

OCENIANIE ARKUSZA
POZIOM ROZSZERZONY

Numer zadania		
1.	1.1	Przekształć funkcję $f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$ do postaci $f(x) = p + \frac{p^2-3}{x-p}$.
	1.2	I sposób Zapisanie funkcji w postaci sumy $f(x) = p + \frac{p^2-3}{x-p}$.
	1.3	Zapisanie nierówności $p^2 - 3 > 0$.
	1.4	Rozwiązanie nierówności: $p \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.
	1.2	II sposób Obliczenie pochodnej funkcji $f(x)$: $f'(x) = -\frac{3-p^2}{(x-p)^2}$ i zapisanie nierówności $\frac{3-p^2}{(x-p)^2} < 0$ pozwalającej wyznaczyć zbiór wartości parametru p .

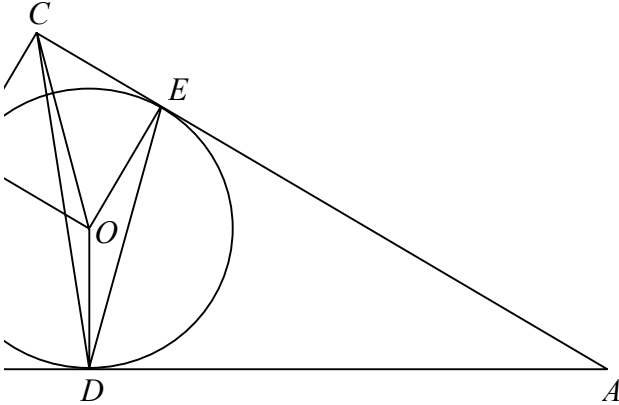
Opis rozwiązania zadania	Liczba punktów	Uwagi dla sprawdzającego
Przekształcenie wzoru funkcji do żądanej postaci lub $f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$.	1	
ania podpunktu b). funkcji w postaci sumy $f(x) = p + \frac{p^2-3}{x-p}$.	2	1 pkt za wykonanie dzielenia $(px-3):(x-p) = p(x-p) + p^2-3$ lub wykorzystanie innej metody, która doprowadzi do zapisania wyrażenia w postaci sumy, np. $f(x) = \frac{p(x-p) + p^2-3}{x-p}$. 1 pkt za zapisanie funkcji w postaci homograficznej: $f(x) = p + \frac{p^2-3}{x-p}$.
Wypisanie nierówności $p^2 - 3 > 0$.	1	
Rozwiązanie nierówności: $(\sqrt{3}, \infty)$.	1	
zania podpunktu b) Obliczenie pochodnej funkcji $f(x)$: $x \neq p$ Wypisanie nierówności $\frac{3-p^2}{(x-p)^2} < 0$ pozwalającej wyznaczyć zbiór wartości parametru p .	2	1 pkt przyznajemy za obliczenie pochodnej, 1 pkt za zapisanie nierówności.

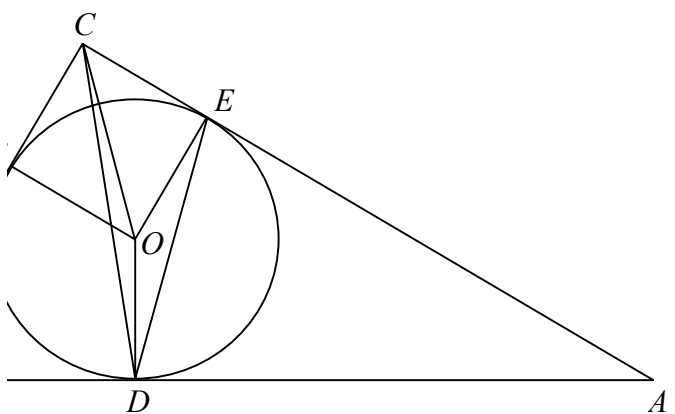
1.	1.3	Stwierdza $3 - p^2 < 0$	$(x - p)^2 > 0$ i zapisanie nierówności	1	
	1.4	Rozwiąza $p \in (-\infty,$	ówności $3 - p^2 < 0$: $(\sqrt{3}, \infty)$.	1	
	1.2	III sposób definicji Dla dowolnych $x_1, x_2 \in (p, \infty)$ jest malejąca. Obliczenia: $f(x_2) - f(x_1) = \frac{p^2(x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2)}{(x_2 - p)(x_1 - p)} = \frac{(x_1 - x_2)(p^2 - 3)}{(x_2 - p)(x_1 - p)}$.	Uzasadnienia podpunktu b) z zastosowaniem definicji. Dla dowolnych $x_1, x_2 \in (p, \infty)$ takich, że $x_1 < x_2$ funkcja f jest malejąca, więc $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Obliczenia: $f(x_2) - f(x_1) = \frac{p^2(x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2)}{(x_2 - p)(x_1 - p)} = \frac{(x_1 - x_2)(p^2 - 3)}{(x_2 - p)(x_1 - p)}$.	2	1 pkt – zapisanie założeń. 1 pkt – doprowadzenie różnicy $f(x_2) - f(x_1)$ do postaci iloczynowej.
	1.3	Analiza z $(x_2 - p) > 0$ i $(x_1 - p) > 0$ $x_1, x_2 \in (p, \infty)$	Uzasadnienie: $(x_2 - p) > 0$ i $(x_1 - p) > 0$ dla każdego $x_1, x_2 \in (p, \infty)$. Zapisanie nierówności $p^2 - 3 > 0$.	1	Zauważenie, że wyrażenie $f(x_2) - f(x_1)$ przyjmuje wartość ujemną gdy $p^2 - 3 > 0$.
	1.4	Rozwiąza $p \in (-\infty,$	ówności $p^2 - 3 > 0$: $(\sqrt{3}, \infty)$.	1	
	1.2	IV sposób Zapisanie nierówności była malejąca	Uzasadnienia podpunktu b) Wystarczające na to, żeby funkcja f była malejąca w przedziale $(p, +\infty)$: $f(p+1) > p$.	2	
	1.3	Zapisanie $\frac{p(p+1)}{(p+1) - p}$	Uzasadnienie: Wystarczające na to, żeby funkcja f była malejąca w przedziale $(p, +\infty)$: $f(p+1) > p$ w postaci:	1	
	1.4	Rozwiąza $p \in (-\infty,$	ówności $p^2 - 3 > 0$: $(\sqrt{3}, \infty)$.	1	

2.	2.1	Wyznacz $x_1 = 2$, x_2 .
	2.2	Rozważ geometryczną postać trójkąta $(k, 2, 6)$.
	2.3	Wyznacz wszystkie wartości k , dla których ciąg jest rosnący.
3.	3.1	Zapisanie wzoru funkcji f .
	3.2	Rozwiązanie równania $f(x) = 4$.
	3.3	Podanie rozwiązań równania z niewiadomą $f(x)$.

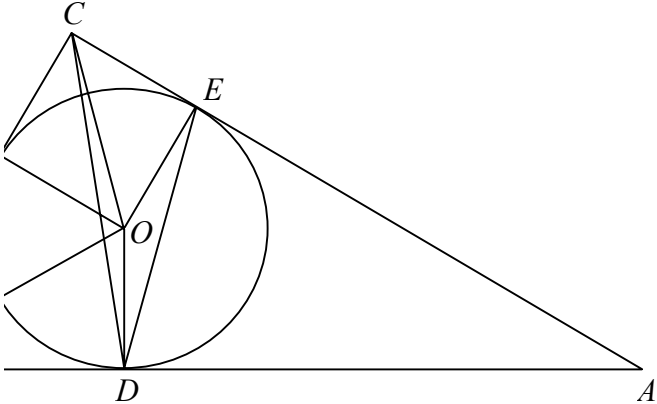
Wyznacz wszystkie wartości k , dla których ciąg jest rosnący.	1	
Wyznacz wszystkie wartości k , dla których ciąg jest rosnący.	3	1 pkt za rozwiązanie każdego z przypadków.
Wyznacz wszystkie wartości k , dla których ciąg jest rosnący.	1	Jeśli zdający nie odrzucił rozwiązania $k = -2\sqrt{3}$, nie przyznajemy punktu.
Wyznacz wszystkie wartości k , dla których ciąg jest rosnący.	2	1 pkt za wykorzystanie definicji logarytmu i zapisanie równania $\log_p 4 = -2$. 1 pkt za wyznaczenie podstawy logarytmu. Za bezpośrednie podanie wzoru funkcji przyznajemy 2 pkt.
Wyznacz wszystkie wartości k , dla których ciąg jest rosnący.	1	Zdający może od razu zapisać alternatywę równań: $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$ lub $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$.
Wyznacz wszystkie wartości k , dla których ciąg jest rosnący.	1	

4.	4.1	Sporządź rysunek trójkąta ABC , w którym $\angle C = 30^\circ$. Oznacz D jako punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt z bokiem AB , E jako punkt styczności z bokiem AC , F jako punkt styczności z bokiem BC . Wykorzystaj własności trójkątów podobnych, aby obliczyć długość odcinka BD .	prawego rysunku, na którym, np.: - $\angle C = 30^\circ$, - $\angle A = 60^\circ$, - $\angle B = 90^\circ$. Oznacz D jako punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną AB , E jako punkt styczności z bokiem AC , F jako punkt styczności z bokiem BC . Zauważ, że trójkąt ABC zawiera średnicę okręgu wpisanego w dany trójkąt.	1	Zdający otrzymuje punkt jeśli narysuje trójkąt z zaznaczonymi dobrymi kątami i wpisanym okręgiem.
	4.2	Wykorzystaj własności trójkątów podobnych, aby obliczyć długość odcinka BD .	własności: środek okręgu wpisanego w trójkąt leży w punkcie przecięcia dwusiecznych jego kątów. $\triangle FBO$ jest trójkątem prostokątnym, gdzie $\angle FBO = 30^\circ$. $ OF = \sqrt{3}$ stąd $ OB = 2\sqrt{3}$.	1	
	4.3	Oblicz długość odcinka FB z $\triangle FBO$.	długość odcinka FB z $\triangle FBO$: $ FB = 3$.	1	
	4.4	Oblicz długość odcinka CB .	długość odcinka CB : $ CB = CF + FB = 3 + \sqrt{3}$.	1	
	4.5	Oblicz długość odcinka DB z własności trójkątów podobnych.	długość odcinka DB : $ DB = BF = 3$. Kąt $\angle B$ opisanego na okręgu.	1	

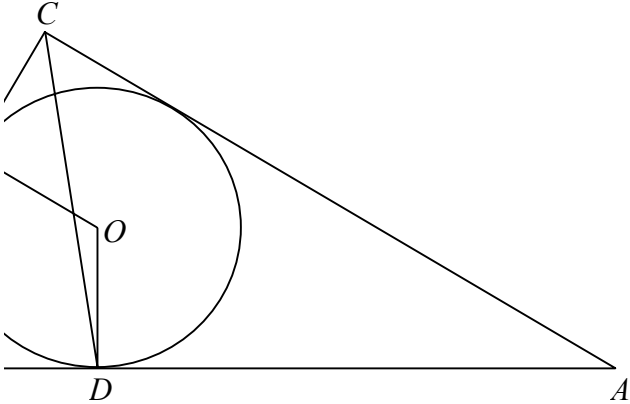


	4.6	Zastosuj wzór na długość odcinka CD : $ CD ^2 = CB ^2 + DB ^2 - 2 CB \cdot DB \cos 60^\circ$ $ CD ^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 12 + 3\sqrt{3}$ $ CD = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$	zoru cosinusów w $\triangle CBD$ do obliczenia długości	2	Jeżeli błąd jest spowodowany tym, że punkty C , O , D są współliniowe i zdający korzysta z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie CBD , wtedy nie przyznajemy punktów.
4.	4.1	II sposób Sporządź rysunek.	zauważania. 	1	
	4.2	Skorzystaj z twierdzenia o kwadracie sumy w trójkącie ACD . Przyjmij $ CD = a$. $\sqrt{3} = \frac{a}{2}$	tego, że $CE = CF = r$ (czworokąt $CFOE$ jest kwadratem); ze wzoru na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny: $CF = \frac{ AC + BC - AB }{2}$. Zatem, np. $a = BC$ i zapisanie tej równości w postaci: $\frac{2a}{2} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$.	1	

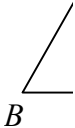
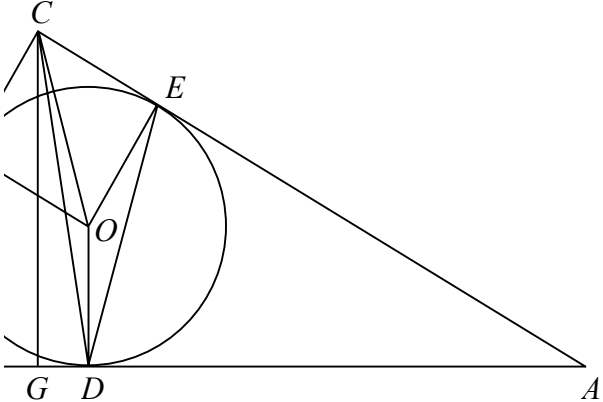
	4.3	Obliczei
	4.4	Obliczei trygonoi
	4.5	Obliczei
	4.6	Zastosov długości $ CD ^2 = $ $ CD ^2 = $ $ CD = \sqrt$
4.	4.1	III spos Sporzác 

$= a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 3 + \sqrt{3} .$	1	
$= 3\sqrt{3} + 3$, np. z wykorzystaniem funkcji rych w trójkącie ABC .	1	
$= AD = 3 + 2\sqrt{3} .$	1	
zoru cosinusów w trójkącie CDA i obliczenie $ AD ^2 - 2 AC \cdot AD \cdot \cos 30^\circ ,$ $\left. \right)^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2 - 2(3 + 3\sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 + 3\sqrt{3}$ $= 3 .$	2	
iązania (z wykorzystaniem $\sphericalangle COD$). sunku. 	1	

	4.2	Oblicz $\angle FOD$ (wykorzystaj $\angle FOD = 120^\circ$).	$\angle FOD = 120^\circ$	1	
	4.3	Zauważ, że $\angle FOC = 45^\circ$ i oblicz $\angle FOD$.	$\angle FOD = 45^\circ + 120^\circ = 165^\circ$.	1	
	4.4	Oblicz długość odcinka OC w trójkącie OCF (wzór cosinusów).	$OC = \sqrt{6}$.	1	
	4.5	Wykorzystaj wzór redukcyjny: $\cos 165^\circ = -\cos 15^\circ$.		1	
	4.6	Zastosuj wzór cosinusów w $\triangle COD$ do obliczenia długości odcinka CD : $CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos 165^\circ$ $CD^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 15^\circ$ $CD^2 = 9 + 6\sqrt{2} \cos 15^\circ$		2	Zdający może pozostawić wynik w takiej postaci: $9 + 6\sqrt{2} \cos 15^\circ$, lub odczytać wartość cosinusa z tablic i podać wynik liczbowy.

4.	4.1	IV sposób Sporządź		1	
	4.2	Oznacz $ BC = \frac{a}{2}$	$= a$. Z własności trójkąta ABC wynika, że $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	1	
	4.3	Wyznacz p gdzie p ten trójkąt	ła trójkąta ABC (z zastosowaniem wzoru: $S = pr$, $\cdot b + c$) i r jest promieniem okręgu wpisanego w $\left(a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{ AC \cdot BC }{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.	1	
	4.4	Wyznacz $4a\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$	$ BC = a$ z powyższej równości: a^2 , $ AB = a = 6 + 2\sqrt{3}$.	1	
	4.5	Wyznacz $ BD = $	ugości odcinka BD : $- CF = 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 3$.	1	

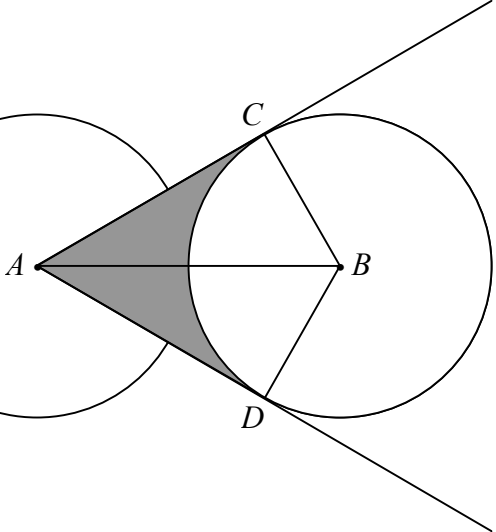
	4.6	Zastosuj wzór na długość	z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów w trójkącie CBD do wyznaczenia długości CD : $ CD ^2 = CB ^2 + BD ^2 - 2 CB \cdot BD \cos 60^\circ$.	2	
4.	4.1	W sposób inny niż w zadaniu 4.6. Sporządź rysunek.		1	
	4.2	Wykorzystaj własność: środek okręgu wpisanego w trójkąt leży w przecięciu dwusiecznych jego kątów. Wyznacz długość $ AD $ z trójkąta AOD : $\frac{ OD }{ AD } = \frac{\sqrt{3}}{ AD } = \tan 15^\circ$ stąd $ AD = \frac{\sqrt{3}}{\tan 15^\circ}$.		1	
	4.3	Wyznacz długość $ BD $ z trójkąta BOD : $\frac{ DO }{ BD } = \frac{\sqrt{3}}{ BD } = \tan 30^\circ$ stąd $ BD = \frac{\sqrt{3}}{\tan 30^\circ}$.		1	
	4.4	Wyznacz długość $ PD $ z trójkąta PDA (z trójkąta PDA , w którym $\angle PDA = 60^\circ$): $ PD = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\tan 15^\circ}$.		1	

4.	4.5	$ DM =$	$ MN = \frac{\sqrt{3}}{2} + OF = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$	1	
	4.6	Wyznac $ CD ^2 =$ $ CD = \sqrt{}$	$ D $ z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie CMD : $ DM ^2 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12 + 3\sqrt{3},$ $\sqrt{}$	2	
	4.1	VII spo Sporząd 	Wiązania. sunku. 	1	Zdający otrzymuje punkt jeśli narysuje trójkąt z zaznaczonymi dobrymi kątami i wpisanym okręgiem.
	4.2	Wykorz leży w p ΔFBO $ OF = \sqrt{}$	własności : środek okręgu wpisanego w trójkąt przecięcia dwusiecznych jego kątów. DO) jest prostokątny i $ \angle FBO = 30^\circ.$ $ OB = 2\sqrt{3}.$	1	
	4.3	Oblicze: $ FB = 3$	ości odcinków FB z ΔFBO i BD z ΔBDO : $= 3.$	1	
	4.4	Oblicze:	ość odcinka CB : $ CB = CF + FB = 3 + \sqrt{3}.$	1	

	4.5	Oblicze: $ BG = \frac{1}{2}$ $ GD = \frac{1}{2}$	ości odcinków BG i CG i DG : $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, $ CG = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$, $ GD = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.	1	
	4.6	Zastosuj wzór na długość: $ CD ^2 =$	twierdzenia Pitagorasa $\triangle BGC$ do obliczenia długości odcinka CD : $ CD ^2 = CG ^2 + GD ^2 = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12 + 3\sqrt{3}$, $ CD = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$.	2	
5.	5.1	Sporządź wykres funkcji i narysuj jej wykres.	Narysuj wykres funkcji $g(x) = 2x - x^2$ i $f(x) = g(x)$.	2	Zdający może rozpatrzeć dwa przypadki i za każdy poprawnie rozwiązany otrzymuje 1 pkt. Jeśli jest prawidłowy rysunek to zdający otrzymuje 2 pkt. Przyznajemy 1 punkt jeśli, np. - rysunek jest prawidłowy tylko po jednej stronie osi Oy , - gdy zdający nie wybrał tej części wykresu, która jest prawidłowa (pozostawił niepotrzebne części wykresu).
	5.2	Wskazanie miejsca ekstremum funkcji.	Wskazanie miejsca ekstremum funkcji $f(x) = g(x)$.	1	
6.	6.1	Wyznaczenie współrzędnych punktu D .	Wyznaczenie współrzędnych punktu D : $D = (0, 6)$.	1	
	6.2	Wyznaczenie współrzędnych punktu A .	Wyznaczenie współrzędnych punktu A : $A = (-3, 0)$.	1	
	6.3	Wyznaczenie długości odcinka CD .	Wyznaczenie długości odcinka CD : $ CD = 3$.	1	
	6.4	Obliczenie pola trapezu $ABCD$.	Obliczenie pola trapezu: $P_{ABCD} = \frac{9+3}{2} \cdot 6 = 36$.	1	

7.	7.1	Wyznac	os x z danego równania: $\cos x = 0$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$.	1	Jeśli zdający podzieli równanie obustronnie przez $\cos x$, bez komentarza dostaje 0 pkt.
	7.2	Wybran $x_1 = \frac{\pi}{3}$,	sanie rozwiązań należących do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$, $x_4 = \frac{5\pi}{3}$.	2	Jeśli zdający w 7.1 podzielił równanie przez $\cos x$ ale poprawnie rozwiązał otrzymane w ten sposób równanie otrzymuje 1 pkt. Zdający może podać odpowiedź w stopniach.
	7.1	II sposób Rozwią	azania. wnania gdy $\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3\pi}{2}$.	1	
	7.2	Rozwią 1 pkt - z $\cos x = \cdot$ 1 pkt – ;	wnania gdy $\cos x \neq 0$: wadzenie równania do najprostszej postaci azanie: $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{5\pi}{3}$.	2	
8.	8.1	Zaznacz	przedziale $(2,3)$ poprawnego znaku pochodnej: (+).	1	
	8.2	Zapisan w niej d ma funk (zdający)	imo poprawienia błędu w tej tabeli umieszczone pozwalają stwierdzić dokładnie ile miejsc zerowych ogą być 2, 3 albo 4 miejsca zerowe dza rysunki lub przedstawia słowne uzasadnienie).	3	1 pkt jeśli zdający poda odpowiedź – nie pozwala, 2 pkt jeśli poda odpowiedź – nie pozwala, bo może mieć 2 lub 3 lub 4 miejsca zerowe (poprawnie wskazuje dwie różne liczby miejsc zerowych, ale nie pokazuje, jak wygląda wykres funkcji). 3 pkt jeśli poda odpowiedź i narysuje dwa wykresy lub pokazuje, że np. w przedziale $(3, +\infty)$ funkcja może mieć 0 miejsc zerowych lub 1 miejsce zerowe.

9.	9.1	Oblicze $P(A \cap B)$ (1 pkt za obliczenia)	prawdopodobieństwa $P(A \cap B)$: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$. (nie metody, 1 pkt za obliczenia)	2	
	9.2	Oblicze i zapisz $P(A) \cdot P(B)$	wynu prawdopodobieństw $P(A) \cdot P(B)$ ane zdarzenia są niezależne: $0,5 \cdot 0,4 = 0,2$.	1	
10.	10.1	Oblicze $a_{n+1} - a_n$	icy dwóch kolejnych wyrazów w postaci ogólnej: $a_n = 2n^2$ i stwierdzenie, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.	1	
	10.2	Oblicze $S_{40} - S_1$	nej sumy dwudziestu jeden wyrazów danego ciągu: $200 + 266 = -1134$ lub $\frac{a_{20} + a_{40}}{2} \cdot 21 = -1134$.	2	1 pkt za przedstawienie metody, 1 pkt za wykonanie obliczeń.
	10.3	Zapisan	iku na to aby ciąg (b_n) był stały: $p^2 + p - 2 = 0$.	1	
	10.4	Wyznac $p = 1$ lub $p = -2$	szystkich wartości p , dla których ciąg (b_n) jest stały: $p = 1$ lub $p = -2$.	1	
11.	11.1	Wyznac	erwiastków trójmianu kwadratowego: $n, 2n$.	1	
	11.2	Wyznac $(n, 2n)$.	ioru rozwiązań nierówności $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$:	1	
	11.3	Wyznac i zapisz	większej liczby całkowitej spełniającej nierówność ru funkcji $f: 2n - 1$, $f(n) = 2n - 1$, dla $n > 1$.	1	

12.	12.1			1	
	12.2	Zauważ Zapisan np. delt	ójkąt ABC jest prostokątny i kąt ABC ma miarę 60° . zacięniowanej figury jako odpowiedniej różnicy pól: BC i wypukłego wycinka kołowego DBC .	1	
	12.3	Oblicze	deltoidu $ADBC$: $P_{ADBC} = 64\sqrt{3}$.	1	
	12.4	Oblicze	zacięniowanej figury: $P_f = 64\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.	1	

Za prawidłowe rozwiązanie

go z zadań inną metodą od przedstawionej w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.