

Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły



POZNAŃ

MATERIAŁ ĆWICZENIOWY Z MATEMATYKI

STYCZEŃ 2010

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz zawiera 18 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
4. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązywaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie możesz nie dostać pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za poprawne rozwiązanie.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia.

Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Wypełnia zdający
przed rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

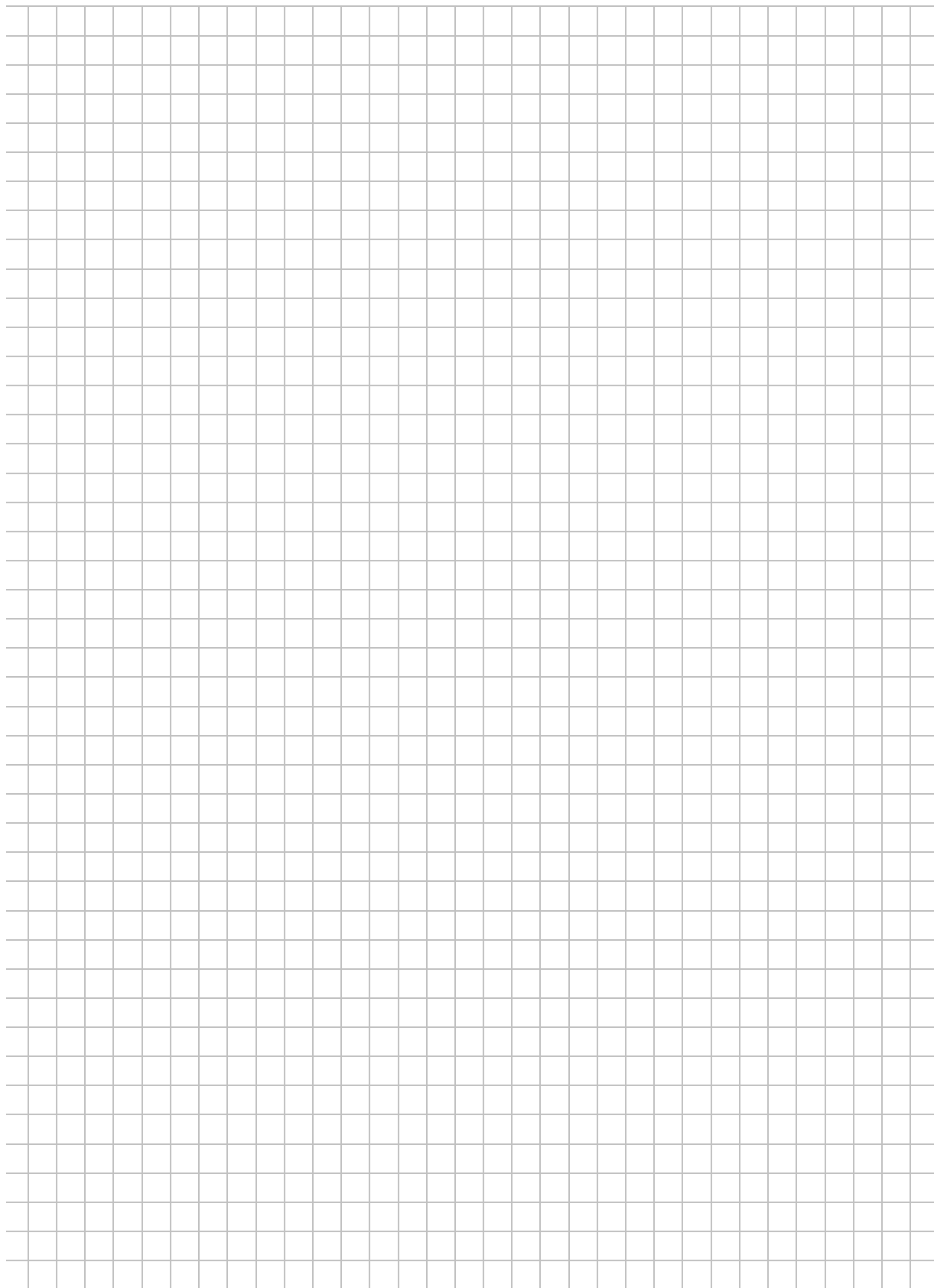
PESEL ZDAJĄCEGO

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**KOD
ZDAJĄCEGO**

Zadanie 1. (5 pkt)

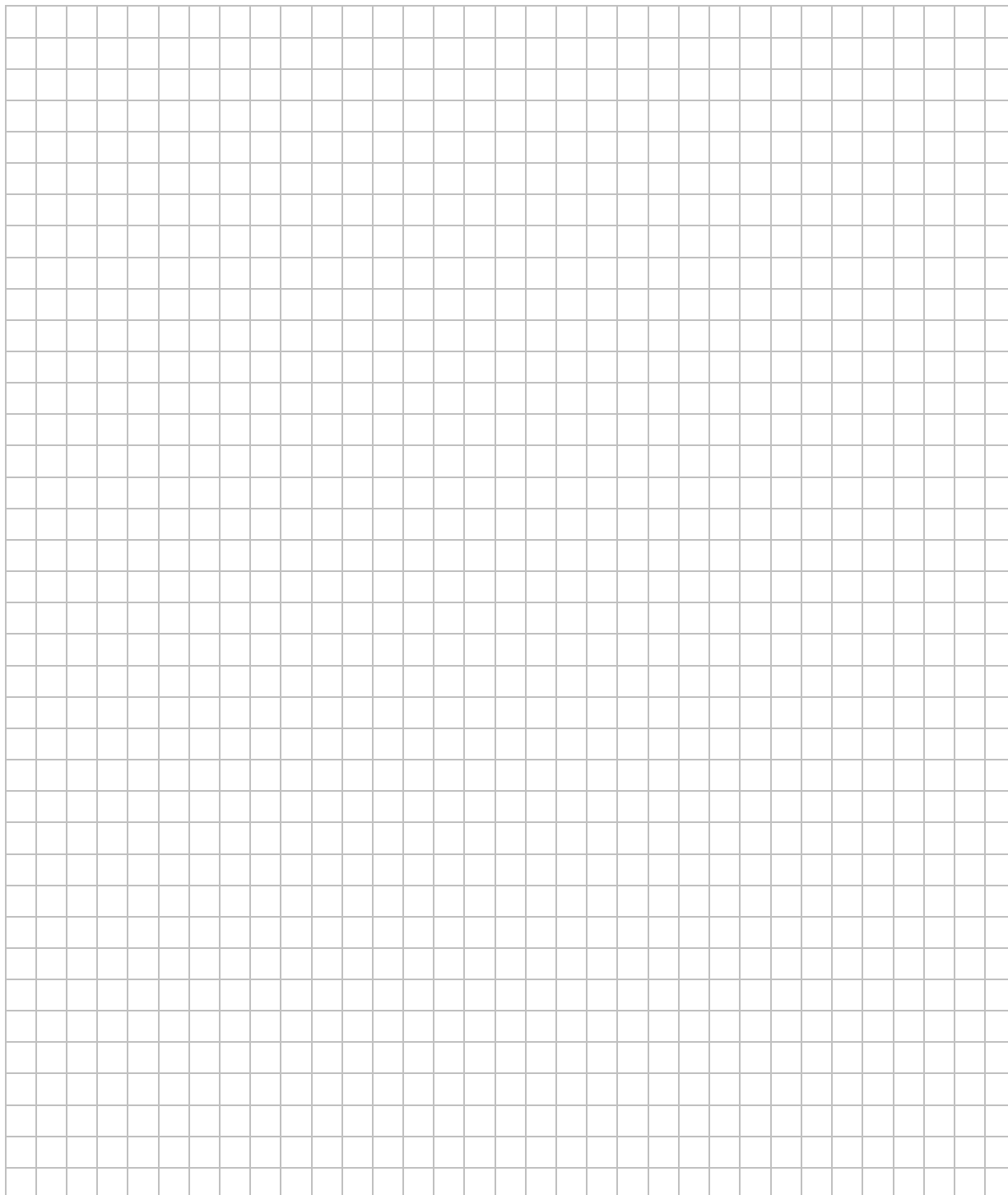
Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 9.



Zadanie 2. (4 pkt)

Dla każdego $n \in N_+$ wyrazy ciągu (a_n) spełniają dwa warunki $a_n + a_{n+1} = \frac{-n^2 + 3n + 17}{n^2 + 1}$

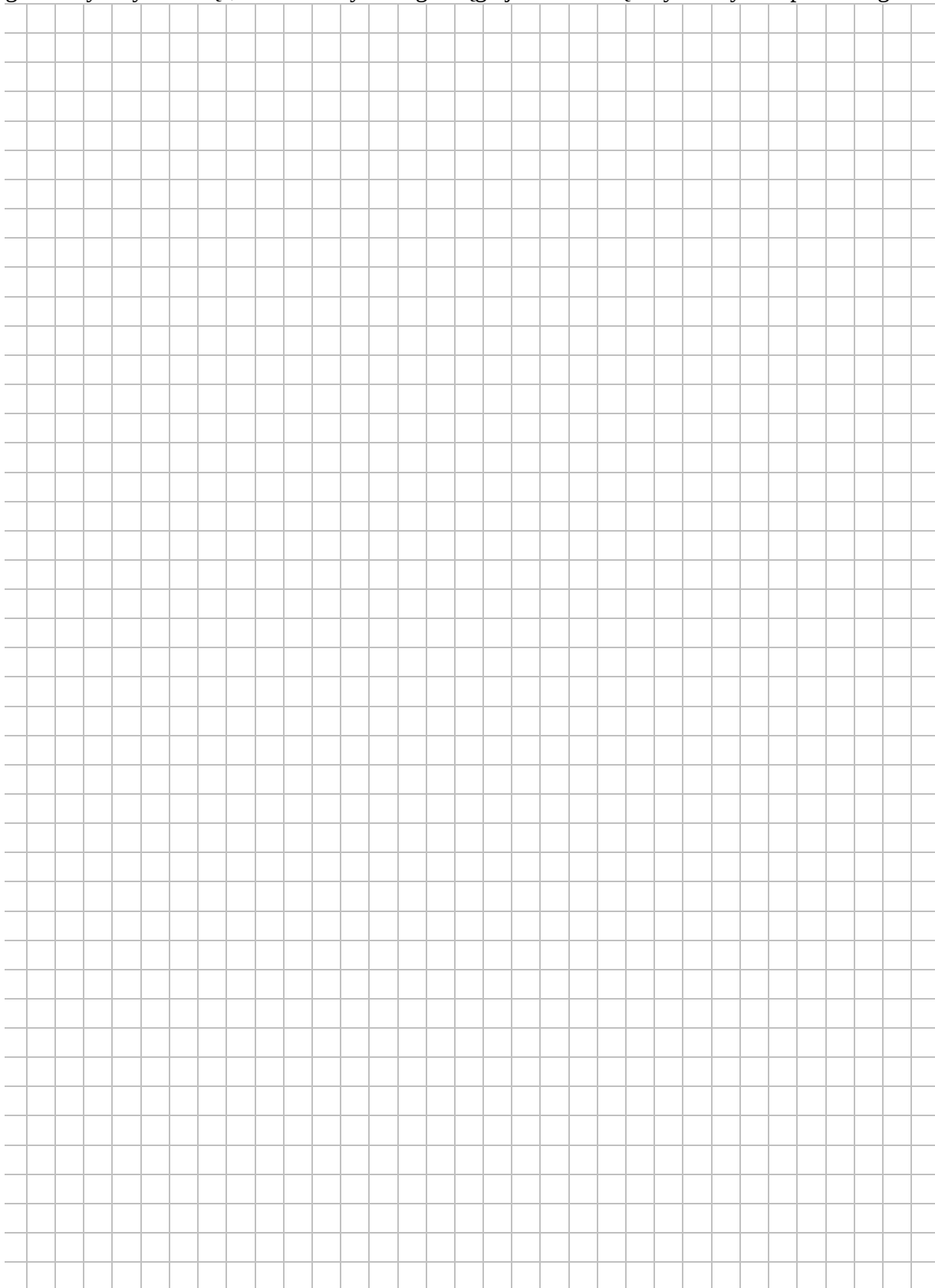
i $a_n - a_{n+1} = \frac{6n + 19}{n^2 + 1}$. Oblicz, które wyrazy tego ciągu są dodatnie.

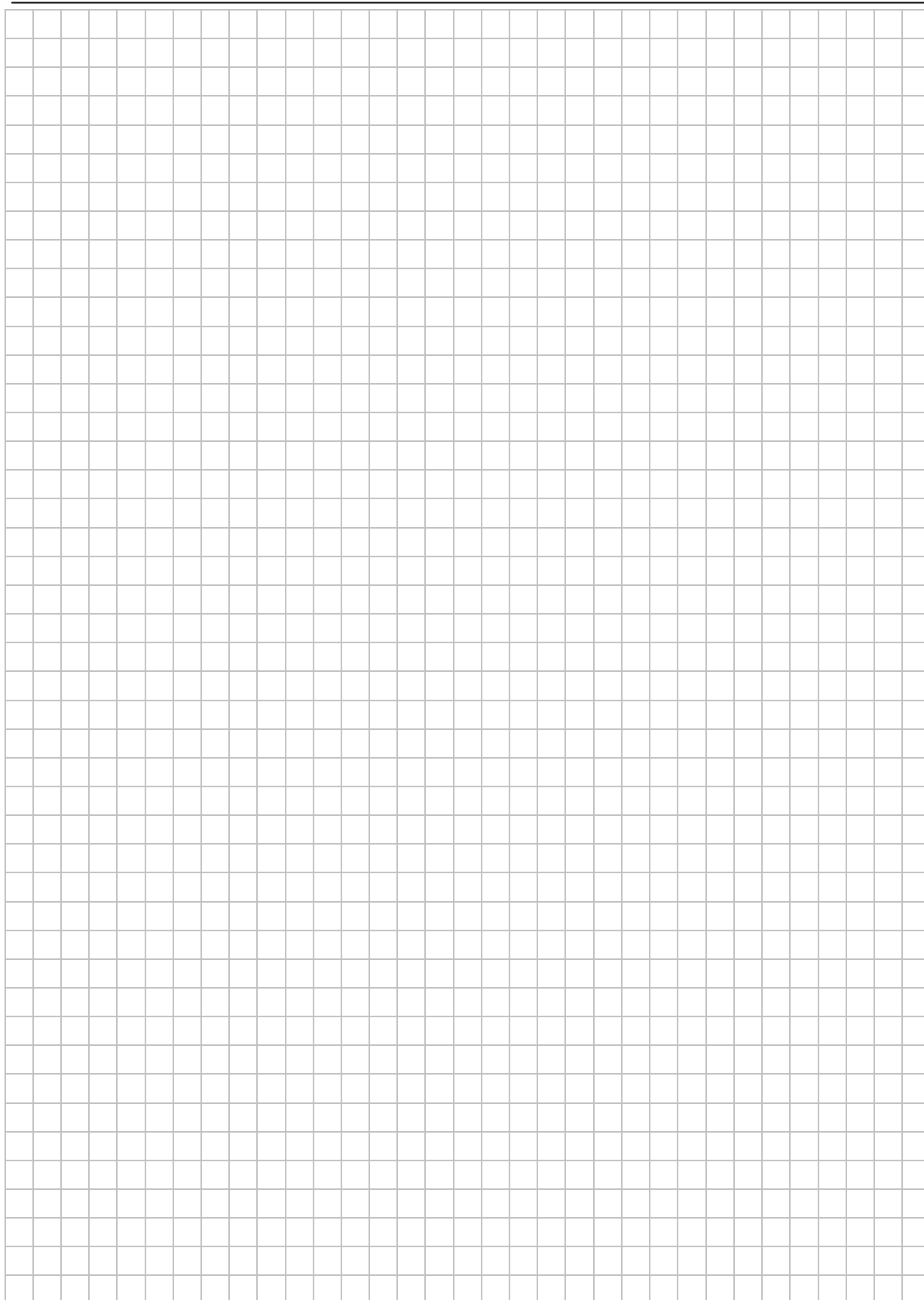


Odpowiedź:

Zadanie 3. (6 pkt)

Liczbę 255 przedstaw w postaci czterech całkowitych składników tworzących rosnący ciąg geometryczny wiedząc, że trzeci wyraz tego ciągu jest o 45 większy od wyrazu pierwszego.



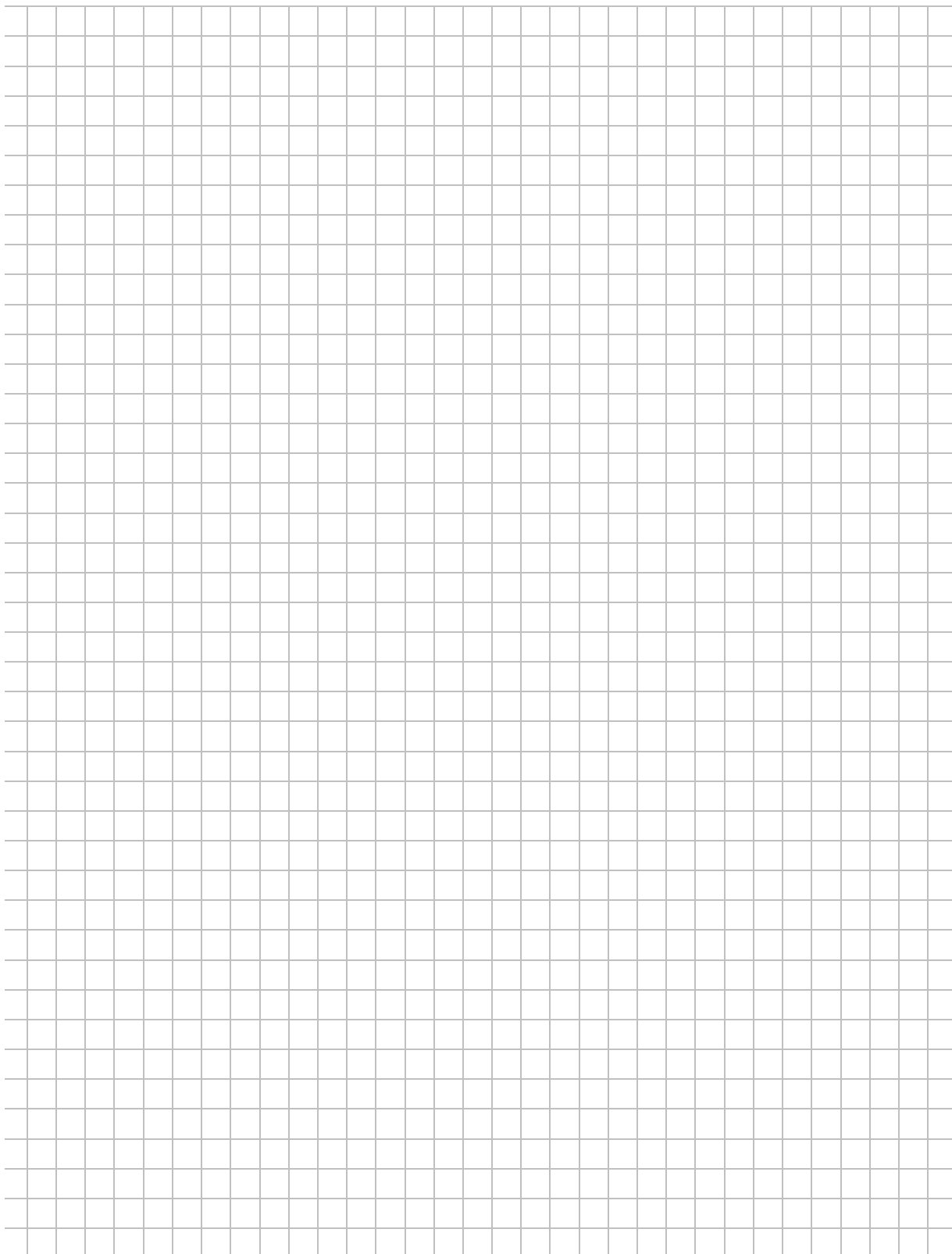


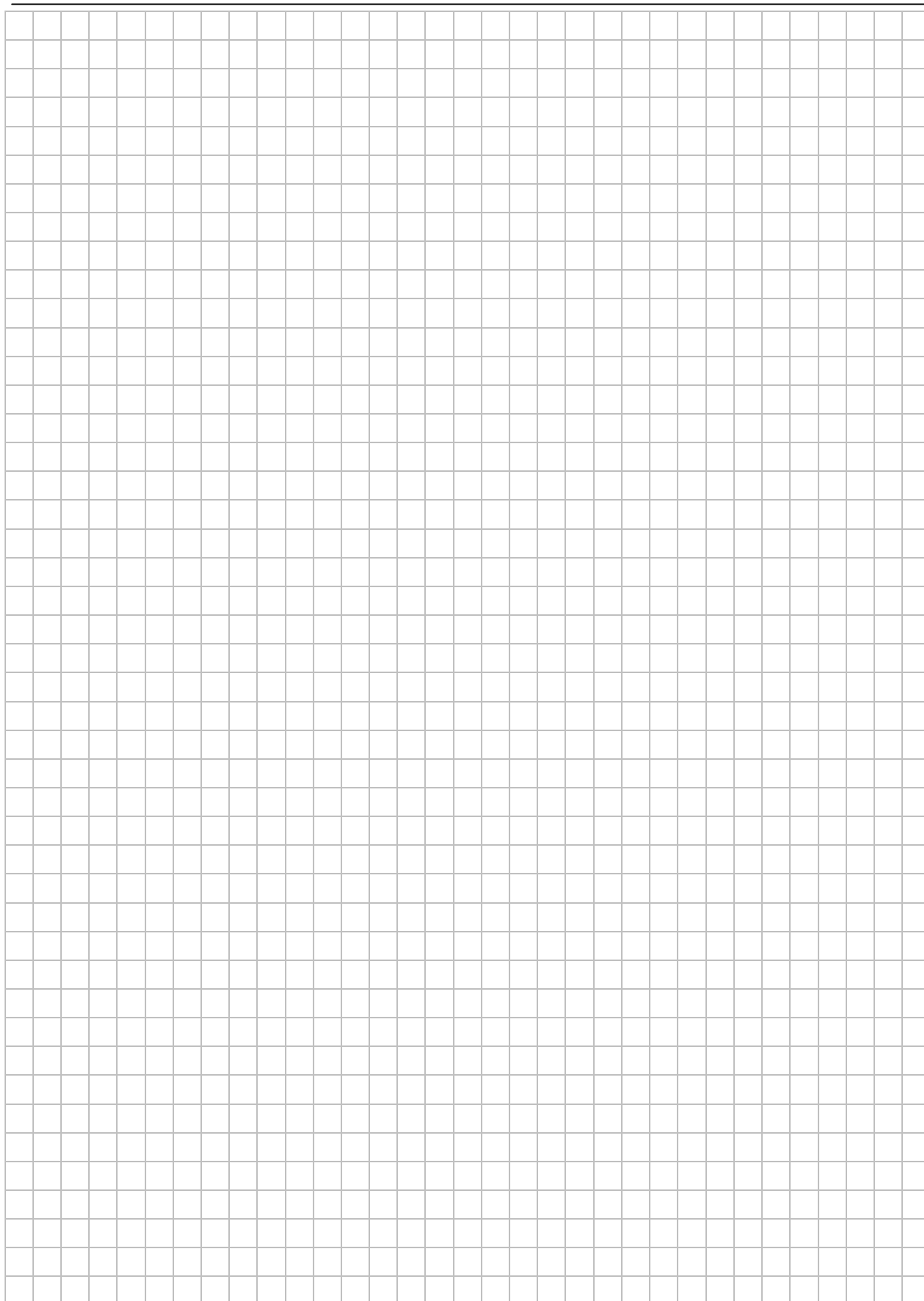
Odpowiedź:

Zadanie 4. (4 pkt)

Różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $(m-2)x^2 - 2x + 1 = 0$ są liczby x_1 oraz x_2 .

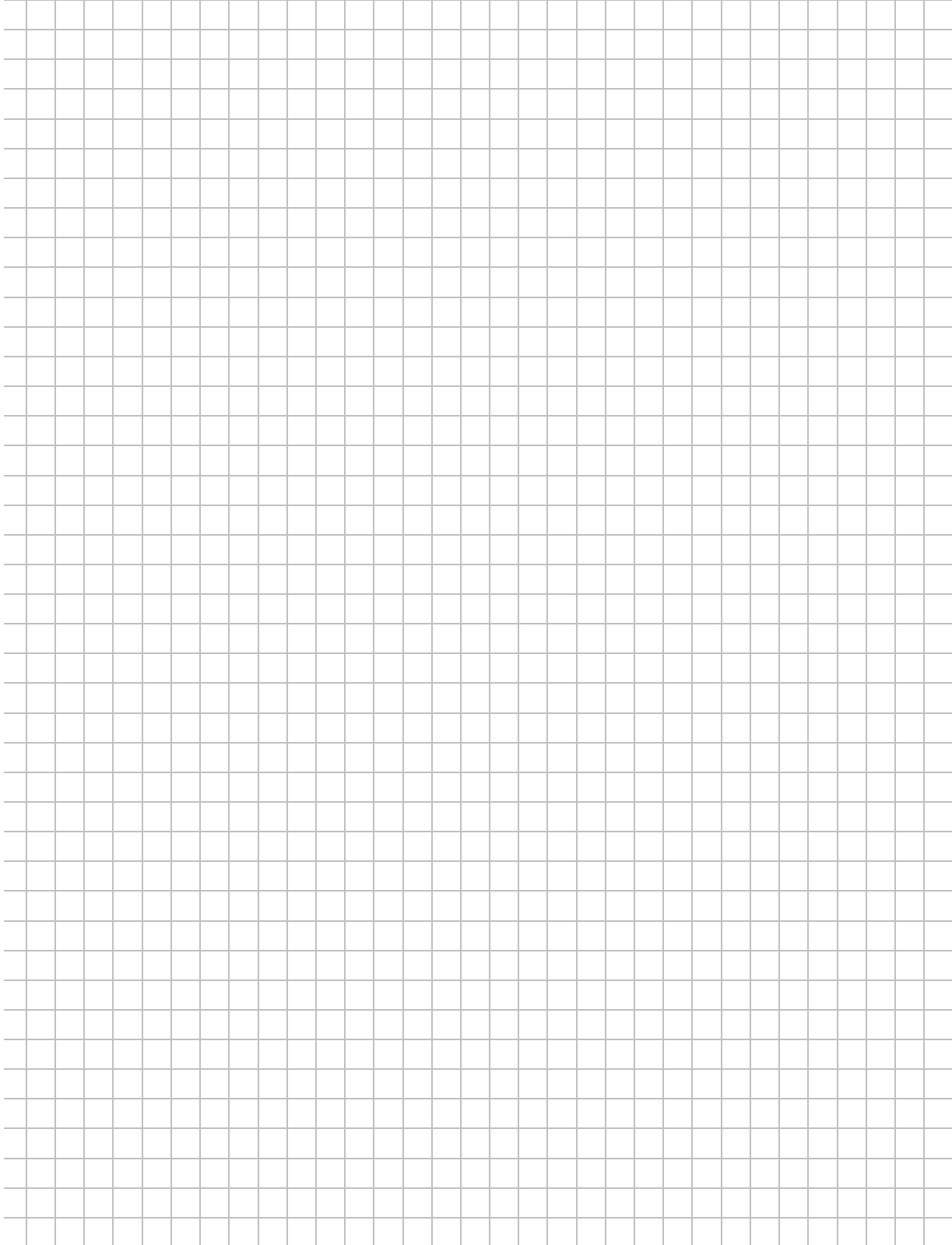
Narysuj wykres funkcji $f(m) = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2|$.





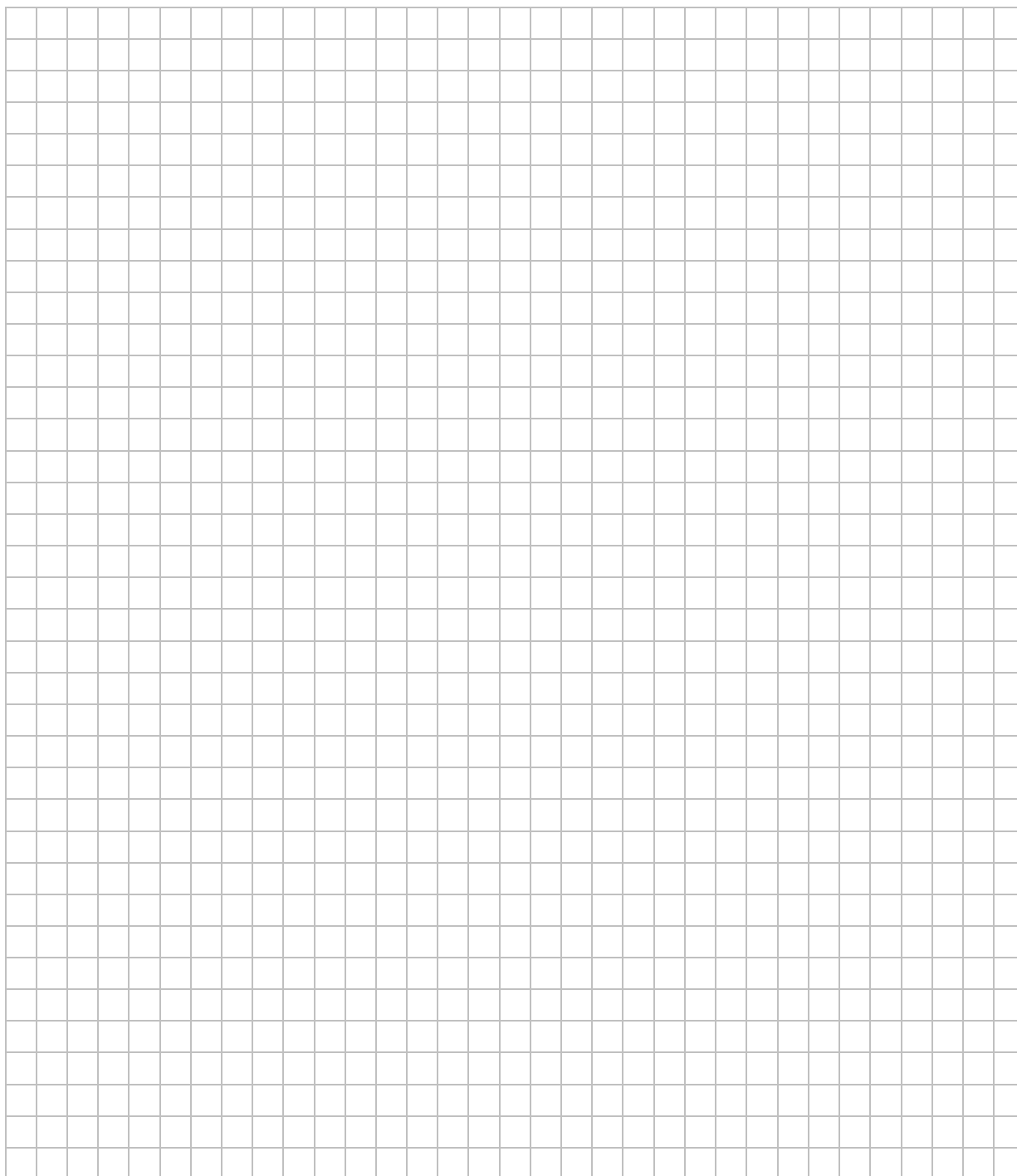
Zadanie 5. (4 pkt)

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgu wpisanego i opisanego na tym trójkącie.



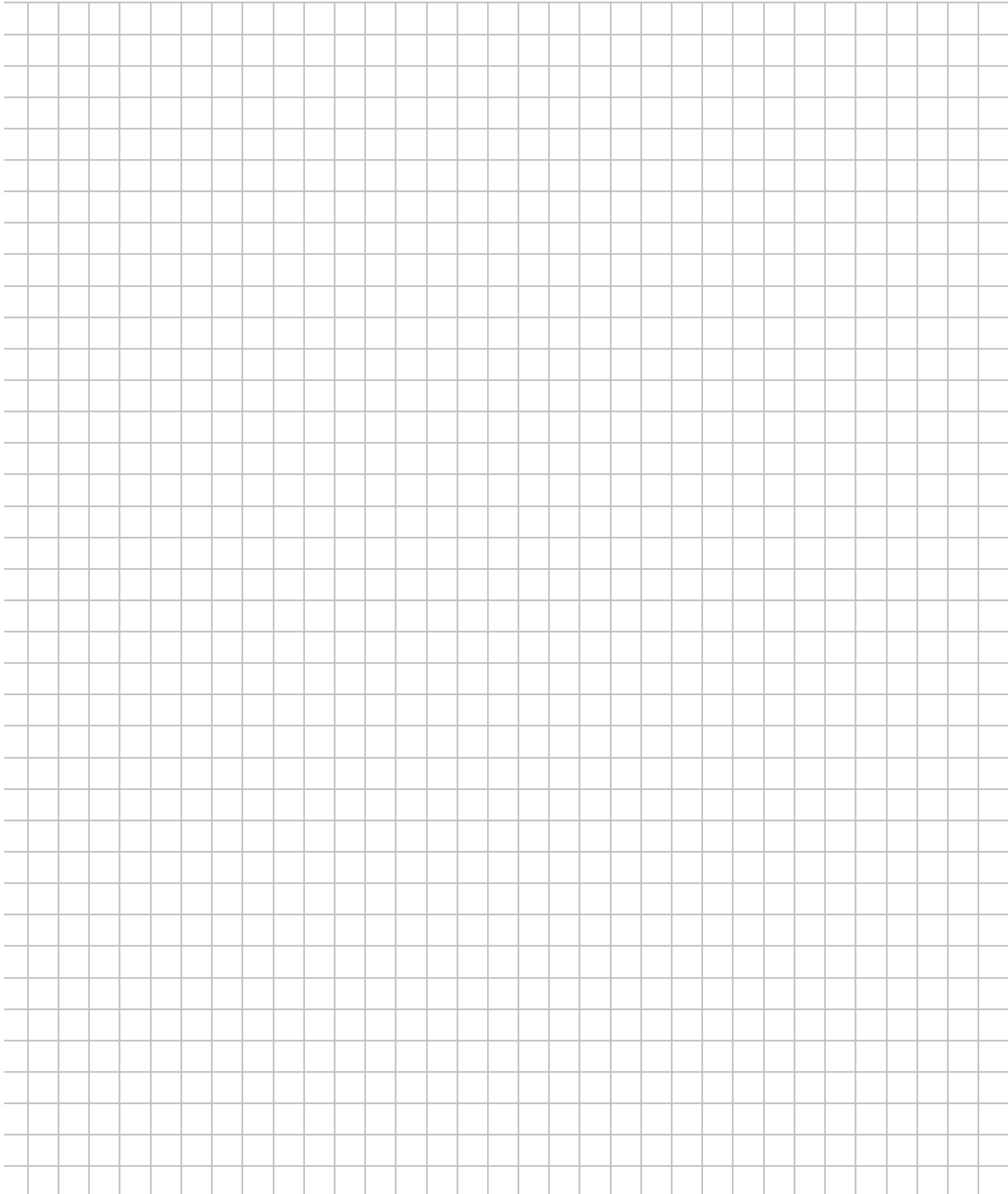
Zadanie 6. (4 pkt)

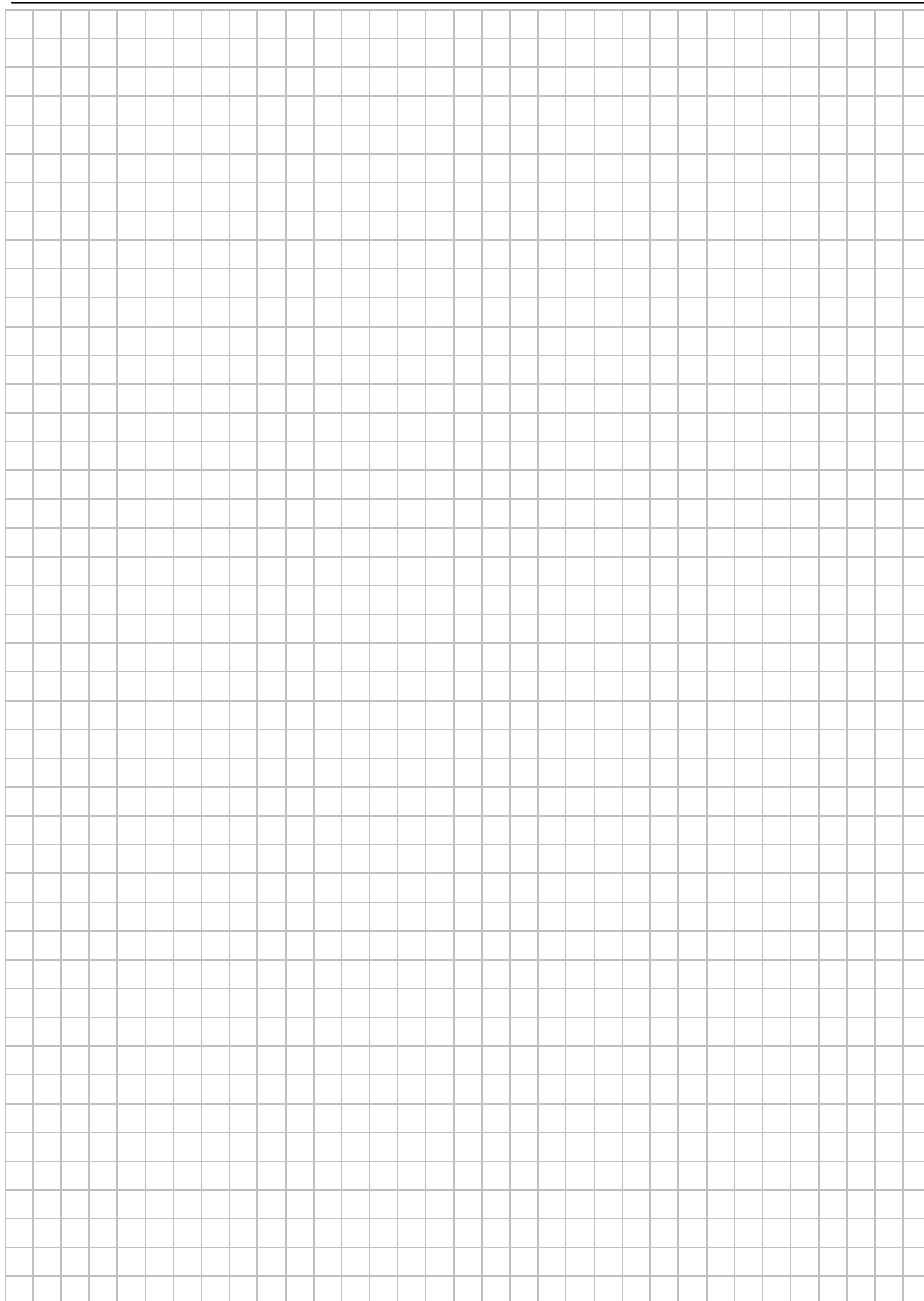
Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego krótsza przekątna ma długość c , a kąt ostry miarę 2α . Pole przekroju wyznaczonego przez krawędź boczną graniastosłupa i dłuższą przekątną podstawy wynosi P . Oblicz długość dłuższej przekątnej graniastosłupa, wykonaj rysunek bryły i zaznacz w nim właściwy przekrój.



Zadanie 7. (5 pkt)

W czworokącie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie o współrzędnych $P = (-3, 7)$ w taki sposób, że $|PC| : |AP| = |PD| : |BP| = 1 : 3$. Wiedząc, że $\vec{AC} = [4, 6]$ i $\vec{BD} = [-10, -2]$, oblicz współrzędne wierzchołków tego czworokąta. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.



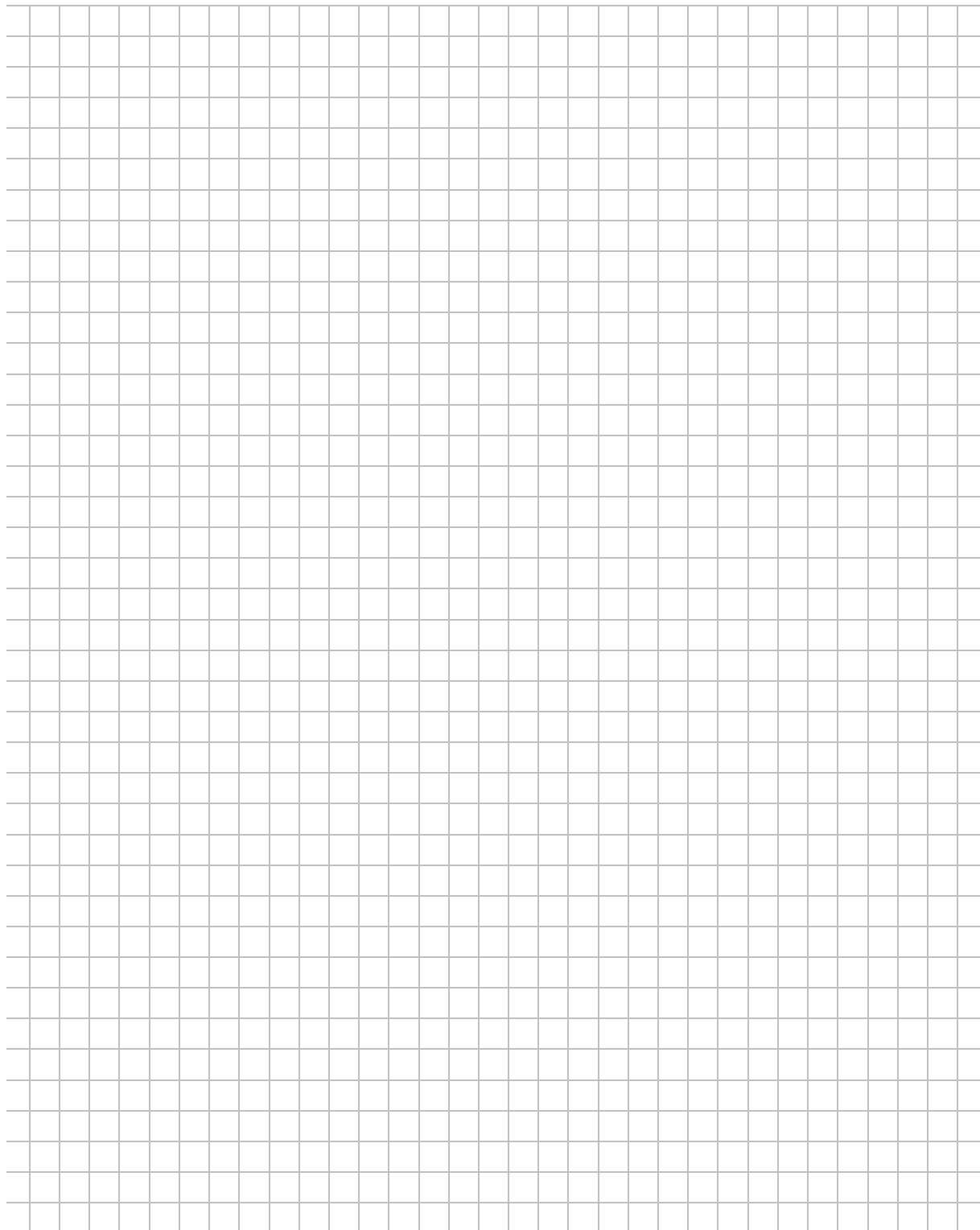


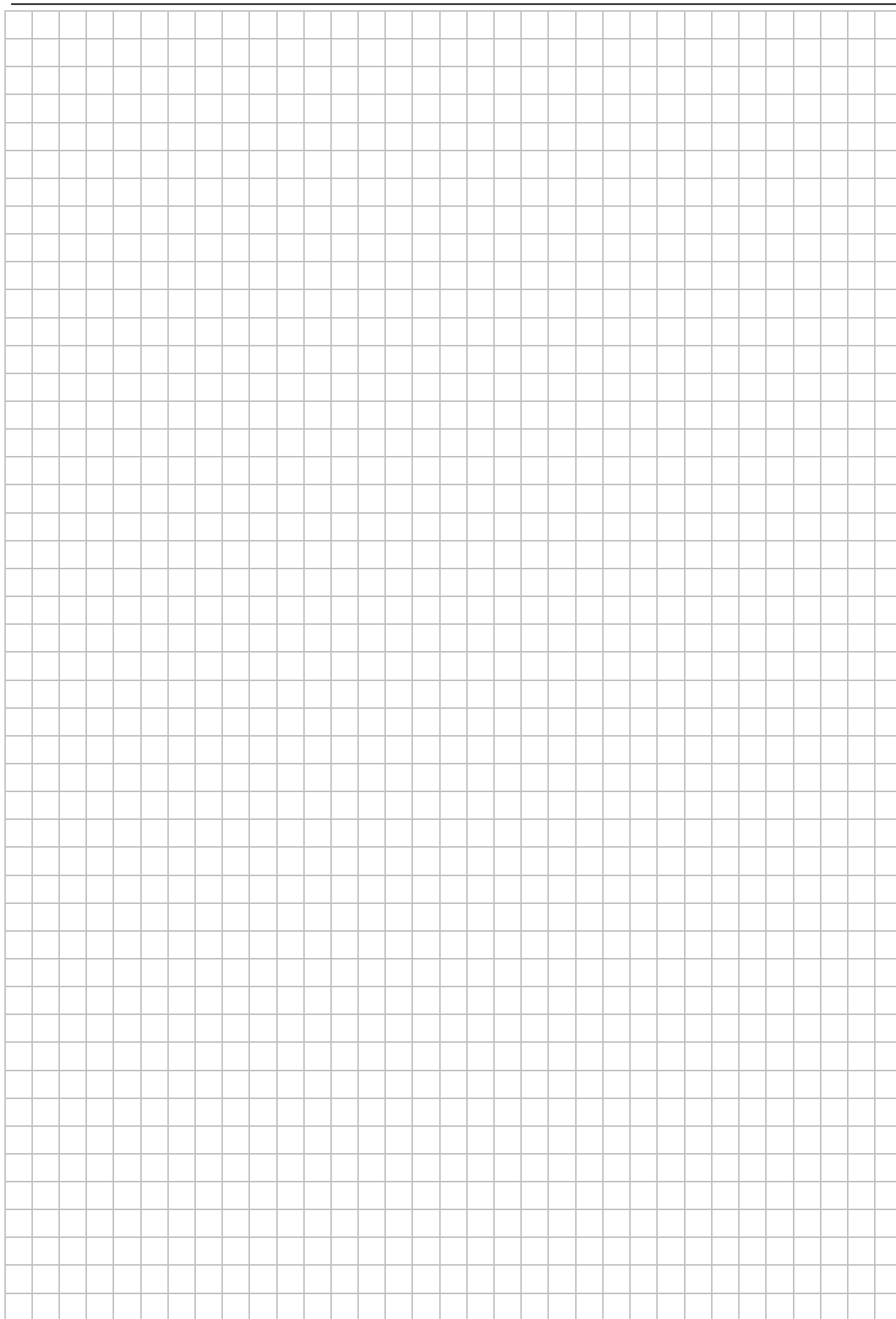
Odpowiedź:

Zadanie 8. (5 pkt)

Wykaż, że cosinus kąta przecięcia się wykresów funkcji $f(x) = \frac{4}{3}x + 1$ i $g(x) = -x\sqrt{2} + 9$

jest równy $\frac{4\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}{15}$.

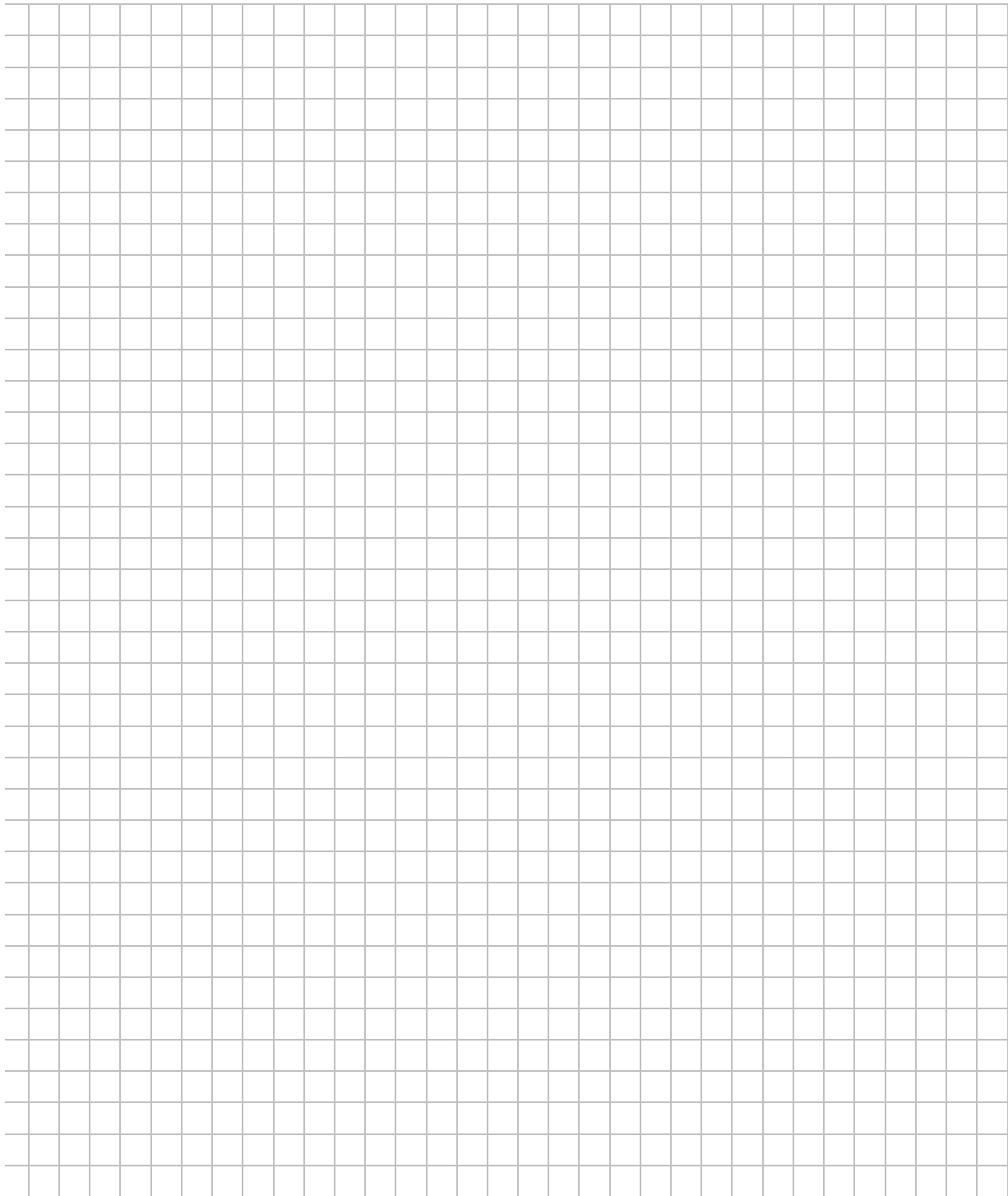




Zadanie 9. (4 pkt)

Oblicz wartość funkcji $f(x) = |1 - 2^{x-3}|$ dla argumentu

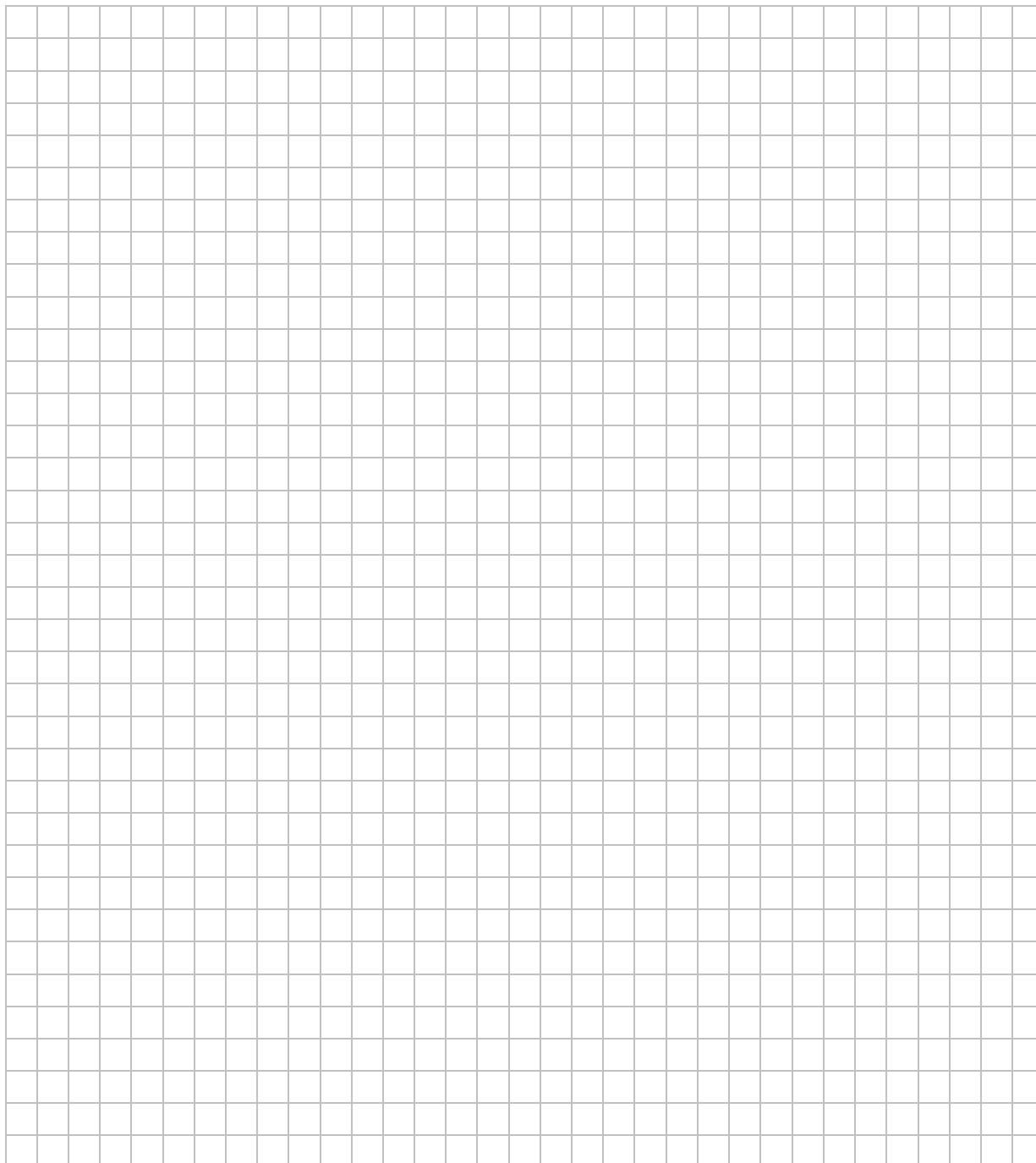
$$x = \log_{13} \left(\log_{12}^2 8 + \log_{12} 64 \cdot \log_{12} 18 + \log_{12}^2 18 + 49^{\frac{1}{\log_3 7}} \right).$$



Odpowiedź:

Zadanie 10. (4 pkt)

Posługując się wykresem funkcji $f(x) = \cos 2x$ dla $x \in \left(-\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, rozwiąż nierówność $\cos 2x < \sin \alpha$ wiedząc, że miara kąta α jest równa mierze łukowej kąta środkowego okręgu opartego na $\frac{5}{12}$ okręgu.



Odpowiedź:

Zadanie 11. (5 pkt)

Liczba uczniów w klasie jest 812 razy mniejsza od liczby utworzonych z nich uporządkowanych trójek. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech osób, które są zapisane w dzienniku pod numerami pierwszym, drugim, i trzecim.

Odpowiedź:

BRUDNOPIS

BRUDNOPIS