ÜNİTE 11

İntegral Kavramı

Yazar
Prof.Dr.Vakıf CAFEROV

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- belirli ve belirsiz integral kavramlarını öğrenecek,
- belirli integralin geometrik anlamını görecek,
- integral teknikleri ile tanışacaksınız.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

- Belirli integral ve belirsiz integral kavramları arasındaki ilişkiye dikkat ediniz
- Belirsiz integral ve türev kavramları arasındaki bağlantıyı görmeye çalışınız
- Çok sayıda fonksiyon örneği alıp, integrallerini bulmaya çalışınız.

1. Giriş

İntegral kavramı da türev gibi, matematiğin temel kavramlarından biridir. İntegral teorisinin tarihsel gelişimini incelediğimizde bu kavramdaki temel düşüncenin ilk defa Eudoxos (M.Ö. 408-355) tarafından kullanıldığını görürüz. Bu düşünce Arşimet (M.Ö. 287-212) tarafından geometrik şekillerin alan ve hacimlerinin hesaplanmasında kullanılarak oldukça gelişir. Daha sonra Newton ve Leibniz, alan ve hacim hesaplaması türünden çalışmalar için integrali sistemli bir araç haline getirdiler. Bugün uygulamalı bilimlerde de sıkça kullanılan klasik integrasyon teorisi Riemann (1826-1866) tarafından geliştirilmiştir.

Bu ünitede biz belirli integral (Riemann integrali) ve belirsiz integrali tanımlayıp, onların temel özelliklerini ve integral alma yöntemlerini kısaca ele alacağız.

2. İlkel Fonksiyon

Türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde onun türevinin nasıl bulunabileceğini geçen ünitelerde öğrenmiş olduk. Hareket eden cismin hız formülüne göre hareket denkleminin bulunması, her noktasında eğimi bilindiğinde eğrinin kendisinin bulunması gibi problemlerde de olduğu gibi bazen ters problemi çözmemiz gerekiyor: $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde öyle bir $F(x)$ fonksiyonu bulmamız gerekir ki $F(x)$ in türevi $f(x)$ olsun.

Bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer öyle bir $F(x)$ fonksiyonu varsa ki her bir x için $F'(x) = f(x)$ olsun, o zaman $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in **ilkel fonksiyonu** denir. Örneğin

$f(x) = x$ fonksiyonunun ilkeli $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ dir, çünkü $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = x$;

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun ilkeli $F(x) = -\cos x$ dir, çünkü $(-\cos x)' = \sin x$;

$f(x) = 3^x$ fonksiyonunun ilkeli $F(x) = \dfrac{3^x}{\ln 3}$ dür, çünkü $\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}\right)' = 3^x$.

Şimdi bir hususa dikkat etmemiz gerekiyor. $f(x)$ in ilkel fonksiyonu $F(x)$ ise, C her hangi bir sabit olmak üzere, $F(x) + C$ fonksiyonu da $f(x)$ in ilkelidir, çünkü sabitin türevi sıfır olduğundan

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

olur. Buna göre, C keyfi sabit olmak üzere, $\dfrac{x^2}{2} + C$, $-\cos x + C$ ve $\dfrac{3^x}{\ln 3} + C$ fonksiyonları da sırasıyla x, $\sin x$ ve 3^x fonksiyonlarının birer ilkelidir. Dolayısıylabir $f(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu tek değildir. O zaman şu soru ortaya çıkar: Bir $f(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonları ne kadar çoktur? Bu sorunun cevabı ispatsız olarak vereceğimiz aşağıdaki önermeden çıkar.

Önerme 1

Eğer $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları bir $f(x)$ fonksiyonunun iki tane ilkel fonksiyonları ise, o zaman öyle bir C sabiti vardır ki

$$F(x) = G(x) + C$$

dir.

Bu önermeye göre, $f(x)$ fonksiyonunun her hangi $F(x)$ ilkelini bulup, üzerine keyfi C sabiti eklersek o zaman $f(x)$ in tüm ilkelleri bulunmuş olur. Örneğin, $f(x) = x$ fonksiyonunun tüm ilkelleri, C keyfi sabit olmak üzere, $\frac{x^2}{2} + C$ şeklindedir.

Örnek:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2) $f(x) = \tan x$

fonksiyonlarının tüm ilkellerini bulunuz.

Çözüm:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nin tüm ilkelleri $F(x) = -\frac{1}{x} + C$ dir.

Çünkü $F'(x) = \left(-\frac{1}{x} + C\right)' = \left(-\frac{1}{x}\right)' + (C)' = \frac{1}{x^2} + 0 = \frac{1}{x^2}$.

2) $f(x) = \tan x$ in tüm ilkelleri $F(x) = -\ln|\cos x| + C$ dir,

Çünkü $\left[-\ln|\cos x| + C\right]' = -\left[\ln|\cos x|\right]' + (C)' = \tan x$.

Burada C herhangi keyfi sabittir. Ayrıca $\cos x$ in pozitif veya negatif olduğu durumlara göre türev alındığında her iki durumda da sonucun $\tan x$ e eşit olduğu kolayca görülebilir.

Önerme 2

$F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları $f(x)$ in iki ilkeli olsun. O zaman herhangi a ve b gerçel sayıları için

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Önerme 1 e göre öyle bir C sabiti vardır ki $F(x) = G(x) + C$. Burada x yerine b ve sonra a yazıp iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak,

$$\begin{aligned} F(b) &= G(b) + C \\ F(a) &= G(a) + C \\ F(b) - F(a) &= G(b) - G(a) + (C - C) = G(b) - G(a) \end{aligned}$$

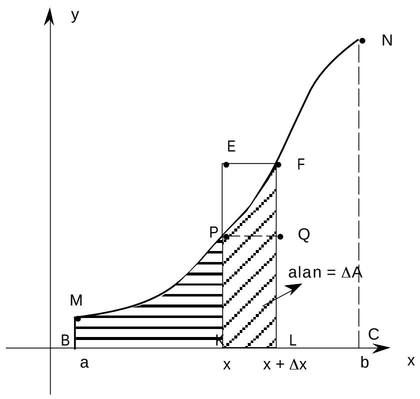
elde edilir.

Bir fonksiyonun ilkelini bulmak her zaman kolay değildir. Belirsiz integral konusunu gördüğümüzde ilkel fonksiyonları bulma yöntemleri ile tanışacağız.

3. Belirli İntegral

$[a, b]$ aralığında sürekli ve negatif olmayan $y = f(x)$ fonksiyonunun MN grafiğini ele alalım. a ile b arasından keyfi bir x seçelim. Yandaki şekle göre, BMPK alanı x e bağlı bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonu $A(x)$ ile gösterelim. Şimdi bu $A(x)$ fonksiyonunun $f(x)$ in ilkeli olduğunu gösterelim. Yani her x için

$$A'(x) = f(x)$$



Şekil 11.1

olduğunu ispatlayalım. Bunun için türevin tanımına göre x e Δx artması verdiğimizde $A(x)$ fonksiyonunun $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$ artmasının Δx e bölümünün $\Delta x \to 0$ iken limitini bulmalıyız. $A(x + \Delta x) =$ BMFL alanı olduğundan, ΔA alanı KPFL nin alanına eşittir.

$$\text{KPOL alanı} \le \Delta A \le \text{KEFL alanı.}$$

KPQL alanı $= |KP| \,.\, \Delta x = f(x) \,.\, \Delta x$, KEFL nin alanı $= |LF| \,.\, \Delta x = f(x + \Delta x) \,.\, \Delta x$ olduğundan

$$f(x) \,.\, \Delta x \le \Delta A \le f(x + \Delta x) \,.\, \Delta x$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikleri Δx e bölersek, (şekle göre $\Delta x > 0$ olduğuna dikkat ediniz)

$$f(x) \le \frac{\Delta A}{\Delta x} \le f\left(x + \Delta x\right)$$

olur. $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f\left(x + \Delta x\right) = f(x)$ dir. Buna göre limitler hakkında bilinen teoreme göre, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta x}$ limiti vardır ve bu limit $f(x)$e eşittir. Dolayısıyla

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$$

elde edilir.

Sonuç 1

$A(x)$ fonksiyonu $f(x)$ in bir ilkelidir.

Şimdi $F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ in herhangi bir başka ilkeli olsun. Önerme 2 ye göre

$$A(b) - A(a) = F(b) -$$

yazılabilir. $A(a) = 0$, $A(b)$ ise BMNC nin alanı olduğundan aşağıdaki sonuca varıyoruz:

Sonuç 2

$[a, b]$ aralığında sürekli ve negatif olmayan $f(x)$ fonksiyonu verilsin. $F(x)$ ise $f(x)$ in herhangi bir ilkeli olsun. O zaman $y = f(x)$ in grafiği, x-ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı $A(b)$ için

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

eşitliği yazılabilir.

Örnek:

1) $y = \frac{1}{x^2}$ eğrisi, x-ekseni ve $x = 1$, $x = 2$ doğruları arasındaki bölgenin alanını bulalım.

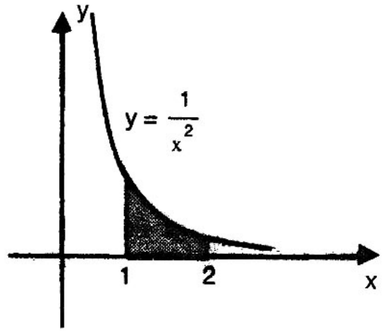
2) $y = \sin x$ eğrisi, x-ekseni, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$ doğruları arasındaki bölgenin alanını bulalım.

Çözüm:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun bir ilkeli $F(x) = -\frac{1}{x}$ dir. Buna göre istenilen alan

$$F(2) - F(1) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

olur.

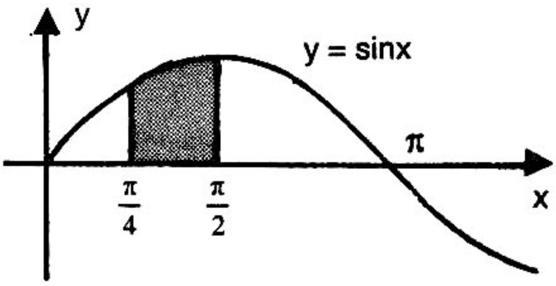


Şekil 11.2

2) $f(x) = \sin x$ in bir ilkeli $F(x) = -\cos x$ dir. İstenilen alan

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dir.



Şekil 11.3

$[a, b]$ üzerinde sürekli herhangi $f(x)$ fonksiyonu verilsin, $F(x)$ ise $f(x)$ in bir ilkeli olsun. O zaman $F(b) - F(a)$ sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında **belirli integrali** denir ve $\int_a^b f(x)dx$ şeklinde gösterilir. Böylece

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\ dx = F(b) - F(a)}$$

dır. a ya integralin **alt sınırı**, b ye ise **üst sınırı** denir.

Bu tür tanımlı integrale bazen **Riemann integrali** de denilir. $F(b) - F(a)$ farkı ise sembolik olarak $F(x)\Big|_a^b$ gibi yazılır.

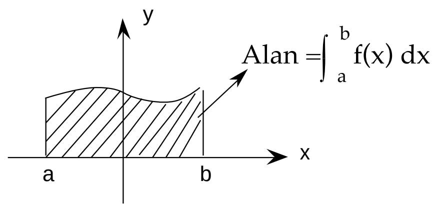
$$\int_a^b \mathbf{f(x)\ dx = F(x)}\Big|_a^b \mathbf{= F(b) - F(a)}, \quad \mathbf{F'(x) = f(x)}$$

Not: Genellikle integralin tanımı olarak bundan sonraki bölümde göreceğimiz gibi bir toplamın limiti kabul edilir. Ancak $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar için yukarıdaki tanım ile toplamın limiti olarak verilen tanım birbirine eşdeğerdir.

Tanımdan aynı zamanda aşağıdaki sonuç çıkar.

Sonuç 3

$[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve negatif olmayan $y = f(x)$ fonksiyonu için $y = f(x)$ grafiği, x-ekseni, $x = a$, $x = b$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı $\int_a^b f(x)dx$ integraline eşittir.



Şekil 11.4

Bu sonuca göre, yukarıdaki örneklerdeki cevaplar aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2} \quad , \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Örnek:

1) $\int_{-1}^{\sqrt{2}} x\,dx$ 2) $\int_0^{\frac{1}{2}} 3^x\,dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

integrallerini hesaplayalım.

Çözüm:

1) $$\int_{-1}^{\sqrt{2}} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2) $$\int_0^{\frac{1}{2}} 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3} = \frac{\sqrt{3}}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} \cong 0{,}666$$

3) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = -\ln|\cos x|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \left(-\ln|\cos 0|\right) = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1$$

$$= -\left(\ln\sqrt{2} - \ln 2\right) + 0 = -\left(\ln 2^{\frac{1}{2}} - \ln 2\right) = -\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln 2 \cong 0{,}347.$$

Tanımdan görüldüğü gibi $\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integralini hesaplamak için esas problem $F(x)$ ilkelinin bulunmasıdır. $F(x)$ ilkeline $f(x)$ fonksiyonunun **belirsiz integralı** denir. Bu ilkellerin bulunması yollarını "Belirsiz integraller" bölümünde göreceğiz.

Belirli integralin aşağıdaki özellikleri vardır:

[a, b] üzerinde sürekli f(x) ve g(x) fonksiyonları verilsin. O zaman aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad , \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\int_a^b c\; f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ **(c sabit gerçel sayıdır)**

4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ **(c sabit gerçel sayıdır)**

Bu özellikler tanımdan yararlanarak kolayca ispatlanır.

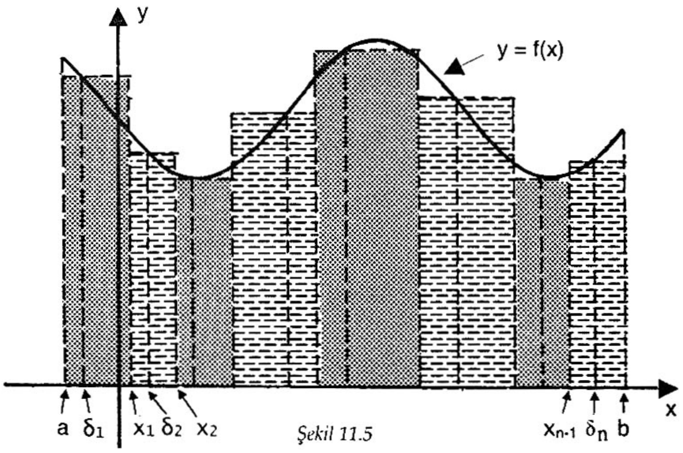
4. Bir Toplamın Limiti Olarak Belirli İntegral

Yukarıda söylediğimiz gibi belirli integral genellikle toplamın limiti olarak tanımlanır.

$[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli $f(x)$ fonksiyonu verilsin. Bu aralığı $a = x_0$, $b = x_n$, $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ olmak üzere, $[x_0 , x_1]$, $[x_1 , x_2]$, ... $[x_{n-1} , x_n]$ gibi alt aralıklara bölelim. Buna $[a, b]$ aralığının bir **bölüntüsü** denir ve sembolik olarak **P** ile gösterilir. Alt aralıkların uzunlukları olan $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... , $x_n - x_{n-1}$ sayılarının en büyüğüne bu bölüntünün **çapı (normu)** denir ve δ ile gösterilir. Şimdi keyfi olarak $[x_0 , x_1]$ aralığından bir δ_1 noktasını, $[x_1 , x_2]$ aralığından bir δ_2 noktasını, ... , $[x_{n-1} , x_n]$ aralığından ise bir δ_n noktalarını seçip aşağıdaki toplamı oluşturalım:

$$S(\mathbf{P}) = f(\delta_1)(x_1 - x_0) + f(\delta_2)(x_2 - x_1) + ... + f(\delta_n)(x_n - x_{n-1})$$

(Her $x \in [a , b]$ için $f(x) \geq 0$ olduğunda geometrik olarak bu toplam taban kenarları $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... , $[x_{n-1}, x_n]$ ve yükseklikleri $f(\delta_1)$, $f(\delta_2)$, ... $f(\delta_n)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamıdır).



Şekil 11.5

$\delta \to 0$ iken ($\delta \to 0$ ise doğal olarak $n \to \infty$ olur, fakat tersi doğru olmayabilir) S (**P**) toplamının limitine (f(x) sürekli olduğundan bu limit vardır) f (x) fonksiyonunun [a, b] aralığında **belirli integrali** denir ve $\int_a^b f(x)\,dx$ gibi gösterilir:

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = \lim_{\delta \to 0} \mathbf{S(P)}$$

"Integral" sözü ve "$\int$" işareti de bu tanıma dayanarak izah edilebilir. Şöyle ki "integral" sözü latince integer (tam) sözünden olup hisseleri toplayıp tamı oluşturmak anlamını taşıyor". $\int$ "integral işareti ise genellikle toplamı gösteren S harfinin uzatılmışıdır.

Sürekli fonksiyonlarda toplamın limiti olarak verilen integral tanımı ile, f (x) in ilkeline bağlı tanımın eşdeğerliliği diferansiyel ve integral hesabın temel teoremi denilen teoremle ispatlanır. Bu ispat üzerinde durmayacağız.

5. Belirsiz İntegral

Yukarıda gördük ki sürekli f(x) fonksiyonunun belirli integralinin hesaplanması için f(x) in ilkelini bulmak yeterlidir. f(x) fonksiyonunun ilkeline bu fonksiyonun **belirsiz integrali** denir ve $\int f(x)\,dx$ şeklinde gösterilir. C keyfi sabit olmak üzere, f(x) in tüm ilkelleri F(x) + C gibi olduklarından

$$\int \mathbf{f(x)\,dx = F(x) + C}\ ,\quad \mathbf{F(x) = f(x)}$$

yazılımı kullanılır. Örneğin, $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, $\int \cos dx = \sin x + C$ dır

Belirli integralin sonucunun bir sayı olduğunu biliyoruz, zaten "belirli" terimi de buradan kaynaklanır. Belirsiz integralin sonucu ise bir fonksiyon ailesi olur.

Bir $\int f(x)\,dx$ integralini hesaplamak için öyle bir fonksiyon bulmamız gerekiyor ki bu fonksiyonun türevi f(x) e eşit olsun. Bu yolla biz aşağıdaki integral tablosunu oluşturabiliriz.

$$\int \mathbf{x^a\,dx} = \frac{\mathbf{x^{a+1}}}{\mathbf{a+1}} + \mathbf{C} \qquad (\mathbf{a \neq -1}\ ,\ \mathbf{a \in IR})$$

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x}} = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\,\mathbf{dx} = \mathbf{ln|\,x\,| + C}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a \neq 1,\ a \in IR^+)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

Bu formüllerin doğruluğunu sağ tarafların türevlerini alarak görebiliriz. Bunun için sağ taraftaki fonksiyonun türevinin integral altındaki fonksiyona eşit olduğunu görmek yeterlidir.

Örneğin

$$(-\cot x)' = -(\cot x)' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

olduğundan

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

yazılabilir. Belirsiz integralin doğrudan tanımdan çıkan aşağıdaki özellikleri vardır.

$f(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ sürekli fonksiyonları verilsin. O zaman

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad (a \text{ sabit gerçel sayıdır})$$

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x) \ \dots \ \pm f_n(x)\right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \ \dots \ \pm \int f_n(x)\,dx$$

dir.

Örnek:

1) $\int x^{11}\,dx$ 2) $\int \sqrt{x}\,dx$ 3) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

4) $\int (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)\,dx$ 5) $\int (x+2)^3\,dx$

integrallerini bulalım.

Çözüm:

1) a= 11 olduğunu hesaba katarsak, kuvvet fonksiyonunun integralleme formülünden

$$\int x^{11}\,dx = \frac{x^{11+1}}{11+1} + C = \frac{x^{12}}{12} + C$$

dir.

2) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ olduğundan $a = 1/2$ olu

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C$$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$ gibi yazılabildiğinden,

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3x^{\frac{1}{3}} + C$$

dir.

4) $\int (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)\,dx = \int 2x^3\,dx - \int 5x^2\,dx + \int 4x\,dx - \int 1\,dx$

$$= 2\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + 4\int x\,dx - \int dx$$

$$= 2\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - x + C$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2 - x + C$$

5) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ olduğundan

$$\int (x+2)^3\,dx = \int (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)\,dx = \int x^3\,dx + 6\int x^2\,dx + 12\int x\,dx + 8\int dx$$

$$\frac{x^4}{4} + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C$$

bulunur.

Örnek:

1) $\displaystyle\int \left(\sqrt{2}\,e^x + \frac{1}{2}\,3^x - \frac{4}{x}\right)dx$

2) $\displaystyle\int \left(\sqrt{3}\,\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8\cos^2 x}\right)dx$

integrallerini bulalım.

Çözüm:

1) $\int\left(\sqrt{2}\, e^x + \frac{1}{2}\, 3^x - \frac{4}{x}\right) dx = \sqrt{2}\int e^x\, dx + \frac{1}{2}\int 3^x\, dx - 4\int \frac{dx}{x}$

$= \sqrt{2}\, e^x + \frac{1}{2}\,\frac{3^x}{\ln 3} - 4\ln|x| + C$

2) $\int\left(\sqrt{3}\,\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8\cos^2 x}\right) dx$

$= \sqrt{3}\int \sin x\, dx - \frac{1}{3}\int \cos x\, dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = -\sqrt{3}\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{8}\tan x + C$

$\int\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + \frac{2^x}{3} - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) dx$ **integralini bulunu**

?

Cevabınız $-\sqrt{3}\cot x + \frac{2^x}{3\ln 2} - \frac{\sqrt{x}}{2} + C$ olmalıydı.

Eğer verilen bir integral, integral tablosundaki integrallere dönüştürülemiyorsa o zaman başka yöntemler denemek gerekmektedir. Bu yöntemlerden en yaygınları değişken değişimi ve kısmi integrasyon yöntemleridir.

$\int f(x)\, dx$ integralinde $x = \varphi(u)$ yazarsak bu integral $\int f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du$ integraline dönüşür. Buna **değişken değişimi** denir. Bir çok hallerde $\varphi(u)$ fonksiyonunu uygun seçersek, yeni integral daha kolay hesaplanabilir.

Örnek:

$\int \sqrt{2x+3}\, dx$ integralini bulalım.

Çözüm:

$x = \varphi(u) = \frac{u-3}{2}$ yazarsak

$dx = \varphi'(u)\, du = \frac{1}{2}\, du$

olur. Buna göre,

$\int \sqrt{2x+3}\, dx = \int \sqrt{2\cdot\frac{u-3}{2} + 3}\cdot\frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\, du$

$= \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\, u^{3/2} + C,$

u yerine 2x + 3 yazarsak

$$\int \sqrt{2x+3}\, dx = \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} + C$$

bulunur.

$u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)\, dx$ dönüşümü yapılırsa, bu integral $\int g(u)\, du$ integraline dönüşür. $\varphi(x)$ in uygun seçilmesi halinde $\int g(u)\, du$ integrali $\int f(x)\, dx$ integraline göre daha kolay bulunabilir.

Örnek:

$\int \frac{dx}{3x-4}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm:

$u = \varphi(x) = 3x - 4$, $3\, dx = du$, $dx = \frac{du}{3}$. Bunları integralde yazarsak

$$\int \frac{dx}{3x-4} = \int \frac{1}{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|3x-4| + C$$

bulunur.

Örnek:

1) $\int \cos(ax+b)\, dx$

2) $\int \tan x\, dx$

3) $\int \frac{x^3}{1+x^4}\, dx$

4) $\int e^{-3x}\, dx$

5) $\int \sin^2 x\, dx$ integrallerini hesaplayalım.

Çözüm:

1) $ax + b = u$ ise $a\, dx = du$, $dx = \frac{1}{a}\, du$ olur

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{a}\, du = \frac{1}{a}\sin u + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

2) $\cos x = u$ ise $-\sin x\, dx = du$ ve $\sin x\, dx = -du$ olur.

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

3) $1 + x^4 = u$ ise $4x^3\,dx = du$, $x^3\,dx = (1/4)\,du$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right) + C$$

4) $-3x = u$ ise $-3\,dx = du$, $dx = (-1/3)\,du$ olur.

$$\int e^{-3x}\,dx = \int e^u \cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du = -\frac{1}{3}e^u + C = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

5) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ olduğundan

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \int \cos 2x\,dx\right)$$

$\int \cos 2x\,dx$ integralini hesaplamak için $2x = u$ değişken değişimini kullanırsak

$dx = \frac{du}{2}$ olur ve

$$\int \cos 2x\,dx = \int \cos u\,.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C \quad \text{bulunur.}$$

Bunu yukarıda yazarsak

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

bulunur. Burada $-\frac{1}{2}C$ yerine yeniden C yazıldı. C keyfi sabit olduğundan bu tür yazılımların hiç bir sakıncası yoktur.

$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3x-5}}}\,\mathbf{dx}$, $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{2-x}}$, $\int \frac{\mathbf{x^5}}{\mathbf{1-x^6}}\,\mathbf{dx}$, $\int \mathbf{\cos^2 x\,dx}$ **integrallerini bulunuz** **?**

Cevaplarınız, $\frac{2}{3}\left(3x-5\right)^{1/2} + C$, $-\ln|2-x| + C$, $-\frac{1}{6}\ln|1-x^6| + C$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ olmalıydı.

Şimdi ise önemli integralleme yöntemlerinden biri olan kısmi integrallemeye değinelim. $u(x)$ ve $v(x)$ türevlenebilir fonksiyonlar ise çarpımın türevi formülüne göre,

$$(u.v)' = u'v + v'u$$

yazarız. Her iki tarafı dx ile çarpıp integrallersek

$$\int (u.v)'\,dx = \int u'\,v\,dx + \int v'\,u\,dx$$

bulunur. Belirsiz integralin tanımından $\int (u\,.\,v)'\ dx = u\,.\,v$ yazılabilir. Bunu dikkate alarak,

$$\int \mathbf{u\,v'\ dx = uv - \int v\,u'\ dx}$$

formülünü elde ederiz. $u'\,dx = du$, $v'\,dx = du$ olduğundan son formülü aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$\int \mathbf{u\,dv = uv - \int v\,du}$$

yazabiliriz. Bu formüllere **kısmi integrasyon** formülleri denir. $\int vdu$ integralinin $\int udv$ integraline göre daha kolay hesaplanabileceği durumlarda kısmi integrasyon yöntemi faydalı olur.

Örnek:

1) $\int xe^x\,dx$

2) $\int x\cos x\,dx$ integrallerini hesaplayalım.

Çözüm:

1) $e^x = (e^x)'$ olduğundan $u = x$, $v = e^x$ olarak seçilmesi daha uygundur. O zaman $u' = 1$ olur ve yukarıdaki formüle göre, $du = dx$, $dv = e^x\,dx$ olduğunu dikkate alarak,

$$\int xe^x\,dx = \int x\left(e^x\right)'\ dx = x\,.e^x - \int e^x\,.\,1\,.\,dx = xe^x - e^x + C$$

bulunur.

2) $\cos x = (\sin x)'$ olduğundan $u = x$, $v = \sin x$ seçilmesi uygundur. $u' = 1$ olduğundan yukarıdaki formüle göre

$$\int x\cos x\,dx = \int x\left(\sin x\right)'\ dx = x\sin x - \int \sin x\,dx =$$

$$= x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C$$

bulunur.

Örnek:

1) $\int x^3 \ln x\,dx$

2) $\int x\,e^{-3x}\,dx$

integrallerini bulalım.

Çözüm:

1) $x^3 = \left(\frac{x^4}{4}\right)'$ olduğundan $u = \ln x$, $v = \frac{x^4}{4}$ seçimi daha uygun görünmektedi

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ olduğunda

$$\int x^3 \ln x \, dx = \int \ln x \left(\frac{x^4}{4}\right)' dx = \frac{x^4}{4} . \ln x - \int \frac{x^4}{4} . \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^4}{4} . \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 \; dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

dir.

2) $e^{-3x} = \left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right)'$ olduğundan $u = x$, $v = -\frac{1}{3} e^{-3x}$ alalım.

$u' = 1$ dir. Kısmi integrasyon formülünden yararlanırsak

$$\int x e^{-3x} dx = \int x\left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right)' dx = x . \left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right) - \int \left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right) . 1 \, dx$$

$$= -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3} . \left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C$$

bulunur.

Belirsiz integralde cevabın doğru olup olmadığını kontrol etmek kolaydır. Bunun için, cevaptaki fonksiyonun türevi integral altındaki fonksiyona eşit olmalıdır. Son örnekte

$$\left(-\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C\right)' = -\frac{1}{3}\left(x . e^{-3x}\right)' - \frac{1}{9}\left(e^{-3x}\right)'$$

$$= -\frac{1}{3}\left[e^{-3x} + x . (-3) . e^{-3x}\right] - \frac{1}{9}\left(-3e^{-3x}\right) = -\frac{1}{3} e^{-3x} + x e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{-3x} = x e^{-3x}$$

olduğundan cevap doğru bulunmuştur.

Aşağıdaki integralleri kısmi integrasyon yöntemi ile bulunuz. **?**

1) $\int x \sin x \, dx$ **,** **2)** $\int x^4 \ln x \, dx$ **,** **3)** $\int x e^{2x} x \, dx$ **,** **4)** $\int \ln x \, dx$

Cevaplarınız, $-x \cos x + \sin x + C$, $\frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25} + C$, $\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$ ve $x \ln x - x +$ (olmalıydı.

6. Belirli İntegrallerin Hesaplanması

[a, b] aralığı üzerinde sürekli f(x) fonksiyonu verilsin. Yukarıda $\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integrali, F(x) ilkel fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

gibi tanımlanmıştı. Öte yandan, $\int f(x)\,dx$ belirsiz ingetrali f(x) in F(x) ilkelidir. Buna göre, eğer belirsiz integrali hesaplayabiliyorsak belirli integralin hesaplanmasında bir zorluk kalmaz.

Örnek:

1) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

2) $\int_{-1}^1 (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)\,dx$

3) $\int_{-1}^3 \sqrt{2x+3}\,dx$

belirli integrallerini hesaplayalım.

Çözüm:

1) Yukarıda $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$ bulunmuştu. $F(x)\,\frac{2}{3}x^{3/2}$ alırsak

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}4^{3/2} - \frac{2}{3}0^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - 0 = \frac{2}{3}.8 = \frac{16}{3}$$

bulunur.

2) $\int (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)\,dx = \frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - x + C$ olduğunda

$F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - x$ alırsak

$$\int_{-1}^1 (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)\,dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - x\right)\Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1^4}{2} - \frac{5}{3}1^3 + 2.1^2 - 1\right) - \left[\frac{(-1)^4}{2} - \frac{5}{3}(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + 2 - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3} + 2 + 1\right) = -\frac{16}{3}$$

bulunur.

3) $\int \sqrt{2x+3} = \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} + C$ olduğunu yukarıda bulmuştuk. Buna gö

$F(x) = \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}$ alırsak

$$\int_{-1}^{3} \sqrt{2x+3} = \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} \Big|_{-1}^{3} = \frac{1}{3}(2\,.\,3+3)^{3/2} - \frac{1}{3}\left[2\,.(-1)+3\right]^{3/2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{9^3} - \frac{1}{3}1^{3/2} = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3} = 3^2 - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

bulunur.

Yukarıdaki örneklerde ilkel fonksiyon olarak $F(x)$ yerine $F(x) + C$ alındığında sonucun değişmediğini görmeye çalışınız.

Örnek:

1) $\int_0^1 x\,e^x\,dx$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos x\,dx$

integrallerini hesaplayalım.

Çözüm:

1) $\int x\,e^x\,dx = xe^x - e^x + C$ olduğundan $F(x) = xe^x - e^x$ alırsak

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = (x\,e^x - e^x)\Big|_0^1 = (1\,e^1 - e^1) - (0\,e^0 - e^0) = e - e + 1 = 1$$

bulunur.

2) $\int x \cos dx = x \sin x + \cos x + C$ olduğundan $F(x) = x \sin x + \cos x$ alabilir

Buna göre,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos x\,dx = (x \sin x + \cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (\pi \sin\pi + \cos\pi) - \left[\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= (\pi\,.\,0 + (-1)) - \left[\left(-\frac{\pi}{2}\right).\,(-1) + 0\right] = -1 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi+2}{2}$$

bulunur. $\left(\sin\pi = 0,\ \cos\pi = -1,\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1,\ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0\right.$

olduklarını hatırlayınız).

$\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integralini hesaplamak için önce $F(x) = \int f(x)\,dx$ belirsiz integralini hesaplayıp sonra $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ sayısını bulmak gerekmektedir.

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1) $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\,dx$ **2)** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ **3)** $\int_0^{\pi/3} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x\right) dx$

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ **5)** $\int_{-1}^{1/3} x\,e^{-3x}\,dx$

Cevaplarınız $\frac{8}{3}$, $3\sqrt[3]{2} - 1$, $2\sqrt{3} + \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ve $-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{e} + e^3\right)$ olmalıydı.

Değerlendirme Soruları

1. $\int_1^e \frac{dx}{x} = ?$

   A. $-e$

   B. 0

   C. $\frac{1}{e}$

   D. 1

   E. e

2. $\int_0^1 10^x\,dx = ?$

   A. $\frac{9}{\ln 10}$

   B. $\frac{10}{\ln 10}$

   C. $\frac{11}{\ln 10}$

   D. $9 \ln 10$

   E. 9

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = ?$

A. - 1
B. 0
C. 1
D. 2
E. π

4. $\int \sqrt[3]{x} \; dx = ?$

A. $\frac{1}{3} x^2 + C$

B. $\frac{3}{4} x^{4/3} + C$

C. $x^{4/3} + C$

D. $\frac{1}{3} x^{-2/3} + C$

E. $\frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + C$

5. $\int \sqrt{1 - x} \; dx = ?$

A. $-\frac{2}{3}(1 - x)^{3/2} + C$

B. $\frac{2}{3}(1 - x)^{3/2} + C$

C. $\frac{-1}{2\sqrt{1 - x}} + C$

D. $\frac{1}{3}(1 - x)^2 + C$

E. $-\frac{1}{3}(1 - x)^2 + C$

6. $\int \sin(3x + 1) \; dx = ?$

A. $3 \cos(3x + 1) + C$

B. $-3 \cos(3x + 1) + C$

C. $-\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + C$

D. $\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + C$

E. $-\cos(3x + 1) + C$

7. $\int \frac{x}{x^2+4}\, dx = ?$

A. $\frac{1}{x^2+4} + C$

B. $\frac{-1}{(x^2+4)^2} + C$

C. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$

D. $\ln(x^2+4) + C$

E. $\frac{\ln(x^2+4)}{x^2+4} + C$

8. $\int_{-2}^{0} (2x+5)^4\, dx = ?$

A. 312,4
B. 156,2
C. 624,8
D. 124
E. 61,5

9. $\int \frac{x^4}{3-x^5}\, dx = ?$

A. $-\frac{1}{3-x^5} + C$

B. $\frac{-1}{(3-x^5)^2} + C$

C. $-\frac{1}{5}\ln\left|3-x^5\right| + C$

D. $\frac{1}{5}\ln(3-x^5) + C$

E. $\ln(3-x^5) + C$

10. $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^4}\, dx = ?$

A. $\frac{1}{(x^2+3x-1)^5} + C$

B. $\frac{1}{5(x^2+3x-1)^5} + C$

C. $\ln(x^2+3x-1) + C$

D. $-\frac{1}{3}\frac{1}{(x^2+3x-1)^3} + C$

E. $\frac{1}{(x^2+3x-1)^3} + C$

11. $\int \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+5}}\, dx = ?$

A. $2\sqrt{x^2+3x+5} + C$

B. $4\sqrt{x^2+3x+5} + C$

C. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+5}} + C$

D. $-\frac{1}{(x^2+3x+5)^{3/2}} + C$

E. $\ln\sqrt{x^2+3x+5} + C$

12. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx = ?$

A. $\ln^2 x + C$

B. $\ln x + C$

C. $\frac{1}{2}\ln(\ln x) + C$

D. $\ln(\ln x) + C$

E. $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$

13. $\int e^x (1-x)\, dx = ?$

A. $(1-x)e^x + C$

B. $(1-x)e^x + e^x + C$

C. $e^x + C$

D. $\left(x - \frac{x^2}{2}\right)e^x + C$

E. $\frac{1}{2}(1-x)^2 e^x + C$

14. $\int \cos x e^{\sin x} \; dx = ?$

A. $e^{\sin x} + C$

B. $\frac{1}{2} e^{\sin x} + C$

C. $-e^{\sin x} + C$

D. $-\frac{1}{2} e^{\sin x} + C$

E. $\sin x \, e^{\sin x} + C$

15. $\int \frac{\ln^2 (3x+1)}{3x+1} \, dx = ?$

A. $\frac{1}{3} \ln^3 (3x+1) + C$

B. $2 \ln (3x+1) + C$

C. $\frac{\ln (3x+1)}{(3x+1)^2} + C$

D. $\frac{1}{(3x+1)^2} + C$

E. $\frac{1}{9} \ln^3 (3x+1) + C$

16. $\int \frac{1+\tan^2 x}{3+4\tan x} \, dx = ?$

A. $\ln (1+4\tan x) + C$

B. $\frac{1}{4} \ln |1+4\tan x| + C$

C. $\frac{\tan x}{1+\ln \cos x} + C$

D. $\frac{1}{(1+4\tan x)^2} + C$

E. $-\frac{1}{4(1+4\tan x} + C$

17. $\int (3x - 5) \sqrt[3]{1{,}5\,x^2 - 5x + 6}\; dx = ?$

A. $\frac{3}{4}\left(1{,}5\,x^2 - 5x + 6\right)^{4/3} + C$

B. $\frac{1}{2}\left(1{,}5\,x^2 - 5x + 6\right)^{-2/3} + C$

C. $\ln\left(1{,}5\,x^2 - 5x + 6\right) + C$

D. $\dfrac{1}{\ln\left(1{,}5\,x^2 - 5x + 6\right)} + C$

E. $\left(1{,}5\,x^2 - 5x + 6\right)^{4/3} + C$

18. $\int x \sin x \; dx = ?$

A. $\frac{x^2}{2} \cos x + C$

B. $-\frac{x^2}{2} \cos x + C$

C. $-x \cos x + \sin x + C$

D. $-x \cos x - \cos x +$

E. $-x \sin x + \cos x +$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D	2. A	3. D	4. B	5. A	6. C	7. C	8. A	9. C
10. D	11. B	12. E	13. B	14. A	15. E	16. B	17. A	18. C