



**Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie**

# **EGZAMIN MATURALNY 2010**

## **MATEMATYKA**

### **POZIOM ROZSZERZONY**

#### **Klucz punktowania odpowiedzi**

**MAJ 2010**

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

### Zadanie 1. (0–4)

| Obszar standardów            | Sprawdzane umiejętności                         |
|------------------------------|-------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną |

#### I sposób rozwiązania (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -2)$ ,  $\langle -2, 1 \rangle$ ,  $\langle 1, \infty \rangle$ .

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

| $x \in (-\infty, -2)$                                                                                                     | $x \in \langle -2, 1 \rangle$                                                                          | $x \in \langle 1, \infty \rangle$                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-2x - 4 - x + 1 \leq 6$<br>$-3x \leq 9$<br>$x \geq -3$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-3 \leq x < -2$ | $2x + 4 - x + 1 \leq 6$<br>$x \leq 1$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-2 \leq x < 1$ | $2x + 4 + x - 1 \leq 6$<br>$3x \leq 3$<br>$x \leq 1$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x = 1$ |

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź:  $-3 \leq x \leq 1$  lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest  $\langle -3, 1 \rangle$ .

#### II sposób rozwiązania (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki:  $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                            |                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$<br>$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x+4+x-1 \leq 6 \end{cases}$<br>$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ 3x \leq 3 \end{cases}$<br>$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$<br>$x = 1$ | $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$<br>$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \\ 2x+4-x+1 \leq 6 \end{cases}$<br>$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$<br>$x \in \langle -2, 1 \rangle$ | $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$<br>niemożliwe | $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$<br>$\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \\ -2x-4-x+1 \leq 6 \end{cases}$<br>$\begin{cases} x < -2 \\ x < 1 \\ -3x \leq 9 \end{cases}$<br>$\begin{cases} x < -2 \\ x < 1 \\ x \geq -3 \end{cases}$<br>$x \in \langle -3, -2 \rangle$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź:  $-3 \leq x \leq 1$  lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest  $\langle -3, 1 \rangle$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały  $(-\infty, -2)$ ,  $\langle -2, 1 \rangle$ ,  $\langle 1, \infty \rangle$ .

albo

- zapisze cztery przypadki:  $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I.  $x \in (-\infty, -2)$   $-2x - 4 - x + 1 \leq 6$

II.  $x \in \langle -2, 1 \rangle$   $2x + 4 - x + 1 \leq 6$

III.  $x \in \langle 1, \infty \rangle$   $2x + 4 + x - 1 \leq 6$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 3 pkt**

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że jeden jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź:  $x \in \langle -3, 1 \rangle$ .

### **III sposób rozwiązania** (graficznie)

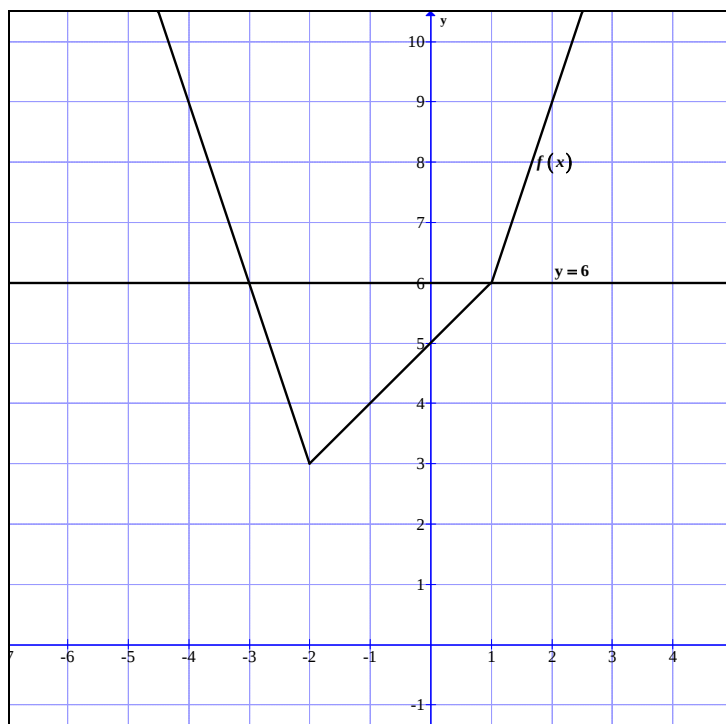
Rysujemy wykresy funkcji  $f(x) = |2x + 4| + |x - 1|$  i prostą o równaniu  $y = 6$ .

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -2)$ ,  $\langle -2, 1 \rangle$ ,  $\langle 1, \infty \rangle$ .

Zapisujemy wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ x + 5 & \text{dla } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ 3x + 3 & \text{dla } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji  $f$  i prostą o równaniu  $y = 6$



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresu funkcji  $f$  i prostej o równaniu  $y = 6$ :

$x = -3$  i  $x = 1$ .

Podajemy argumenty, dla których  $f(x) \leq 6$ :  $x \in \langle -3, 1 \rangle$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający wyróżni przedziały:  $(-\infty, -2)$ ,  $\langle -2, 1 \rangle$ ,  $\langle 1, \infty \rangle$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach, np.

I.  $x \in (-\infty, -2)$      $f(x) = -3x - 3$

II.  $x \in \langle -2, 1 \rangle$      $f(x) = x + 5$

III.  $x \in \langle 1, \infty \rangle$      $f(x) = 3x + 3$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ x + 5 & \text{dla } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ 3x + 3 & \text{dla } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji  $f$  i prostą o równaniu  $y = 6$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź:  $x \in \langle -3, 1 \rangle$ .

### Zadanie 2. (0–4)

| Obszar standardów            | Sprawdzane umiejętności                 |
|------------------------------|-----------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania trygonometrycznego |

#### Rozwiązanie

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna:

$$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x - 4 = 0$$

Porządkujemy to równanie i wprowadzamy niewiadomą pomocniczą:

$$-2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0, \quad t = \sin x, \quad \text{gdzie } t \in \langle -1, 1 \rangle. \text{ Równanie przyjmuje teraz postać:}$$

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe ze zmienną  $t$ :

$$\Delta = 9 \quad t_1 = -2 \quad t_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{ale } t_1 \notin \langle -1, 1 \rangle$$

Zapisujemy rozwiązania równania  $\sin x = -\frac{1}{2}$  należące do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :

$$x = \frac{11\pi}{6} \quad \text{i} \quad x = \frac{7}{6}\pi.$$

#### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.

$$-2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np.  $t = \sin x$ , zapisanie równania w postaci

$$-2t^2 - 5t - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad 2t^2 + 5t + 2 = 0.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Rozwiązanie równania kwadratowego ( $t = -2$  lub  $t = -\frac{1}{2}$ ) i odrzucenie rozwiązania  $t = -2$ .

#### Uwaga

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest  $\sin x$ )

i zapisać rozwiązanie w postaci  $\sin x = -\frac{1}{2}$  lub  $\sin x = -2$  oraz zapisać, że równanie

$\sin x = -2$  jest sprzeczne.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Rozwiązanie równania w podanym przedziale:

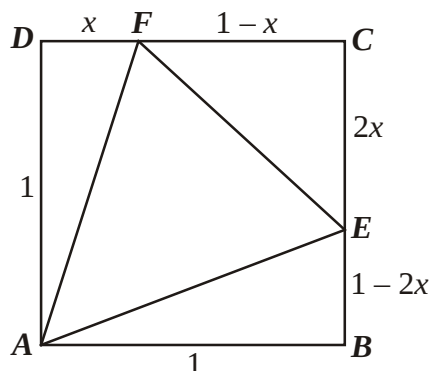
$$x = \frac{7}{6}\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{11}{6}\pi$$

albo

$$x = 210^\circ \quad \text{lub} \quad x = 330^\circ$$

**Zadanie 3. (0–4)**

| Obszar standardów            | Sprawdzane umiejętności                                                                                  |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do badania funkcji kwadratowej |

**Rozwiązanie**

Długości odcinków  $|BE|$  i  $|CF|$  są następujące:  $|BE| = 1 - 2x$ ,  $|CF| = 1 - x$ .

Pole trójkąta  $AEF$  jest więc równe:

$$P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{ECF} - P_{FDA} = 1 - \frac{1}{2}(1 - 2x) - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (1 - x) - \frac{1}{2}x = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Pole trójkąta  $AEF$  jest funkcją zmiennej  $x$ :  $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  dla  $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ .

Ponieważ  $x_w = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ , a parabola o równaniu  $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  ma ramiona skierowane „ku górze”, więc dla  $x = \frac{1}{4}$  pole trójkąta  $AEF$  jest najmniejsze.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.....1 pkt**

Zapisanie, że  $P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ADF} - P_{CEF} - P_{ABE}$  lub  $P_{AEF} = P_{ABCD} - (P_{ADF} + P_{CEF} + P_{ABE})$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Zapisanie pól trójkątów  $ADF$ ,  $ABE$  i  $CEF$ :  $P_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}x$ ,  $P_{\triangle ABE} = \frac{1 - 2x}{2}$

i  $P_{\triangle CEF} = \frac{-2x^2 + 2x}{2} = -x^2 + x$ .

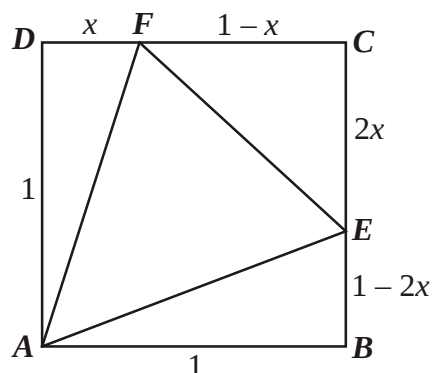
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zapisanie  $P_{AEF}$  w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej  $x$ :  $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

Wyznaczenie  $x$ , dla którego funkcja przyjmuje minimum:  $x = \frac{1}{4}$ .

**II sposób rozwiązania** (geometria analityczna)



Przyjmujemy współrzędne punktów na płaszczyźnie:  $A = (0, 0)$ ,  $F = (x, 1)$ ,  $E = (1, 1 - 2x)$ .

Wyznaczamy pole trójkąta  $AFE$ :

$$P = \frac{1}{2} |(x-0)(1-2x-0) - (1-0)(1-0)| = \frac{1}{2} |x(1-2x) - 1| = \frac{1}{2} |x - 2x^2 - 1| = \frac{1}{2} |2x^2 - x + 1|$$

$$P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Ponieważ  $x_w = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , a parabola o równaniu  $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  ma ramiona

skierowane „ku górze”, więc dla  $x = \frac{1}{4}$  pole trójkąta  $AEF$  jest najmniejsze.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych punktów na płaszczyźnie:

$$A = (0, 0), F = (x, 1), E = (1, 1 - 2x).$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wyznaczenie pola trójkąta  $AFE$ :

$$P = \frac{1}{2} |(x-0)(1-2x-0) - (1-0)(1-0)| = \frac{1}{2} |x(1-2x) - 1| = \frac{1}{2} |x - 2x^2 - 1| = \frac{1}{2} |2x^2 - x + 1|$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie  $P_{AEF}$  w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej  $x$ :  $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Wyznaczenie  $x$ , dla którego funkcja przyjmuje minimum:  $x = \frac{1}{4}$ .

**Zadanie 4. (0–4)**

| Obszar standardów            | Sprawdzane umiejętności                                                |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianów przez dwumian |

**Rozwiązanie**

Korzystając z warunków zadania zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$$

Z układu równań obliczamy  $a$  i  $b$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 9a + 3b = -18 \\ b = -2a - 1 \\ 9a - 6a - 3 = -18 \\ a = -5 \\ b = 9 \end{cases}$$

Warunki zadania są spełnione dla  $a = -5$ ,  $b = 9$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania** .....1 pkt

Zapisanie jednego z równań:

$$8 + 4a + 2b + 1 = 7 \quad \text{albo} \quad 27 + 9a + 3b + 1 = 10$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....2pkt

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** .....3pkt.

Rozwiązanie układu równań z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne** .....4 pkt.

Rozwiązanie układu równań:  $a = -5$ ,  $b = 9$ .

**Zadanie 5. (0–5)**

| Obszar standardów        | Sprawdzane umiejętności                                             |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Modelowanie matematyczne | Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego |

**I sposób rozwiązania**

Z własności ciągu arytmetycznego mamy:  $2b = a + c$ . Stąd i z warunków zadania otrzymujemy, że:  $2b = 10$  czyli  $b = 5$ .

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie:  $(b + 4)^2 = (a + 1) \cdot (c + 19)$ .

Zatem otrzymujemy układ równań, np. 
$$\begin{cases} b = 5 \\ a + c = 10 \\ (b+4)^2 = (a+1) \cdot (c+19) \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy  $a = 10 - c$  lub  $c = 10 - a$  i wstawiamy do trzeciego równania.

Otrzymujemy równanie, np.  $9^2 = (10 - c + 1)(c + 19)$  lub  $9^2 = (a + 1)(10 - a + 19)$ .

Przekształcamy to równanie i otrzymujemy równanie z niewiadomą  $c$  lub  $a$ , np.

$$c^2 + 8c - 128 = 0 \text{ lub } a^2 - 28a + 52 = 0.$$

Rozwiązaniem równania są :

$$c_1 = 8, c_2 = -16 \text{ lub } a_1 = 2, a_2 = 26.$$

Zatem szukanymi liczbami są:  $a = 2, b = 5, c = 8$  lub  $a = 26, b = 5, c = -16$ .

### **Schemat oceniania do I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania**

**zadania ..... 1 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $2b = a + c$

albo

- $(b+4)^2 = (a+1)(c+19)$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb  $a, b, c$ , np.

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ a + c = 10 \\ (b+4)^2 = (a+1) \cdot (c+19) \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą  $c$  lub  $a$ , np.

$$c^2 + 8c - 128 = 0 \text{ lub } a^2 - 28a + 52 = 0$$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Wyznaczenie szukanych liczb:  $a = 2, b = 5, c = 8$  lub  $a = 26, b = 5, c = -16$ .

### **II sposób rozwiązania**

Oznaczamy: przez  $a$  – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez  $r$  – różnicę tego ciągu.

Wówczas  $b = a + r, c = a + 2r$ .

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania mamy  $2a + 2r = 10$ , stąd  $a + r = 5$

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie, np.

$$(a+r+4)^2 = (a+1)(a+2r+19),$$

a następnie zapisujemy układ równań: 
$$\begin{cases} a+r=5 \\ (a+r+4)^2 = (a+1)(a+2r+19) \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy  $a = 5 - r$  i podstawiamy do drugiego równania.

Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą  $r$ :

$$(5-r+r+4)^2 = (5-r+1)(5-r+2r+19) \text{ lub } r^2 + 18 - 63 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są:  $r_1 = 3$  lub  $r_2 = -21$ .

Następnie obliczamy  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Warunki zadania spełniają liczby:  $a = 2$ ,  $b = 5$ ,  $c = 8$  lub  $a = 26$ ,  $b = 5$ ,  $c = -16$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń:  $a$  – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego,  $r$  – różnica tego ciągu oraz wykorzystanie definicji ciągu arytmetycznego do zapisania odpowiedniego równania, np.  $2a + 2r = 10$  lub  $a + r = 5$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie układu równań, np.

$$\begin{cases} a+r=5 \\ (a+r+4)^2 = (a+1)(a+2r+19) \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Przekształcenie układu równań do równania z niewiadomą  $r$ , np.

$$(5-r+r+4)^2 = (5-r+1)(5-r+2r+19) \text{ lub } r^2 + 18 - 63 = 0.$$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt**

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań, np.  $r < 0$  i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Wyznaczenie liczb spełniających warunki zadania:  $a = 2$ ,  $b = 5$ ,  $c = 8$  lub

$a = 26$ ,  $b = 5$ ,  $c = -16$ .

**Zadanie 6. (0–5)**

| Obszar standardów            | Sprawdzane umiejętności                                      |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Przeprowadzanie dyskusji trójmianu kwadratowego z parametrem |

**I sposób rozwiązania** (wzory Viète’a)

$$x^2 + mx + 2 = 0$$

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność tego układu:

$$\Delta = m^2 - 8$$

$$\Delta > 0$$

$$m^2 - 8 > 0$$

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$$

Aby rozwiązać drugą nierówność, najpierw przekształcimy lewą stronę nierówności, korzystając ze wzorów Viète’a:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-m)^2 - 2 \cdot 2 = m^2 - 4$$

Rozwiązujemy zatem nierówność:

$$m^2 - 4 > 2m^2 - 13$$

$$m^2 - 9 < 0, \text{ więc } m \in (-3, 3)$$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty) \text{ i } m \in (-3, 3), \text{ więc } m \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

**II sposób rozwiązania** (wzory na pierwiastki trójmianu)

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność:

$$\Delta = m^2 - 8$$

$$\Delta > 0 \quad m^2 - 8 > 0$$

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$$

Obliczamy pierwiastki równania kwadratowego:

$$x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \quad x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2}$$

Obliczamy sumę kwadratów pierwiastków równania kwadratowego:

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + x_2^2 &= \left( \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \right)^2 + \left( \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2} \right)^2 = \\
 &= \frac{m^2 - 2m\sqrt{m^2 - 8} + m^2 - 8}{4} + \frac{m^2 + 2m\sqrt{m^2 - 8} + m^2 - 8}{4} = \\
 &= \frac{2m^2 + 2m^2 - 16}{4} = m^2 - 4
 \end{aligned}$$

Rozwiązujemy drugą nierówność:

$$m^2 - 4 > 2m^2 - 13$$

$$m^2 - 9 < 0$$

$$m \in (-3, 3)$$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty) \text{ i } m \in (-3, 3), \text{ więc } m \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

### **Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ ,  $m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$ .

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

### **Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność  $\Delta \geq 0$ , to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności  $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$ ,  $m \in (-3, 3)$ .

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).

Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt**

- zapisanie nierówności  $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$  w postaci równoważnej  $m^2 - 4 > 2m^2 - 13$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left( \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \right)^2 + \left( \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2} \right)^2 > 2m^2 - 13.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania .....2 pkt**

Doprowadzenie do postaci nierówności kwadratowej  $m^2 - 9 < 0$ .

**Rozwiązanie bezbłędne części b).....3 pkt**

Rozwiązanie nierówności:  $m \in (-3, 3)$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

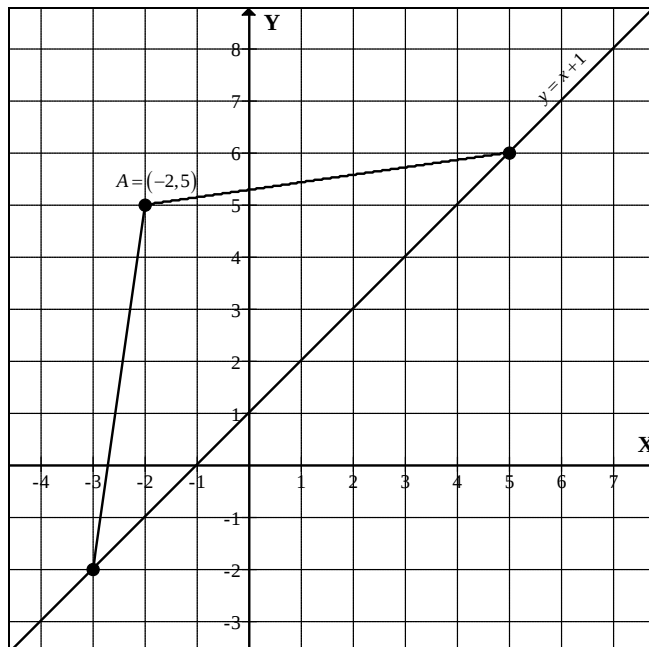
Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:

$$m \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

**Zadanie 7. (0–6)**

| Obszar standardów            | Sprawdzane umiejętności                                                                   |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| Użycie i tworzenie strategii | Stosowanie równań i nierówności do opisu zależności w prostokątnym układzie współrzędnych |

**Rozwiązanie**



Obliczamy odległość punktu A od prostej  $y = x + 1$ :  $d = \frac{|-2 - 5 + 1|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$ .

Obliczona odległość  $d$  jest równa długości wysokości trójkąta ABC poprowadzonej do boku BC. Znamy pole trójkąta ABC, więc obliczamy długość boku BC.

$$P_{ABC} = 15 \text{ stąd } \frac{1}{2} d \cdot |BC| = 15, \text{ więc } |BC| = \frac{30}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Punkt  $C = (x, y)$  leży na prostej o równaniu  $y = x + 1$ , zatem  $C = (x, x + 1)$ . Z warunków zadania mamy  $|AC| = |BC|$ , więc ze wzoru na długość odcinka zapisujemy równanie:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2} \quad ( )^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = 50$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = 64 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -3$$

Obliczamy rzędne punktów:  $y_1 = 6 \quad y_2 = -2$

Warunki zadania spełniają dwa punkty:  $C_1 = (5, 6) \quad C_2 = (-3, -2)$ .

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

Obliczenie odległości punktu A od prostej  $y = x + 1$ :  $d = 3\sqrt{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**Obliczenie długości odcinków  $AC$  i  $BC$ :  $|AC| = |BC| = 5\sqrt{2}$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt**Ułożenie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu  $C$  (odległość  $|AC| = 5\sqrt{2}$  oraz punkt  $C$  należy do prostej o równaniu  $y = x + 1$ )

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 50 \end{cases}$$

i sprowadzenie układu do równania kwadratowego:  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....5 pkt****Rozwiązanie pełne .....6 pkt**Wyznaczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (5, 6)$  lub  $C = (-3, -2)$ .**Zadanie 8. (0–5)**

| Obszar standardów          | Sprawdzane umiejętności               |
|----------------------------|---------------------------------------|
| Rozumowania i argumentacji | Przeprowadzenie dowodu algebraicznego |

**Rozwiązanie**Zapisujemy współrzędne dwóch punktów leżących na wykresie funkcji  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  orazna prostej równoległej do osi  $Ox$ , np.  $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$ ,  $B = \left(-x, \frac{1}{x^2}\right)$ , gdzie  $x \neq 0$ .Zapisujemy pole trójkąta  $ABC$ , gdzie  $C = (3, -1)$  w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \left|\frac{1}{x^2} + 1\right|}{2} = \frac{1}{|x|} + |x|.$$

Wystarczy wobec tego udowodnić, (lub powołać się na znaną nierówność), że dla dowolnej liczby  $a > 0$  zachodzi nierówność  $\frac{1}{a} + a \geq 2$ . Po pomnożeniu obu stron nierówności przez  $a$  otrzymujemy nierówność równoważną  $1 + a^2 \geq 2a$ , czyli  $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ , a więc nierówność  $(a - 1)^2 \geq 0$ .

**Schemat oceniania****Uwaga**Zdający otrzymuje 0 punktów, jeżeli wybierze konkretne dwa punkty  $A$  oraz  $B$  i dla tych punktów obliczy pole trójkąta  $ABC$ .**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania .....1 pkt**Zapisanie współrzędnych dwóch punktów leżących na wykresie funkcji  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  orazna prostej równoległej do osi  $Ox$ , np.  $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$ ,  $B = \left(-x, \frac{1}{x^2}\right)$ , gdzie  $x \neq 0$ .**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zapisanie długości odcinka  $AB$  ( $|AB| = 2|x|$ ) oraz wysokości  $h$  trójkąta  $ABC$  ( $h = \frac{1}{x^2} + 1$ ).

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie pola trójkąta  $ABC$  w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \left| \frac{1}{x^2} + 1 \right|}{2} = \frac{1}{|x|} + |x|$$

Uwaga

Zdający może założyć, że  $x > 0$  i zapisać wzór na pole trójkąta w postaci:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot x \cdot \left( \frac{1}{x^2} + 1 \right)}{2} = \frac{1}{x} + x$$

**Rozwiązanie pełne ..... 5pkt**

Uzasadnienie, że  $\frac{1}{|x|} + |x| \geq 2$ .

Zdający może powołać się na (znane) twierdzenie o sumie liczby dodatniej i jej odwrotności.

#### Zadanie 9. (0–4)

| Obszar standardów          | Sprawdzane umiejętności               |
|----------------------------|---------------------------------------|
| Rozumowania i argumentacji | Przeprowadzenie dowodu geometrycznego |

#### Rozwiązanie

Czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem, czworokąt  $DCFE$  jest kwadratem, więc  $|AB| = |CD| = |CF|$ . W kwadracie  $CBHG$  odcinki  $BC$  i  $CG$  są równe.

Niech  $\alpha$  oznacza kąt  $ABC$  danego równoległoboku. Wówczas  $|\sphericalangle BCD| = 180^\circ - \alpha$ .

W kwadratach  $CDEF$  oraz  $CBHG$  mamy  $|\sphericalangle DCF| = |\sphericalangle DCF| = 90^\circ$ , więc

$$|\sphericalangle FCG| = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 90^\circ - 90^\circ = \alpha = |\sphericalangle ABC|.$$

W trójkątach  $ABC$  i  $FCG$  mamy zatem:  $|AB| = |CF|$ ,  $|BC| = |CG|$  oraz  $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$ , więc trójkąty  $ABC$  i  $FCG$  są przystające (cecha  $bkb$ ). Stąd wnioskujemy, że  $|AC| = |FG|$ .

#### Schemat oceniania:

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zaznaczenie na rysunku odcinków  $AC$  i  $FG$  oraz zapisanie równości  $|AB| = |CF|$  i  $|BC| = |CG|$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Stwierdzenie, że trójkąty  $ABC$  i  $FCG$  są przystające, na podstawie cechy ( $bkb$ ), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów  $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Stwierdzenie, że trójkąty  $ABC$  i  $FCG$  są przystające, wraz z podaniem pełnego uzasadnienia równości kątów  $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$ .

**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

Zapisanie wniosku, że  $|AC| = |FG|$ .

**Zadanie 10. (0–4)**

| Obszar standardów        | Sprawdzane umiejętności                                                               |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Modelowanie matematyczne | Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa |

**Rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześcioelementowym. Mamy model klasyczny.  $|\Omega| = 6^3 = 216$ .

Reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 może być równa 0 lub 1. Suma kwadratów trzech liczb będzie podzielna przez 3 wtedy, gdy każdy z nich będzie podzielny przez 3 albo gdy reszta z dzielenia każdego z nich przez 3 będzie równa 1.

Kwadraty liczb 3 i 6 są liczbami podzielnymi przez 3.

Kwadraty liczb 1, 2, 4 i 5 dają z dzielenia przez 3 resztę 1.

$|A|$  możemy obliczać następująco:

I sposób

- ciągi o wartościach ze zbioru  $\{3,6\}$  – jest ich  $2^3 = 8$ ,
  - ciągi o wartościach ze zbioru  $\{1,2,4,5\}$  – jest ich  $4^3 = 64$ ,
- czyli  $|A| = 2^3 + 4^3 = 72$

II sposób

- ciągi stałe – jest ich 6,
  - ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru  $\{3,6\}$  – jest ich  $2 \cdot 3 = 6$ ,
  - ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru  $\{1,2,4,5\}$  – jest ich  $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ ,
  - ciągi różnowartościowe o wartościach ze zbioru  $\{1,2,4,5\}$  – jest ich  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ,
- czyli  $|A| = 6 + 6 + 36 + 24 = 72$ ,

III sposób

- ciągi, w których występują liczby dające tę samą resztę przy dzieleniu przez 3 – jest ich  $3 \cdot 2^3 = 24$ ,
  - ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 1 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 2 – jest ich  $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$ ,
  - ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 2 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 1 – jest ich  $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$ ,
- czyli  $|A| = 24 + 24 + 24 = 72$ ,

Zatem  $P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 6^3$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Istotny postęp.....2 pkt**

Zdający zapisze, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

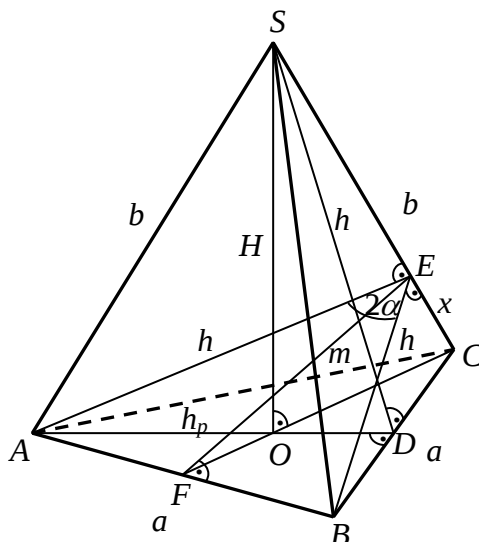
**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

|                              |                                                                 |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <b>Obszar standardów</b>     | <b>Sprawdzane umiejętności</b>                                  |
| Użycie i tworzenie strategii | Obliczanie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii |

- Poprawna interpretacja bryły i podanego kąta dwuściennego w tej bryle.
- Wyznaczenie  $m$  lub  $h$  w zależności od  $a$  i  $\alpha$ .
- Wyznaczenie jednej z wielkości:  $x$ ,  $b$ ,  $h_b$  (w zależności od  $a$  i  $\alpha$ ), z której można już wyznaczyć  $H$ .
- Wyznaczenie  $H$  w zależności od  $a$  i  $\alpha$ .
- Wyznaczenie  $V$  w zależności od  $a$  i  $\alpha$ .

**Rozwiązanie** (wyznaczenie  $m$ , wyznaczenie  $x$ , wyznaczenie  $H$  z podobieństwa trójkątów  $OCS$  i  $ECF$ )



Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa  $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Wyznaczamy wysokość  $FE$  trójkąta równoramiennego  $ABE$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}, \text{ stąd } m = \frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}.$$

Wyznaczamy długość odcinka  $EC$  z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $FCE$ :

$$x = \sqrt{h_p^2 - m^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{4\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}$$

Z podobieństwa trójkątów  $OCS$  i  $ECF$  mamy

$$\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|EF|}{|EC|}, \text{ czyli } \frac{H}{\frac{2}{3}h_p} = \frac{m}{x}.$$

$$\text{Stąd } H = \frac{m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}} = \frac{\frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}} = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}.$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}} = \frac{a^3 \cos \alpha}{12\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}.$$

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania**

**zadania .....1 pkt**

Wykonanie rysunku ostrosłupa i zaznaczenie na nim kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

Uwaga

Nie wymagamy rysunku, jeżeli z dalszych obliczeń wynika, że zdający poprawnie interpretuje treść zadania.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny ..... 2 pkt**

Wyznaczenie wysokości  $EF$  trójkąta  $ABE$  w zależności od  $a$  i  $\alpha$ :  $m = \frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wyznaczenie długości odcinka  $EC$ :  $x = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$ .

**Rozwiązanie prawie całkowite..... 4 pkt**

Wyznaczenie wysokości ostrosłupa:  $H = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3(4\sin^2\alpha - 1)}}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Wyznaczenie objętości ostrosłupa:  $V = \frac{1}{12} \frac{a^3 \cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$ .