

11. Bölüm

UZAY GEOMETRİ VE KATI CİSİMLER

- 11.1 Uzay Geometri
 - 11.1.1 Uzayda Doğru ve Düzlemler
 - Üç Boyutlu Şekillerin Çizimi
 - 11.1.2 Paralel Doğru ve Düzlemler
 - 11.1.3 Dik Doğru ve Düzlemler
 - 11.1.4 İki Düzlemli Açılar ve Dik Düzlemler
 - 11.1.5 Dik İzdüşüm
- 11.2 Katı Cisimler, Alanları ve Hacimleri
 - 11.2.1 Prizmalar
 - 11.2.2 Katı Cisimlerin Hacimleri
 - 11.2.3 Piramitler
 - 11.2.4 Silindirler
 - 11.2.5 Koniler
 - 11.2.6 Küreler

11. Bölüm Üzerine Örnek Problemler

11. Bölüm Üzerine Problemler

Testler: 1-2-3-4-5-6-7-8

MUHARREM ŞAHİN
UMUT ŞAHİN

11.1 UZAY GEOMETRİ

Bütün noktaları aynı doğru üzerinde bulunan şekillerin geometrisine **Doğru geometrisi**, bütün noktaları aynı düzlem üzerinde bulunan şekillerin geometrisine **Düzlem geometri**, bütün noktaları aynı düzlemde bulunmayan şekillerin geometrisine **Uzay geometri** denir.

Doğru geometrisine **Bir boyutlu uzay geometrisi**, Düzlem geometriye **İki boyutlu uzay geometrisi**, Uzay geometriye **Üç boyutlu uzay geometrisi** de denir.

Boyut kavramının tam tanımını Analitik geometri derslerinizde öğreneceksiniz. Şimdilik, ilkokuldan bu yana bildiğiniz **en, boy, yükseklik** kavramları ile yetinebilirsiniz. Doğrusal şekillerin sadece **boyundan**, düzlemsel şekillerin **eninden** ve **boyundan**, düzlemsel olmayan şekillerin de **eninden**, **boyundan** ve **yüksekliğinden** söz edilebildiğini biliyorsunuz.

11.1.1 UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEMLER

Bu bölümde vereceğimiz bilgilere temel oluşturan aksiyom ve teoremlerin bir kısmını 2. bölümde vermiştik. Önce bunları hatırlayalım :

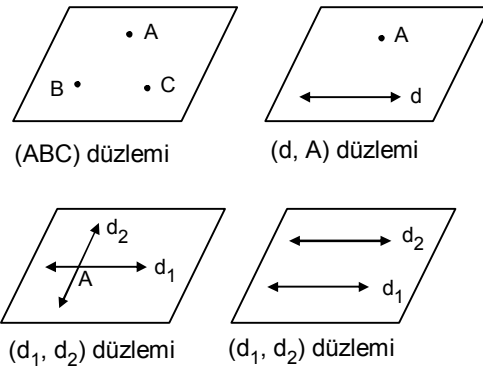
- Farklı iki noktanın ikisine de ait olan bir ve yalnız bir doğru vardır. (Aksiyom 2.1)
- Bir düzlemde en az bir doğru ile bunun üzerinde olmayan en az bir nokta vardır. (Aksiyom 2.4)
- Bir doğrunun farklı iki noktası bir düzlem üzerinde ise o doğrunun bütün noktaları o düzlem üzerindedir. (Aksiyom 2.5)
- Doğrusal olmayan üç noktadan bir ve yalnız bir düzlem geçer. (Aksiyom 2.6)
- Her düzlemin doğrusal olmayan en az üç noktası, uzayın düzlemsel olmayan en az dört noktası vardır. (Aksiyom 2.7)
- Bir doğru, içinde bulunmadığı bir düzlemi keserse arakesit kümesi bir tek noktadan oluşur. (Teorem 2.6)
- Bir doğru ile bu doğrunun dışındaki bir nokta bir düzlem belirtir. (Teorem 2.7)

- Kesişen farklı iki doğru bir düzlem belirtir. (Teorem 2.8)
- Kesişen farklı iki düzlemin arakesiti bir doğrudur. (Aksiyom 2.8)
- Bir E düzlemi U uzayını
 - 1) E düzlemi,
 - 2) U_1 yarı uzayı ve
 - 3) U_2 yarı uzayı
 olmak üzere üç ayrık kümeye ayırır. Öyle ki bu kümelerin herbiri konvektir ve $A \in U_1, B \in U_2$ ise $[AB]$ doğru parçası E düzlemini keser. (Uzay Ayırma Aksiyomu)
- Paralel iki doğru bir düzlem belirtir. (Teorem 2.19)

BİR DÜZLEMİN BELİRTİLMESİ

Aksiyom 2.6, Teorem 2.7, Teorem 2.8 ve Teorem 2.19 u bir cümlede verelim :

1. Doğrusal olmayan üç nokta,
 2. Bir doğru ile dışındaki bir nokta,
 3. Kesişen iki doğru,
 4. Paralel iki doğru
- bir düzlem belirtir.



BİR DOĞRUNUN BİR DÜZLEME GÖRE DURUMLARI

Aksiyom 2.5 ve Teorem 2.6 dan çıkardığımıza göre, bir doğru bir düzleme göre üç değişik durumda olabilir.

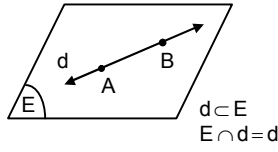
1. Bir d doğrusunun

A ve B gibi iki noktası
bir E düzlemine ait ise

d doğrusunun bütün

noktaları E düzlemine aittir.

Bu durumda d doğrusu E düzleminin içindedir
denir.



2. Bir d doğrusu ile bir E

düzleminin A gibi yalnız

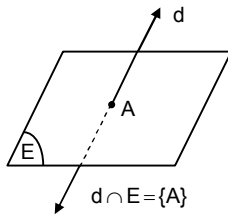
bir ortak noktası var ise

d doğrusu E düzlemini

A noktasında kesiyor

denir. A noktasına

d doğrusunun düzlemdeki ayağı adı verilir.



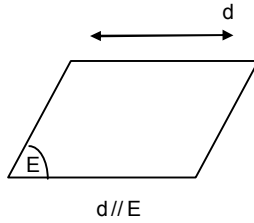
3. Bir d doğrusu ile bir E

düzleminin hiç ortak

noktası yoksa d doğrusu

E düzlemine paraleldir

denir.



İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Aksiyom 2.1, Aksiyom 2.6, Teorem 2.7, Teorem 2.8 ve Teorem 2.19 birlikte yorumlandığında şu sonuçlara varılır :

İki doğru ya aynı düzlemedir ya da her biri farklı bir düzlemedir.

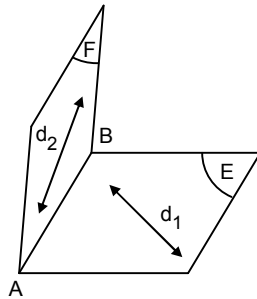
Farklı düzlemlerde
bulunan iki doğruya
aykırı doğrular denir.

Şekilde,

$d_1 \cap d_2 = \emptyset$ ve

$d_1 \not\parallel d_2$ ise d_1 ile d_2

doğruları aykırı doğrular olup aynı bir düzleme ait
olamazlar. d_1 ile d_2 doğruları aynı düzlemde iken,



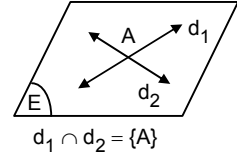
1. A ve B gibi ortak iki noktaları varsa, bütün
noktaları ortaktır. Bu durumda d_1 ile d_2 **çakışık**
denir.

2. A gibi yalnız bir

ortak noktası varsa

d_1 ile d_2 A noktasında

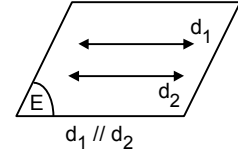
kesişiyor denir.



3. Ortak noktaları yok ise

d_1 ile d_2 birbirine

paraleldir denir.



İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları

Aksiyom 2.6 ve Aksiyom 2.8 in sonucu olarak
üç farklı durum düşünülebilir.

1. İki düzlemin doğrusal olmayan üç ortak noktaları
varsa, **bu iki düzlem çakışık**tır.

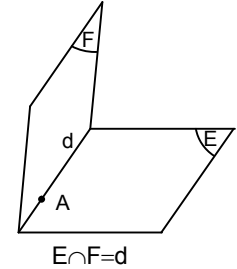
2. İki düzlemin bir

ortak noktası varsa,

bu iki düzlem bu ortak

noktadan geçen bir

doğru boyunca **kesişir**.



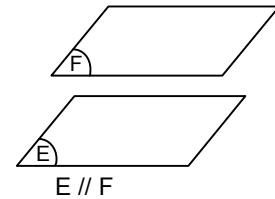
3. İki düzlemin

hiç ortak

noktası yok ise,

düzlemler birbirine

paraleldir.



Üç Boyutlu Şekillerin Çizimi

Üç boyutlu şekilleri, iki boyutlu bir düzlem
parçası olan kağıt üzerine olduğu gibi kondurabil-
menin mümkün olmayacağı açıktır.

Diğer taraftan, üç boyutlu şekillerle ilgili problemleri çözmede, bu şekillerin asılları üzerinde çalışmak pek de pratik olmadığına göre, bu şekilleri bir biçimde kağıt üzerinde göstermek bir zorunluluktur. Üç boyutlu bir şekli kağıt üzerinde gösterebilme problemi, **fotoğrafta** olduğu gibi çözülür.

Bir kibrit kutusunun fotoğrafı iki boyutludur ama fotoğraftaki kibrit kutusunun, üç boyutlu olduğu kolayca anlaşılır.

Demek ki esas olan kağıttaki şekle üç boyutlu olduğu görüntüsünü verebilmektir.

Bu şöyle sağlanır :

Şeklin çizileceği kağıt, karşınızdaki duvar gibi, düşey bir düzlemi temsil etmek üzere;

1. Gerçek şeklin düşey olan doğruları, kağıt üzerinde yine düşey olarak çizilir.
2. Gerçek şeklin kağıt düzlemine paralel olan yatay doğruları, yine yatay olarak çizilir.
3. Gerçek şeklin kağıt düzlemine paralel olmayan yatay doğruları, eğik olarak çizilir.
4. Gerçek şekilde birbirine paralel olan doğrular, yine birbirine paralel olarak çizilir.
5. Gerçek şekildeki çemberler kağıt düzlemine paralelse yine çember, değilse elips olarak çizilirler.
6. Gerçek şekilde ön yüzün arkasında kalan ve görünmeyen çizgiler, nokta nokta çizilir.

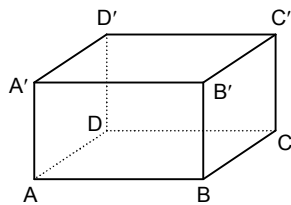
Yandaki şekil, köşeleri

A, B, C, D, A', B',

C', D' olan kibrit

kutusunun bu ilkelere

uyularak çizilmiş şeklidir.



Bu şekli inceleyiniz.

1. ABCD nin, yatay olan alt taban, A'B'C'D' nün, yatay olan üst taban olduğunu; A'B'C'D' nün görünmediğini ama ABCD nin ön yüzlerin arkasında kaldığı için görünmediğini görebiliyor musunuz?

2. ABB'A' nün, sayfa düzlemine paralel düşey ön yüz olup görüldüğünü, DCC'D' nün sayfa düzlemine paralel düşey arka yüz olup görünmediğini görebiliyor musunuz?

3. BCC'B' ile ADD'A' nün düşey yan yüzler olup bunlardan BCC'B' nün görüldüğünü, ADD'A' nün görünmediğini görebiliyor musunuz?

4. [AA'], [BB'], [CC'], [DD'] ayrıtlarının düşey ve birbirlerine paralel olduğunu; [AB], [DC], [A'B'], [D'C'] ayrıtlarının yatay ve birbirlerine paralel olduğunu; [BC], [AD], [B'C'], [A'D'] ayrıtlarının da birbirlerine paralel, yatay fakat kağıt düzlemine paralel olmadığını görebiliyor musunuz?

Bu sorulara cevaplarınız "evet" ise Uzay geometri problemlerini çözme konusunda önemli bir adım atmışsınız demektir.

ÖRNEK 11.1

A, B, C, D, E gibi farklı 5 nokta, en çok kaç farklı düzlem belirtebilir?

ÇÖZÜM :

Verilen noktaların herhangi dördü düzlemsel değil ise noktalar daha fazla sayıda düzlem belirtecektir. Doğrusal olmayan üç nokta bir düzlem belirttiğinden 5 nokta en çok

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \quad \text{düzlem belirtir.}$$

ÖRNEK 11.2

Bir K noktasında kesişen ve herhangi 3 ü düzlemsel olmayan 7 doğru, kaç farklı düzlem belirtir.

ÇÖZÜM :

Kesişen iki doğru bir düzlem belirttiğinden bu 7 nokta,

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21 \quad \text{düzlem belirtir.}$$

ÖRNEK 11.3

T noktası (ABCD)

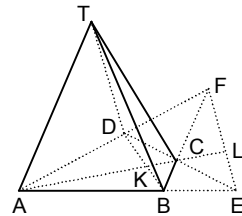
düzleminin dışındadır.

$$[AC] \cap [BD] = \{K\},$$

$$[AB] \cap [DC] = \{E\},$$

$$[AC] \cap [EF] = \{L\} \text{ ve}$$

[BC] \cap [AD] = \{F\} olduğuna göre (TAB), (TAC), (TBC), (ADE), (TEF) ve (TAF) düzlemlerinin ikişer ikişer arakesitlerini bulunuz.



İki düzlemin arakesitini bulmak için, bu iki düzlemin ortak olan iki noktasını bulmaya çalışırız. Bu iki noktanın belirttiği doğru arakesit olur. Bunu dikkate alarak, aşağıdaki cevapların nedenlerini görmeye çalışınız.

ÇÖZÜM :

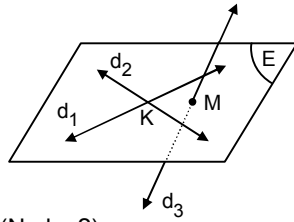
$$\begin{aligned}
 (TAB) \cap (TAC) &= TA, & (TAB) \cap (TBC) &= TB, \\
 (TAB) \cap (ADE) &= AB, & (TAB) \cap (TEF) &= TE, \\
 (TAB) \cap (TAF) &= TA, & (TAC) \cap (TBC) &= TC, \\
 (TAC) \cap (ADE) &= AC, & (TAC) \cap (TEF) &= TL, \\
 (TAC) \cap (TAF) &= TA, & (TBC) \cap (ADE) &= BC, \\
 (TBC) \cap (TEF) &= TF, & (TBC) \cap (TAF) &= TF, \\
 (ADE) \cap (TEF) &= EF, & (ADE) \cap (TAF) &= AD, \\
 (TEF) \cap (TAF) &= TF \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

ÖRNEK 11.4

Bir K noktasında kesişen d_1, d_2 doğruları ile (d_1, d_2) düzlemini bir M noktasında kesen d_3 doğrusu veriliyor. Bu üç doğruyu da kesen doğruları belirtiniz.

ÇÖZÜM :

d_1 ile d_2 yi farklı noktalarda kesen d doğruları (d_1, d_2) düzleminde bulunurlar. (Neden?)



Bu doğruların d_3 ü de kesmesi, ancak M den geçmeleri ile mümkündür. O halde (d_1, d_2) düzleminde, M den geçen ve d_1 ile d_2 doğrularından herhangi birine paralel olmayan doğrular üç doğruyu da kesen doğrulardır. Diğer taraftan (K, d_3) düzlemi içinde K dan geçen ve d_3 e paralel olmayan bütün doğruların da bu üç doğruyu keseceğini görürüz.

11.1.2 PARALEL DOĞRU VE DÜZLEMLER

Öncelikle, Euclid'in Paralel Aksiyomu'na dayandırılan, "Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir." teoremini hatırlatalım ve konumuza ait diğer teoremleri verelim :

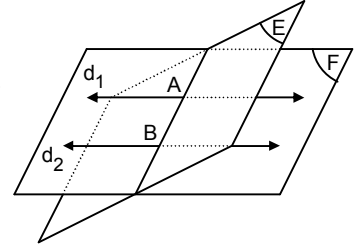
TEOREM 11.1

Paralel iki doğrudan birini kesen düzlem diğeri de keser.

İSPAT :

$d_1 \parallel d_2$ ve $d_1 \cap E = \{A\}$ olsun.

Teorem 2.19 gereğince, d_1 ile d_2 nin belirttiği



düzleme F diyelim. $A \in E \cap F$ dir. Aksiom 2.8'e göre $E \cap F$ bir doğrudur. Bu arakesit doğrusu F düzleminde d_1 'i A da kestiğinden, d_1 'e paralel olan d_2 'yi de B gibi bir noktada keser. (Teorem 2.9)

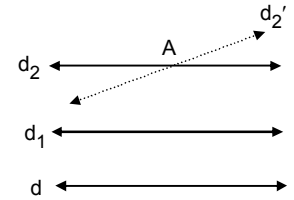
Öyleyse, $E \cap d_2 = \{B\}$ dir.

TEOREM 11.2

Aynı bir doğruya paralel olan iki doğru birbirine paraleldir.

İSPAT :

Uzayda d_1 ve d_2 farklı iki doğru olmak üzere $d_1 \parallel d$ ve $d_2 \parallel d$ verilmiş olsun.



$d_1 \parallel d_2$ olduğunu göstereceğiz.

Öncelikle, d_1 ile d_2 nin kesişemeyeceğini söyleyelim. Eğer d_1 ile d_2 bir K noktasında kesişseydi, K noktasından d ye iki paralel doğru çizilmiş olurdu ki bu Euclid Paralel Aksiyomu'na aykırıdır.

Bu durumda d_1 ile d_2 ya birbirine paraleldir ya da değildir. $d_1 \nparallel d_2$ varsayarak d_2 üzerindeki bir A noktasından d_1 e d_2' paralelini çizelim. (d_1, d_2') düzlemi d_2 doğrusunu bir A noktasında kestiğinden, d_2 ye paralel olan d doğrusunu da bir B noktasında keser. (Teorem 11.1) (d_1, d_2') düzlemi ile (d, d_1) düzleminin arakesiti d_1 olduğundan, (d_1, d_2') düzlemi d doğrusunu ancak d_1 üzerinde kesebilir. Bu, $d \cap d_1 = \{B\}$ demek olur ki bu da $d_1 \parallel d$ hipotezi ile çelişir.

Öyleyse, $d_1 \parallel d_2$ dir.

TEOREM 11.3

Bir düzlemin içindeki bir doğruya paralel olan ve düzlem içinde bulunmayan her doğru, bu düzleme paraleldir.

İSPAT :

$d \not\subset (E)$, $d' \subset E$ ve

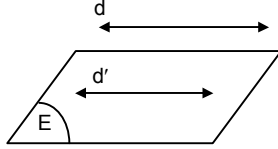
$d \parallel d'$ ise $d \parallel E$

olduğunu göstereceğiz.

$d \not\parallel E$ olduğunu varsayalım.

E düzlemi ile (d, d') düzleminin arakesiti d' olduğundan, d doğrusu E düzlemini ancak d' üzerinde kesebilir. Bu da $d \parallel d'$ hipotezi ile çelişir.

Öyleyse $d \parallel E$ dir.

**TEOREM 11.4**

Bir d doğrusu bir E düzlemine paralelse, d den geçen ve E yi kesen herhangi bir F düzleminin E ile arakesiti olan d' doğrusu d doğrusuna paraleldir.

Teorem 11.3 ün karıştı olan bu teoremi siz ispatlayınız.

TEOREM 11.5

Bir d doğrusu bir E düzlemine paralelse, bu düzlemin içinde alınan bir noktadan bu doğruya çizilen paralel doğru E düzleminin içinde kalır.

Euclid Paralel Aksiyomu ve Teorem 11.4 ten yararlanarak Olmayana Ergi Yöntemi ile ispatlayınız.

TEOREM 11.6

İki paralel doğrudan birine paralel olan bir düzlem diğer doğruya da paralel olur veya o doğruyu içine alır.

İSPAT :

$d_1 \parallel d_2$ ve $d_1 \parallel E$ ise

$d_2 \parallel E$ veya $d_2 \subset E$

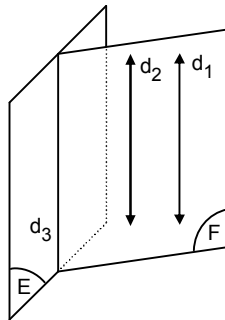
olduğunu göstereceğiz.

(d_1, d_2) düzlemi,

E düzlemine ya paralel

olur ya da E yi bir d_3

doğrusu boyunca keser.



$(d_1, d_2) \parallel E$ ise $d_2 \parallel E$ olacağı açıktır.

$(d_1, d_2) \cap E = d_3$ ise Teorem 11.4 gereğince $d_1 \parallel d_3$ olur. (d_1, d_2) düzleminde $d_1 \parallel d_2$ ve $d_1 \parallel d_3$ ise ya $d_2 \parallel d_3$ tür ya da d_2 ile d_3 çakışıkır. (Neden?)

d_2 ile d_3 ün çakışık olması $d_2 \subset E$ sonucunu ve $d_2 \parallel d_3$ olması $d_2 \parallel E$ sonucunu doğurur. (Teorem 11.3)

UYARI : İspat içinde adı geçen teoremleri hatırlayamazsanız, her teoremin adı geçtiğinde sayfaları çevirip o teoremi mutlaka okuyunuz. Bunu yapmazsanız ispatı nelere dayandırdığımızı anlayamazsınız.

TEOREM 11.7

Bir doğru kesişen iki düzlemin herbirine paralel ise, bunların arakesitine de paraleldir..

İSPAT :

$d \parallel E$, $d \parallel F$

ve $E \cap F = d_1$ ise

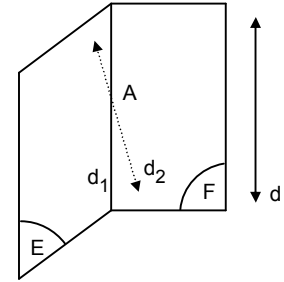
$d \parallel d_1$ olduğunu

göstereceğiz.

$d \not\parallel d_1$ varsayıp d_1

üzerindeki bir

A noktasından $d_2 \parallel d$ çizelim. Teorem 11.5 gereğince $d_2 \subset E$ ve $d_2 \subset F$ olması gerektiğinden d_1 ile d_2 çakışık olur. Demek ki, $d \parallel d_1$ dir.

**TEOREM 11.8**

Paralel iki doğrudan geçerek kesişen iki düzlemin arakesiti, o doğrulara paralel olur.

İSPAT :

$d_1 \parallel d_2$, $d_1 \subset E$,

$d_2 \subset F$ ve $E \cap F = d$

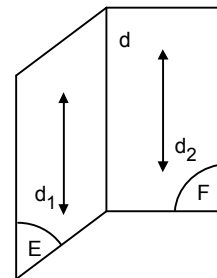
ise $d_1 \parallel d_2 \parallel d$

olduğunu göstereceğiz.

$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_1 \parallel F$ olup

d_1 ile d kesişemez.

Öyleyse, d_1 ile d aynı E düzlemi içinde bulunduğundan $d_1 \parallel d$ olur. Aynı yolla $d_2 \parallel d$ olduğu da gösterilebilir.



TEOREM 11.9

Kesişen iki doğrunun her biri bir E düzlemine paralel ise, bu doğruların belirttiği F düzlemi de E ye paraleldir.

Euclid Paralel Aksiyomundan yararlanarak, Olmaya-
na Ergi Yöntemi ile ispatlayabilirsiniz.

SONUÇ :

Paralel iki düzlemden birinin içindeki her doğru, diğer düzleme paraleldir.

TEOREM 11.10

Paralel iki düzlemin üçüncü bir düzlemle arakesitleri birbirine paraleldir.

İSPAT :

$E \parallel F$,

$P \cap E = d_1$ ve

$P \cap F = d_2$ ise

$d_1 \parallel d_2$ olduğunu

göstereceğiz.

$d_1 \nparallel d_2$ olsaydı,

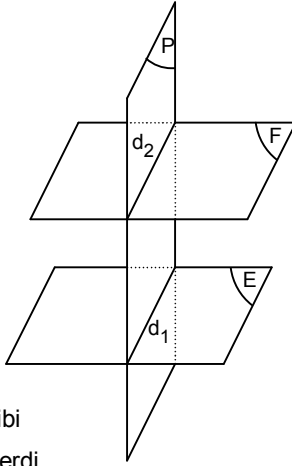
bu doğrular aynı

P düzleminde

bulunduklarından, A gibi

bir noktada kesişeceklerdi.

Bu durumda A noktası E ile F nin ortak bir noktası olacaktı ki bu $E \parallel F$ hipotezine aykırıdır.

**TEOREM 11.11**

Bir düzleme dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel düzlem çizilebilir.

İSPAT :

E düzlemi ile,

dışındaki A noktası

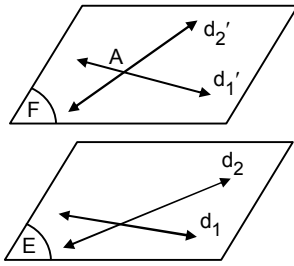
verilmiş olsun.

Önce, A dan geçen ve

E düzlemine paralel

olan bir F düzleminin

varlığını sonrada bunun tekliğini göstereceğiz.

**a) Varlık :**

E düzlemi içinde, kesişen d_1 ve d_2 doğrularını alalım. (A, d_1) düzleminde, A dan d_1 e d_1' paralelini, (A, d_2) düzleminde de A dan d_2 ye d_2' paralelini çizsek, d_1' ile d_2' nün belirttiği F düzlemi E ye paralel olur. (Teorem 11.3 ve Teorem 11.9)

b) Teklik :

A dan geçen ve E ye paralel olan, F den farklı bir F' düzleminin varlığını kabul edelim. Bu F' düzlemi d_1' ve d_2' doğrularından en az birini keser. (Neden?) F' düzleminin, örneğin d_1' doğrusunu kestiğini varsayalım. Bu durumda F' düzlemi, Teorem 11.1 gereğince d_1' ye paralel olan d_1 doğrusunu da kesecektir. Bu da F' ile E nin kesişmesi demek olup $F' \parallel E$ varsayımı ile çelişir.

Öyleyse, F' ile F çakışık olmak zorundadır.

SONUÇLAR :

1. Paralel iki düzlemden birini kesen bir düzlem diğerini de keser.
2. Aynı düzleme paralel olan farklı iki düzlem birbirine paraleldir.
3. Bir E düzlemine dışındaki bir A noktasından çizilen paralel doğruların geometrik yeri, A dan geçen ve E ye paralel olan bir düzlemdir.
4. Paralel iki düzlemden birini kesen bir doğru diğeri de keser.
5. Paralel iki düzlemden birine paralel olan bir doğru, ya diğer düzlemin içindedir ya da diğer düzleme de paraleldir.

Bu sonuçları siz ispatlayınız.

TEOREM 11.12

Paralel iki düzlem arasında kalan paralel doğru parçaları eşittir.

İspat için Teorem 11.10 dan yararlanınız.

UYARI : İspatı size bırakılan teoremleri mutlaka ispatlamaya çalışmalısınız. Önerdiğimiz yollarla, bu hiç de zor olmayacaktır. Belki biraz zaman harcayacaksınız; ama sonunda bizim yaptığımız ispatları incelemekle elde ettiğinizden fazlasını kazanacaksınız.

TEOREM 11.13 (Uzayda Thales Teoremi)

Bir takım paralel düzlemler, kendilerini kesen herhangi iki doğru üzerinde, karşılıklı olarak orantılı parçalar ayırırlar.

İSPAT :

d_1 ve d_2 doğruları

K, F, E düzlemlerini

A, B, C ve M, N, P

noktalarında kessin.

$E \parallel F \parallel K$ ise

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|MN|}{|NP|}$$

olduğunu göstereceğiz.

A dan d_2 ye çizilen d_2'

paraleli F ve E düzlemlerini

N' ve P' noktalarında kessin. (d_1, d_2') düzleminin F ve E ile arakesitleri birbirine paralel olup bu düzlemde

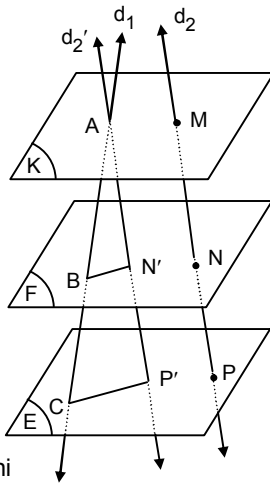
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AN'|}{|N'P'|} \text{ ① yazılabilir. (I. Thales Teoremi)}$$

Teorem 11.12 gereğince, paralel düzlemler arasında kalan paralel doğru parçaları eş olacağından

$$|AN'| = |MN| \text{ ve } |N'P'| = |NP| \text{ dir.}$$

Bu değerler ① de yerlerine koyulursa

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|MN|}{|NP|} \text{ elde edilir.}$$

**TEOREM 11.14**

Uzayda kenarları aynı yönlü olan iki açı eşittir.

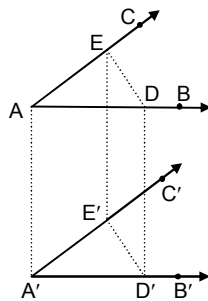
$\widehat{BAC}$ ve $\widehat{B'A'C'}$, kenarları aynı yönlü açılar olsun.

$DD' \parallel EE' \parallel AA'$ çizerek

$$\triangle DAE \cong \triangle D'A'E' \text{ (K.K.K.)}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAE} \cong \widehat{D'A'E'}$$

olacağını görünüz.

**SONUÇLAR :**

1. Uzayda, kenarları zıt yönlü olan iki açı eşittir.
2. Birer kenarları aynı yönlü ve diğer kenarları zıt yönlü iki açı bütünlerdir.

TANIM 11.1 (Aykırı iki doğru arasındaki açı)

Uzayın bir O noktasından, d_1 ve d_2 gibi aykırı iki doğruya çizilen paralel doğruların belirttiği açıya, d_1 ve d_2 aykırı doğrularının arasındaki açı denir.

Bu açı dik ise d_1, d_2 doğrularına **dik durumlu doğrular** denir..

Şekilde d_1 ile d_2

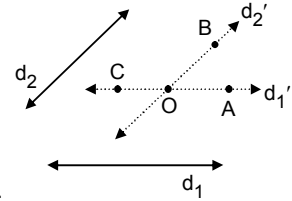
aykırı iki doğru,

$d_1 \parallel d_1'$ ve $d_2 \parallel d_2'$ ise

$\widehat{AOB}$ ya da $\widehat{BOC}$ açısı

d_1 ile d_2 arasındaki açıdır.

d_1, d_2 dik durumlu doğrular ise bu, dik oldukları durumdaki gibi $d_1 \perp d_2$ biçiminde gösterilir.

**TEOREM 11.15**

Paralel iki doğrudan birine dik veya dik durumlu olan bir doğru, diğerine de dik veya dik durumlu olur..

Tanım 11.1 den yararlanarak ispatlayınız.

NOT : Bundan sonraki ifadelerimizde “ d_1 ile d_2 birbirine diktir.” dediğimizde bu, “ d_1 ile d_2 birbirine diktir veya dik durumludur.” anlamına gelecektir.

ÖRNEK 11.5

Şekilde ABCD bir yamuk

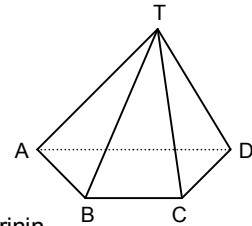
olup ($AD \parallel BC$)

T noktası (ABCD)

düzleminin dışındadır.

a) (TAB) ile (TCD) düzlemlerinin,

b) (TAD) ile (TBC) düzlemlerinin arakesitini belirtiniz.

**ÇÖZÜM :**

a) $AB \cap CD = \{E\}$ ise

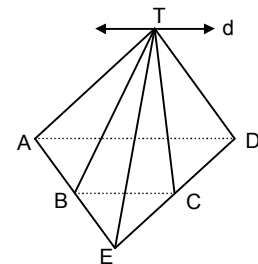
(TAB) ve (TCD)

düzlemlerinin ortak

noktalarından ikisi

E ile T olur.

Öyleyse ET, bu düzlemlerin arakesitidir.



b) Paralel iki doğrudan geçerek kesişen iki düzlemin arakesiti bu doğrulara paralel olacaktır.

(TAD) ve (TBC) düzlemlerinin bir ortak noktası T ve $AD \parallel BC$ olduğundan arakesit, T den geçen ve AD ile BC ye paralel olan bir d doğrusudur.

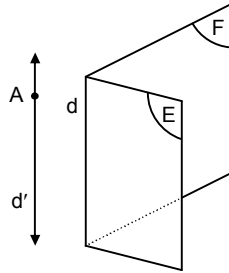
ÖRNEK 11.6

Verilen bir A noktasından geçen ve kesişen E ile F düzlemlerine paralel olan doğruyu çiziniz.

ÇÖZÜM :

$E \cap F = d$ olsun.

Kesişen iki düzleme paralel olan bir doğru, bunların arakesitine de paralel olacağından, A dan geçen ve d ye paralel olan d' doğrusu aranan doğrudur.



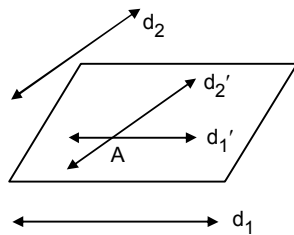
NOT : Uzay geometride bir şeklin çizimi, çoğu zaman bir düzlemdeki çizime dönüştürülür. “şekli çizmek” de daha çok “şekli belirlemek” anlamındadır. Örneğin, bir doğrunun A ve B noktaları belirlenmişse, elimize cetveli alıp AB doğrusunu çizmemiz gerekmez. O doğru A ve B noktaları ile belirtilmiştir. Bu problemde de d' doğrusu, A dan geçen ve d ye paralel olan bir doğru olarak belirlenmiştir. (d, A) düzleminde bu doğrunun nasıl çizileceği bellidir.

ÖRNEK 11.7

Verilen bir A noktasından geçen ve d_1 ile d_2 aykırı doğrularına paralel olan düzlemi çiziniz.

ÇÖZÜM :

A dan d_1 e (A, d_1) düzlemi içinde çizilen d_1' paraleli ile A dan d_2 ye (A, d_2) düzlemi içinde çizilen d_2' paralelinin belirttiği (d_1', d_2') düzlemi aranan düzlemdir.



11.1.3 DİK DOĞRU VE DÜZLEMLER

TANIM 11.2

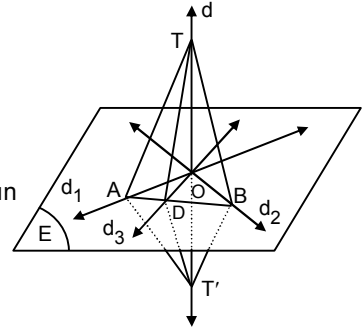
Bir doğru, bir düzlemin bütün doğrularına dik ise düzleme de **diktir**.

TEOREM 11.16

Bir doğru, bir düzlemin kesişen iki doğrusuna dik ise, düzleme de diktir.

İSPAT :

E düzleminde bir O noktasında kesişen d_1 ve d_2 doğruları ile bunların her ikisine de dik olan d doğrusu verilmiş olsun.



d doğrusunun, O dan geçen ve E düzleminin içinde kalan herhangi bir d_3 doğrusuna da dik olduğu gösterilebilirse, E düzleminin her doğrusuna dik olduğu, dolayısıyla E düzlemine dik olduğu ispatlanmış olur.

d_1 üzerinde A ve d_2 üzerinde B noktaları ile d üzerinde, E nin ayırdığı yarı uzaylarda, $|OT| = |OT'|$ olacak biçimde T ve T' noktalarını alalım. $AB \cap d_3 = \{D\}$ olsun. d_1 ile d_2 doğruları, d nin farklı düzlemlerdeki orta dikmeleri olduğundan $|TA| = |TA'|$ ve $|TB| = |TB'|$ olur.

Bu eşitlikler $\triangle TAB \cong \triangle T'AB$ (K.K.K.) eşliğini gerektirir.

$\triangle TAB \cong \triangle T'AB \Rightarrow \angle TAB \cong \angle T'AB$ ve buradan

$\triangle TAD \cong \triangle T'AD$ (K.A.K.) olduğunu görürüz.

Bu son eşliğe göre $|TD| = |T'D|$ olup D noktası $[TT']$ nün orta dikmesi üzerindedir.

Öyleyse d_3 doğrusu $[TT']$ nün orta dikmesi olup d doğrusuna diktir.

SONUÇLAR :

1. Paralel iki düzlemden birine dik olan doğru, diğerine de diktir.

İspat için Teorem 11.14 ve Teorem 11.16 dan yararlanınız.

2. Paralel iki doğrudan birine dik olan düzlem diğere de diktir.

İspat için Teorem 11.15 ve Teorem 11.16 dan yararlanınız.

TEOREM 11.17

Verilen bir noktadan geçmek ve verilen bir doğruya dik olmak üzere, bir ve yalnız bir düzlem çizilebilir.

İSPAT :

a) A noktası d doğrusunun üzerinde ise :

d den geçen E ve F düzlemlerinde, A dan d ye d_1 ve d_2 dikmeleri çizilirse, d doğrusu d_1 ile d_2 nin belirttiği düzleme dik olur.

Demek ki, d doğrusuna

A da dik olan bir (d_1, d_2) düzlemi vardır. Şimdi bu düzlemin yalnız bir tane olduğunu gösterelim.

d ye A da dik olan ikinci bir P düzleminin varlığını kabul edelim. P nin F ile arakesiti d_2 den farklı bir d_2' doğrusu olacaktır. Bu durumda F düzlemi içinde $d \perp d_2$ ve $d \perp d_2'$ olacağından, A dan d ye farklı iki dikme çizilmiş olur ki bu Dikme Teoremi'ne aykırıdır.

b) A noktası d doğrusunun dışında ise :

Önce, (A, d) düzleminde

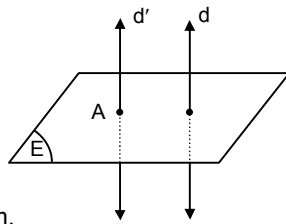
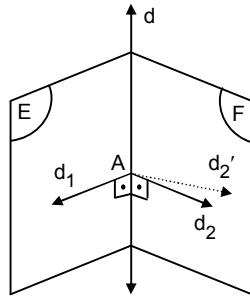
A dan d ye bir d' paraleli çizilir. Sonra, (a) daki yol ile A dan d' ye dik bir E düzlemi çizilirse bu düzlem,

d' ye paralel olan d doğrusuna da dik olur.

SONUÇ :

Aynı doğruya dik olan farklı iki düzlem, birbirine paraleldir.

Bu sonucu Olmayana Ergi Yöntemi ile ispatlayabilirsiniz.



TEOREM 11.18

Bir noktadan bir doğruya dik veya dik durumlu olmak üzere çizilen doğruların geometrik yeri, bu noktadan geçen ve bu doğruya dik olan bir düzlemdir.

Siz ispatlayınız.

TEOREM 11.19

Verilen bir noktadan geçmek ve verilen bir düzleme dik olmak üzere, bir ve yalnız bir doğru çizilebilir.

İSPAT :

a) A noktası E düzleminin içinde ise :

E düzlemi içinde A dan geçen bir d_1 doğrusunu ve A dan geçen, d ye dik olan F düzlemini çizelim. (Teorem 11.17)

E ile F nin arakesiti d_2 olsun. F düzlemi içinde A dan $d \perp d_1$ çizersek

bu d doğrusu E düzlemine dik olur. (Teorem 11.16)

Şimdi bu d doğrusunun tekliğini gösterelim :

A dan geçen ve E düzlemine dik olan ikinci bir d' doğrusunun varlığını kabul edelim.

(d, d') düzleminin E ile arakesiti d_3 olsun.

Buna göre

$d \perp E \Rightarrow d \perp d_3$ ve

$d' \perp E \Rightarrow d' \perp d_3$

olması gerekir ki bu Dikme Teoremine aykırıdır.

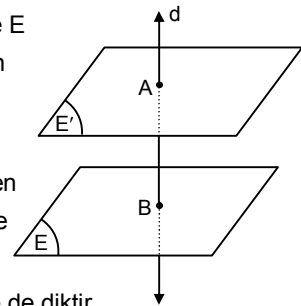
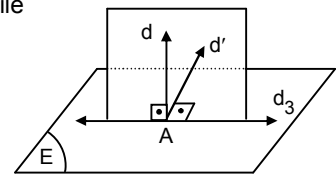
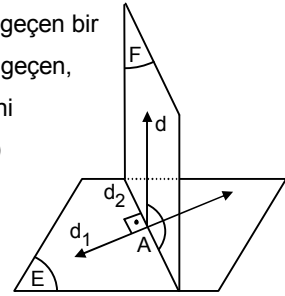
Öyleyse, d doğrusu tektir.

b) A noktası E düzleminin dışında ise :

Önce, A dan geçen ve E düzlemine paralel olan E' düzlemi çizilir.

(a) daki yolla E' düzlemine A dan çizilen dik doğrunun varlığı ve tekliği gösterilir.

Bu doğru E düzlemine de diktir.



SONUÇ :

Bir düzleme dik olan farklı iki doğru birbirine paraleldir.

Olmayana Ergi Yöntemi ile ispatlayınız.

TEOREM 11.20 (Üç Dikme Teoremi - 1)

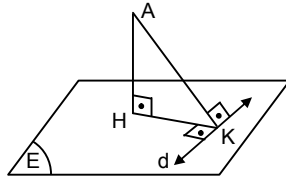
Bir E düzlemine ve bunun içindeki bir d doğrusuna düzlemin dışındaki bir A noktasından birer dikme çizilse, iki dikme ayağının belirttiği doğru d doğrusuna dik olur.

İSPAT :

$AH \perp E$ ve $AK \perp d$ ise

$HK \perp d$ olduğunu

göstereceğiz.



$AH \perp E \Rightarrow AH \perp d$ ① ve $AK \perp d$ ② dir.

① ve ② den, Teorem 11.16 gereğince $d \perp (AHK)$ bulunur. $d \perp (AHK) \Rightarrow d \perp HK$ dir.

TEOREM 11.21 (Üç Dikme Teoremi - 2)

Bir E düzleminin dışındaki bir A noktasından düzleme bir dikme indirilse, sonra dikme ayağından düzlemin içindeki bir d doğrusuna bir dikme çizilse, A'yı bu ikinci dikme ayağına birleştiren doğru d'ye dik olur.

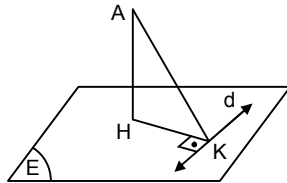
$AH \perp E$ ve

$HK \perp d$ ise

$AK \perp d$ olduğu

gösterilecektir.

Bunu siz yapınız.

**TEOREM 11.22** (Üç Dikme Teoremi - 3)

Bir E düzleminin içindeki bir d doğrusunun üzerinden de alınan bir K noktasından bu doğruya, biri bu düzlemin içinde, diğeri dışında olmak üzere iki dikme çizilse ve sonra düzlemin dışındaki dikme üzerinde alınan bir A noktasından düzleme bir dikme indirilse, bu dikmenin ayağı düzlemin içindeki dikmenin üzerinde olur.

Siz ispatlayınız.

TANIM 11.3

Bir doğru bir düzlemi, ona dik olmadan keserse bu doğruya **eğik** ve doğru ile düzlemin ortak noktasına **eğik ayağı** denir.

TEOREM 11.23

Bir düzlemin dışında alınan bir noktadan bu düzleme bir dikme ile birtakım eğikler çizilse;

a) Dikme eğiklerin hepsinden kısadır.

b) Ayakları dikme ayağından eşit uzaklıkta bulunan eğikler eşittir

c) Ayağı dikme ayağından en uzakta bulunan eğik en uzundur.

A noktası E düzleminin

dışında, B, C, D, H

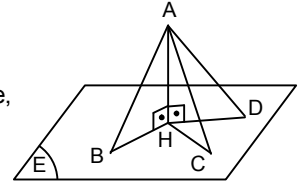
noktaları düzlemin içinde,

$AH \perp E$,

$|HB| = |HC| < |HD|$ ise

$|AH| < |AB| = |AC| < |AD|$ olduğu gösterilecektir.

Bunu siz yapınız; ayrıca teoremin karşınının da doğru olduğunu gösteriniz.

**TANIM 11.4**

Bir noktadan bir düzleme indirilen dikmenin uzunluğuna **o noktanın o düzleme uzaklığı**,

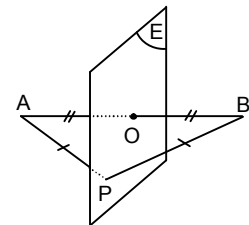
bir doğrunun üzerindeki bir noktadan, bu doğruya paralel olan bir düzleme indirilen dikmenin uzunluğuna **o doğrunun o düzleme uzaklığı**,

paralel iki düzlemden birine ait bir noktanın diğer düzleme uzaklığına **bu iki düzlemin uzaklığı** denir.

TEOREM 11.24

Bir doğru parçasının uçlarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu doğru parçasına orta noktasında dik olan bir düzlemdir. Bu düzleme o doğru parçasının **orta dikme düzlemi** denir..

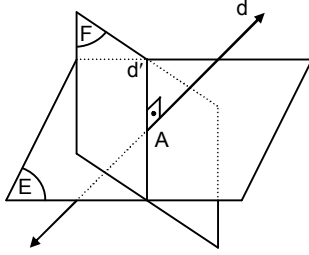
Siz ispatlayınız.

**ÖRNEK 11.8**

Bir E düzlemini bir A noktasında kesen bir d doğrusu veriliyor. E düzlemi içinde, A'dan geçen ve d'ye dik olan doğruyu çiziniz.

ÇÖZÜM :

Aranan doğru,
A noktasında d'ye dik
olan F düzlemine ait
doğrulardan biridir.
Bu doğrunun E
düzleminin içinde
kalması da istendiğine göre bu doğru E ile F nin
arakesiti olan d' doğrusudur.
A dan geçen ve d'ye dik olan F düzlemi Teorem
11.17 deki gibi çizilir.

**ÖRNEK 11.9**

Bir $\triangle ABC$ ikizkenar dik üçgeninin A dik açı köşesinden
(ABC) düzlemine çıkılan dikme üzerinde bir T nok-
tası alınıyor.

$|BC| = a$ olduğuna göre $|AT|$ uzunluğu ne olmalıdır ki
 $\triangle TBC$ üçgeni eşkenar olsun.

ÇÖZÜM :

$[BC]$ nin D ortasını

A ile T ye birleştirelim.

$|BC| = a$ ise $\triangle ABC$ dik

üçgeninde $|AD| = \frac{a}{2}$ ve

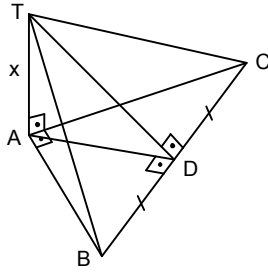
$\triangle TBC$ eşkenar üçgeninde $|TD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ olur.

$TA \perp (ABC) \Rightarrow TA \perp AD$ olacağından

$\triangle TAD$ dik üçgeninde

$$|TA|^2 = |TD|^2 - |AD|^2 \Rightarrow |TA|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow |TA| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

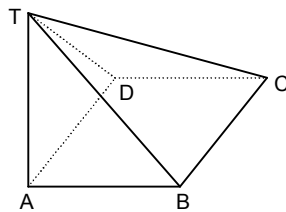
**ÖRNEK 11.10**

$[TA]$ doğru parçası
ABCD dikdörtgeninin
düzlemine diktir.

Buna göre

$\triangle TAB$, $\triangle TBC$, $\triangle TCD$, $\triangle TAD$

üçgenlerinden hangileri dik üçgendir?

**ÇÖZÜM :**

$TA \perp (ABCD)$ ise $TA \perp AB$, $TA \perp AD$, $TA \perp BC$ ve
 $TA \perp CD$ dir.

Buna göre $\triangle TAB$ ve $\triangle TAD$ üçgenleri birer dik üçgendir.

Üç Dikme Teoremi'ne göre

$TA \perp BC$ ve $AB \perp BC$ ise $TB \perp BC$,

$TA \perp DC$ ve $AD \perp DC$ ise $TD \perp DC$ olduğundan

$\triangle TBC$ ve $\triangle TCD$ üçgenleri de birer dik üçgendir.

ÖRNEK 11.11

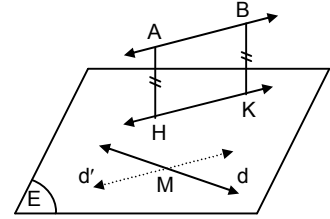
Verilen A ve B noktalarından eşit uzaklıkta bulunan
ve verilen bir d doğrusundan geçen düzlemi çizin.

ÇÖZÜM :

Problemi çözülmüş
varsayalım.

A ve B den eşit
uzaklıkta bulunan
ve d doğrusundan

geçen düzlem E olsun.



Bir noktanın bir düzleme uzaklığının tanımına göre,
 $AH \perp E$ ve $BK \perp E$ çizersek $|AH| = |BK|$ olur. Aynı
düzleme dik olan iki doğru paralel olduğundan, aynı
zamanda $AH \parallel BK$ dır. Buna göre HKBA dörtgeni bir
dikdörtgen, $AB \parallel HK$ ve $AB \parallel E$ olur.

O halde, d üzerindeki bir M noktasından AB ye
çizilen d' paraleli ile d nin belirttiği (d, d') düzlemi,
çizimi istenen düzlemlerden biridir.

A ile B noktaları farklı yarı uzaylarda olmak üzere,
aranan koşullara uyan bir düzlem daha çizilebilir.

Yine problemi çözülmüş

varsayalım. A ve B den

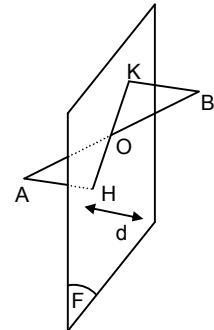
eşit uzaklıkta bulunan ve

d doğrusundan geçen

düzlem F olsun.

$AH \perp F$ ve $BK \perp F$ çizersek,

$|AH| = |BK|$ ve $AH \parallel BK$ olur.



$[KH]$ ve $[AB]$ de çizilirse, $[AB] \cap F = \{O\}$ olmak
üzere, II. Thales Teoremi'ne göre,

$$\frac{|AO|}{|OB|} = \frac{|AH|}{|KB|} \Rightarrow |AO| = |OB| \text{ bulunur.}$$

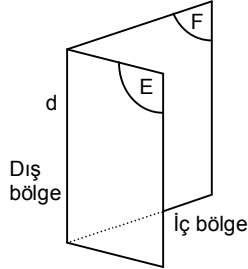
Demek ki, F düzlemi $[AB]$ nin ortasından geçmektedir. O halde, aranan koşullara uyan diğer düzlem, $[AB]$ nin ortası O olmak üzere, (d, O) düzlemidir.

11.1.4 İKİDÜZLEMLİ AÇILAR VE DİK DÜZLEMLER

TANIM 11.5

Kenar doğruları ortak olan iki yarıdüzlemin birleşimine **ikidüzlemlî açı** veya **ikiyüzlü açı** denir.

Şekildeki ikidüzlemlî açı, E ve F yarıdüzlemlerinin birleşimidir. E ve F yarıdüzlemlerine ikidüzlemlî açının **yüzleri**, bunların AB kenar doğrusuna da bu ikidüzlemlî açının **ayrıtı** denir.



Bu açı (E, d, F) ya da (E, F) biçiminde gösterilir. Bir iki düzlemlî açı uzayı, ayrık iki kümeye ayırır. Bu kümelerden konveks olanı açının **iç bölgesi**, konkav olanı açının **dış bölgesi**dir.

Bir ikidüzlemlî açının yüzleri düzlemsel ise bu açığa **düz ikidüzlemlî açı** denir.

TANIM 11.6

Bir ikidüzlemlî açının ayrıtı üzerindeki bir noktadan bu ayrıtıya, açının yüzleri içinde çizilen dikmelerin belirttiği açığa, bu ikidüzlemlî açının **ölçek açısı** denir.

(E, d, F) açısında $A \in d$,

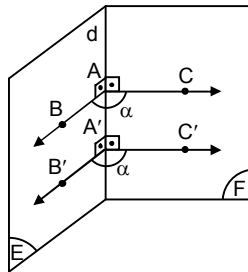
$[AB \subset E, [AC \subset F,$

$AB \perp d$ ve $AC \perp d$ ise

$\widehat{BAC}$ açısı ölçek açısıdır.

Ölçek açısı, bir ikidüzlemlî açının ayrıtına dik olan bir düzlem ile açının

yüzlerinin kesişimi olarak da tanımlanabilir. Bir ikidüzlemlî açının bütün ölçek açıları, kenarları aynı yönlü açılar olduklarından, eşittir.

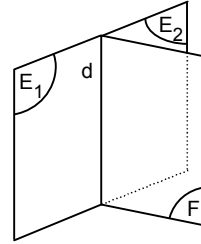


TEOREM 11.25

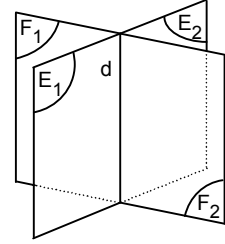
Ölçek açıları eş olan ikidüzlemlî iki açı eşittir.

Bu teoremin karşıtı da geçerlidir.

İkidüzlemlî bir açı, ölçek açısının ölçüsüne göre isimler alır. **Dar, dik, geniş...** gibi. İkidüzlemlî açığa, ölçek açılarının konumuna ve ölçülerine göre **komşu, tümleler, bütümler, ters ikidüzlemlî açılar** diyebiliriz.



(E_1, d, F_1) ile (F_1, d, E_2) komşu bütümler açılarıdır.



(E_1, F_1) ile (E_2, F_2) ters açılarıdır.

TANIM 11.7

İkidüzlemlî bir açının ayrıtından geçen ve bu açığı eş iki ikidüzlemlî açığa ayıran düzleme, bu ikidüzlemlî açının **açıortay düzlemi** denir.

TEOREM 11.26

İkidüzlemlî bir açının yüzlerinden eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu açının açıortay düzlemidir.

İSPAT :

Önce (E, d, F) ikidüzlemlî açısının yüzlerinden eşit uzaklıkta bulunan herhangi bir M noktasının, açıortay düzlemi üzerinde olduğunu; sonra da açıortay düzlemi

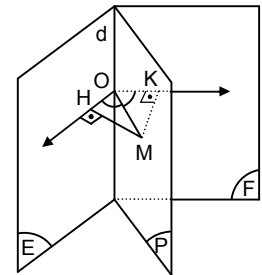
üzerindeki bir M noktasının, açının yüzlerinden eşit uzaklıkta olduğunu göstereceğiz.

$MH \perp E, MK \perp F$ ve $|MH| = |MK|$ olsun.

(HMK) düzlemi d ayrıtını O da kessin.

$\widehat{MOH} \cong \widehat{MOK}$ (K.K.A.) olduğunu görünüz.

Bu eşliğe göre $\widehat{MOH} \cong \widehat{MOK}$ dir.



$MH \perp E \Rightarrow MH \perp d$ ① ve

$MK \perp F \Rightarrow MK \perp d$ ② olup

① ve ② den $d \perp (HMK)$ ve buradan $d \perp OM$ olur.

Buna göre, (d, M) düzlemine (P) dersek $\widehat{MOH}$ ve $\widehat{MOK}$ açıları, (E, d, F) ve (P, d, F) ikidüzlemli açılarının ölçek açıları olur. Bu açılar eş olduğundan P düzlemi (E, d, F) açısının açığortay düzlemidir.

Açığortay düzlemi üzerinde bir noktanın da E ve F yüzlerinden eşit uzaklıkta olacağı kolayca gösterilebilir.

Öyleyse, (E, d, F) ikidüzlemli açısının yüzlerinden eşit uzaklıkta bulunan M noktalarının geometrik yeri bu açının P açığortay düzlemidir.

TANIM 11.8

Kesişen iki düzlemin belirttiği ikidüzlemli açılardan biri dik ise, bu iki düzlem **birbirine diktir** denir.

TEOREM 11.27

Bir d doğrusu bir E düzlemine dik ise d den geçen her düzlem E düzlemine dik olur.

İSPAT :

E düzlemi ile buna dik bir d doğrusu verilmiş olsun.

d den geçen bir F düzlemi alalım.

$E \cap F = d'$ ve $d \cap E = \{A\}$ diyelim.

E düzlemi içinde, A dan d' arakesitine bir AB dikmesi çizelim.

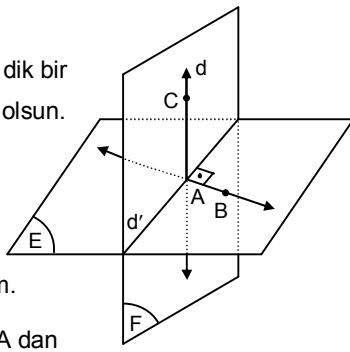
$C \in d$ olmak üzere,

F düzleminde $CA \perp d'$ ve

E düzleminde $BA \perp d'$ olduğundan

$\widehat{BAC}$ açısı (E, d', F) açısının ölçek açısı olur.

$d \perp E \Rightarrow CA \perp E \Rightarrow CA \perp AB$ olduğundan, bu ölçek açı dik açı olup $E \perp F$ dir.



TEOREM 11.28

Birbirine dik olan iki düzlemden birinin içinde arakesite dik olarak çizilen her doğru, diğer düzleme dik olur.

Tanım 11.8 den yararlanarak, siz ispatlayınız.

TEOREM 11.29

Birbirine dik olan iki düzlemden birinin içindeki bir noktadan diğer düzleme çizilen dik doğru, ilk düzlemin içinde kalır.

Teorem 11.28 ve Teorem 11.19 dan yararlanarak, Olmayana Ergi Yöntemi ile ispatlayınız.

TEOREM 11.30

Paralel iki düzlemden birine dik olan düzlem diğerine de diktir.

İSPAT :

$E \parallel F$ ve $P \perp E$ iken $P \perp F$ olduğunu göstereceğiz.

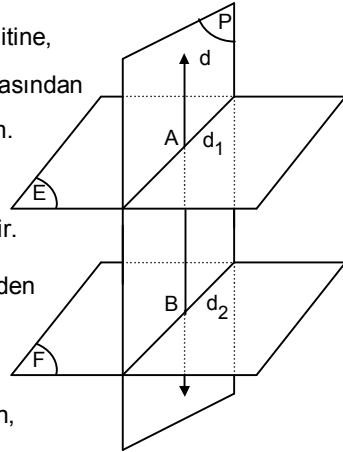
$E \cap P = d_1$ olmak üzere

P içinde d_1 arakesitine, üzerindeki A noktasından d dikmesini çizelim.

Teorem 11.28 gereğince $d \perp E$ dir.

Paralel iki düzlemden birine dik olan doğru, diğerine de dik olacağından, $d \perp F$ olur.

O halde Teorem 11.27 gereğince, d den geçen P düzlemi de F düzlemine diktir.



TEOREM 11.31

Kesişen iki düzlemin her biri bir E düzlemine dik ise, bu düzlemlerin arakesitleri de E düzlemine dik olur.

Teorem 11.29 dan yararlanarak, Olmayana Ergi Yöntemi ile ispatlayınız.

TEOREM 11.32

Aynı düzleme dik olan bir doğru ile bir düzlem birbirine paralel olur.

İSPAT :

$d \perp E$ ve $F \perp E$ ise $d \parallel F$ olduğunu göstereceğiz.

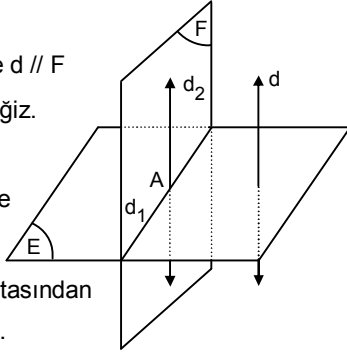
$$E \cap F = d_1$$

olmak üzere F içinde

d_1 arakesitine,

üzerindeki bir A noktasından

d_2 dikmesini çizelim.



Teorem 11.28 gereğince $d_2 \perp E$ dir. Aynı E düzlemine dik olan d_2 ve d doğruları birbirine paralel olacağından, d doğrusu, d_2 yi taşıyan F düzlemine de paralel olur.

TEOREM 11.33

Bir doğru iki düzlemden birine dik diğerine paralel ise bu iki düzlem birbirine dik olur..

Siz ispatlayınız.

TEOREM 11.34

Bir düzleme dik olmayan bir doğrudan geçen ve bu düzleme dik olan bir ve yalnız bir düzlem çizilebilir.

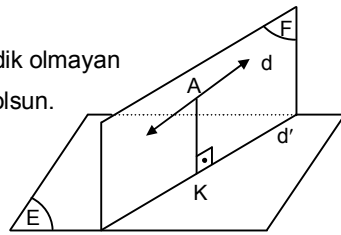
İSPAT :

E düzlemi ile buna dik olmayan d doğrusu verilmiş olsun.

d üzerindeki bir A

noktasından

E düzlemine

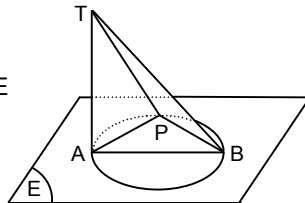


AK dikmesini çizersek, (Nasıl?) d ile AK nın belirttiği F düzlemi E ye dik olur. (Teorem 11.27)

d üzerindeki her noktadan E ye çizilecek bütün dikmeler bu F düzlemi içinde kalacağından F taktır.

ÖRNEK 11.12

$[AB]$ çaplı çembere ait E düzlemine AT dikmesi çiziliyor.



- a) TABP şeklinde bütün yüzlerin dik üçgen olduğunu,
b) (TPA) ve (TPB) düzlemlerinin birbirine dik olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

- a) $TA \perp E$ ise $TA \perp AB$, $TA \perp AP$ ve $TA \perp PB$ olacağından $\triangle TAB$ ve $\triangle TAP$ üçgenleri dik üçgendir.

$\widehat{APB}$ açısı çemberin çapı gören çevre açısı olduğundan, $AP \perp PB$ olup $\triangle PAB$ bir dik üçgendir.

$TA \perp PB$ ve $AP \perp PB$ olduğundan, Üç Dikme Teoremi'ne göre $TP \perp PB$ olup $\triangle TPB$ üçgeni de bir dik üçgendir.

- b) $TA \perp PB$ ve $AP \perp PB$ olduğundan $PB \perp (TPA)$ olur. $PB \subset (TPB)$ olduğundan $(TPA) \perp (TPB)$ dir.

ÖRNEK 11.13

Bir kenarının uzunluğu

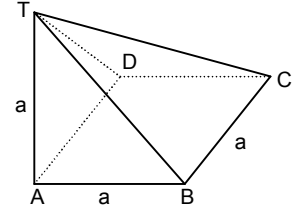
a olan ABCD karesinin

A köşesinden (ABCD)

düzlemine çizilen

dikme üzerinde

$|TA| = a$ olacak biçimde bir T noktası alınıyor.



- a) (ABCD) ile (TBC)

- b) (TAB) ile (TBC)

- c) (TBC) ile (TCD)

düzlemleri arasındaki açıyı ya da bu açının kosinüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM :

- a) Üç Dikme Teoremi'ne göre

$TA \perp (ABCD)$ ve $AB \perp BC \Rightarrow TB \perp BC$ ve

$TA \perp (ABCD)$ ve $AD \perp DC \Rightarrow TD \perp DC$ dir.

$(ABCD) \cap (TBC) = BC$, $AB \perp BC$ ve $TB \perp BC$ olduğundan $(ABCD)$ ile (TBC) düzlemleri arasındaki açının ölçek açısı $\widehat{ABT}$ açısıdır.

$\triangle TAB$ dik üçgeninde $m(\widehat{ABT}) = 45^\circ$ dir.

- b) $BC \perp AB$ ve $BC \perp TB$ olduğundan $BC \perp (TAB)$ dir. $BC \subset (TBC)$ ve $BC \perp (TAB)$ olduğundan $(TAB) \perp (TBC)$ olur. Öyleyse, bu düzlemler arasındaki açının ölçek açısı 90° dir.

c) $|TB| = |TD| = a\sqrt{2}$,

$|TC| = a\sqrt{3}$ ve

$\triangle TBC \cong \triangle TDC$

olduğunu görünüz.

$\triangle TBC$ dik üçgeninde

$BE \perp TC$ çizilirse

$DE \perp TC$ olur.

Öyleyse, (TBC) ile (TCD) düzlemleri arasındaki açının ölçek açısı $\widehat{BED}$ açısıdır. $m(\widehat{BED}) = \alpha$ olsun.

Bu açının ölçüsünü bulabilmek için $\triangle BED$ üçgeninin kenar uzunluklarını hesaplayalım :

$\triangle TBC$ dik üçgeninde

$$|TC| \cdot |BE| = |TB| \cdot |BC| \Rightarrow a\sqrt{3} \cdot |BE| = a\sqrt{2} \cdot a$$

$$\Rightarrow |BE| = \frac{\sqrt{6}}{3} a \text{ olur.}$$

$$|BE| = |DE| = \frac{\sqrt{6}}{3} a \text{ ve } |BD| = a\sqrt{2} \text{ olup}$$

$\triangle BED$ üçgenine Kosinüs Teoremi uygulanırsa,

$$|BD|^2 = |BE|^2 + |DE|^2 - 2|BE| \cdot |DE| \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow (a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 11.14

Bir doğru (E, d, F) ikidüzlemlili açısının yüzlerini A ve B noktalarında kesiyor. d üzerinde öyle bir P noktası bulunuz ki $\widehat{APB}$ açısı dik açı olsun.

ÇÖZÜM :

$\widehat{APB}$ dik açı ise

$\triangle PAB$ dik üçgeninde

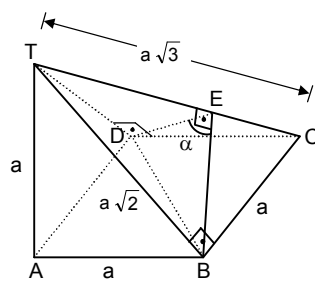
$$|KA| = |KB| = |KP| \text{ olur.}$$

Öyleyse $[AB]$ nin ortası

K olmak üzere, (d, K)

düzleminde K merkezli ve $|KP| = \frac{1}{2}|AB|$ yarıçaplı

çember yayının d yi kestiği nokta aranan P noktası olacaktır. Bu yayın d yi kesmesi için K nın d ye uzaklığının en az $\frac{1}{2}|AB|$ kadar olması gerekir.



ÖRNEK 11.15

Verilen bir A noktasından geçen, verilen bir d doğru-suna paralel ve verilen bir E düzlemine dik olan düzlemi çiziniz.

ÇÖZÜM :

A noktası, d doğrusu ve

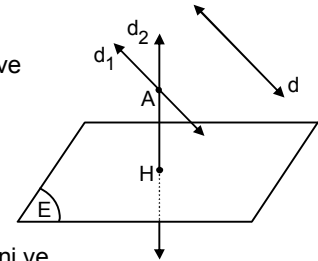
E düzlemi şeklindeki

gibi verilmiş olsun.

(d, A) düzlemi içinde

A dan d ye d_1 paralelini ve

A dan E ye d_2 dikmesini çizerek (d_1, d_2) düzlemi d ye paralel ve E ye dik olur.



11.1.5 Dik İzdüşüm

TANIM 11.9

Bir A noktasından bir E düzlemine indirilen dikmenin A' ayağına, A nın E düzlemi üzerindeki **dik izdüşümü**, E düzlemine **izdüşüm düzlemi**, AA' doğrusuna da **izdüşüren doğru** denir.

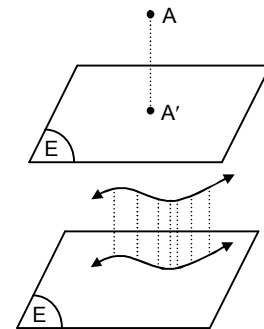
Bir şeklin bir düzlem üzerindeki izdüşümünün,

bu şekli oluşturan

noktaların o düzlemdeki

izdüşümlerinin birleşimi

olacağı açıktır.



NOT : Lise matematiğinde başka türlü izdüşümlerden söz edilmeyeceği için **dik izdüşüm** yerine **izdüşüm** terimini kullanacağız.

TEOREM 11.35

Bir düzleme dik olmayan bir doğrunun bu düzlem üzerindeki izdüşümü yine bir doğrudur.