Bölüm 7: İş ve Kinetik Enerji

Kavrama Soruları

1- Fiziksel iş ile günlük hayatta alışık olduğumuz iş kavramları aynımıdır?
2- Kuvvet ve yer değiştirmenin sıfırdan farklı olduğu durumlarda iş sıfır olabilir mi?
3- Dairesel harekette merkezcil kuvvetin yaptığı iş nedir (veya iş yapar mı?)?
4- İki vektörün skaler çarpımı neden skaler bir sayıdır?
5- Bir ton buğday tanesini bir binanın tepesine çıkaran bir vinç ile bir karıncanın yaptıkları iş aynımıdır?
6- Bir karınca mı yoksa bir vinç mi daha güçlüdür?

Konu İçeriği

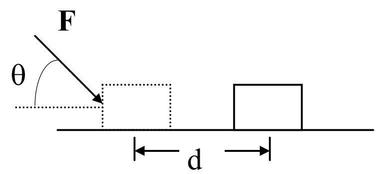
Sunuş

Bu bölümde, iş tanımı yapılacak, önce sabit bir kuvvetin yaptığı iş, daha sonra büyüklüğü konuma göre değişen bir kuvvetin yaptığı iş hesaplanacaktır. İki vektörün skaler çarpımı anlatılacak ve iş ifadesinin skaler çarpım olarak nasıl ifade edileceği gösterilecektir. Son olarak da güç kavramına değinilecektir.

7-1 Sabit Bir Kuvvetin Yaptığı İş

İş: Sabit bir kuvvetin bir cisim üzerinde yaptığı iş, W, kuvvetin (F) yer değiştirme yönündeki bileşeni (Fcosθ) ile yer değiştirmenin (d) çarpımıdır.

$W=(F.\cos\theta)d$

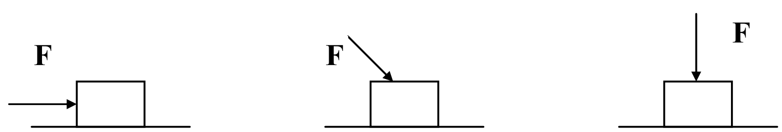


Burada:
F: uygulanan kuvvet
d: yer değiştirme
θ: **F** ile **d** yer değiştirme vektörü arasındaki açı

İş, skaler bir niceliktir. Boyutu [kuvvet].[uzunluk] ya da temel boyutlar cinsinden [Kütle.Uzunluk^2/Zaman], [ML^2/T^2].

İşin SI birim sisteminde birimi *Newton-Metre* (N.m) veya *Joule* (J) olarak ifade edilir.

İşin sıfırdan farklı olabilmesi için kuvvet (F) ve yer değiştirme (d) niceliklerinden her ikisinin de değerinin sıfırdan farklı olması gerekmektedir.

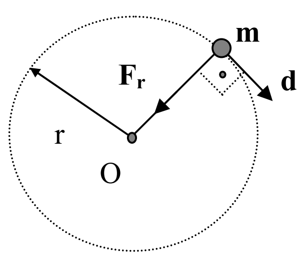


$W=F.d$
$F//d$

$W=(F.\cos\theta)d$

$W=0$
$F\neq0,\ d=0$

Bu şartın yanında, yer değiştirmenin kuvvet yönünde bileşeninin de sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Eğer yer değiştirme ile kuvvet arasında 90^o'lik bir açı varsa yapılan iş sıfırdır. Bu duruma en güzel örnek dairesel harekettir. Dairesel harekette cisme etki eden kuvvet merkeze doğru olmasına rağmen cismin yer değiştirmesi bu kuvvete dik olan yörüngeye teğet doğrultudadır.

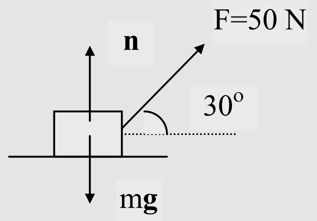


$W=0$

$W=(F.\cos90^o)d=0$

Örnek 7.1 Bir adam bir cismi yatayla 30^o'lik bir açıda F=50 N büyüklüğünde bir kuvvet ile çekiyor. Cisim yataya doğru 3m yer değiştirdiğinde kuvvetin cisim üzerinde yaptığı işi hesaplayınız.

Çözüm:

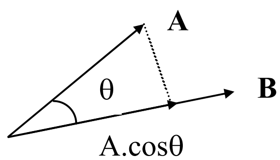


$W=(F\cos\theta)d$
$=(50\ N).(\cos 30^o).(3m)$
$=130\ J$

Kuvvetin yukarı yönlü bileşeni $F\sin\theta$, cisim üzerine hiçbir iş yapmaz çünkü bu kuvvet yer değiştirmeye diktir.

7.2 İki Vektörün Skaler Çarpımı

A ve **B** gibi herhangi iki vektörün skaler çarpımı, bu iki vektörün büyüklükleri ile bunların arasındaki açının kosinüsüsün çarpımına eşit olan skaler bir niceliktir.



$\mathbf{A}.\mathbf{B}=|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|.\cos\theta$ *Skaler Çarpım*

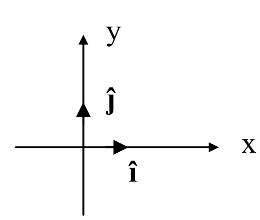
Skaler çarpımda vektörlerden birinin diğer vektör üzerindeki iz düşümü alınarak aynı doğrultuya getirilir ve bunlara skaler sayı gibi işlem yapılabilir.

A ve **B** vektörlerini birim vektörler cinsinden ifade ederek iki vektörün skaler çarpımını bulmaya çalışalım.

$\mathbf{A}=A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}$
$\mathbf{B}=B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{A}.\mathbf{B}=(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}).(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}})=A_xB_x(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}})+A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}})+A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}})+A_yB_y(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}})$

$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}=1$ (İki birim vektör arasındaki açı $\theta=0^o$, $\cos(0^o)=1$)
$\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}}=1$ (İki birim vektör arasındaki açı $\theta=0^o$, $\cos(0^o)=1$)
$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}}=0$ (İki birim vektör arasındaki açı $\theta=90^o$, $\cos(90^o)=0$)



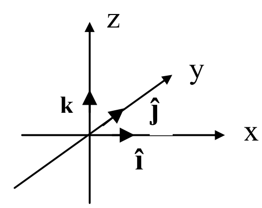
$$\mathbf{A}.\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y$$

A ve B arasındaki açı $\cos\theta=\dfrac{A.B}{|A|.|B|}$

Eğer vektör üç boyutta tanımlanmış ise;

$\mathbf{A}=A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\mathbf{k}$
$\mathbf{B}=B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\mathbf{k}$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B}=(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\mathbf{k}).(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\mathbf{k})=A_xB_x(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}})+A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}})+A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}})+A_yB_y(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}})$$



$\mathbf{k}.\mathbf{k}=1$ (İki birim vektör arasındaki açı $\theta=0^o$, $\cos(0^o)=1$)
$\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}}=1$ (İki birim vektör arasındaki açı $\theta=0^o$, $\cos(0^o)=1$)
$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}=1$ (İki birim vektör arasındaki açı $\theta=0^o$, $\cos(0^o)=1$)
$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{i}}.\mathbf{k}=\hat{\mathbf{j}}.\mathbf{k}=0$ (İki birim vektör arasındaki açı $\theta=90^o$, $\cos(90^o)=0$)

$$\mathbf{A}.\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

bulunur.

Örnek 7.2 **A** ve **B** vektörleri $\mathbf{A}=2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}$ ve $\mathbf{B}=-\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}$ olarak veriliyor.

a) **A.B** skaler çarpımını hesaplayınız.
b) **A** ile **B** arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

a) $\mathbf{A}.\mathbf{B}=(2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}).(-\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}})=-2+6=4$ birim

b) $\mathbf{A}.\mathbf{B}=|A||B|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=(\mathbf{A}.\mathbf{B})/|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|$

A' nın büyüklüğü $|\mathbf{A}|=(2^2+3^2)^{1/2}=(13)^{1/2}$
B' nın büyüklüğü $|\mathbf{B}|=((-1)^2+2^2)^{1/2}=(5)^{1/2}$

$$\cos\theta=(\mathbf{A}.\mathbf{B})/|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|=4/[(13)^{1/2}.(5)^{1/2}] \Rightarrow \theta=\arccos(4/8{,}06)=60{,}2^o$$

Skaler çarpım notasyonunu kullanarak daha önce tanımladığımız işi kuvvet ve yer değiştirme vektörleri cinsinden şu şekilde ifade edebiliriz:

$$W=\mathbf{F}.\mathbf{d}=|F|.|d|.\cos\theta$$

Burada **F** ve **d** her ikisi de vektörel niceliktir. Görüldüğü gibi iş ifadesini vektör notasyonu ile yazdığımızda kuvvetin yer değiştirme yönündeki bileşeni de otomatik olarak dikkate alınmış olur.

7.3 Değişken Bir Kuvvetin Yaptığı İş

Bölüm 7.1 de tanımladığımız iş ifadesinde **F** kuvvetinin büyüklüğünü sabit kabul etmiştik. **F** kuvveti sabit ise bu kuvvetin yaptığı iş ΔW,

W=(Fcosθ).d şeklinde tanımlamıştık

Eğer **F** kuvveti sabit değil ise, yani **F**'in değeri (büyüklüğü) konum ile değişiyor ise;

Kuvvet her küçük Δx yer değiştirmesinde sabit ise, her Δx aralığında yapılan iş;

$$\Delta W = F_x . \Delta x$$

F_x: **F** kuvvetinin yer değiştirme (Δx) yönündeki bileşeni
Δx: Yer değiştirme

Yapılan toplam işi bulmak istersek her Δx aralığında yapılan işleri ($F_x.\Delta x$) toplamamız gerekecektir. Bu toplamı (∑) matematiksel olarak ifade edersek:

$$W = \sum_{x_i}^{x_s} F_x \Delta x$$

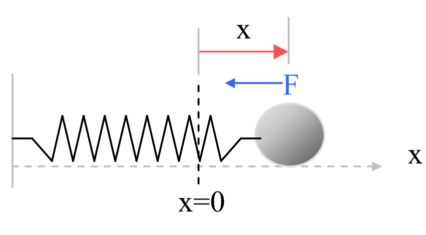
Yer değiştirme Δx'i çok küçük alırsak toplam iş ifadesi yukarıdaki kesikli toplam (∑) ifadesi sürekli toplam (∫) ifadesine dönüşür. Sürekli toplamı gösteren bu ifade matematikte "integral" olarak bilinir.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_s} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx \quad \text{Değişken bir kuvvetin yaptığı iş}$$

Konuma göre değişen kuvvete verilebilecek güzel bir örnek kütle yay-sistemidir. Bir yayın uyguladığı kuvvet, yayın denge noktasından ne kadar uzaklaştığı (x) ile ve yayı karakterize eden yay sabiti (k) ile orantılıdır.

F=-kx



k: yay sabiti, boyutu [k]=[Kuvvet]/[L]
x: denge konumundan olan yer değiştirme

Buradaki (-) işaret kuvvetin yer değiştirme ile ters yönlü olduğunu göstermektedir. Buna göre bir kütle-yay sisteminde yayı denge konumundan d kadar uzaklaştırmakla yay üzerinde yapılacak işi hesaplamaya çalışırsak:

$$W = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx = \int_{x_i=d}^{x_s=0} -kxdx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x_i=d}^{x_s=0} = -\frac{1}{2}k0^2 - (-\frac{1}{2}kd^2) = \frac{1}{2}kd^2$$

Buradan, yay sabiti k olan bir yayı denge konumundan x kadar uzaklaştırmak için yapılması gereken iş için genel bir ifade elde ederiz:

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

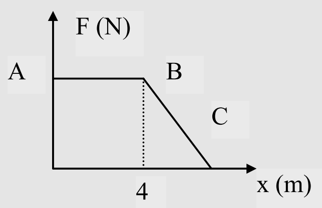
Eğer, bu problemi sabit kuvvet için türettiğimiz iş ifadesini kullanarak yapmış olsaydık elde edeceğimiz iş ifadesi:

$$W=F.x= -kx.x=-kx^2=-kd^2 \text{ (yanlış!)}$$

olacaktı ki bu yukarda bulduğumuz ifadeden (½) kadar farklı olacaktır.

Örnek 7.4 Bir cismin üzerine etkiyen kuvvet şekilde görüldüğü gibi x ile değişmektedir. Cisim x=0'dan x=6m'ye hareket ettiğinde kuvvetin yaptığı işi hesaplayınız.

Çözüm:

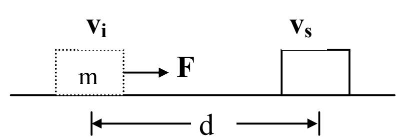


Kuvvetin yaptığı iş, x=0 ile x=6 m arasındaki eğrinin altında kalan toplam alana eşittir (F_x.x ifadesinden). A ve B arasındaki dikdörtgenin alanı ve B ile C arasındaki üçgenin alanının toplamı toplam alana eşittir.

A-B arası: (5N).(4m)=20 J
B-C arası: (½)(5N).(2m)=5J
Toplam iş W=20J+5J=25 Joule

7.4 Kinetik Enerji ve İş-Kinetik Enerji Teoremi

Sabit bir **F** kuvvetinin etkisi altında sağa doğru hareket eden m kütleli bir cismi göz önüne alalım.



Cismin, kuvvet uygulanmadan önceki hızı v_i, F kuvveti d mesafesi boyunca uygulandıktan sonraki hızı da v_s olsun.

Kuvvet sabit olduğu için cisim, d mesafesi boyunca sabit bir a=F/m ivmesi ile hareket edecektir ve hızı $\mathbf{v_i}$ den $\mathbf{v_s}$ a çıkacaktır. $\sum$F net kuvvetinin d mesafesi boyunca cismin üzerinde yaptığı toplam iş:

$$\sum W=F.d=(ma).d$$

Bu ifadeyi hızlar cinsinden tekrardan düzenleyebiliriz. Yer değiştirme $d = \frac{1}{2}(v_i + v_s)t$ (ivme sabit olduğundan ortalama hızı kullanabiliriz)

İvme $a = \frac{v_s - v_i}{t}$ (ivme tanımından)

$$\sum W = m(\frac{v_s - v_i}{t}).(\frac{1}{2}(v_i + v_s)t) = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$\frac{1}{2}mv^2$ niceliği parçacığın hareketi ile ilgili enerjiyi temsil eder. Bu niceliğe ***Kinetik Enerji*** denir.

Genel olarak bir v hızı ile hareket eden m kütleli bir parçacığın kinetik enerjisi (K):

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

şeklinde tanımlanır. Kinetik enerji skaler bir niceliktir ve iş ile aynı boyut ve birime sahiptir.

Yukarıdaki ifadede cismin F kuvveti uygulanmadan önceki v_i hızından dolayı sahip olduğu kinetik enerjiyi K_i, F kuvvetinden sonra v_s hızından dolayı da sahip olduğu kinetik enerjiyi K_s ile gösterirsek, yukarıdaki ifadeyi

$$\sum W = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

ilk ve son kinetik enerjiler cinsinden

$$\sum W = K_s - K_i = \Delta K$$

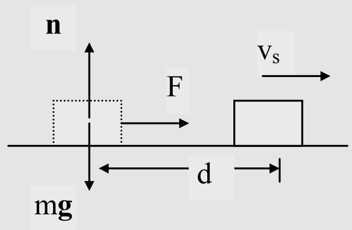
ifade edebiliriz. Burada:

K_s: son kinetik enerji
K_i: ilk kinetik enerji
ΣW: yapılan toplam iş

Bu eşitlik "***İş-Kinetik Enerji***" teoremi olarak bilinir. Bu teorem, dışarıdan uygulanan bir kuvvetinin cismin hızını v_i'den v_s'a çıkarmakla cismin kinetik enerjisinde ΔK'lık bir artışa neden olacağını söylemektedir. Bölüm 7'de konumdan kaynaklanan enerji de dikkate alındığında bu ifade tekrardan düzenlenecektir.

Örnek 7.7 Başlangıçta durgun olan 6 kg'lık bir blok, 12 N'luk sabit, yatay bir kuvvetle yatay sürtünmesiz bir yüzey boyunca çekilmektedir. Blok 3m'lik bir uzaklığa hareket ettikten sonra hızını bulunuz.

Çözüm:



W=F.d=(12N).(3m)=36 N.m=36 J

=1,5 m/s

İlk kinetik enerji sıfır olduğu dikkate alınırsa

$W=K_s-K_i=36$ J

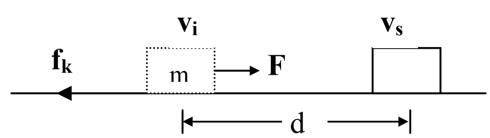
$K_s- 0 =36$ J

$K_s=36 \text{ J}=(1/2)mv_s^2$

$v_s=3{,}5$ m/s bulunur.

Kinetik Sürtünmeyi İçeren Durumlar

Eğer bir yüzey üzerinde hareket eden bir cisme sürtünme kuvveti etki ediyorsa, bu kuvvet cismin kinetik enerjisini azaltacak yönde olur.



Sürtünme kuvvetinin yaptığı iş W_s:

$$W_s= - f_k.d$$

f_k: kinetik sürtünme kuvveti
d: yer değiştirme

Sürtünme kuvveti her zaman hızın doğrultusunun tersi yönde olduğu için, cisim üzerine yapılan toplam iş W_t ifadesi

$$\Sigma W\text{-}f_k d=W_t$$

İş-kinetik enerji formülünde sürtünmeyi de yazarsak

$$W_t=K_s\text{-}K_i=\Delta K$$

$$\Sigma W=\Delta K+ f_k.d$$

Burada ΣW ifadesi sürtünme dışında net F kuvvetnin cisim üzerinde yaptığı işi vermektedir.

7.5 Güç

İş yapma hızına güç denir. Bir cisme bir dış kuvvet uygulanırsa bu kuvvetin Δt süresinde yaptığı iş ΔW ise bu sürede harcanan ortalama güç (P_{ort}):

$$P_{ort}=\Delta W/\Delta t$$

olarak tanımlanır.

Ani gücü tanımlarsak ($\Delta t \rightarrow 0$)

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Güç ile kuvvet ilişkisine bakacak olursak

dW=Fdx olduğundan

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F.dx}{dt} = F\frac{dx}{dt} = F.v$$

SI birim sisteminde güç birimi Joule/saniye (J/s)'dir. Bu birim aynı zamanda Watt (W) olarak da adlandırılır.

$$1\ W = 1\ J/s = 1\ kg.m^2/s^2$$

İngilizler güç birimi olarak Beygir Gücü kullanır (BG)

1 BG=746 W'a eşdeğerdir.

Örnek 7.8 *Pürüzlü bir yüzey üzerinde çekilen blok*: Örnek 7.7'deki yüzey 0,15'lik bir kinetik sürtünme katsayısına sahip ise bloğun son süratini bulunuz.

Çözüm:

W=F.d=(12N).(3m)=36 J
Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü:
$f_k=\mu_k.n=\mu_k mg=(0,15).(6kg).(9,8\ m/s^2)=8,82\ N$
$\Delta K=-fk.d=(-8,82\ N).(3m)=-26,5\ J$

$(½)mv_i^2+\sum W-f_k d=(½)mv_s^2$
$0 \quad +36J-26,5J=(½)(6kg)v_s^2$
$v_s=1,8\ m/s$ bulunur.

Bölüm 7'nin Sonu

Kaynak:

Bu ders notları,
R. A. Serway ve **R. J. Beichner** (Çeviri Editörü: K. Çolakoğlu), **Fen ve Mühendislik için FİZİK-I** (Mekanik), Palme Yayıncılık, 2005.

kitabından derlenmiştir.