



**Centralna Komisja Egzaminacyjna**

# **EGZAMIN MATURALNY 2012**

## **MATEMATYKA**

### **POZIOM ROZSZERZONY**

#### **Kryteria oceniania odpowiedzi**

**CZERWIEC 2012**

**Zadanie 1. (0-4)**

| Obszar standardów        | Opis wymagań                                                |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Modelowanie matematyczne | Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną (III.3.e.R) |

**I sposób rozwiązania** (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$ .

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

| $x \in (-\infty, -1)$                                                                                                           | $x \in \langle -1, 2 \rangle$                                                                                                | $x \in \langle 2, \infty \rangle$                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-x + 2 - x - 1 \geq 3x - 3$<br>$-5x \geq -4$<br>$x \leq \frac{4}{5}$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x < -1$ | $-x + 2 + x + 1 \geq 3x - 3$<br>$-3x \geq -6$<br>$x \leq 2$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-1 \leq x < 2$ | $x - 2 + x + 1 \geq 3x - 3$<br>$-x \geq -3 + 1$<br>$x \leq 2$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x = 2$ |

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest  $(-\infty, 2)$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp**..... 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I.  $x \in (-\infty, -1)$      $-x + 2 - x - 1 \geq 3x - 3$

II.  $x \in \langle -1, 2 \rangle$      $-x + 2 + x + 1 \geq 3x - 3$

III.  $x \in \langle 2, \infty \rangle$      $x - 2 + x + 1 \geq 3x - 3$

**Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)**..... 3 pkt

- Zdający poprawnie rozwiąże wszystkie trzy nierówności i poprawnie wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, a w trzecim przypadku popełni błąd i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- poprawnie rozwiąże nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź:  $x \in (-\infty, 2\rangle$  lub  $x \leq 2$ .

**Uwaga**

Zdający może włączyć liczby  $-1$  i  $2$  do wszystkich ograniczonych tymi liczbami przedziałów. Jeżeli natomiast nie włączy tych liczb do żadnego rozważanego przedziału (rozważy wszystkie przedziały otwarte), to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

**II sposób rozwiązania** (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki:  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$   $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$

|                                                                           |                                                                        |                                                                         |                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$                      | $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$                      | $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$                       | $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$                       |
| $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x-2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$ | $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \\ x-2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$ | $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ -x+2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$ | $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \\ -x+2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$             | $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < -1 \\ \dots \end{cases}$                | $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$              | $\begin{cases} x < 2 \\ x < -1 \\ x \leq \frac{4}{5} \end{cases}$    |
| $x = 2$                                                                   | niemożliwe                                                             | $-1 \leq x < 2$                                                         | $-\infty < x < -1$                                                   |

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności są  $x \leq 2$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zdający zapisze cztery przypadki:  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$   $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$

**Uwaga**

Jeżeli zdający błędnie zapisze którykolwiek z czterech przypadków, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....2 pkt**

Zdający zapisze cztery układy nierówności:

|                                                                           |                                                                        |                                                                         |                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x-2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$ | $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \\ x-2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$ | $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ -x+2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$ | $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \\ -x+2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$ |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|

**Uwaga**

Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).....3 pkt**

Zdający poprawnie rozwiąże co najmniej trzy układy nierówności.

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź:  $x \in (-\infty, 2\rangle$  lub  $x \leq 2$ .

**Uwaga**

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

**III sposób rozwiązania** (graficznie)

Rysujemy wykres funkcji  $f(x) = |x-2| + |x+1|$  i prostą o równaniu  $y = 3x-3$ .

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$ .

Zapisujemy wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

I.  $x \in (-\infty, -1)$      $f(x) = -x + 2 - x - 1$

II.  $x \in \langle -1, 2 \rangle$      $f(x) = -x + 2 + x + 1$

III.  $x \in \langle 2, \infty \rangle$      $f(x) = x - 2 + x + 1$

Przekształcamy wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach do postaci  $f(x) = ax + b$ :

I.  $x \in (-\infty, -1)$      $f(x) = -2x + 1$

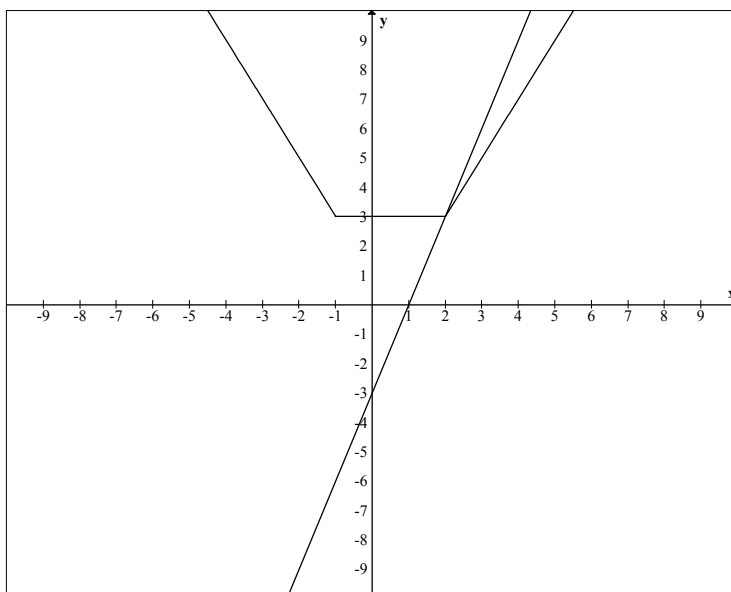
II.  $x \in \langle -1, 2 \rangle$      $f(x) = 3$

III.  $x \in \langle 2, \infty \rangle$      $f(x) = 2x - 1$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ 2x-1 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji  $f$  i prostą o równaniu  $y = 3x - 3$ :



Odczytujemy odcietą punktu przecięcia wykresu funkcji  $f$  i prostej o równaniu  $y = 3x - 3$ :  
 $x = 2$ . Podajemy argumenty, dla których  $f(x) \geq 3x - 3$ :  $x \in (-\infty, 2]$ .

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający wyróżni przedziały:  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$ .

### **Uwaga**

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający poprawnie zapisze wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach, np.

I.  $x \in (-\infty, -1)$      $f(x) = -2x + 1$

II.  $x \in \langle -1, 2 \rangle$      $f(x) = 3$

III.  $x \in \langle 2, \infty \rangle$      $f(x) = 2x - 1$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zdający narysuje wykres funkcji  $f$  i prostą o równaniu  $y = 3x - 3$ .

**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

Zdający zapisze przedział:  $x \in (-\infty, 2)$  lub  $x \leq 2$ .

**Uwaga**

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

**IV sposób rozwiązania**

Rysujemy wykres funkcji  $f(x) = |x - 2| + |x + 1| - 3x + 3$ , postępując np. w opisany poniżej sposób.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$ .

Zapisujemy wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$\text{I. } x \in (-\infty, -1) \quad f(x) = -x + 2 - x - 1 - 3x + 3$$

$$\text{II. } x \in \langle -1, 2 \rangle \quad f(x) = -x + 2 + x + 1 - 3x + 3$$

$$\text{III. } x \in \langle 2, \infty \rangle \quad f(x) = x - 2 + x + 1 - 3x + 3$$

Przekształcamy wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach do postaci  $f(x) = ax + b$ :

$$\text{I. } x \in (-\infty, -1) \quad f(x) = -5x + 4$$

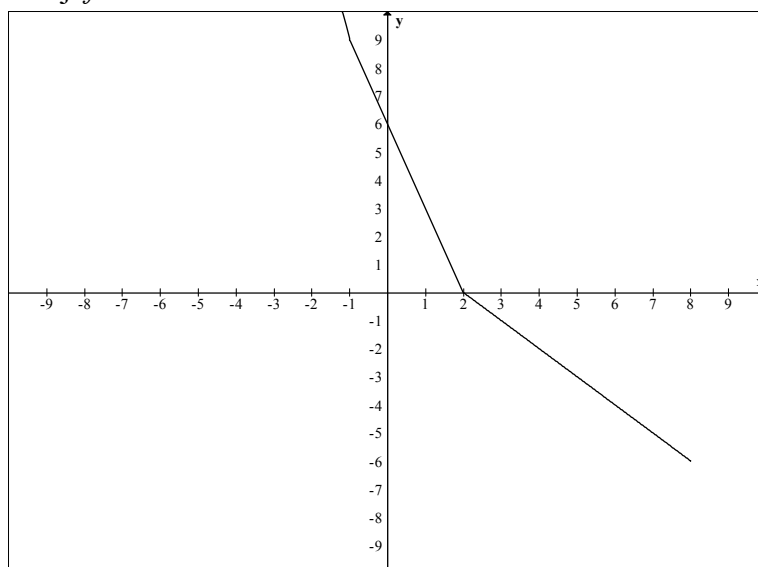
$$\text{II. } x \in \langle -1, 2 \rangle \quad f(x) = -3x + 6$$

$$\text{III. } x \in \langle 2, \infty \rangle \quad f(x) = -x + 2$$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -3x + 6 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ -x + 2 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji  $f$ :



Odczytujemy wszystkie argumenty, dla których  $f(x) \geq 0$ , czyli:  $-\infty < x \leq 2$

lub zapisujemy: zbiorem rozwiązań nierówności jest  $(-\infty, 2]$ .

#### **Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający wyróżni przedziały:  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$ .

#### **Uwaga**

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach, np.

I. Jeśli  $x \in (-\infty, -1)$ , to  $f(x) = -5x + 4$

II. Jeśli  $x \in \langle -1, 2 \rangle$ , to  $f(x) = -3x + 6$

III. Jeśli  $x \in \langle 2, \infty \rangle$ , to  $f(x) = -x + 2$

albo

I. Jeśli  $x < -1$ , to  $f(x) = -5x + 4$

II. Jeśli  $-1 \leq x < 2$ , to  $f(x) = -3x + 6$

III. Jeśli  $x \geq 2$ , to  $f(x) = -x + 2$

albo

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -3x + 6 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ -x + 2 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający narysuje wykres funkcji  $f$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze przedział:  $x \in (-\infty, 2]$  lub  $x \leq 2$ .

#### **Uwaga**

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

**Zadanie 2. (0-4)**

|                              |                                                             |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Wykorzystanie twierdzenia o równości wielomianów (IV.2.a.R) |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie** (porównanie współczynników wielomianu)

Wielomian  $W$  zapisujemy w postaci kwadratu wielomianu  $P$ :  $W(x) = (x^2 + cx + d)^2$ .

Przekształcamy ten wielomian i porządkujemy jego wyrazy:

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2 + cx + d) \cdot (x^2 + cx + d) = x^4 + cx^3 + dx^2 + cx^3 + c^2x^2 + cdx + dx^2 + cdx + d^2 = \\ &= x^4 + 2cx^3 + (2d + c^2)x^2 + 2cdx + d^2 \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki wielomianu  $W$  i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ 2cd = -24 \\ d^2 = 9 \end{cases} \quad \text{Stąd} \quad \begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ c = -4 \\ d = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ c = 4 \\ d = -3 \end{cases} \quad \text{i następnie} \quad \begin{cases} c = -4 \\ d = 3 \\ a = -8 \\ b = 22 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} c = 4 \\ d = -3 \\ a = 8 \\ b = 10 \end{cases}.$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** .....1 pkt

Zapisanie wielomianu  $W$  w postaci kwadratu wielomianu  $P$ :  $W(x) = (x^2 + cx + d)^2$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** .....2 pkt

Zapisanie wielomianu  $W$  w postaci uporządkowanej, np.:

$$W(x) = x^4 + 2cx^3 + (2d + c^2)x^2 + 2cdx + d^2.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....3 pkt

Zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie  $a$  oraz  $b$ , np.:

$$\begin{cases} 2c = a \\ 2d + c^2 = b \\ 2cd = -24 \\ d^2 = 9 \end{cases}$$

**Rozwiązanie pełne** .....4 pkt

Obliczenie  $a$  oraz  $b$ :  $\begin{cases} a = -8 \\ b = 22 \end{cases}$  lub  $\begin{cases} a = 8 \\ b = 10 \end{cases}$ .

### Zadanie 3. (0-5)

|                              |                                                    |
|------------------------------|----------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R) |
|------------------------------|----------------------------------------------------|

#### I sposób rozwiązania

Z równania  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$  wyznaczamy jedną z funkcji trygonometrycznych w zależności od drugiej, np.  $\cos \alpha = \frac{4}{3} - \sin \alpha$ . Stąd i z jedynki trygonometrycznej mamy

$$\sin^2 \alpha + \left( \frac{4}{3} - \sin \alpha \right)^2 = 1$$

$$2\sin^2 \alpha - \frac{8}{3}\sin \alpha + \frac{7}{9} = 0.$$

Otrzymane równanie kwadratowe z niewiadomą  $\sin \alpha$  ma dwa rozwiązania:

$$\sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Gdy } \sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}, \text{ to } \cos \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Natomiast gdy } \sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}, \text{ to } \cos \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}.$$

W każdym z tych przypadków wartość wyrażenia  $|\cos \alpha - \sin \alpha|$  jest taka sama i równa

$$\left| \frac{4 + \sqrt{2}}{6} - \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \right| = \left| \frac{4 + \sqrt{2} - 4 + \sqrt{2}}{6} \right| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania ..... 1 pkt**

- Zapisanie równania, w którym występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna kąta  $\alpha$ :

$$\sin^2 \alpha + \left( \frac{4}{3} - \sin \alpha \right)^2 = 1 \quad \text{albo} \quad \left( \frac{4}{3} - \cos \alpha \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

albo

- wyznaczenie z równania  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$  jednej z funkcji w zależności od drugiej

i zapisanie wyrażenia  $|\cos \alpha - \sin \alpha|$  w zależności od tej funkcji:

$$|\cos \alpha - \sin \alpha| = \left| \frac{4}{3} - 2\sin \alpha \right| \quad \text{albo} \quad |\cos \alpha - \sin \alpha| = \left| 2\cos \alpha - \frac{4}{3} \right|.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej:

$$2\sin^2 \alpha - \frac{8}{3}\sin \alpha + \frac{7}{9} = 0 \quad \text{albo} \quad 2\cos^2 \alpha - \frac{8}{3}\cos \alpha + \frac{7}{9} = 0.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**Obliczenie wartości  $\sin \alpha$  albo  $\cos \alpha$  :

$$\sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$$

albo

$$\cos \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$

**Rozwiązanie zadania prawie do końca .....4 pkt**

- Obliczenie wartości drugiej funkcji trygonometrycznej kąta  $\alpha$  :

$$\cos \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$

albo

$$\sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{2}}{6} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$$

albo

- zapisanie wyrażenia  $|\cos \alpha - \sin \alpha|$  w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej:

$$|\cos \alpha - \sin \alpha| = \left| \frac{4}{3} - 2 \sin \alpha \right| \quad \text{albo} \quad |\cos \alpha - \sin \alpha| = \left| 2 \cos \alpha - \frac{4}{3} \right|$$

**Rozwiązanie pełne .....5 pkt**Obliczenie wartości wyrażenia:  $|\cos \alpha - \sin \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .**II sposób rozwiązania**Podnosząc obie strony równania  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$  do kwadratu dostajemy

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{16}{9}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ więc } 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}.$$

Zatem wartość wyrażenia  $|\cos \alpha - \sin \alpha|$  jest równa

$$|\cos \alpha - \sin \alpha| = \sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 2 \cos \alpha \sin \alpha} = \sqrt{1 - \frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

- Obliczenie wartości  $2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}$

albo

- zapisanie wyrażenia  $|\cos \alpha - \sin \alpha|$  w postaci  $\sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

- Obliczenie wartości  $2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}$

oraz

- zapisanie wyrażenia  $|\cos \alpha - \sin \alpha|$  w postaci  $\sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}$ .

**Rozwiązanie zadania prawie do końca ..... 4 pkt**

- Obliczenie wartości  $2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}$

oraz

- zapisanie wyrażenia  $|\cos \alpha - \sin \alpha|$  w postaci  $\sqrt{1 - 2 \cos \alpha \sin \alpha}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie wartości wyrażenia:  $|\cos \alpha - \sin \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

#### **Zadanie 4. (0-5)**

|                              |                                                                                                                   |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem,<br>Przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków<br>(IV.3.b.R) |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### **I sposób rozwiązania** (wzory Viète'a)

Aby równanie miało dwa różne pierwiastki musi zachodzić nierówność  $\Delta > 0$ .

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| = 3 \end{cases}$$

Wyznaczamy  $\Delta$ :

$$\Delta = (3 - 2m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m + 1) = 9 - 12m + 4m^2 + 8m - 8 = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2$$

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ :  $(2m - 1)^2 > 0$ , czyli  $2m - 1 \neq 0$ . Stąd  $m \neq \frac{1}{2}$ .

*Wariant I*

Równanie  $|x_1 - x_2| = 3$  zapisujemy najpierw w postaci równoważnej  $(x_1 - x_2)^2 = 9$ ,

a dalej  $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 9$ , czyli  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$ .

Stosując wzory Viète'a zapisujemy równanie w postaci

$$\left(-\frac{3-2m}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-m+1}{2} = 9.$$

Stąd

$$(2m - 3)^2 - 8(-m + 1) = 36$$

$$4m^2 - 4m - 35 = 0$$

$$\Delta = 576 = 24^2$$

$$m = \frac{4 - 24}{8} = -\frac{5}{2} \quad \text{lub} \quad m = \frac{4 + 24}{8} = \frac{7}{2}.$$

*Wariant II*

Zapisujemy wyrażenie  $|x_1 - x_2|$  w postaci równoważnej i przekształcamy:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

Stąd, stosując wzory Viète'a, otrzymujemy:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \sqrt{\frac{\Delta}{a^2}} = \frac{|2m-1|}{2}$$

Równanie  $|x_1 - x_2| = 3$  jest zatem równoważne równaniu  $\frac{|2m-1|}{2} = 3$

Stąd  $|2m-1| = 6$  i następnie  $2m-1 = 6$  lub  $2m-1 = -6$ , czyli  $m = \frac{7}{2}$  lub  $m = -\frac{5}{2}$ .

Obie otrzymane wartości  $m$  są różne od  $\frac{1}{2}$ .

Odpowiedź:  $m = -\frac{5}{2}$  lub  $m = \frac{7}{2}$ .

### **II sposób rozwiązania** (wzory na pierwiastki)

Aby równanie miało dwa różne pierwiastki musi zachodzić nierówność  $\Delta > 0$ .

Wyznaczamy  $\Delta$ :

$$\Delta = (3-2m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m+1) = 9 - 12m + 4m^2 + 8m - 8 = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2$$

Warunek  $\Delta > 0$  zachodzi, gdy

$$(2m-1)^2 > 0, \text{ co ma miejsce, gdy } 2m-1 \neq 0, \text{ czyli dla } m \neq \frac{1}{2}.$$

Ponieważ  $\Delta = (2m-1)^2$ , zatem  $\sqrt{\Delta} = |2m-1|$ .

$$\text{Stąd } x_1 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4}, \quad x_2 = \frac{2m-3+|2m-1|}{4}.$$

Warunek  $|x_1 - x_2| = 3$  możemy zapisać w postaci  $x_1 - x_2 = 3$  lub  $x_1 - x_2 = -3$ .

Obliczamy:

$$x_1 - x_2 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4} - \frac{2m-3+|2m-1|}{4} = \frac{-2|2m-1|}{4} = -\frac{|2m-1|}{2}.$$

Zatem alternatywę  $x_1 - x_2 = 3$  lub  $x_1 - x_2 = -3$  możemy zapisać w postaci

$$-\frac{|2m-1|}{2} = 3 \text{ lub } -\frac{|2m-1|}{2} = -3$$

Pierwsze z otrzymanych równań jest sprzeczne, wystarczy więc rozwiązać drugie:

$$-\frac{|2m-1|}{2} = -3, \text{ stąd } |2m-1| = 6.$$

Zatem  $2m-1 = 6$  lub  $2m-1 = -6$ , czyli  $m = \frac{7}{2}$  lub  $m = -\frac{5}{2}$ .

### **Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

**Część a)** polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ , gdzie rozwiązujemy nierówność

$$(2m-1)^2 > 0: \quad m \neq \frac{1}{2}.$$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający rozpatrzy warunek  $\Delta \geq 0$ , wówczas za tę część otrzymuje **0 punktów**.

**Część b)** polega na rozwiązaniu równania  $|x_1 - x_2| = 3$ :  $m = -\frac{5}{2}$  lub  $m = \frac{7}{2}$ .

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

**Część c)** polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązania nierówności z a) i rozwiązania równania z b). Za poprawne rozwiązanie części c) zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach części b) rozwiązania wyróżniamy następujące etapy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

- Zapisanie równania  $|x_1 - x_2| = 3$  w postaci równoważnej  $(x_1 - x_2)^2 = 9$   
albo
- zapisanie równości  $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$   
albo
- obliczenie  $x_1$  i  $x_2$ :  $x_1 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4}$ ,  $x_2 = \frac{2m-3+|2m-1|}{4}$  oraz zapisanie równania  $|x_1 - x_2| = 3$  w postaci alternatywy  $x_1 - x_2 = 3$  lub  $x_1 - x_2 = -3$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ..... 2 pkt**

- Doprowadzenie równania  $(x_1 - x_2)^2 = 9$  do postaci  $4m^2 - 4m - 35 = 0$   
albo
- zapisanie równania  $|x_1 - x_2| = 3$  w postaci  $\frac{|2m-1|}{2} = 3$   
albo
- doprowadzenie równań  $x_1 - x_2 = 3$  i  $x_1 - x_2 = -3$  do postaci  $-\frac{|2m-1|}{2} = 3$   
i  $-\frac{|2m-1|}{2} = -3$ .

**Rozwiązanie pełne części b) ..... 3 pkt**

- Rozwiązanie równania  $4m^2 - 4m - 35 = 0$ :  $m = -\frac{5}{2}$  lub  $m = \frac{7}{2}$   
albo
- rozwiązanie równania  $\frac{|2m-1|}{2} = 3$ :  $m = -\frac{5}{2}$  lub  $m = \frac{7}{2}$   
albo
- rozwiązanie alternatywy równań:  $-\frac{|2m-1|}{2} = 3$  lub  $-\frac{|2m-1|}{2} = -3$ :  
 $m = \frac{7}{2}$  lub  $m = -\frac{5}{2}$ .

### **Uwaga**

Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i konsekwentnie do tych błędów wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności i równania, to otrzymuje **4 punkty**.

**III sposób rozwiązania** (rozkład na czynniki)

Równanie  $2x^2 + (3 - 2m)x - m + 1 = 0$  doprowadzamy do postaci iloczynowej kolejno otrzymując:

$$2x^2 + 3x - 2mx - m + 1 = 0$$

$$2x^2 + x + 2x + 1 - 2mx - m = 0$$

$$x(2x + 1) + (2x + 1) - m(2x + 1) = 0$$

$$(2x + 1)(x + 1 - m) = 0.$$

Zatem dla każdej wartości parametru  $m$  równanie ma pierwiastki:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = m - 1.$$

Warunek  $|x_1 - x_2| = 3$  ma zatem postać  $\left| m - 1 - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| = 3$ , czyli  $\left| m - \frac{1}{2} \right| = 3$ .

Stąd  $m - \frac{1}{2} = 3$  lub  $m - \frac{1}{2} = -3$  i ostatecznie  $m = 3\frac{1}{2}$  lub  $m = -2\frac{1}{2}$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zapisanie równania w postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.:  $2x^2 + x + 2x + 1 - 2mx - m = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zapisanie równania w postaci iloczynowej:  $(2x + 1)(x + 1 - m) = 0$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Obliczenie  $x_1$  i  $x_2$ :  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = m - 1$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Rozwiązanie równania  $|x_1 - x_2| = 3$ :  $m = 3\frac{1}{2}$  lub  $m = -2\frac{1}{2}$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i konsekwentnie do tych błędów rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **4 punkty**.

**Zadanie 5. (0-5)**

|                              |                                                                                                          |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów tego ciągu (IV.5.c) |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Szukamy odpowiedzi na pytanie: dla jakiej największej wartości  $n$  suma  $S_n$  początkowych kolejnych  $n$  wyrazów tego ciągu spełnia nierówność  $S_n < 2012$ .

Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$  wyraża się wzorem  $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$ ,

więc otrzymujemy nierówność  $\frac{2(-2) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n < 2012$ .

Stąd  $\frac{(3n-7)n}{2} < 2012$  i następnie  $3n^2 - 7n - 4024 < 0$ .

Miejscami zerowymi trójmianu  $3n^2 - 7n - 4024$  są liczby

$$n_1 = \frac{7 - \sqrt{48337}}{6} \quad \text{oraz} \quad n_2 = \frac{7 + \sqrt{48337}}{6}.$$

Zatem szukane  $n$  jest największą liczbą całkowitą dodatnią z przedziału  $(n_1, n_2)$ .

Przybliżona wartość  $n_2 \approx \frac{7 + 219,86}{6} \approx 37,81$ , więc szukaną wartością jest  $n = 37$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze**

**do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zapisanie nierówności (lub równania) z jedną niewiadomą:

$$\frac{2(-2) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n < 2012 \quad \text{lub} \quad \frac{-2 + (3n-5)}{2} \cdot n < 2012 \quad \text{lub} \quad \frac{2(-2) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n = 2012.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Doprowadzenie nierówności kwadratowej lub równania kwadratowego do postaci ogólnej:

$$3n^2 - 7n - 4024 < 0 \quad \text{lub} \quad 3n^2 - 7n - 4024 = 0.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Rozwiązanie nierówności  $3n^2 - 7n - 4024 < 0$  lub równania  $3n^2 - 7n - 4024 = 0$ :

$$n \in \left( \frac{7 - \sqrt{48337}}{6}, \frac{7 + \sqrt{48337}}{6} \right) \quad \text{lub} \quad n_1 = \frac{7 - \sqrt{48337}}{6}, \quad n_2 = \frac{7 + \sqrt{48337}}{6}.$$

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

- Poprawne rozwiązanie nierówności kwadratowej lub równania kwadratowego,

$$\text{a następnie błędy rachunkowe w oszacowaniu liczby } n_2 = \frac{7 + \sqrt{48337}}{6}$$

i konsekwentne do tych błędów podanie odpowiedzi (o ile liczba  $n \geq 1$ )

albo

- błędy rachunkowe podczas przekształcania nierówności  $\frac{2(-2) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n < 2012$

lub  $\frac{-2 + (3n-5)}{2} \cdot n < 2012$  (lub równania) i konsekwentne do tych błędów podanie odpowiedzi (o ile trójmian kwadratowy ma dwa pierwiastki, a liczba  $n$  jest całkowita dodatnia).

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zapisanie, że największą liczbą  $n$  dla której  $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2012$  jest  $n = 37$ .

### **Uwaga**

Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, sprawdzi, że liczba  $n = 37$  spełnia podaną nierówność, oraz sprawdzi, że liczba  $n = 38$  nie spełnia tej nierówności, to otrzymuje **5 punktów**.

**Zadanie 6. (0-3)**

|                            |                                                             |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Rozumowanie i argumentacja | Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (V.2.b) |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu obu stron nierówności do potęgi drugiej otrzymujemy nierówność równoważną

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

Po otwarciu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy nierówność

$$2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2, \text{ a następnie } a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0, \text{ czyli } (ad - bc)^2 \geq 0.$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b, c, d$ , co kończy dowód.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy przekształci nierówność do postaci równoważnej  $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy doprowadzi nierówność do postaci  $2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 7. (0-4)**

|                              |                                                                                  |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie zadania dotyczącego wzajemnego położenia prostej i okręgu (IV.8.b.R) |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania**

Obliczamy współrzędne środka okręgu i długość promienia okręgu:  $S = (2, 2)$ ,  $r = 2$ .

Zapisujemy równanie okręgu:  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .

Okrąg jest styczny do prostej  $l$  w punkcie  $C = (1, a)$ , więc współrzędne tego punktu spełniają równanie okręgu  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .

$$(1 - 2)^2 + (a - 2)^2 = 4, \quad (a - 2)^2 = 3, \quad |a - 2| = \sqrt{3}.$$

Stąd  $a = 2 + \sqrt{3}$  lub  $a = 2 - \sqrt{3}$ .

$a = 2 - \sqrt{3}$  nie spełnia warunku zadania, więc  $C = (1, 2 + \sqrt{3})$ .

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $CS$ :  $m = -\sqrt{3}$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $l$  prostopadłej do prostej  $CS$  i przechodzącej przez punkt  $C$ .

$$l: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

$$2 + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + b$$

$$b = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{A zatem prosta } l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

## **II sposób rozwiązania**

Podobnie, jak w I sposobie rozwiązania, znajdujemy współrzędne punktu  $C$ :  $C = (1, 2 + \sqrt{3})$ .

Następnie obliczamy współrzędne wektora  $\overrightarrow{CS} = [1, -\sqrt{3}]$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $l$  prostopadłej do wektora  $\overrightarrow{CS}$  i przechodzącej przez punkt  $C$ .

$$l: (x-1) - \sqrt{3}(y-2-\sqrt{3}) = 0, \text{ czyli } l: x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} + 2 = 0.$$

## **Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania** ..... 1 pkt

Zapisanie równania okręgu:  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (1, 2 + \sqrt{3})$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej  $CS$ :  $m = -\sqrt{3}$  lub obliczenie współrzędnych wektora  $\overrightarrow{CS} = [1, -\sqrt{3}]$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Wyznaczenie równania prostej  $l$  i zapisanie go w postaci kierunkowej  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

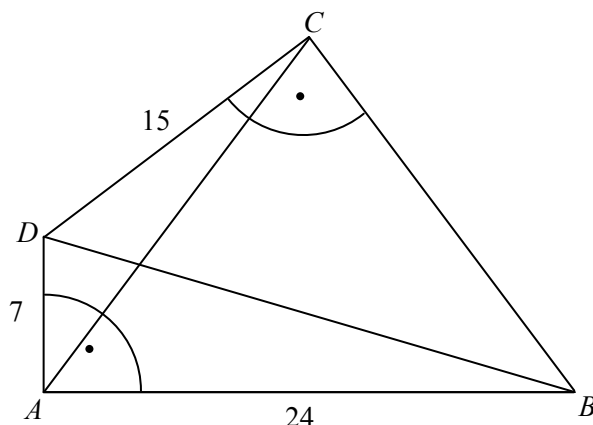
lub ogólnej  $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} + 2 = 0$ .

## **Uwaga:**

Jeżeli zdający nie odrzuci  $a = 2 - \sqrt{3}$  i rozwiąże zadanie do końca podając równania dwóch prostych, to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 8. (0-5)**

|                              |                                                                                              |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii (III.7.d.R) |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|

**Rozwiązanie**

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BAD$  mamy

$$|BD| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BCD$  mamy

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 - |CD|^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = 20.$$

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 234.$$

**Wariant I**

Ponieważ  $BD$  jest wspólną przeciwprostokątną trójkątów prostokątnych  $ABD$  i  $BCD$ , więc na czworokącie  $ABCD$  można opisać okrąg, którego średnicą jest  $BD$ .

W okrąg opisany na czworokącie  $ABCD$  jest też wpisany trójkąt  $ABC$ . Z twierdzenia sinusów dla tego trójkąta wynika, że

$$\frac{|AC|}{\sin |\sphericalangle ABC|} = |BD|, \text{ stąd } |AC| = |BD| \cdot \sin |\sphericalangle ABC| = 25 \sin (|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC|).$$

Stąd i ze wzoru na sinus sumy kątów mamy

$$|AC| = 25 (\sin |\sphericalangle ABD| \cos |\sphericalangle DBC| + \cos |\sphericalangle ABD| \sin |\sphericalangle DBC|) = 25 \left( \frac{7}{25} \cdot \frac{20}{25} + \frac{24}{25} \cdot \frac{15}{25} \right) = 20.$$

**Wariant II**

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$ :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos |\sphericalangle ABC|.$$

$$\begin{aligned} \cos |\sphericalangle ABC| &= \cos (|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC|) = \cos |\sphericalangle ABD| \cdot \cos |\sphericalangle DBC| - \sin |\sphericalangle ABD| \cdot \sin |\sphericalangle DBC| = \\ &= \frac{24}{25} \cdot \frac{20}{25} - \frac{7}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{375}{25 \cdot 25} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } |AC|^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \frac{3}{5} = 576 + 400 - 576 = 400, \text{ czyli } |AC| = 20.$$

**Wariant III**

Korzystamy z twierdzenia Ptolemeusza:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \text{ czyli } |AC| \cdot 25 = 24 \cdot 15 + 20 \cdot 7 = 500.$$

Stąd  $|AC| = 20$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Obliczenie długości przekątnej  $BD$ :  $|BD| = 25$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie długości boku  $BC$  oraz pola czworokąta:  $P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = 234$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający obliczy pole czworokąta  $ABCD$  popełniając błędy rachunkowe i na tym poprzestanie lub dalej błędnie rozwiązuje zadanie, to otrzymuje **1 punkt**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

- Zauważenie, że przekątna  $BD$  jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$  (czyli również na trójkącie  $ABC$ ) i zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczenia

$$\text{przekątnej } AC: \frac{|AC|}{\sin |\sphericalangle ABC|} = |BD|$$

albo

- zastosowanie twierdzenia cosinusów do obliczenia przekątnej  $AC$ :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos |\sphericalangle ABC|$$

albo

- zastosowanie twierdzenia Ptolemeusza do obliczenia przekątnej  $AC$ :

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

Obliczenie długości przekątnej  $AC$  z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie długości przekątnej  $AC$ :  $|AC| = 20$ .

**Zadanie 9. (0-3)**

|                              |                                                                                                                                 |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.R) |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**I sposób rozwiązania** (konsekwencje reguły dodawania)

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Oznaczamy przez  $A_k$  zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez  $k$ . Mamy obliczyć  $|A_6 \cup A_{15}|$ .

$$|A_6 \cup A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_6 \cap A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_{30}|.$$

Teraz wystarczy obliczyć, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6, następnie podzielnych przez 15 i następnie przez 30.

Kolejne 900 liczb całkowitych można podzielić na 150 pełnych szóstek (czyli kolejnych sześć liczb całkowitych). W każdej takiej szóstce jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 6. Wynika stąd, że trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 6 jest dokładnie 150.

Rozumując analogicznie stwierdzamy, że trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 15 jest 60, a trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 30 jest 30.

$$\text{Stąd } |A_6 \cup A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_{30}| = 150 + 60 - 30 = 180.$$

Liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

### **II sposób rozwiązania (diagram Venna)**

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Oznaczamy przez  $A_k$  zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez  $k$ .

Rysujemy diagram Venna dla  $A_6$  i  $A_{15}$ .

Wpisujemy liczby elementów poszczególnych parami rozłącznych zbiorów zaczynając od  $|A_6 \cap A_{15}| = |A_{30}| = 30$ , a następnie korzystając z faktów, że  $|A_6| = 150$  i  $|A_{15}| = 60$  wpisujemy liczby w pozostałe zbiory i zapisujemy odpowiedź:

liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

### **III sposób rozwiązania**

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Stwierdzamy, że liczb trzycyfrowych podzielnych przez 6 jest 150, liczb trzycyfrowych podzielnych przez 15 jest 60 oraz, że dodając te liczby policzyliśmy liczby podzielne przez 30 dwa razy. Stąd wynika, że liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

### **Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy stosuje poprawną metodę rozwiązania zadania i popełnia błędy w obliczeniu  $|A_6|$  lub  $|A_{15}|$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy stosując poprawną metodę rozwiązania zadania obliczy  $|A_6|$  oraz  $|A_{15}|$  i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy  $|A_{30}|$ .

**Zdający otrzymuje .....3 pkt**  
gdy rozwiąże zadanie bezbłędnie.

### **Zadanie 10. (0-4)**

|                              |                                                                                                                       |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (IV.8.e, 4.k) |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### **Rozwiązanie**

Każdy punkt  $P$  należący do prostej  $y = 8x + 10$  ma współrzędne  $(x, 8x + 10)$ .

Wyznaczamy wzór funkcji  $f$  opisującej sumę  $|AP|^2 + |BP|^2$ :

$$f(x) = (3 - x)^2 + (12 + 8x)^2 + (11 - x)^2 + (6 + 8x)^2, \text{ stąd } f(x) = 130x^2 + 260x + 310.$$

Ponieważ parabola, będąca wykresem otrzymanej funkcji kwadratowej  $f$ , ma ramiona skierowane do góry, to współrzędna  $x$  szukanego punktu  $P$  jest równa  $x_w$  tej paraboli.

$$x_w = \frac{-260}{2 \cdot 130} = -1.$$

Szukany punkt  $P$  należy do prostej  $y = 8x + 10$ , więc  $P = (-1, 2)$ .

#### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** .....1 pkt

Zapisanie za pomocą niewiadomej  $x$  współrzędnych punktu  $P$ :  $P = (x, 8x + 10)$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..2 pkt

Wyznaczenie wzoru funkcji  $f$ :  $f(x) = 130x^2 + 260x + 310$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....3 pkt

Obliczenie  $x$ , dla którego funkcja  $f(x) = 130x^2 + 260x + 310$  przyjmuje wartość najmniejszą:

$$x = -1.$$

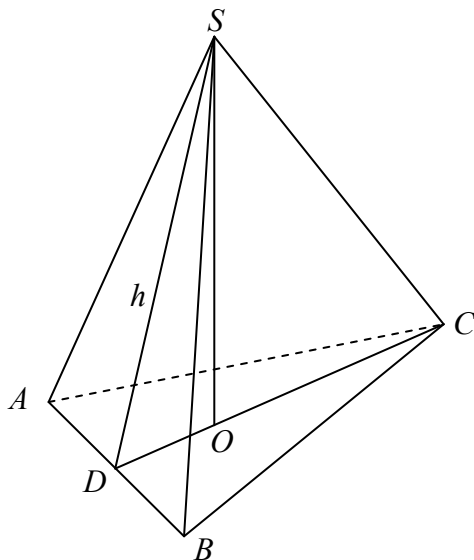
**Rozwiązanie pełne** .....4 pkt

Podanie współrzędnych punktu  $P$ , dla którego suma  $|AP|^2 + |BP|^2$  przyjmuje najmniejszą wartość:  $P = (-1, 2)$ .

#### **Zadanie 11. (5 pkt)**

|                              |                                                       |
|------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (IV.9.b) |
|------------------------------|-------------------------------------------------------|

#### **Rozwiązanie**



Obliczamy pole trójkąta  $ABC$ .

Oznaczmy wysokość trójkąta  $ABC$  opuszczoną na podstawę  $AB$  przez  $h_{AB}$ . Wtedy z tw. Pitagorasa:

$$h_{AB} = \sqrt{|BC|^2 - \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36.$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540.$$

Z równości wysokości ścian bocznych ostrosłupa wynika, że punkt  $O$  – spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny  $ABC$ .

Obliczamy promień  $r$  okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  ze wzoru  $r = \frac{P_{ABC}}{p}$ , gdzie  $p$  jest

połową obwodu trójkąta  $ABC$ :  $r = \frac{540}{54}$ , czyli  $r = 10$ .

Oznaczmy wysokość  $DS$  ściany bocznej  $ABS$  tego ostrosłupa przez  $h$ .

Następnie obliczamy wysokość  $H = |OS|$  ostrosłupa  $ABCS$ :  $H = \sqrt{h^2 - r^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

oraz jego objętość  $V$ :  $V = \frac{1}{3} \cdot 540 \cdot 24 = 4320$ .

### **Uwaga**

Aby obliczyć pole trójkąta  $ABC$ , możemy także skorzystać ze wzoru Herona:

$$P_{ABC} = \sqrt{54 \cdot 24 \cdot 15 \cdot 15} = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 540.$$

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Obliczenie pola  $P$  trójkąta  $ABC$ :  $P_{ABC} = 540$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....3 pkt**

Obliczenie promienia  $r$  okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ :  $r = 10$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt**

Obliczenie wysokości  $H$  ostrosłupa  $ABCS$ :  $H = 24$ .

**Rozwiązanie pełne .....5 pkt**

Obliczenie objętości  $V$  ostrosłupa:  $V = 4320$ .

### **Zadanie 12. (0-3)**

|                            |                                                                                               |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Rozumowanie i argumentacja | Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c.d) |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|

### **Rozwiązanie**

Zdarzenia  $A \cap B'$ ,  $A' \cap B$  oraz  $A \cap B$  są parami rozłączne i

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

Stąd i z faktu, że  $P(A \cup B) \leq 1$  wynika, że

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) + P(A \cap B) \text{ czyli } P(A \cap B) \leq 0,7, \text{ co kończy dowód.}$$

### **Uwagi:**

1. Zdający nie musi zapisywać, że  $(A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B$ .
2. Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą diagramu Venna.

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

- Zdający zapisze, że  $P((A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B)) \leq 1$

albo

- zadający sporządzi diagram Venna, na którym zaznaczy zdarzenia  $A' \cap B$  i  $A \cap B'$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

- Zdający zapisze, że zdarzenia  $A \cap B'$ ,  $A' \cap B$ ,  $A \cap B$  są parami rozłączne

albo

- zadający sporządzi diagram Venna, na którym zaznaczy zdarzenia  $A' \cap B$  i  $A \cap B'$  oraz zapisze, np.:  $P(A' \cap B) + P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A \cup B)$ , skąd wynika, że zdarzenia  $A' \cap B$ ,  $A \cap B'$ ,  $A \cap B$  są parami rozłączne.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zdający przeprowadzi pełny dowód.

**Uwaga**

Jeżeli zdający przeprowadzi pełny dowód, ale nie zapisze, że podane zdarzenia są parami rozłączne, to otrzymuje **2 punkty**.