = 13.$$

Ponieważ trójkąt EOS jest prostokątny, więc

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + H^2 = h^2,$$

$$5^2 + H^2 = 13^2,$$

$$H^2 = 144,$$

$$H = 12.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} P_p H = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa 400 cm^3 .

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 10$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H = 12$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy wysokość ściany bocznej $h = 13$ i nie traktuje jej jako wysokości ostrosłupa i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty**. Jeżeli natomiast przyjmuje, że obliczona wysokość ściany bocznej jest wysokością ostrosłupa, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 400 \text{ cm}^3$.

Uwagi

1. Nie zwracamy uwagi na jednostki (zdający może je pominąć).
2. Jeżeli zdający przyjmie, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest polem powierzchni całkowitej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający przyjmie, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest polem jednej ściany bocznej i konsekwentnie do tego błędu obliczy objętość ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 34. (0–5)

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b)
--------------------------	--

Rozwiązanie

Niech v oznacza średnią prędkość (w km/h) pierwszego pociągu na tej trasie, t - czas przejazdu (w godzinach) pierwszego pociągu na tej trasie. Wtedy $v-9$ oznacza średnią prędkość drugiego pociągu na tej trasie, $t + \frac{2}{3}$ - czas przejazdu drugiego pociągu na tej trasie.

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} v \cdot t = 336 \\ (v-9) \left(t + \frac{2}{3} \right) = 336 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $t = \frac{336}{v}$ i podstawiamy do równania drugiego.

Otrzymujemy równanie z niewiadomą v , które przekształcamy równoważnie

$$(v-9) \left(\frac{336}{v} + \frac{2}{3} \right) = 336,$$

$$\frac{2}{3}v - \frac{9 \cdot 336}{v} - 6 = 0,$$

$$\frac{2}{3}v^2 - 6v - 9 \cdot 336 = 0 \quad (\text{lub } 2v^2 - 18v - 9072 = 0 \quad \text{lub } v^2 - 9v - 4536 = 0).$$

Równanie to ma dwa rozwiązania

$$v_1 = 72, \quad v_2 = -63 < 0.$$

Drugie z tych rozwiązań odrzucamy (prędkość nie może być ujemna).

Gdy $v = 72$, to wtedy $v-9 = 63$.

Odpowiedź: Średnia prędkość pierwszego pociągu jest równa 72 km/h, średnia prędkość drugiego pociągu równa się 63 km/h.

Schemat oceniania

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v , t oznaczających odpowiednio, prędkość i czas. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, aby te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania1 pkt

Zdający zapisze równanie, w którym co najmniej jedna z wielkości (prędkość, czas) jest uzależniona od przyjętej niewiadomej, np.:

$$(v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } (v+9)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi v i t , np.:

$$v \cdot t = 336 \text{ i } (v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } v \cdot t = 336 \text{ i } (v+9)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą v lub t .

$$(v-9)\left(\frac{336}{v}+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } \left(\frac{336}{t}-9\right)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336$$

$$\text{albo } (v+9)\left(\frac{336}{v}-\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } \left(\frac{336}{t}+9\right)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336.$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. drobne błędy rachunkowe lub wadliwe przepisanie)4 pkt

- zdający rozwiąże równanie z niewiadomą v lub t z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze prędkości obu pociągów
albo
- zdający rozwiąże równanie kwadratowe i zapisze prędkość tylko jednego pociągu.

Rozwiązanie pełne5 pkt

Zdający obliczy średnie prędkości obu pociągów: średnia prędkość pierwszego pociągu równa się 72 km/h, średnia prędkość drugiego pociągu równa się 63 km/h.

Uwagi

1. Oceniamy na **0 punktów** rozwiązanie, w których ułożone równania zawierają niezgodność typu wielkości po obu stronach: po jednej stronie prędkość, po drugiej czas lub niezgodność jednostek: prędkość w kilometrach na godzinę, czas w minutach, o ile nie są zapisane jednostki.
2. Jeżeli zdający oznaczy średnią prędkość pierwszego pociągu przez v (w km/h), a przez t czas przejazdu pierwszego pociągu na tej trasie, a potem zapisze, że prędkość średnia drugiego pociągu jest równa $v+9$ i czas przejazdu drugiego pociągu na tej trasie

jest równy $t - \frac{2}{3}$, a następnie zapisze układ równań $v \cdot t = 336$ i $(v+9) \cdot \left(t - \frac{2}{3}\right) = 336$

i doprowadzi go do równania z jedną niewiadomą, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli rozwiąże to równanie, to otrzymuje **2 punkty**, a jeśli doprowadzi rozwiązanie zadania do końca konsekwentnie do ułożonego układu równań lub przyjętych oznaczeń, to otrzymuje **3 punkty** (otrzymując odpowiednio $v = 63$ i $v+9 = 72$ albo $v = 63$ i $v-9 = 54$).

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Przykład 1.

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość pierwszego pociągu, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pierwszy pociąg

$$v - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}}$$

$$\begin{cases} 336 = v \cdot t \\ 336 = (v-9)t + \frac{2}{3} \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $t + \frac{2}{3}$ w nawias. Zapis równania $v - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość pierwszego pociągu, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pierwszy pociąg

$$v - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}} \quad \begin{cases} v = \frac{336}{t} \\ v - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}} \end{cases} \quad \frac{336}{t} - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty**, mimo że w równaniu $\frac{336}{t} - 9 = \frac{336}{t + \frac{2}{3}}$ zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 336 i pominął liczbę $\frac{2}{3}$ w mianowniku ułamka.

Przykład 3.

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $v^2 + 9v - 4536 = 0$ zamiast równania $v^2 - 9v - 4536 = 0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik,

który może być realną prędkością jednego z pociągów, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.