

MUTLAK DEĞER :

Bir sayı doğrusu üzerindeki bir noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığına o noktanın mutlak değeri denir.

★ x 'in mutlak değeri $|x|$ şeklinde gösterilir.

$$* |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

örnek $| -7 | + | -8 | - | -9 | = ?$

$$\begin{aligned} | -7 | &= +7 \\ | -8 | &= +8 \\ | -9 | &= +9 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= (7) + (8) - (+9) \\ &= 15 - 9 = \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

örnek $| | -17 | + | -8 | - | -9 | | = ?$

$$\begin{aligned} &| (+17) + (+8) - (+9) | \\ &| 17 + 8 - 9 | = | 16 | = \underline{\underline{+16}} \end{aligned}$$

örnek $a < 0$ ise $|a| - |-a| - |2(-a| + |a|)| = ?$

$a < 0$ ise yani $a \rightarrow (-)$ ise $|a| = -a$

$$\begin{aligned} \underbrace{| -a |}_{+} &= (-a) \\ &= (-a) - (-a) - | 2((-a) + (-a)) | \\ &= -a + a - | -4a | \\ &= 0 - 4 \cdot (-a) = \underline{\underline{+4a}} // \end{aligned}$$

SAYISAL BECERİLER DERS NOTU – MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİKLER

örnek $a < b < c$ ise $|a-b| + |b-c| + |c-a| - |b-a| = ?$

$a < b$ ise $(a-b)$ değeri negatiftir. (İşaret değiştirerek alır.)

$$|a-b| = -a+b = b-a$$

$\rightarrow (-)$

$b < c$ ise $(b-c)$ değeri negatiftir. (İşaret değiştirerek alır.)

$$|b-c| = -b+c = c-b$$

$\rightarrow (-)$

$a < c$ ise $(c-a)$ değeri pozitifdir. (İşaret değiştirmez.)

$$|c-a| = c-a$$

$\rightarrow (+)$

$b > a$ ise $(b-a)$ değeri pozitifdir. (İşaret değiştirmeden alır.)

$$|b-a| = (b-a)$$

$$= |a-b| + |b-c| + |c-a| - |b-a|$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$$= (b-a) + (c-b) + (c-a) - (b-a)$$

$$= b-a + c-b + c-a - b+a$$

$$= -b-a+2c$$

$$= \underline{\underline{2c-b-a}}$$

SAYISAL BECERİLER DERS NOTU – MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek $a < 0 < b$ ise $|a| + |b-a| + |a-b| + |3b| = ?$

$$a \rightarrow (-)$$

$$b \rightarrow (+)$$

$$(b-a) \rightarrow (+)$$

$$(a-b) \rightarrow (-)$$

$$= |a| + |b-a| + |a-b| + |3b|$$

$$= (-a) + (b-a) + (-a+b) + (3b)$$

$$= -a + b - a - a + b + 3b$$

$$= -3a + 5b \Rightarrow \text{sonuç} \rightarrow \boxed{5b - 3a}$$

Mutlak değerin özellikleri

1) Her x reel sayısı için $|x| \geq 0$ 'dır.

$$|a| + |b| = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ve } b = 0 \text{ 'dır.}$$

$|x|$ için x 'in alabileceği en küçük tam sayı değeri sıfırdır.

$$2) |a| = |-a| \text{ 'dır.}$$

$$3) |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \text{ 'dır.}$$

$$4) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ 'dır. (} b \neq 0 \text{ olmalı!)} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

SAYISAL BECERİLER DERS NOTU – MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİKLER

5) $|a^n| = |a|^n$ 'dir.

6) $|a|^{2n} = a^{2n}$ 'dir, $(n \in \mathbb{Z})$

örnek $|x+2| + |y-3| = 0$ ise $(x-y)$ değeri kaçtır?
 $(x+2) = 0$ ve $(y-3) = 0$ olmak zorunda!

$$\begin{array}{l} x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \\ y-3=0 \Rightarrow \boxed{y=3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \backslash \\ / \end{array} \quad \begin{array}{l} (x-y) = (-2-3) \\ = \boxed{-5} \text{ 'tir,} \end{array}$$

örnek $|x+2y-1| + |2x-y+3| = 0 \Rightarrow \frac{x}{y}$ nedir?
 $(x+2y-1) = 0$ ve $(2x-y+3) = 0$ olmalıdır.

$$\begin{array}{l} x+2y=1 \\ 2x-y=-3 \end{array} \rightarrow y\text{'lerin taraf tarafa toplamada birbirini götürmesi için ikinci denklemini 2 ile genişletelim,}$$

$$\begin{array}{rcl} x+2y & = & 1 \quad \text{--- (Birinci denklem aynen yazıldı)} \\ + 4x-2y & = & -6 \quad \text{--- (ikinci denklem 2 ile çarpıldı)} \\ \hline 5x & = & -5 \end{array}$$

$$\boxed{x=-1} \quad \rightarrow \quad x+2y=1 \Rightarrow (-1)+2y=1$$

$$\frac{x}{y} = \frac{(-1)}{(+1)} = (-1) \quad \begin{array}{l} 2y=2 \\ \boxed{y=1} \end{array} \quad \rightarrow \text{sonuç!}$$

SAYISAL BECERİLER DERS NOTU – MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek $x \in \mathbb{R}$ için $|x+3| + |x-8|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

2 durum incelenir.

1. durum $|x+3| = 0$ olursa sonuç = ?

2. durum $|x-8| = 0$ olursa sonuç = ?

$$|x+3| = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ olmalı.}$$

$$x = -3 \text{ iken } |x+3| + |x-8| = 0 + |-11| = \underline{\underline{11}} \text{ olur,}$$

$$|x-8| = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ olmalı.}$$

$$x = 8 \text{ iken } |x+3| + |x-8| = |11| + 0 = \underline{\underline{11}} \text{ olur}$$

Her iki durumda sonuç olarak 11'i verir.

Cevap 11'dir.

Örnek $|x| + |-x| = 24$ ifadesinde x 'in alabileceği değerler nelerdir?

$$|x| = |-x| \rightarrow \text{Kural!}$$

$$0 \text{ zaman } |x| + |-x| = 2|x| \text{ tir.}$$

$$2|x| = 24 \text{ ise } |x| = 12 \text{ 'dir.}$$

12 olabilir.

-12 olabilir.

$$G.K = \{12, -12\}$$

örnek $|x^2 - 9| = |x-3|$ ifadesinde x 'in alabileceği değerler toplamı nedir?

$$|x^2 - 9| = |x^2 - 3^2| = |(x-3)(x+3)|$$

Kural $\rightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $\nearrow$ uygulandı.

$$|x-3||x+3| = |x-3| \rightarrow \text{sag tarafı solda et, birbirini götürmez!}$$

$$|x-3||x+3| - |x-3| = 0$$

$\hookrightarrow |x-3|$ için ortak çarpan parantezine al!

$$|x-3| (|x+3| - 1) = 0$$

$\hookrightarrow$ ikili çarpımın sıfır olması için $|x-3| = 0$ olmalıdır.

$$|x-3| = 0 \Rightarrow \underline{x=3} \text{ 'tür. (Birinci bileşen sıfır)}$$

$\hookrightarrow$ veya ikili çarpımın sıfır olması için $(|x+3| - 1) = 0$ olmalıdır. (Ya birinci bileşen sıfır, ya da ikinci bileşen sıfırdır mantığı)

$$\text{ikinci bileşen sıfır} \rightarrow (|x+3| - 1) = 0$$

$$|x+3| = 1$$

$$\hookrightarrow \underline{x=-4} \text{ veya } \underline{x=-2}$$

$$G.K. = \{3, -4, -2\}$$

$$x \text{ 'in alabileceği değerler toplamı} \rightarrow 3 + (-4) + (-2) = \underline{\underline{-3}}$$

SAYISAL BECERİLER DERS NOTU – MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek $|(-3)^2| + |-(-4)^2|$ işleminin sonucu kaçtır?

$$|9| + |-16| = 9 + 16 = 25 \text{ 'tir.}$$

Örnek $|x| = -x$ ve $(x,y) > 0$ ise $|x+y| + |2x| - |y|$ işleminin sonucu nedir?

$|x| = -x$ ise x işaret değiştirerek almış yani x negatiftir. $x \rightarrow (-)$

$(x,y) > 0$ verilmiş. $\rightarrow x$ 'in negatif olduğunu biliyoruz. (x,y) pozitif ise y 'de negatif olmalı.
 $(-), (-) = (+) > 0$

$$y \rightarrow (-)$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} x \rightarrow (-) \\ y \rightarrow (-) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} |x+y| + |2x| - |y| = ? \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \end{array} \right. \\ & = (-x-y) + (-2x) - (-y) \\ & = -x-y-2x+y = \underline{\underline{-3x}} \end{aligned}$$

örnek $|2x-8|=20$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$|2x-8|=20$ ise $\xrightarrow{1. \text{ durum}} (2x-8)=20$ 'dır, veya $\xrightarrow{2. \text{ durum}} (2x-8)=-20$ 'dır.

$$2x-8=20 \Rightarrow 2x=28 \text{ ve } \boxed{x=14}$$

veya

$$2x-8=-20 \Rightarrow 2x=-12 \text{ ve } \boxed{x=-6}$$

$$G.K = \{-6, 14\}$$

örnek $|2x-a|=6$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı 12 ise a 'nın değeri kaçtır?

$$\boxed{2x-a=6}$$
 'dır veya $\boxed{2x-a=-6}$ 'dır.

$$2x=6+a$$

$$x=3+\frac{a}{2}$$

$$2x=a-6$$

$$x=\frac{a}{2}-3$$

x değerlerinin toplamı 12 verilmiş!

$$\left(3+\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}-3\right) = 12$$

$$3+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-3=12$$

$$3-3+a=12$$

$$\boxed{a=12} \text{ olur.}$$

SAYISAL BECERİLER DERS NOTU – MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİKLER

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

1) $a \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ 'dır.

örnek $\left. \begin{array}{l} |x| \leq 40 \Rightarrow -40 \leq x \leq +40 \\ |y| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq y \leq +10 \end{array} \right\}$ 'dur.

örnek $|2x+6| \leq 10$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$-10 \leq (2x+6) \leq 10 \quad \text{--- (diye açılır).}$$

$$-16 \leq 2x \leq 4 \quad \text{--- (Her taraftan 6 çıkar)}$$

$$-8 \leq x \leq 2 \quad \text{--- (Her tarafı 2'ye böl)}$$

$$\hookrightarrow G.K = [-8, 2]$$

örnek $|6x-1| + 3 \leq 1$ eşitsizliğinin en geniş tanım aralığı nedir?

$$|6x-1| + 3 \leq 1 \quad \text{--- (Her taraftan 3 çıkar)}$$

$$\underline{|6x-1| \leq -2}$$

$\hookrightarrow$ mutlak değerli ifade -2 'ye eşit veya -2 'den daha küçük diyor. Mutlak değerli ifade negatif bir sayıdan küçük olamaz.

$$G.K = \emptyset$$

SAYISAL BECERİLER DERS NOTU – MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİKLER

Örnek $\frac{6}{|2-x|} > \frac{2}{5}$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x sayısı vardır?

Kural $\rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ise $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ 'dir.

$$\frac{6}{|2-x|} > \frac{2}{5} \text{ ise } \frac{|2-x|}{6} < \frac{5}{2} \text{ olur,}$$

(3)

$$\frac{|2-x|}{6} < \frac{15}{6} \Rightarrow \text{paydalar eşit ise } |2-x| < 15 \text{ olur.}$$

$$|2-x| < 15 \text{ ise } -15 < (2-x) < 15$$

↙ Her taraftan 2 çıkar

$$-17 < -x < 13$$

↪ Her tarafı -1 ile çarp. (Negatif sayı ile çarparken yönler değişir!)

$$17 > x > -13 \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5 \\ &-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ &6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \\ &15, 16 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{29}$ değer var!

SAYISAL BECERİLER DERS NOTU – MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİKLER

*. $a \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|x| > a$ ise $x > a$ veya $x < -a$ dir.

örnek $|2x-4| > 16$ eşitsizliğini sağlayan en geniş tanım kümesi nedir?

$$|2x-4| > 16 \text{ ise } \begin{cases} 2x-4 > 16 \\ \text{veya} \\ 2x-4 < -16 \end{cases}$$

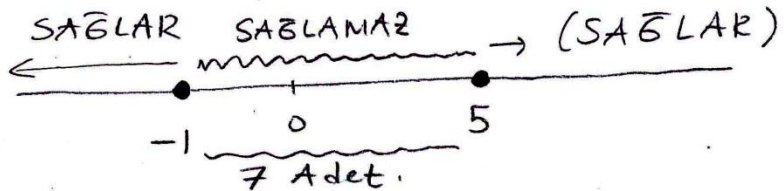
$$\begin{array}{ll} 2x-4 > 16 & 2x-4 < -16 \\ 2x > 20 & \text{veya} \quad 2x < -12 \\ x > 10 & x < -6 \end{array}$$

$$G.K = (-\infty, -6) \cup (10, +\infty)$$

örnek $\frac{1}{|3x-6|} < \frac{1}{9}$ eşitsizliğini sağlamayan tam sayı değerleri kaç tanedir?

$$\frac{1}{|3x-6|} < \frac{1}{9} \Rightarrow |3x-6| > 9 \text{ olarak yazılabilir.}$$

$$\begin{array}{ll} 3x-6 > 9 & \text{veya} \quad 3x-6 < -9 \text{ olur.} \\ 3x > 15 & 3x < -3 \\ x > 5 & x < -1 \end{array}$$



örnek $|x| \leq 15$ ve $y = 2x + 1$ ise y 'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

$$|x| \leq 15 \text{ ise } -15 \leq x \leq +15 \text{ 'tir.} \rightarrow x \text{ için seçim yapma. Tam sayı değil!}$$

$$-30 \leq 2x \leq +30$$

$$-29 \leq 2x + 1 \leq 31$$

$$-29 \leq y \leq 31$$

$\rightarrow 31$ 'dir.

örnek $|x - 6| \leq 7$ ise $(x + 4)$ 'ün en büyük tam sayı değeri kaçtır?

$$|x - 6| \leq 7 \text{ ise } -7 \leq (x - 6) \leq +7$$

$$-1 \leq x \leq 13$$

$$+3 \leq x + 4 \leq 17$$

$\rightarrow 17$ olur.

örnek $|x-2| + 2x = 6$ eşitsizliğini sağlayan en büyük x değeri kaçtır?

$$|x-2| = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{aligned} x-2 &< 0 \\ \text{veya} \\ x-2 &> 0 \end{aligned}$$

2 (Kök)

$$x < 2$$

Eğer x 2'den küçük ise denklem ne olur?

$$|x-2| + 2x = 6$$

$$-x+2+2x=6$$

$$x+2=6$$

$$x=4 \text{ gelir.}$$

x 'in 2'den küçük varsayımına $x=4$ çıkması çözüm belirtmez.

Gözüm kümesine Almaz!

$$x > 2$$

Eğer x 2'den büyükse denklem ne olur?

$$|x-2| + 2x = 6$$

$$x-2+2x=6$$

$$3x-2=6$$

$$3x=8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$\frac{8}{3}$ sayısı $x > 2$ kabulünü

doğrular. $\left(\frac{8}{3} > 2\right)$

$$G.K = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$$