

BÖLÜM 4

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR



Bu bölümde *üstel fonksiyonlar* olarak adlandırılan fonksiyonlar sınıfını ele alacağız. Bunlar $f(x) = 2^x$ biçimindeki fonksiyonlardır. Burada bağımsız değişken kuvvettedir. Üstel fonksiyonlar örneğin nüfus büyümesi veya bileşik faiz elde etmede, yatırım büyümesi gibi birçok gerçek dünya olgusunun modellenmesinde kullanılabilir. Bir üstel model elde edildikten sonra, bu model herhangi bir gelecek zaman için yatırım miktarının hesaplanmasında veya nüfus miktarının tahminlenmesinde kullanılabilir. Bir nüfusun belirli bir seviyeye ne zaman ulaşacağını bulmak için, *logaritmik fonksiyonlar* olarak adlandırılan üstel fonksiyonların tersi kullanılır. Eğer nüfus artışı için bir üstel modele sahipsek şu şekilde bir soruya cevap verebiliriz: Benim şehrim ne zaman resimdeki New York caddesi gibi kalabalık olacak?

4.1.Üstel Fonksiyonlar

Üstel Fonksiyonlar→Üstel Fonksiyonların Grafikleri→Bileşik Faiz

Bu bölümde üstel fonksiyonlar olarak adlandırılan fonksiyonların yeni bir sınıfını ele alacağız. Örneğin,

$$f(x) = 2^x$$

Bir üstel fonksiyondur. Tabanı 2 'dir. Bu fonksiyonun değerlerinin ne kadar hızlı arttığına dikkat edelim.

$$f(3) = 2^3 = 8$$

$$f(10) = 2^{10} = 1024$$

$$f(30) = 2^{30} = 1.073.741.824$$

Bu fonksiyonu $g(x) = x^2$ ile karşılaştıralım. Burada $g(30) = 30^2=900$ şeklindedir.

Bu nokta şunu gösterir, bir değişken kuvvette olduğunda, değişkendeki küçük bir değişiklik bile fonksiyon değerinde belirgin bir değişikliğe sebep olabilir.

Üstel Fonksiyonlar

Üstel fonksiyonlarla çalışmak için, öncelikle x herhangi bir reel sayı olduğunda a^x üstel ifadesi ile neyi kastettiğimizi tanımlamamız gerekir. Bölüm 1.2 'de, $a>0$ ve x bir rasyonel sayı olduğunda a^x 'i tanımladık. Fakat henüz irrasyonel üsleri tanımlamadık. $5^{\sqrt{3}}$ ve 2^{π} ile ne kastedilir? x irrasyonel olduğunda a^x 'i tanımlamak için, x 'e rasyonel sayılarla yaklaşıyoruz. Örneğin,

$$\sqrt{3} = 1,73205 \dots$$

irrasyonel olduğundan, $a^{\sqrt{3}}$ 'e ardışık olarak aşağıdaki rasyonel üslerle yaklaşıyoruz:

$$a^{1,7}, a^{1,73}, a^{1,732}, a^{1,7320}, a^{1,73205}, \dots$$

Sezgisel olarak, a 'nın rasyonel üslerinin $a^{\sqrt{3}}$ 'e gitgide daha çok yaklaştığı görülür. İleri matematik bilgileri kullanarak, bu kuvvetlerin yaklaştığı tek bir sayı olduğu gösterilebilir. $a^{\sqrt{3}}$ 'ü bu sayı olacak biçimde tanımlarız.

Örneğin, bir hesap makinesi kullanarak

$$5^{\sqrt{3}} = 5^{1.732} \approx 16.2411 \dots \text{ bulunur.}$$

Hesaplamamızda kullandığımız $\sqrt{3}$ 'ün ondalık kısmı artıkça, $5^{\sqrt{3}}$ 'ün yaklaşımı daha iyi olur. Üsler reel sayılar olduğunda üs kurallarının halen doğru olduğu ispatlanabilir.

Üstel Fonksiyonlar

Tüm x reel sayıları için a tabanına sahip üstel fonksiyon

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a>0$ ve $a \neq 1$ şeklindedir.

$a \neq 1$ olduğu varsayılır çünkü $f(1) = 1^x = 1$ sadece bir sabit fonksiyondur. Burada üstel fonksiyonun bazı örnekleri bulunmaktadır:

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = 3^x \quad h(x) = 10^x$$

Taban 2

Taban 3

Taban 10

Örnek 1/ Üstel Fonksiyonların Değerlendirilmesi

$f(x) = 3^x$ olsun, aşağıdakileri değerlendirelim:

a) $f(2)$ b) $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ c) $f(\pi)$ d) $f(\sqrt{2})$

Çözüm: f'nin değerlerini elde etmek için hesap makinesi kullanalım.

Hesap makinesi tuşu	Çıktı
a) $f(2) = 3^2 = 9$	$3 \uparrow 2 \text{ ENTER}$ 9
b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	$3 \uparrow ((-) 2 \div 3) \text{ ENTER}$ 0.4807498
c) $f(\pi) = 3^\pi \approx 31.544$	$3 \uparrow \pi \text{ ENTER}$ 31.5442807
d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	$3 \uparrow \sqrt{} 2 \text{ ENTER}$ 4.7288043

Üstel Fonksiyonların Grafikleri

Öncelikle üstel fonksiyonları noktaları işaretleyerek çizeceğiz. Bu tip fonksiyonların kolaylıkla fark edilir bir şekle sahip olduğunu göreceğiz.

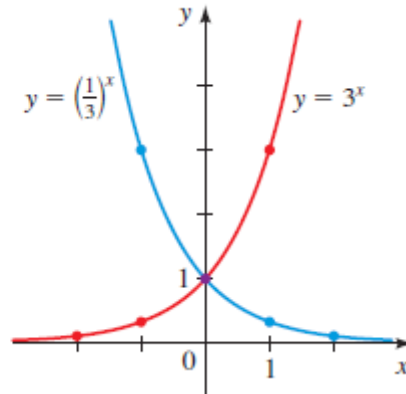
Örnek 2/ Noktaları İşaretleyerek (plotting) Üstel Fonksiyonların Çizilmesi

Her bir fonksiyonun grafiğini çizelim.

a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Çözüm: $f(x)$ ve $g(x)$ 'in değerlerini hesaplayalım ve Şekil 1 'deki gibi grafikleri elde etmek için noktaları işaretleyelim .

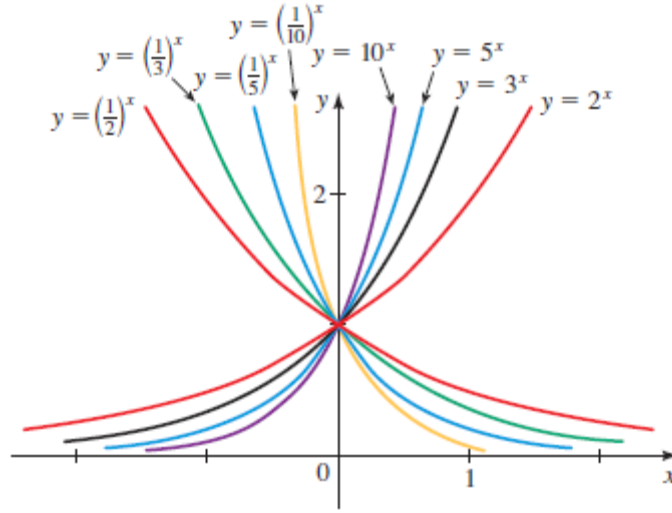
x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



Şekil 1

$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$ olduğuna dikkat edelim. Böylece y-ekseninde yansıtarak f 'nin grafiğinden g 'nin grafiğini elde edebiliriz.

Şekil 2, a tabanının çeşitli değerleri için $f(x) = a^x$ üstel fonksiyon ailesinin grafiklerini gösterir. Bu grafiklerin her biri (0,1) noktasından geçer çünkü $a \neq 0$ için $a^0 = 1$ şeklindedir. Şekil 2 'den üstel fonksiyonların iki çeşidi olduğu görülmektedir. Eğer $0 < a < 1$ ise, üstel fonksiyon hızlı bir şekilde azalır. Eğer $a > 1$ ise fonksiyon hızlı bir şekilde artar.



Şekil 2. Bir Üstel Fonksiyon Ailesi

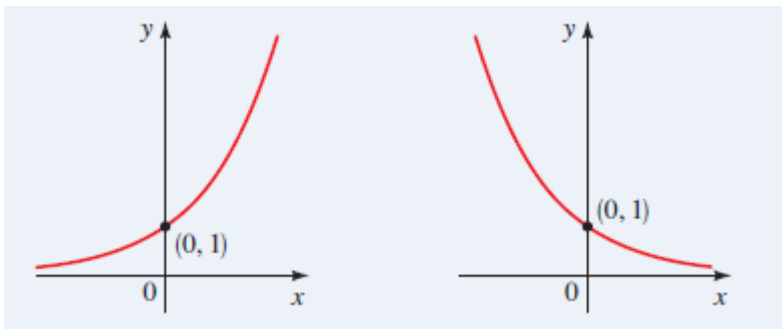
x -ekseni $f(x) = a^x$ için yatay asimptottur. Bunun nedeni, $a > 1$ ise, $x \rightarrow -\infty$ gider iken $a^x \rightarrow 0$ 'a gider ve $0 < a < 1$ iken $x \rightarrow \infty$ giderken iken $a^x \rightarrow 0$ 'a gider (Şekil 2). Tüm $x \in \mathbb{R}$ için $a^x > 0$ olur, böylece $f(x) = a^x$ 'in tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve değer kümesi $(0, \infty)$ 'dur. Bu gözlemler aşağıdaki kutuda özetlenmiştir.

Üstel Fonksiyonların Grafikleri

Üstel Fonksiyon

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$\mathbb{R}$ tanım kümesine ve $(0, \infty)$ değer kümesine sahiptir. $y=0$ doğrusu (x -ekseni) f 'nin yatay asimptottur. f grafiği aşağıdaki şekillerden biridir.

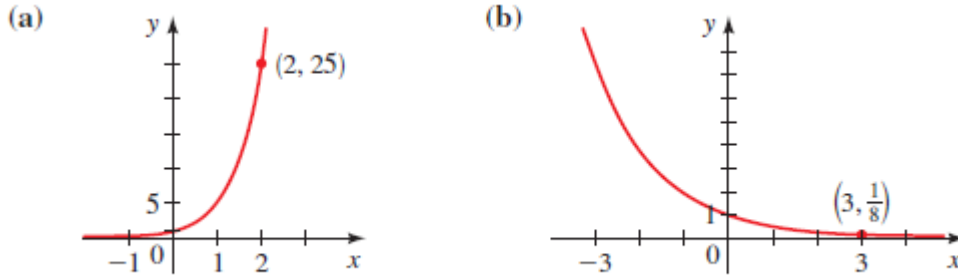


$$f(x) = a^x, \quad a > 1 \text{ için}$$

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1 \text{ için}$$

Örnek 3/ Üstel Fonksiyonların Grafiklerinin Tanımlanması

Aşağıda grafiği verilen $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunu bulunuz.



Çözüm:

a) $f(2) = a^2 = 25$ olduğundan, tabanın $a=5$ olduğunu görürüz. Böylece $f(x) = 5^x$ olur.

b) $f(x) = a^3 = \frac{1}{8}$ olduğundan tabanın $a=\frac{1}{2}$ olduğunu görürüz. Böylece $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ olur.

Sonraki örnekte noktaları işaretlemeksizin, belirli fonksiyonların grafiklerinin nasıl çizileceğini göreceğiz. Burada, Şekil 2 'deki üstel fonksiyonların temel grafiklerini ele alacağız ve Bölüm 2.5 'in kaydırma ve yansıtma dönüşümlerini uygulayacağız.

Örnek 4/Üstel Fonksiyonların Dönüşümleri

Her bir fonksiyonun grafiğini çizmek için $f(x) = 2^x$ grafiğini kullanalım.

a) $g(x) = 1 + 2^x$

b) $h(x) = -2^x$

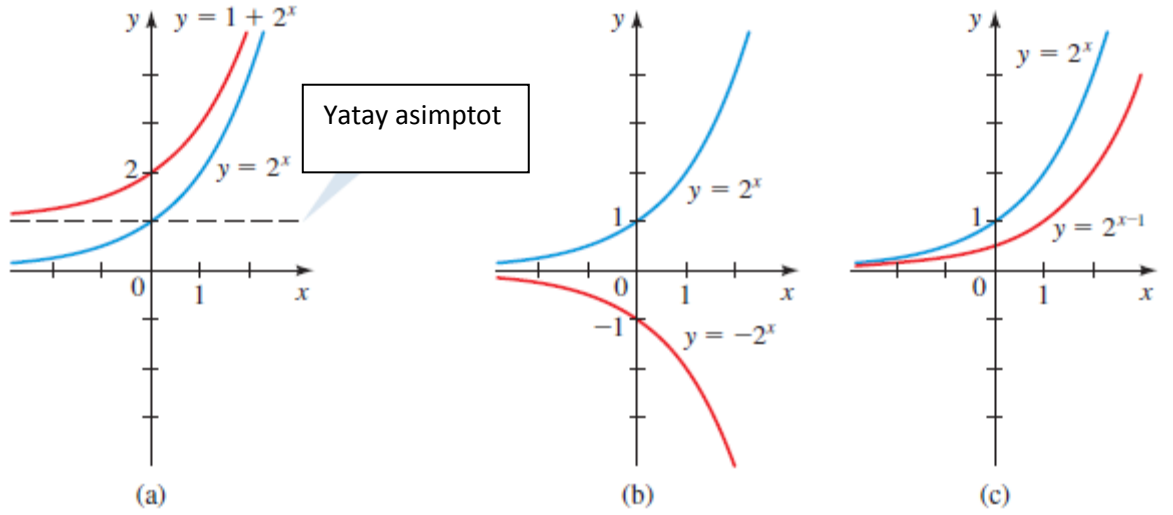
c) $k(x) = 2^{x-1}$

Çözüm:

a) $g(x) = 1 + 2^x$ 'in grafiğini elde etmek için, $f(x) = 2^x$ grafiği ile başlayalım ve yukarıya doğru 1 birim kaydıralım. Şekil 3(a) 'dan görülmektedir ki $y=1$ doğrusu şimdi yatay asimptottur.

b) $f(x) = 2^x$ ile başlayalım, fakat $h(x) = -2^x$ grafiğini elde etmek için Şekil 3(b) 'deki gibi x -eksenine yansıtalım.

c) Şimdi de $f(x) = 2^x$ grafiği ile başlayalım ve $k(x) = 2^{x-1}$ elde etmek için Şekil 3(c)'de görüldüğü gibi 1 birim sağa öteleyelim



Şekil 3

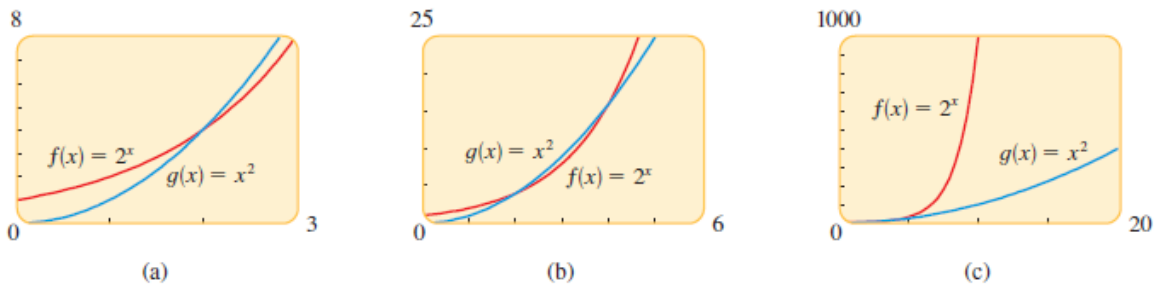
Örnek 5/ Üstel Ve Üslü Fonksiyonların Karşılaştırılması

$f(x) = 2^x$ şeklindeki üstel fonksiyon ve $g(x) = x^2$ şeklindeki üslü fonksiyonlarının büyüme oranlarını aşağıdaki görüntü dikdörtgenlerinde karşılaştıralım.

- a) $[0,3]$ ve $[0,8]$
- b) $[0,6]$ ve $[0,25]$
- c) $[0,20]$ ve $[0,100]$

Çözüm:

- a) Şekil 4(a)'da $g(x) = x^2$ 'nin grafiğinin $x=2$ 'de $f(x) = 2^x$ 'i yakaladığı ve sonra geçtiği görülmektedir.
- b) Şekil 4(b)'de biraz daha büyük görüntü dikdörtgeninde $x = 4$ olduğunda, $f(x) = 2^x$ 'in grafiği $g(x) = x^2$ 'yi geçer.
- c) Şekil 4(c)'de daha global bir bakış açısı verir, x değeri büyük iken $f(x) = 2^x$ 'in $g(x) = x^2$ 'den çok daha büyük olduğunu gösterir.



Şekil 4

Bileşik Faiz

Üstel fonksiyonlar bileşik faizin hesaplanmasında ortaya çıkar. Eğer anapara olarak adlandırılan bir P para miktarı, dönem başına i faiz oranından bankaya yatırılırsa, bir periyot sonra faiz miktarı Pi olur ve A para miktarı aşağıdaki biçimdedir.

$$A = P + Pi = P(1+i)$$

Eğer faizi ile birlikte yeniden faize yatırılırsa, bu durumda yeni anapara $P(1+i)$ olur ve bir periyot sonraki para miktarı $A = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$ şeklindedir. Benzer şekilde, üçüncü zaman periyodu sonrasında para miktarı $A = P(1+i)^3$ şeklindedir. Genelleştirildiğinde, k periyot sonrasındaki para miktarı

$$A = P(1+i)^k \quad \text{şeklindedir.}$$

Dikkat edilirse; bu, $(1+i)$ tabanına sahip bir üstel fonksiyondur.

Eğer yıllık faiz oranı r ise ve eğer faiz yıl başına n kez birleşiyorsa, her bir zaman periyodunda faiz oranı $i = r/n$ şeklindedir ve t yılda nt zaman periyodu vardır. Bu durum, t yıl sonraki para miktarı için aşağıdaki formüle neden olur.

Bileşik Faiz: Bileşik faiz

$$A(t) = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

formülüyle hesaplanır. Burada

$A(t)$ = t yıl sonraki miktar

P = anapara

R = yılbaşına faiz oranı

n = yıl başına kaç kez faiz birleştirildiği

t = yıl sayısı

Örnek 6/Bileşik Faiz Hesabı

1000\$ yıllık %12 'lik faiz oranı ile yatırılmıştır. Eğer faiz yıllık, altı aylık, üç aylık, aylık ve günlük birleştiriliyorsa 3 yıl sonraki hesaptaki miktarları bulunuz.

Çözüm: $P = 1000\$$, $r = 0,12$ ve $t = 3$ için bileşik faiz formülünü kullanalım.

Birleştirme	n	3 yıl sonraki miktar
Yıllık	1	$1000(1+\frac{0.12}{1})^{1(3)} = 1404,93\$$
Altı aylık	2	$1000(1+\frac{0.12}{2})^{2(3)} = 1418,52\$$
Üç aylık	4	$1000(1+\frac{0.12}{3})^{3(3)} = 1425,56\$$
Aylık	12	$1000(1+\frac{0.12}{12})^{12(3)} = 1430,77\$$
Günlük	365	$1000(1+\frac{0.12}{365})^{365(3)} = 1433,25\$$

Eğer bir yatırımcı bileşik faiz kazanıyorsa, **yıllık yüzdelik getirisi** yılın sonunda aynı miktarı sağlayan basit faiz oranıdır.

Örnek 7/Yıllık Yüzdelik Getirinin Hesaplanması

Yıllık % 6 faiz oranını kazandıran bir yatırım, günlük olarak birleştirildiğinde yıllık yüzdelik getiriyi bulunuz.

Çözüm: Bir yılın sonunda anapara P,

$$A=P(1+\frac{0.06}{365})^{365}=P(1.06183)$$

miktarına büyür. Basit faiz için formül

$$A=P(1+r)$$

şeklindedir. Karşılaştırıldığında $1+r=1.06183$ olduğunu görürüz, böylece $r=0,06183$ olur. Böylece yıllık yüzdelik getiri %6,183 şeklindedir.

4.2.Doğal Üstel Fonksiyon

e sayısı →Doğal Üstel Fonksiyon→Sürekli Bileşik Faiz

e sayısı, n arttıkça $(1+\frac{1}{n})^n$ 'in yaklaştığı değer olarak tanımlanır. Tabloda n 'in gittikçe büyüyen değerleri için $(1+\frac{1}{n})^n$ 'in değerleri görülmektedir.

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828

Görünmektedir ki, beş ondalık basamağa düzeltirsek, $e \approx 2,71828$ şeklindedir. Gerçekte 20 ondalık basamağa yaklaşan değerler $e \approx 2,71828182845904523536$ şeklindedir. e 'nin bir irrasyonel sayı olduğu görülmektedir. Böylece ondalık formda tam bir değer yazılamaz.

Doğal üstel fonksiyon

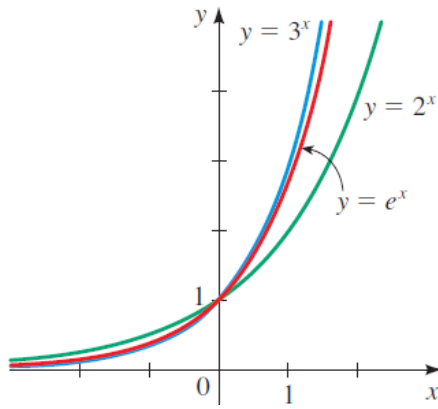
e sayısı, doğal üstel fonksiyon için tabandır. Bir üstel fonksiyon için neden böyle tuhaf bir taban kullanılır? İlk başta 10 gibi bir tabanla çalışmak daha basit görünmektedir. Bununla birlikte, burada belirli uygulamalarda e sayısının mümkün en iyi taban olduğu görülecektir. Bu bölümde, bileşik faiz tanımında e 'nin ortaya çıktığı geldiği incelenecektir.

Doğal Üstel Fonksiyon: Doğal Üstel Fonksiyon

$$f(x) = e^x$$

şeklinde e tabanına sahip üstel fonksiyondur. Sıklıkla üstel fonksiyon olarak bahsedilir.

$2 < e < 3$ olduğundan, doğal üstel fonksiyonun grafiği Şekil 1'den de görüldüğü gibi $y = 2^x$ ve $y = 3^x$ arasında bulunur.



Leonard Euler tarafından büyük bir olasılıkla üstel (exponential) kelimesinin ilk harfi olduğundan e notasyonu seçilmiştir.

Şekil1: Doğal üstel fonksiyonun grafiği

Bilimsel hesap makinelerinin $f(x) = e^x$ fonksiyonu için özel bir tuşu vardır. Bu tuşu sonraki örnekte kullanacağız.

Örnek 1/Üstel Fonksiyonun Değerlendirilmesi

Beş ondalık basamağa yuvarlanacak şekilde her bir ifadeyi değerlendirin.

- a) e^3 b) $2 \cdot e^{-0,53}$ c) $e^{4,8}$

Çözüm: Üstel fonksiyonu değerlendirmek için hesap makinesinde e^x tuşu kullanılır.

- a) $e^3 \approx 20,08554$ b) $2 \cdot e^{-0,53} \approx 1,17721$ c) $e^{4,8} \approx 121,51042$

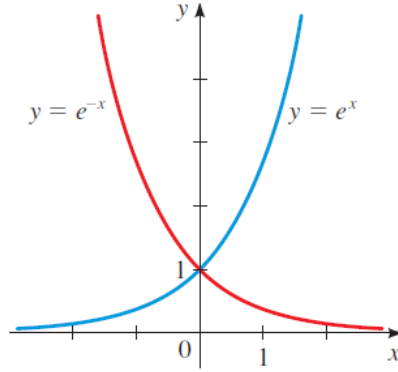
Örnek 2: Üstel Fonksiyonun Dönüşümleri

Her bir fonksiyonun grafiğini çiziniz.

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = 3e^{0,5x}$

Çözüm:

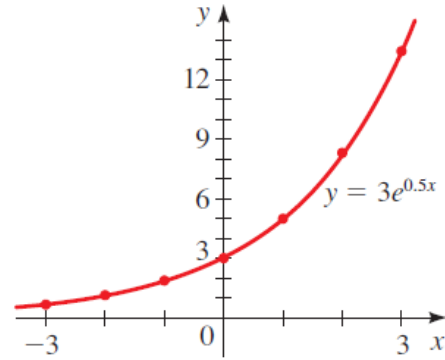
a) $y = e^x$ 'in grafiği ile başlarız ve Şekil 2 'de $y = e^{-x}$ 'in grafiğini elde etmek için y-ekseninde yansıtırız.



Şekil 2

b) Birkaç değer hesaplarız, elde edilen noktaları işaretleriz, daha sonra noktaları bir düzgün eğri ile birleştiririz. Grafik, Şekil 3 'de gösterilmektedir.

x	$f(x) = 3e^{0,5x}$
-3	0.67
-2	1.10
-1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45



Şekil 3

Örnek 3/Bir Virüsün Yayılımı İçin Üstel Model

Bir bulaşıcı hastalık 10.000 nüfuslu küçük bir şehirde yayılmaya başlamıştır. t gün sonra, bu virüse yenik düşenlerin sayısı aşağıdaki fonksiyonla modellenmiştir.

$$v(t) = \frac{10.000}{5 + 1245e^{-0,97t}}$$

- Başlangıçta($t=0$ zamanında) kaç tane hastalanmış kişi vardır?
- Bir gün, iki gün ve beş gün sonra hastalanmış kişilerin sayısını bulunuz.

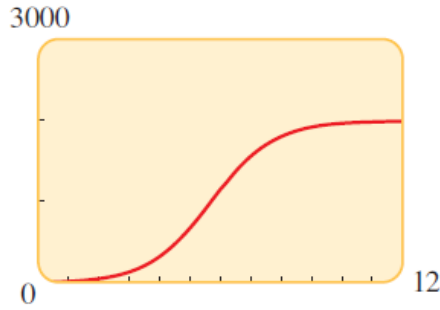
c) v fonksiyonunu çiz ve davranışını tanımla.

Çözüm:

- a) $v(0)=10,000/(5+1245e^0)=10,000/1250=8$. Başlangıçta 8 kişi bu hastalığa sahiptir.
b) Bir hesap makinesi kullanarak, $v(1)$, $v(2)$ ve $v(5)$ 'i değerlendirilir ve daha sonra aşağıdaki değerleri elde etmek için yuvarlanır.

Günler	Hastalanmış İnsanlar
1	21
2	54
5	678

c)



Şekil 4'teki grafikten hastalanmış kişilerin sayısı ilk olarak yavaş bir şekilde artmakta, 3 ve 8'inci günler arası hızlı bir biçimde artmakta ve yaklaşık 2000 kişiye ulaştığında artış hızı yok olmaktadır.

Şekil 4. $v(t) = \frac{10.000}{5+1245e^{-0,97t}}$

Sürekli Bileşik Faiz

Bölüm 4.1 'de Örnek 6 'da, bileşik periyot sayısı n arttıkça ödenen faizin arttığı görülmektedir. Şimdi n durmaksızın arttığında ne olacağı görülecektir. $m=n/r$ olursa, bu durumda

$$A(t) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt}$$

Hatırlayalım ki m arttıkça, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ifadesi e sayısına yaklaşır. Böylece, para miktarı $A=Pe^{rt}$ 'ye yaklaşır.

Bu açıklama, faizin her anlık olarak birleştirilmesi durumunda elde edilecek para miktarı vermektedir.

Sürekli Bileşik Faiz: Sürekli bileşik faiz aşağıdaki gibi hesaplanır

$$A=Pe^{rt}$$

Burada $A(t)$ = t yıl sonraki miktar

P = anapara

r = yıl başına faiz oranı

t = yıl sayısı

Örnek 4: Sürekli Bileşik Faizin Hesaplanması

Eğer 1000\$ yıllık %12 'lik bir faiz oranı ile sürekli bileşik olarak yatırılırsa 3 yıl sonraki para miktarını bulunuz.

Çözüm: $P=1000\$$, $r=0,12$ ve $t=3$ iken sürekli bileşik faiz formülü kullanıldığında

$$A(3)=1000e^{(0,12)3}=1000e^{0,36}=1433,33\$$$

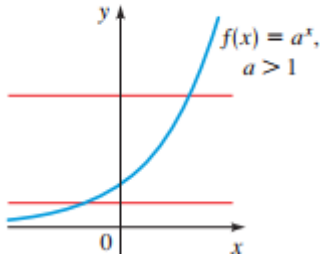
şeklindedir. Bu miktarı Bölüm 4.1 'de örnek 6 'daki miktar ile karşılaştırınız.

4.3.Logaritmik Fonksiyonlar→ Logaritmik Fonksiyonların Grafiği→ Ortak Logaritmalar→ Doğal Logaritmalar

Bu bölümde üstel fonksiyonların tersini çalışacağız.

Logaritmik Fonksiyonlar

Her bir üstel fonksiyon $f(x) = a^x$ $a>0$ ve $a\neq 1$ iken Yatay Doğru Testine göre (Şekil 1, $a>1$ durumu için) bire bir fonksiyondur ve böylece bir ters fonksiyona sahiptir.



Şekil 1: $f(x) = a^x$ bire-bir fonksiyondur.

Ters fonksiyon f^{-1} , a tabanına sahip logaritmik fonksiyon olarak adlandırılır ve $\log_a$ şeklinde tanımlanır. Bu aşağıdaki logaritmik fonksiyonların tanımına yönlendirir.

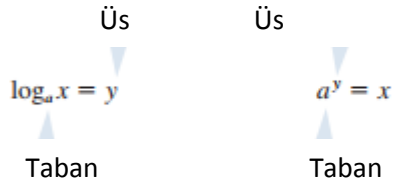
Logaritmik Fonksiyonların Tanımı: a , $a\neq 1$ şeklinde pozitif bir sayı olsun. a tabanlı logaritmik fonksiyon $\log_a$ ile gösterilir.

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $\log_a x$, x 'i verecek şekilde a tabanının alınması gereken kuvvetini (üssünü) gösterir.

$\log_a x = y$ şeklindeki logaritmik form ve $a^y = x$ şeklindeki üstel form karşılaştırıldığında, her iki formunda tabanının aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

Logaritmik Form Üstel Form



Örnek 1/Logaritmik ve Üstel Formlar

Logaritmik ve üstel formlar denk denklemlerdir. Eğer biri doğru ise diğeri de doğrudur. Böylece birinden diğeri aşığıdaki gibi geçilebilir.

Logaritmik form	Üstel Form
$\log_{10} 100,000 = 5$	$10^5 = 100,000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_s s = r$	$5^r = s$

$\log_a x$ 'in üs olduğunu anlamak önemlidir. Örneğin, yukarıda görüldüğü gibi tablonun sağ tarafındaki sayılar sol sütundaki sayıların (10 tabanında) logaritmalarıdır. Bu aşığıdaki örneklerdeki gibi tüm tabanlar için olan durumdur.

Örnek2/Logaritmaları Değerlendirme

a) $\log_{10} 1000 = 3$ çünkü $10^3 = 1000$

b) $\log_2 32 = 5$ çünkü $2^5 = 32$

c) $\log_{10} 0.1 = -1$ çünkü $10^{-1} = 0.1$

d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ çünkü $16^{1/2} = 4$

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	-1
10^{-2}	-2
10^{-3}	-3
10^{-4}	-4

Ters Fonksiyon Özelliği

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Ters Fonksiyon Özelliğini $f(x) = a^x$ ve $f^{-1}(x) = \log_a x$ 'e uygularsak, aşığıdaki elde edilir:

$$\log_a(a^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0$$

Bu bölümde ele aldığımız bu ve diğer özellikleri listeleyelim.

LOGARİTMA ÖZELLİKLERİ	
Özellik	Neden
1. $\log_a 1 = 0$	We must raise a to the power 0 to get 1.
2. $\log_a a = 1$	We must raise a to the power 1 to get a .
3. $\log_a a^x = x$	We must raise a to the power x to get a^x .
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ is the power to which a must be raised to get x .

Örnek 3/Logaritmanın Özelliklerini Uygulama

Taban 5 olduğunda logaritmanın özelliklerini araştıracağız.

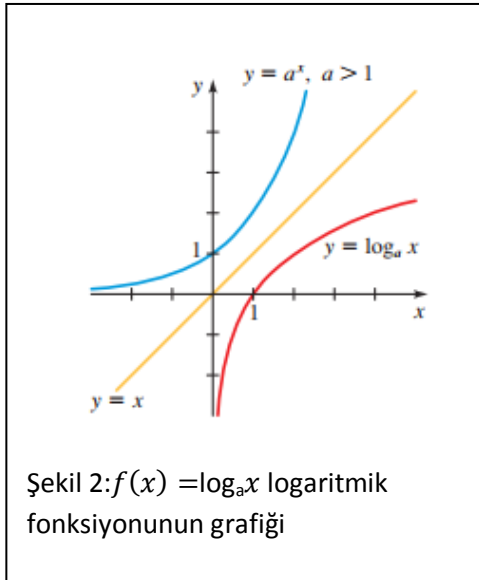
$$\log_5 1 = 0 \quad \text{Özellik 1}$$

$$\log_5 5^8 = 8 \quad \text{Özellik 3}$$

$$\log_5 5 = 1 \quad \text{Özellik 2}$$

$$5^{\log_5 12} = 12 \quad \text{Özellik 4}$$

Logaritmik Fonksiyonların Grafikleri



Hatırlanırsa, eğer bire bir fonksiyon A tanım ve B değer kümesine sahipse, bu durumda ters fonksiyonu B tanım ve A değer kümesine sahiptir. $a \neq 1$ iken $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu, $\mathbb{R}$ tanım ve $(0, \infty)$ değer kümesine sahip olduğundan, ters fonksiyonunun $f^{-1}(x) = \log_a x$, $(0, \infty)$ tanım ve $\mathbb{R}$ değer kümesine sahip olduğu sonucuna varırız.

$f^{-1}(x) = \log_a x$ 'in grafiği $f(x) = a^x$ grafiğinin $y = x$ doğrusunda yansıtılarak elde edilir. Şekil 2, $a > 1$ durumunu göstermektedir. $y = a^x$ 'in ($a > 1$ iken) $x > 0$ için çok hızlı artan bir fonksiyon olması gerçeği $x > 1$ için $y = \log_a x$ 'in çok yavaş artan bir fonksiyon olmasını açıklar.

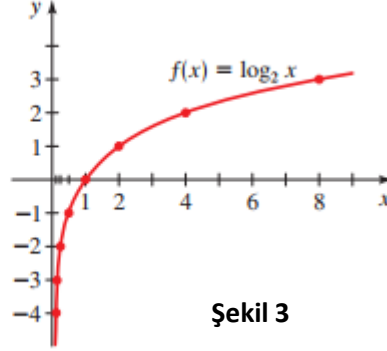
$\log_a 1 = 0$ olduğundan $y = \log_a x$ fonksiyonunun x -kesim noktası 1'dir. y -ekseni $y = \log_a x$ 'in dikey asimptotudur, çünkü $x \rightarrow 0^+$ iken $\log_a x \rightarrow -\infty$ şeklindedir.

Örnek 4/Noktaları İşaretleyerek Bir Logaritmik Fonksiyonun Çizilmesi

$f(x) = \log_2 x$ 'in grafiğini çiziniz.

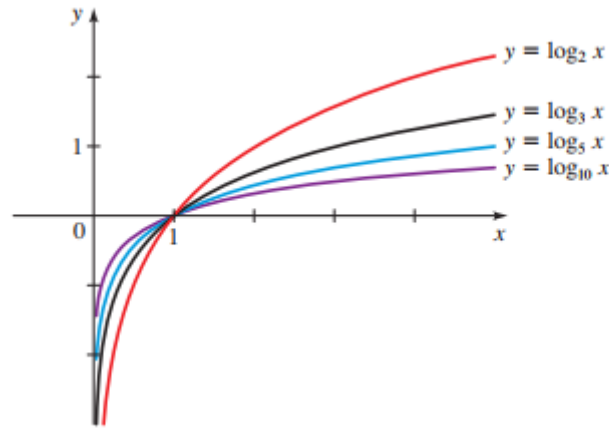
Çözüm: Değerlerden oluşan bir tablo yaparak, x -değerlerini 2 'nin üsleri olacak şekilde seçelim, böylece kolaylıkla logaritmalarını bulabiliriz. Şekil 3 'de bu noktaları işaretleriz ve bir düzgün eğri ile birleştiririz.

x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4



Şekil 3

Şekil 4 'de 2,3,5 ve 10 tabanlarına sahip logaritmik fonksiyon ailesinin grafiklerini gösterilmiştir. Bu grafikler $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ ve $y = 10^x$ 'in $y = x$ doğrusunda yansıtılmasıyla (Bölüm 4.1. Şekil 2) elde edilir. Noktalar, Örnek4 'te gösterildiği gibi bu grafiklerin çizimine yardımcı olmak için işaretlenebilir.



Şekil 4: Logaritmik fonksiyon ailesi

Önümüzdeki iki örnekte Bölüm 2.5 'teki dönüşümleri kullanarak Şekil 4 'teki temel grafiklerle başlayarak logaritmik fonksiyonları çizeceğiz.

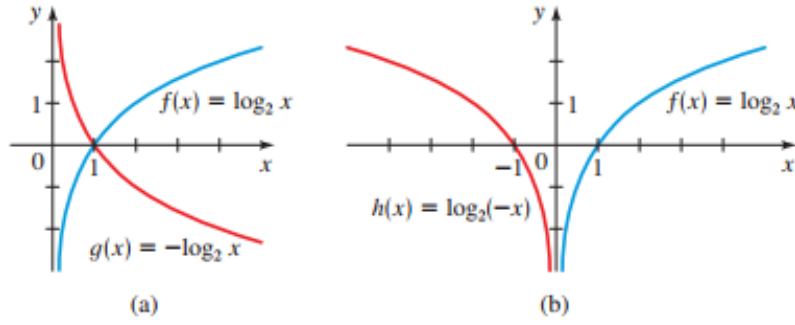
Örnek 5/Logaritmik Fonksiyonların Grafiklerinin Yansıtılması

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

- a) $g(x) = -\log_2 x$
- b) $h(x) = \log_2(-x)$

Çözüm

- a) $f(x) = \log_2 x$ 'in grafiği ile başlarız ve $g(x) = -\log_2 x$ 'i elde etmek için Şekil 5(a) 'da görüldüğü gibi x -eksenine göre yansıtırız.
- b) $f(x) = \log_2 x$ 'in grafiği ile başlarız ve $h(x) = \log_2(-x)$ 'i elde etmek için Şekil 5(b)'de görüldüğü gibi y -eksenine göre yansıtırız.



Şekil 5

Örnek 6/ Logaritmik Fonksiyonların Grafiklerini Kaydırma

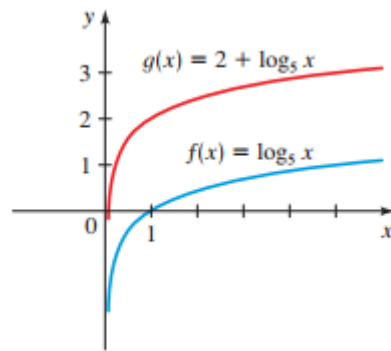
Her bir fonksiyonun tanım kümesini bulun ve grafiğini çizin.

a) $g(x) = 2 + \log_5 x$

b) $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

Çözüm

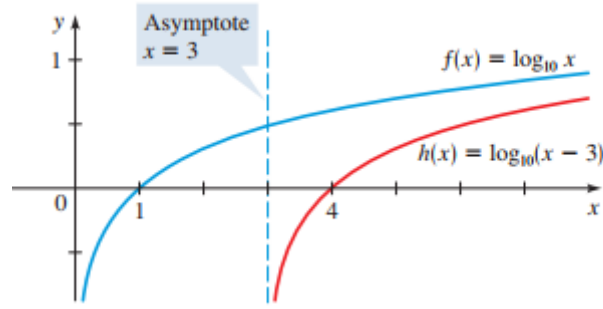
- a) g 'nin grafiği $f(x) = \log_5 x$ (Şekil 4 'deki) fonksiyonunun grafiğini 2 birim yukarıya kaydırarak elde edilir (Şekil 6'ya bakınız). g 'nin tanım kümesi $(0, \infty)$ 'dur.



Şekil 6

- b) h 'nin grafiği $f(x) = \log_{10} x$ 'in grafiğinin (Şekil 4) 3 birim sağa kaydırılmasıyla elde edilir. $x=3$ doğrusu düşey asimptottur. $\log_{10} x$ sadece $x>0$ iken tanımlı olduğundan, $h(x) = \log_{10}(x - 3)$ 'in tanım kümesi

$$\{x|x - 3 > 0\} = \{x|x > 3\} = (3, \infty) \quad \text{şeklindedir.}$$



Şekil 7

Adi Logaritmalar

Şimdi 10 tabanlı logaritmaları çalışacağız.

Adi Logaritmalar: 10 tabanına sahip logaritmalar adi logaritma olarak adlandırılır ve tabanı ihmal ederek aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\log x = \log_{10} x$$

Logaritma tanımından rahatlıkla $\log 10 = 1$ ve $\log 100 = 2$ elde edilir.

Fakat $\log 50$ 'yi nasıl elde edeceğiz? $10^y = 50$ 'yi sağlayan y üssünü bulmaya ihtiyacımız vardır. Açık ki, 1 çok küçük ve 2 ise çok büyüktür. Dolayısıyla,

$$1 < \log 50 < 2$$

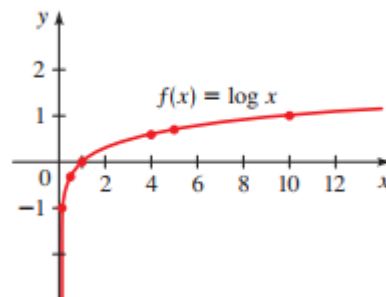
Şanslıyız ki, bilimsel hesap makineleri doğrudan adi logaritma değerlerini veren LOG tuşu ile donatılmıştır.

Örnek 7/Adi Logaritmaların Değerlendirilmesi

$f(x) = \log x$ 'in uygun değerlerini bulmak için hesap makinesini kullanın ve bu değerleri grafiği çizmede kullanın.

Çözüm 10 'un üsleri olmayan x 'in bu değerlerinde fonksiyonu değerlendirmek için bir hesap makinesi kullanarak değerlerden oluşan bir tablo yaparız. Bu noktalar işaretlenip ve Şekil 8 'de bir düzgün eğri ile birleştir.

x	$\log x$
0.01	-2
0.1	-1
0.5	-0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1



Şekil 8

Örnek 8/Adi Logaritmalar ve Ses

I (W/m^2) ile belirtilen fiziksel yoğunluğa sahip bir sesin şiddetinin (desibel dB) algılanması aşağıdaki biçimde verilmektedir:

$$B = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

şeklindedir. Burada I_0 neredeyse duyulabilir sesin fiziksel yoğunluğudur. Fiziksel yoğunluğu I 'nin I_0 'ın 100 katı olan bir sesin desibel seviyesini bulunuz.

Çözüm:

$I = 100I_0$ gerçeğini kullanarak desibel seviyesi B 'yi bulunuz.

$$\begin{aligned} B &= 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) && \text{B'nin tanımı} \\ &= 10 \log \left(\frac{100I_0}{I_0} \right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && I_0'ı sadeleştir \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \log \text{ tanımından} \end{aligned}$$

Sesin şiddeti 20dB'dir.

Doğal Logaritmalar

Logaritmalar için tüm mümkün tabanlar içerisinde, yüksek matematiğin amaçları için en geleneksel seçim e sayısıdır. Bu sayı Bölüm 4.2.'de tanımlanmıştır.

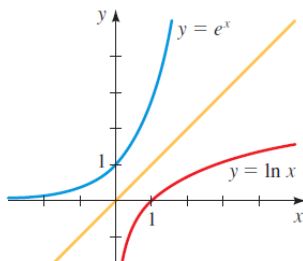
Doğal Logaritma: e tabanına sahip logaritma **doğal logaritma** olarak adlandırılır ve $\ln$ ile gösterilir:

$$\ln x = \log_e x$$

$y = \ln x$ doğal logaritmik fonksiyon, $y = e^x$ şeklindeki doğal üstel fonksiyonun tersidir. Her iki fonksiyon Şekil 9'da gösterilmiştir. Ters fonksiyonların tanımından

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

şeklindedir.



$\ln$ notasyonu latin ismi *logarithmus naturalis*'in bir kısaltmasıdır.

Şekil 9: Doğal logaritmik fonksiyonun grafiğidir

Önceki logaritma özelliklerinde $a=e$ olarak tanımlanırsa ve “ $\log_e$ ” için “ $\ln$ ” yazarsak doğal logaritmanın aşağıdaki özelliklerini elde ederiz.

Doğal Logaritmanın Özellikleri	
Özellik	Neden
1. $\ln 1 = 0$	We must raise e to the power 0 to get 1.
2. $\ln e = 1$	We must raise e to the power 1 to get e .
3. $\ln e^x = x$	We must raise e to the power x to get e^x .
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ is the power to which e must be raised to get x .

LN Tuşuna sahip hesap makineleri doğrudan doğal logaritma değerlerini verir.

Örnek 9/ Doğal Logaritma Fonksiyonunun Değerlendirilmesi

- a) $\ln e^8 = 8$ Doğal logaritmanın tanımından
- b) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ Doğal logaritmanın tanımından
- c) $\ln 5 \approx 1.609$ Hesap makinesinde **LN** tuşunu kullan

Örnek 10/ Logaritmik Fonksiyonun Tanım Kümesini Bulmak

$f(x) = \ln(4 - x^2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

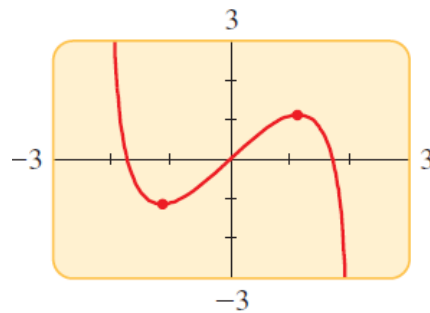
Çözüm: Herhangi bir logaritmik fonksiyonda olduğu gibi, $\ln x$ fonksiyonu $x > 0$ olduğunda tanımlanır. Böylece f 'nin tanım kümesi

$$\{x | 4 - x^2 > 0\} = \{x | x^2 < 4\} = \{x | |x| < 2\} = \{x | -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

Örnek 11/Logaritmik Fonksiyonun Grafiğinin Çizimi

$y = \ln(4 - x^2)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim ve bunu asimptotlar ve yerel maksimum ve minimum değerlerini bulmak için kullanalım.

Çözüm: Örnek 10'da olduğu gibi bu fonksiyonun tanım kümesi $(-2, 2)$ aralığıdır, böylece görüntü dikdörtgeni $[-3, 3]$ ve $[-3, 3]$ şeklindedir. Grafik, Şekil 10'da gösterilmektedir ve $x = -2$ ve $x = 2$ dikey asimptotlardır.



Şekil 10 $y = x \ln(4 - x^2)$

Fonksiyon $x=1$ 'in sağında yerel maksimum noktaya sahiptir. Yakınlaştırarak ve imleci grafiğin üzerinde izleyerek yerel maksimum değerinin yaklaşık 1.13 olduğunu buluruz ve bu $x \approx 1.15$ iken meydana gelir.

4.4. Logaritma Kuralları → Logaritmik İfadelerin Birleştirilmesi ve Genişletilmesi → Taban Değişim Formülü

Bu bölümde logaritmanın özellikleri çalışılacaktır. Bu özellikler Bölüm 4.6 'da göreceğimiz gibi logaritmik fonksiyonların geniş bir uygulamasını verir.

Logaritma Kuralları

Logaritmalar üsler olduğundan, üs kuralları logaritma kurallarına neden olur.

Logaritma Kuralları

$a \neq 1$ şeklinde a pozitif bir sayı olsun. A, B ve C , $A > 0$ ve $B > 0$ şeklinde herhangi reel sayılar olsun.

Kural	Tanım
1) $\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B$	Sayıların çarpımının logaritması sayıların logaritmalarının toplamıdır.
2) $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	Sayıların bölümünün logaritması sayıların logaritmalarının farkıdır.
3) $\log_a A^C = C \log_a A$	Bir sayının kuvvetinin logaritması, sayının logaritmasının üssü ile çarpılmasıdır.

İspat : Bölüm 4.3'den $\log_a a^x = x$ özelliğini kullanırız.

Kural 1: $\log_a A = u$ ve $\log_a B = v$ olsun. Üslü formda yazıldığında bu eşitlikler aşağıdaki hale gelir.

$$a^u = A \text{ ve } a^v = B \text{ şeklindedir.}$$

$$\text{Böylece } \log_a (AB) = \log_a (a^u a^v) = \log_a (a^{u+v})$$

$$u+v = \log_a A + \log_a B$$

Kural 2: Kural 1'i kullanarak

$$\log_a A = \log_a \left[\left(\frac{A}{B} \right) B \right] = \log_a \left(\frac{A}{B} \right) + \log_a B$$

$$\log_a \left(\frac{A}{B} \right) = \log_a A - \log_a B$$

Kural 3: $\log_a A = u$. Bu durumda $a^u = A$ olur, böylece

$$\log_a (A^C) = \log_a (a^u)^C = \log_a (a^{uC}) = uC = C \log_a A$$

Logaritma kuralları Örnek 2’de yapılan genişleme prosesinin tersine çevrilmesine imkan verir. Bu şu demektir, logaritmaların toplamı ve farkları tek bir logaritma olarak yazılabilir. Bu proses şimdiki örnekte görüleceği gibi logaritmik ifadelerin birleştirilmesidir.

Örnek 3:

$3 \log x + \frac{1}{2} \log(x + 1)$ ifadesini tek bir logaritmada birleştir.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3 \log x + \frac{1}{2} \log(x + 1) &= \log x^3 + \log(x + 1)^{1/2} && \text{Kural 3} \\ &= \log(x^3(x + 1)^{1/2}) && \text{Kural 1} \end{aligned}$$

Örnek 4: Logaritmik İfadelerin Birleştirilmesi

$3 \ln s + \frac{1}{2} \ln t - 4 \ln(t^2 + 1)$ ifadesini tek bir logaritmada birleştir.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3 \ln s + \frac{1}{2} \ln t - 4 \ln(t^2 + 1) &= \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2 + 1)^4 && \text{Kural 3} \\ &= \ln(s^3 t^{1/2}) - \ln(t^2 + 1)^4 && \text{Kural 1} \\ &= \ln\left(\frac{s^3 \sqrt{t}}{(t^2 + 1)^4}\right) && \text{Kural 2} \end{aligned}$$

Uyarı: Logaritma kuralı bize bir çarpımın veya bölümün logaritmasının nasıl hesaplanacağını söylemekle birlikte buna karşılık bir toplam veya fark için karşılık gelen bir kural yoktur.

Örneğin,

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

Gerçekte eşitliğin sağ tarafının $\log_a(xy)$ ifadesine eşit olduğunu biliyoruz. Böylece logaritmanın bölümü veya üssü uygunsuz bir biçimde sadeleştirilemez.

$$\frac{\log 6}{\log 2} \neq \log\left(\frac{6}{2}\right) \quad (\log_2 x)^3 \neq 3 \log_2 x$$

Logaritmik fonksiyonlar insan davranışlarını içeren çeşitli durumları modellemede kullanılır. Bu davranışlardan biri öğrendiğimiz bir şeyi ne sıklıkla unuttuğumuzdur. Örneğin belirli bir performans seviyesinde (bir testte %90 başarı diyelim) cebir öğrendiğimizde ve cebiri belirli bir süre kullandığımızda, bir hafta, bir ay veya bir yıl sonra ne kadarını hatırlarız? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) bu fenomeni çalışmış ve kuralı diğer örnekte tanımlamıştır.

Örnek 5/Unutma Kuralı

Eğer bir görev P_0 performans seviyesinde öğrenilirse, t zaman aralığı sonrasında performans seviyesi P ,

$$\log P = \log P_0 - c \log(t + 1)$$

sağlasın. Burada c görev tipine bağlı sabittir ve t aylık ölçülür.

- a) P için çöz.
- b) Eğer bir tarih testinde skorun 90 ise, iki ay sonra benzer bir testten nasıl bir skor almayı beklersin? Veya bir yıl sonra? ($c=0,2$ olsun)

Çözüm:

- a) İlk olarak sağ tarafı birleştirelim

$$\log P = \log P_0 - c \log(t + 1)$$

Verilen eşitlik

$$\log P = \log P_0 - \log(t + 1)^c$$

Kural 3

$$\log P = \log \frac{P_0}{(t + 1)^c}$$

Kural 2

$$P = \frac{P_0}{(t + 1)^c}$$

Log bire-birdir.

- b) $P_0=90$, $c=0,2$ ve t aylık ölçülür.

İki ayda

$$t = 2$$

ve

$$P = \frac{90}{(2 + 1)^{0,2}} \approx 72$$

Bir yılda

$$t = 12$$

ve

$$P = \frac{90}{(12 + 1)^{0,2}} \approx 54$$

İki ay sonra ve bir yıl sonra beklenen skorlar sırasıyla 72 ve 54'tür.

Taban Değişimi Formülü

Bazı amaçlar için bir tabandaki logaritmayı diğer tabandaki logaritmaya değiştirmek kullanışlı olabilir.

Örneğin $\log_a x$ verilsin ve $\log_b x$ 'i bulmak isteyelim.

$$y = \log_b x$$

Bunu üstel formda yazalım ve her iki tarafı a tabanında yazarak logaritmasını alalım.

$$b^y = x$$

Üstel form

$$\log_a(b^y) = \log_a x$$

Her iki tarafın $\log_a$ 'sını al

$$y \log_a b = \log_a x$$

Kural 3

$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$\log_a b$ 'ye böl

Bu aşağıdaki formülü ispatlar:

Taban Değişimi Formülü

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Taban Değişimi Formülü

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b} \right) \log_a x$$

$\log_b x$, $\log_a x$ 'in bir sabitle çarpanıdır ve bu sabit $\log_a b$ şeklindedir.

Özellikle eğer $x = a$ yerleştirsek, bu durumda $\log_a a = 1$ şeklindedir ve bu formül aşağıdaki hale gelir

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Herhangi bir tabandaki logaritmayı taban değişim formülü kullanarak adi logaritma veya doğal logaritma cinsinden ifade edip ardından bir hesap makinesiyle değerini hesaplayabiliriz.

Örnek 6/ Taban Değişimi Formülü İle Logaritmanın Değerlendirilmesi

Taban değişimi formülünü kullanalım ve her bir logaritmayı değerlendirmek için adi veya doğal logaritmayı kullanalım, beş ondalık basamağa kadar ifade edelim.

a) $\log_8 5$ b) $\log_9 20$

özüm:

a) $b=8$ ve $a=10$ iken taban değişimi formülünü kullanalım.

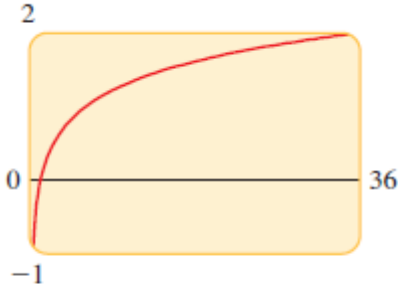
$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

b) $b=9$ ve $a=e$ iken taban değişimi formülünü kullanalım.

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

Örnek 7/Bir Logaritmik Fonksiyonu Çizmek İçin Taban Değişim Formülünü Kullanmak

$f(x) = \log_6 x$ 'i çizmek için bir grafik hesaplayıcısı kullanalım.



Şekil 1: $f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$

Hesap makinelerinin $\log_6$ için bir tuşu yoktur. Bu sebeple taban değişimi formülü kullanılır

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Hesap makinelerinin LN tuşu vardır, fonksiyonun bu yeni formunu gireriz ve çizeriz. Grafik, Şekil 1'de görülmektedir.

4.5.ÜSTEL VE LOGARİTMİK DENKLEMLER

Üstel Denklemler→Logaritmik Denklemler→Bileşik Faiz

Bu bölümde üstel ve logaritmik fonksiyonları içeren denklemleri çözeceğiz. Burada geliştirilen teknikler sonraki bölümdeki uygulamalı problemlerin çözümünde kullanılacaktır.

Üstel Denklemler

Bir üstel denklem değişkenin üs olarak meydana geldiği durumdur. Örneğin $2^x = 7$ şeklindedir.

Değişken x 'in temsil edilebilmesi biraz güçtür, çünkü üs'te yer alır. Bu güçlüğü başa çıkabilmek için her bir tarafın logaritmasını alırız ve logaritma kuralı gereği x 'i üs'ten aşağıya indiririz.

$2^x = 7$	Verilen eşitlik
$\ln 2^x = \ln 7$	Her bir tarafın ln'ini al
$x \ln 2 = \ln 7$	Kural 3 (Üssü indir)
$x = \frac{\ln 7}{\ln 2}$	x için çöz
≈ 2.807	Hesap makinesi

$\log_a A^C = C \log_a A$ diyen logaritma kurallarından Kural 3'ü hatırlayalım.

$2^x = 7$ 'yi çözmek için kullandığımız metot genelde üstel denklemlerin nasıl çözüleceğinin tipik bir örneğidir.

Üstel Denklemlerin Çözümü İçin İlkeler

- 1- Denklemin her bir tarafındaki üstel ifadeler yalnız bırakılır.
- 2- Her bir tarafın logaritması alınır ve üsleri aşağı indirmek için logaritma kuralı uygulanır.
- 3- İlgilenilen değişken için denklem çözülür.

Örnek 1: $3^{x+2} = 7$ denkleminin çözümünün bulalım, altı ondalık basamağa yuvarlayalım.

Çözüm: Her bir tarafın logaritmasını alıp Kural 3'ü uyguluyoruz.

$3^{x+2} = 7$	Verilen denklem
$\log(3^{x+2}) = \log 7$	Her iki tarafın logaritmasını al
$(x + 2)\log 3 = \log 7$	Kural 3 (Üssü indir)
$x + 2 = \frac{\log 7}{\log 3}$	$\log 3$ 'e böl
$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2$	2'yi çıkart
≈ -0.228756	Hesap makinesi

Adi logaritma yerine doğal logaritmayı da kullanabiliriz. Aslında, aynı adımları kullanarak

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx 0.228756$$

şeklinde elde ederiz.

CEVABINI KONTROL ET

$x = -0.228756$ 'yı denklemde yerine koy ve bir hesap makinesi kullanarak,

$$3^{-0.228756+2} \approx 7 \text{ elde edilir.}$$

Örnek 2/ Bir Üstel Denklemin Çözümü

$8e^{2x}=20$ denklemini çöz.

Çözüm: İlk olarak bir tarafta üstel terim bırakmak için 8'e böleriz

$8e^{2x} = 20$	Verilen denklem
$e^{2x} = \frac{20}{8}$	8'e böl
$\ln e^{2x} = \ln 2.5$	Her bir tarafın ln'ini al
$2x = \ln 2.5$	ln'in özelliği
$x = \frac{\ln 2.5}{2}$	2'ye böl
≈ 0.458	Hesap makinesi

Cevabını Kontrol Et: Orijinal denklemde $x = 0.458$ koy ve bir hesap makinesi kullanarak $8e^{2(0.458)} \approx 20$ elde edilir.

Örnek 3/Cebirsel ve Grafiksel Olarak Bir Üstel Denklemin Çözümü

$e^{3-2x} = 4$ denklemini cebirsel ve grafiksel olarak çözünüz.

Çözüm1:Cebirsel

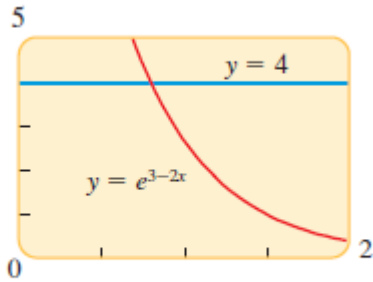
Üstel terimin tabanı e olduğundan, bu denklemi çözmek için doğal logaritma kullanılır.

$e^{3-2x} = 4$	Verilen denklem
$\ln(e^{3-2x}) = \ln 4$	Her iki tarafın ln'ini al
$3 - 2x = \ln 4$	ln'in özelliği
$-2x = -3 + \ln 4$	3'ü çıkar
$x = \frac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807$	$-\frac{1}{2}$ ile çarp

Bu cevabın orijinal denklemi sağladığı kontrol edilmelidir.

Çözüm 2: Grafiksel

$y = e^{3-2x}$ ve $y = 4$ 'ü aynı görüntü dikdörtgeninde Şekil 1'de çizelim. Grafiklerin kesiştiği yerde çözüm olur. İki grafiğin kesişim noktasına odaklanırsak, $x \approx 0.81$ olduğunu görürüz.



Şekil 1

Örnek 4/Kuadratik Tipte Üstel Denklem

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Üs terimini yalnız bırakmak için,

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$	Verilen denklem
$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0$	Üs kuralı
$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0$	Çarpanları($e^{x'}$ de kuadratik)
$e^x - 3 = 0 \quad \text{or} \quad e^x + 2 = 0$	Sıfır-çarpım Özelliği
$e^x = 3 \quad \quad \quad e^x = -2$	

Eğer $w = e^x$ denilirse,

Aşağıdaki kuadratik denklem elde edilir

$$w^2 - w - 6 = 0$$

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

şeklinde çarpanlara ayrılır

$e^x = 3$ denklemini $x = \ln 3$ 'e götürür. Fakat $e^x = -2$ 'nin çözümü yoktur, çünkü tüm x 'ler için $e^x > 0$ şeklindedir. Böylece $x = \ln 3 \approx 1.0986$ tek çözümdür. Bu cevabın orijinal denklemi sağladığı kontrol edilmelidir.

Örnek 5/Üstel Denklemin Çözümü

$3xe^x + x^2e^x = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: İlk olarak denklemin sol tarafını çarpanlara ayıralım

$$\begin{aligned} 3xe^x + x^2e^x &= 0 && \text{Verilen eşitlik} \\ x(3 + x)e^x &= 0 && \text{Çarpanlara ayırma} \\ &&& e^x \text{'e böl (çünkü } e^x \neq 0) \\ x(3 + x) &= 0 && \text{Sıfır-çarpım momenti} \\ x = 0 &\quad \text{or} \quad 3 + x = 0 \end{aligned}$$

Böylece çözümler $x = 0$ ve $x = -3$ 'dür.

Cevabın Kontrolü:

$$\begin{aligned} x = 0: \\ 3(0)e^0 + 0^2e^0 &= 0 \quad \checkmark \\ x = -3: \\ 3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3} \\ &= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Logaritmik Denklemler

Bir logaritmik denklem değişkenin logaritmasının olduğu bir denklemdir. Örneğin,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

x 'i çözmek için, denklemi üstel formda yazarız.

$$x + 2 = 2^5 \quad \text{Üstel form}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \quad x \text{ için çöz}$$

Diğer bir çözüm yolu ilk adımda denklemin her bir tarafının tabanı 2 yapılır.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5$$

$$x + 2 = 2^5 \quad \text{logaritma özelliği}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \quad x \text{ için çöz}$$

Bu basit problemi çözmek için kullanılan metot geneldir. Aşağıdaki gibi adımlarda özetleyebiliriz.

LOGARİTMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN ÖNERİLER

- 1) Denklemin bir tarafındaki logaritmik terimi yalnız; ilk olarak logaritmik terimleri birleştirmeye ihtiyaç duyabilirsin.
- 2) Denklemi üstel formda yaz (veya denklemin her iki yanını taban yükseltin)
- 3) İlgili değişken için çözümle.

Örnek 6/Logaritmik Denklemi Çözümleme

Her birini x için çözümle

a) $\ln x = 8$ b) $\log_2(25 - x) = 3$

Çözüm:

a) $\ln x = 8$ Verilen eşitlik

$x = e^8$ Üstel form

Böylece $x = e^8 \approx 2981$

Bu problemi başka bir şekilde de çözebiliriz:

$\ln x = 8$ Verilen eşitlik

$e^{\ln x} = e^8$ e 'yi her iki tarafa da yükselt

$x = e^8$ $\ln$ 'in özelliği

b) İlk adım denklemi üstel formda yeniden yazmaktır

$\log_2(25 - x) = 3$ Verilen denklem

$25 - x = 2^3$ Üstel form

$25 - x = 8$

$x = 25 - 8 = 17$

CEVABINI KONTROL ET:

Eğer $x = 17$ ise,

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$

Örnek 7/Logaritmik Denklemin Çözümü

$4 + 3 \log(2x) = 16$ denklemini çöz.

Çözüm: öncelikle logaritmik terim yalnız bırakılır. Bu, denklemin üstel formda yeniden yazılmasına imkan verir.

$4 + 3 \log(2x) = 16$ Verilen eşitlik

$3 \log(2x) = 12$ 4'ü çıkar

$\log(2x) = 4$ 3'e böl

$\log(2x) = 4$ Üstel form

$2x = 10^4$ 2'ye böl

$x = 5000$

CEVABI KONTROL ET $x = 5000$ ise

$4 + 3 \log 2(5000) = 4 + 3 \log 10,000$

$= 4 + 3(4)$

$= 16$ ✓

Örnek 8/Logaritmik Denklemin Cebirsel ve Grafiksel Olarak Çözümü

$\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$ olduğunu cebirsel ve grafiksel olarak göster.

Çözüm 1: Cebirsel

İlk olarak logaritma kurallarını kullanarak logaritmik terimleri birleştiririz.

$$\begin{aligned}\log[(x + 2)(x - 1)] &= 1 && \text{Kural 1} \\ (x + 2)(x - 1) &= 10 && \text{Üstel form} \\ x^2 + x - 2 &= 10 && \text{Sol tarafı aç} \\ x^2 + x - 12 &= 0 && 10'ı çıkar \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 && \text{Çarpanlara ayırma} \\ x = -4 \quad \text{or} \quad x &= 3\end{aligned}$$

CEVABINI KONTROL ET:

$$\begin{aligned}x = -4: \\ \log(-4 + 2) + \log(-4 - 1) \\ = \log(-2) + \log(-5) \\ \text{TANIMSIZ} \quad \times \\ x = 3: \\ \log(3 + 2) + \log(3 - 1) \\ = \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) \\ = \log 10 = 1 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Orijinal denklemde bu potansiyel çözümleri kontrol ederiz $x = -4$ 'ün bir çözüm olmadığını buluruz (Negatif sayıların logaritması tanımsızdır), fakat $x = 3$ bir çözümdür.

Çözüm 2: Grafiksel

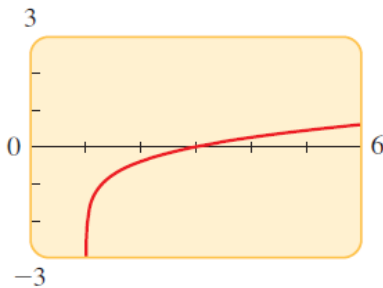
İlk olarak tüm terimleri denklemin bir tarafına toplarız

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

Daha sonra

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

Grafiğini, Şekil 2'deki gibi çiz. Çözümler grafiğin x kesişimleridir. Böylece tek çözüm $x \approx 3$ şeklindedir.



Şekil 2

Örnek 9/Logaritmik Denklemin Grafiksel Çözümü

$x^2 = 2 \ln(x + 2)$ denklemini çözelim

Çözüm Öncelikle tüm terimler tek bir tarafa toplanır.

$$x^2 - 2 \ln(x + 2) = 0$$

Daha sonra

$$y = x^2 - 2 \ln(x + 2)$$

Şekil 3'teki gibi çizilir. Çözümler grafiğin x-kesişimleridir. x-kesişimlerine odaklanınca, iki çözümün

$x \approx -0.71$ ve $x \approx 1.60$ şeklinde olduğu görülür

Bileşik Faiz

Bölüm 4.1'de faiz için olan formülleri ele alalım. Eğer ana para P, t yıllık bir periyot için faiz oranı r ile bankaya yatırılıyorsa dönem sonundaki para miktarı A aşağıdaki gibi verilir.

$$A = P(1 + r)$$

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Basit faiz (bir yıllık)

Faiz yılda n kez birleştirilirse

Sürekli bileşik faiz

Logaritmayı, ana paranın belirli miktara ulaşması için gereken zamanı belirlemek için kullanırız.

Örnek 11/ Bir Yatırımın İki Katına Çıkaracak Vadenin (Zamanın) Bulunması

Yıllık %5 faiz oranıyla 5000\$'lık bir yatırım yapılsın. Eğer aşağıdaki metoda göre faiz birleştirildiğinde, parayı iki katına çıkarmak için gereken zamanı bulunuz.

a)Altı aylık b)Sürekli

Çözüm

a) $P=5000$ \$, $A(t)=10,000$ \$, $r=0.05$ ve $n=2$ iken bileşik faiz formülünü kullan ve elde edilen üstel denklemi t için çöz.

$$5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} = 10,000$$

$$(1.025)^{2t} = 2$$

$$\log 1.025^{2t} = \log 2$$

$$2t \log 1.025 = \log 2$$

$$t = \frac{\log 2}{2 \log 1.025}$$

$$t \approx 14.04$$

$$P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A$$

5000'e böl

Her bir tarafın logaritmasını al

Kural 3(üssü indir)

$2 \log 1.025$ e böl

Hesap makinesi

Para 14,04 yılda iki katına çıkacaktır.

b) $P=5000\$, A(t) = 10,000\$$ ve $r=0.05$ iken sürekli bileşik faiz için formülü kullan ve elde edilen denklemi t için çöz.

$$5000e^{0.05t} = 10,000$$

$$e^{0.05t} = 2$$

$$\ln e^{0.05t} = \ln 2$$

$$0.05t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.05}$$

$$t \approx 13.86$$

$$Pe^{rt}=A$$

5000'e böl

Her bir tarafın ln'ini al

ln'in özelliği

0.05 e böl

Hesap makinesi

Para 13.86 yılda iki katına çıkar.

Örnek 12/Bir Yatırımı Büyütmek İçin Gerekli Zaman

Toplam 1000\$ yıllık %4 faiz oranıyla yatırılıyor. Eğer faiz sürekli olarak birleştirilirse, 4000\$'a büyütmek için gerekli zamanı elde ediniz.

Çözüm: $P=1000\$, A(t)=4000\$$ ve $r=0.04$ olan sürekli faiz oranı için olan formülü kullanalım ve elde edilen üstel denklemi t için çözelim.

$$1000e^{0.04t} = 4000$$

$$Pe^{rt}=A$$

$$e^{0.04t} = 4$$

1000'e böl

$$0.04t = \ln 4$$

Her bir tarafın ln'ini al

$$t = \frac{\ln 4}{0.04}$$

0.04'e böl

$$t \approx 34.66$$

Hesap makinesi

4.6.ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARLA MODELLEME

Üstel Büyüme (İki katına çıkma süresi)→Üstel Büyüme (Görelî Büyüme Oranı) → Logaritmik Ölçekler

Nüfus artışı, radyoaktif çürüme, sıcaklık yayılımı ve benzeri doğada meydana gelen birçok süreç üstel fonksiyonlar kullanarak modellenebilir. Logaritmik fonksiyonlarda ses gürlüğü, deprem yoğunluğu ve diğer fenomenlerde kullanılır. Bu bölümde üstel ve logaritmik modelleri çalışacağız.

Üstel Büyüme (İki katına çıkma süresi)

Her bir saatte bölünen tek bir bakteri ile başlayalım. Bir saat sonra iki bakterimiz, iki saat sonra 2^2 veya 4 bakterimiz, üç saat sonra 2^3 veya 8 bakterimiz v.b. olur (şekil 1). t saat sonraki bakteri popülasyonunu $f(t)=2^t$ şeklinde modelleyebiliriz.



Şekil 1: Bakteri popülasyonu

Eğer 10 bakteri ile başlarsak, popülasyon $f(t)=10 \cdot 2^t$ olarak modellenir. Daha yavaş büyüyen bakteri türü her bir 3 saatte iki katına çıkar; bu durumda popülasyon $f(t)=10 \cdot 2^{t/3}$ şeklinde modellenir. Genelde aşağıdaki şekildedir.

Üstel Büyüme (İki Katına Çıkma Süresi)

Popülasyonun başlangıç hacmi n_0 ise ve iki katına çıkma süresi a olsun, bu durumda t zamanında popülasyonun hacmi

$$n(t)=n_0 2^{t/a}$$

şeklindedir. Burada a ve t aynı zaman birimlerinde ölçülür (dakika, saat, gün, ay v.b.)

Örnek 1/Bakteri Popülasyonu

İdeal koşullar altında belirli bakteri popülasyonu her bir üç saatte iki katına çıksın. Başlangıçta bir koloni de 1000 bakteri olsun.

- t saat sonra bakteri popülasyonu için modeli bulunuz.
- 15 saat sonra kolonide ne kadar bakteri olur?
- Bakteri ne zaman 100,000 'e ulaşır?

a) t zamanında popülasyon aşağıdaki gibi modellenir. Burada t saat cinsinden ölçümlenmiştir.

$$n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3}$$

b) 15 saat sonra bakteri sayısı

$$n(15) = 1000 \cdot 2^{15/3} = 32,000$$

c) a şıkında bulduğumuz modelde $n(t) = 100,000$ yerleştirip ve t için üstel denklemi çözdüğümüzde

$$100,000 = 1000 \cdot 2^{t/3}$$

$$100 = 2^{t/3}$$

$$\log 100 = \log 2^{t/3}$$

$$2 = \frac{t}{3} \log 2$$

$$t = \frac{6}{\log 2} \approx 19.93$$

$$n(t) = 100,000 \cdot 2^{t/3}$$

1000'e böl

Her iki tarafın logaritmasını al

Logaritma özelliği

t için çöz

Bakteriler yaklaşık 20 saatte 100,000'e ulaşır.

Örnek 2/Tavşan Popülasyonu

Belirli bir cins tavşan küçük bir adaya sekiz ay önce konulmuştur. Adadaki mevcut tavşan nüfusu 4100 olacak şekilde tahmin edilmiştir ve her bir 3 ayda iki katına çıkmaktadır.

a) Tavşan nüfusunun başlangıç büyüklüğü nedir?

b) Tavşan adaya getirildikten 1 yıl sonraki nüfusu tahmin ediniz.

c) Tavşan nüfusunun grafiğini çizin.

Çözüm

a) İki katına çıkma süresi $a=3$ şeklindedir, böylece t zamanında popülasyon

$$n(t) = n_0 \cdot 2^{t/3} \quad \text{Model}$$

şeklindedir. Burada n_0 başlangıçtaki popülasyondur. $t=8$ ay olduğunda popülasyon 4100 olduğundan,

$$n(8) = n_0 2^{8/3} \quad \text{Modelden}$$

$$4100 = n_0 2^{8/3} \quad n(8)=4100 \text{ olduğundan}$$

$$n_0 = \frac{4100}{2^{8/3}} \quad 2^{8/3} \text{ e böl ve taraf değiştir}$$

$$n_0 \approx 645 \quad \text{Hesapla}$$

Adaya 645 tavşanın getirildiği tahmin edilir.

b) a şikkından görülmektedir ki $n_0=645$ şeklindedir. Böylece t ay sonra popülasyon aşağıdaki gibi tahminlenir.

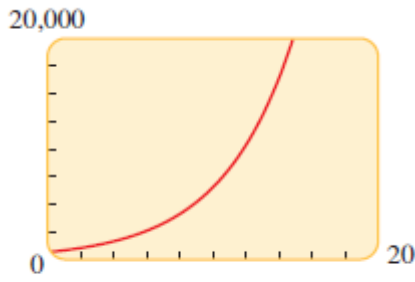
$$n(t) = 645 \cdot 2^{t/3}$$

Bir yıl sonra $t = 12$ iken

$$n(12) = 645 \cdot 2^{12/3} \approx 10,320 \text{ şeklindedir.}$$

Bir yıl sonra yaklaşık 10,000 tavşan olur.

c)Tanım kümesi $t \geq 0$ şeklindedir. Grafik, Şekil 2'deki gibidir.



Şekil 2: $n(t) = 645 \cdot 2^{t/3}$

Üstel Büyüme (Görelî Büyüme Oranı)

Popülasyon artışını modellemek için iki tabanına sahip üstel fonksiyonu kullandık (iki katına çıkarma süresi). Aynı popülasyonu 3 tabanına sahip üstel fonksiyon olarak da (üç katına çıkma) bulabiliriz. Aslında, herhangi bir tabana sahip üstel model bulabiliriz. Eğer e tabanını kullanırsak, **görelî büyüme oranı** r (görelî büyüme oranı, herhangi bir zamanda popülasyon oranı olarak ifade edilir) cinsinden popülasyonun aşağıdaki modeli elde edilir. Örneğin, eğer $r=0,02$ ise bu durumda herhangi bir t zamanındaki büyüme oranı, t zamanında popülasyonun %2'sidir.

Üstel Büyüme (Görelî Büyüme Oranı)

Üstel Büyümeye sahip bir popülasyon aşağıdaki modele göre artar

$$n(t) = n_0 \cdot e^{rt}$$

$n(t)$ = t zamanında popülasyon

n_0 =popülasyonun ilk hacmi

r =görelî büyüme oranı(popülasyonun oranı olarak açıklanır)

t =zaman

Burada dikkat edilmelidir ki popülasyon büyümesi formülü bileşik faiz oranı ile aynıdır. Gerçekte her iki durum için de aynı prensip işler. Zaman periyodu başına popülasyon büyümesi (veya yatırım) popülasyon hacmine (veya yatırım miktarına) orantılıdır. 1,000,000'luk bir popülasyon bir yılda 1000'lik bir nüfustan daha fazla artar, aynı şekilde, 1,000,000\$'lık bir yatırım bir yılda 1000\$'lık bir yatırımdan daha fazla artar.

Aşağıdaki örneklerde nüfusun üstel arttığı varsayılmıştır.

Örnek 3/Popülasyon Büyüklüğünün Tahminlenmesi

Bir kültürdeki başlangıçtaki bakteri sayısı 500 olsun. Biyolog daha sonra kültürdeki bakteriden bir örnek alsın ve saat başına görelî büyüme oranı %40 olsun.

a) t saat sonra bakteri sayısını modelleyecek fonksiyonu bulunuz.

b) 10 saat sonra tahminlenen sayı nedir?

c) Bakteri sayısı ne zaman 80,000'e ulaşır?

d) $n(t)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

a) $n_0=500$ ve $r=0.4$ olan üstel model elde edilir.

$$n(t) = 500 \cdot e^{0.4t}$$

burada t saati belirtir.

b) a) şıkkındaki fonksiyonu kullanarak 10 saat sonraki bakteri sayısı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$n(10) = 500 \cdot e^{0.4 \cdot 10} = 500 \cdot e^4 \approx 27,300$$

c) $n(t) = 80,000$ koy ve t için elde edilen üstel denklemi çöz.

$$80,000 = 500 \cdot e^{0.4t}$$

$$160 = e^{0.4t}$$

$$\ln 160 = 0.4t$$

$$t = \frac{\ln 160}{0.4} \approx 12.68$$

$$n(t) = 500 \cdot e^{0.4t}$$

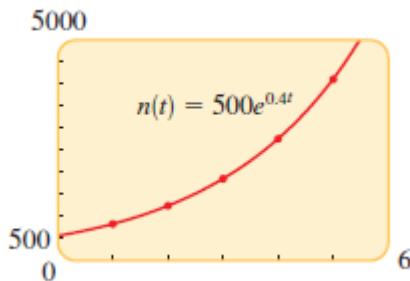
500'e böl

Her iki tarafın ln'ini al

t için çöz

Bakteriler 12,7 saatte 80.000'e ulaşır.

d) Grafiği Şekil 3'de gösterilmiştir.



ŞEKİL 3

Dünya popülasyonunun görelî büyümesi son yıllarda azalmaktadır- 1995'de %2'den 2006'da %1.3'e düşmüştür.

Örnek 4/Farklı Popülasyon Artış Hızlarının Karşılaştırılması

2000’de dünya nüfusu 6,1 milyardı ve görelî büyüme oranı yıl başına %1,4 şeklindeydi. Yıl başına %1’lik oranın birkaç on yıla toplam popülasyonda önemli bir fark yaratacağı iddia edilmektedir. Bu iddiayı

a) yıl başına %1.4’lük

b) yıl başına yüzde %1’lik büyüme oranını kullanarak 2050 yılındaki dünya popülasyonunu tahmin edelim.

Çözüm: a) Üstel büyüme modeline göre

$$n(t) = 6,1e^{0,014t}$$

$n(t)$ milyar olarak ölçülür ve t , 2000 ’den beri ölçümü gösterir. 2050, 2000’den 50 yıl sonra olduğundan

$$n(50) = 6,1e^{0,014(50)} = 6,1e^{0,7} \approx 12,3 \quad \text{şeklindedir.}$$

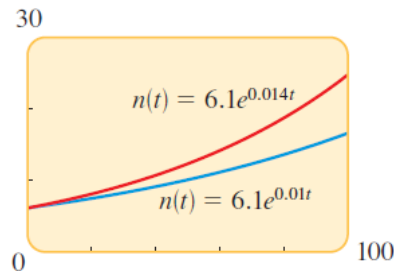
2050 yılında tahminlenen popülasyon yaklaşık 12,3 milyardır.

b)

$n(t) = 6,1e^{0,010t}$ fonksiyonu kullanılır.

$$n(50) = 6,1e^{0,010(50)} = 6,1e^{0,5} \approx 10,1 \quad \text{elde edilir.}$$

2050 yılında tahminlenen popülasyon yaklaşık 10.1 milyardır. Şekil 4’deki grafik büyümenin görelî oranındaki küçük bir değişim zaman boyunca, popülasyonda büyük bir fark yarattığını göstermektedir.



Şekil 4

Logaritmik Ölçekler

Bir fiziksel birim çok büyük bir aralık boyunca değişiyorsa, yönetilebilir bir sayı setine sahip olmak için bunların logaritmasını almak uygun bir yaklaşımdır. Böyle bazı durumlar: asidi ölçen pH ölçeği; depremlerin yoğunluğunu ölçen Richter ölçeği; ses gürlüğü ölçen desibel ölçeği. Logaritmik ölçeklerde ölçülen diğer ölçüler ışık yoğunluğu, bilgi kapasitesi ve radyasyondur.

Richter Ölçeği

1935’de Amerikan jeoloğu Charles Richter(1900-1984) bir depremin büyüklüğü M’yi

$$M = \log \frac{I}{S}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada I depremin yoğunlu ve S standart bir depremin yoğunluğudur (büyüklüğü 1 micron= 10^{-4} cm 'dir).

Bir standart depremin büyüklüğü

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

şeklindedir.

Richter 1900 ve 1950 arasında birçok deprem çalışmıştır. En büyüğü Richer ölçeğinde 8.9 büyüklüğüne sahiptir ve en küçüğü 0 büyüklüğüne sahiptir. Bu 800.000.000'luk yoğunluk oranına karşılık gelir, böylece Richter ölçeği daha yönetilebilir sayılarla çalışma imkanı verir. Örneğin, 6 büyüklüğünde bir deprem 5 büyüklüğünde bir depremden 10 kez daha güçlüdür.

Örnek 9/ Deprem Büyüklüğü

1906 San Francisco depremi Richter ölçeğinde 8.3 büyüklüğünde tahmin edilmiştir. Aynı yıl dört kat daha yoğun olan Kolombiya-Ekvator sınırındaki depreminin Richter ölçeğinde büyüklüğü nedir?

Çözüm: Eğer I San Francisco depreminin yoğunlu ise, bu durumda büyüklüğün tanımı

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3 \text{ şeklindedir.}$$

Kolombiya-Ekvator depreminin yoğunluğu 4 I şeklindedir, böylece büyüklüğü

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$

Örnek 10/Deprem Şiddeti

1989'da San Francisco'yu vuran Lama Priete depremi Richter ölçeğinde 7.1'lik bir büyüklüğe sahiptir. 1906 depremi (Örnek 9) 1989 depremine göre ne kadar daha şiddetlidir?

Çözüm: I_1 ve I_2 sırasıyla 1906 ve 1989 depremlerinin şiddeti ise, bu durumda I_1/I_2 'ye bulmamız gerekir. Bu ilişkiyi büyüklüğün tanımı ile ilişkilendirmek için, pay ve paydayı S 'e böleriz.

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \log \frac{I_1/S}{I_2/S}$$

Pay ve paydayı S 'ye böleriz

$$= \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S}$$

Logaritmanın 2.kuralı

$$= 8.3 - 7.1 = 1.2$$

Deprem şiddetinin tanımı

Böylece

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\log(I_1/I_2)} = 10^{1.2} \approx 16$$

1906 yılındaki deprem 1989 depreminden yaklaşık 16 kat daha şiddetlidir.