



T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI NO: 1082

AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINLARI NO: 600

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

Analiz

Yazar:

Prof.Dr. Vakıf CAFEROV

Editör:

Öğr.Gör.Dr. Mehmet ÜREYEN

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları
Anadolu Üniversitesine aittir.

"Uzaktan öğretim" tekniğine uygun olarak hazırlanan bu kitabın
bütün hakları saklıdır.

İlgili kuruluştan izin almadan kitabın tümü ya da
bölümleri mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt
veya başka şekillerde çoğaltılamaz,
basılamaz ve dağıtılamaz.

Copyright © 1999 by Anadolu University

All rights reserved

*No part of this book may be reproduced
or stored in a retrieval system, or transmitted
in any form or by any means mechanical, electronic,
photocopy, magnetic tape or otherwise, without
permission in writing from the University.*

Tasarım: Yrd.Doç.Dr. Kazım SEZGİN

ISBN 975 - 492 - 841 - X

Başlarken

Bu kitap, Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi'nce yürütülen İlköğretim Öğretmenliği Lisans Tamamlama Programı Matematik dalı Analiz dersi için hazırlanmıştır.

Okuyucuların lise öğrenimlerini uzun yıllar önce tamamlamış olmaları nedeniyle birinci ve ikinci üniteleri, daha sonraki ünitelerde ihtiyaç duyulacak kavramlar için ayırdık. Bu kavramları belli bir bütünlük içerisinde inceleyince bu ünitelerin hacmi, uzaktan eğitim ilkelerine göre olması gereken boyutu aştı. Hedef kitlenin özel durumu nedeniyle bu konuda bağışlanacağımızı umuyoruz.

Kümeler ve Sayılar konusunu incelediğimiz 1. ünite de gerçel sayılar sistemine geniş yer ayırdık, ancak gerçel sayıların titiz inşasını ikinci plana alıp temel özelliklerin ispatına ağırlık verdik. 2. Ünite de Özdeşlikler, Denklemler ve Eşitsizlikler konularını ayrıntılı olarak inceledik. Özellikle özdeşliklerin geometrik yorumlarına önem verdik. Bu konuya öğretmenlerimizin de önem vermelerini, kesilmiş tahta veya kartonlarla bu ispatları sınıfta yapmalarını arzuladık.

Esas itibarıyla fonksiyon ve fonksiyon davranışlarını inceleyen ve matematik bölümlerinin en temel dersi olan analiz konusuna 3. ünite de fonksiyon kavramını ele alarak başladık. Fonksiyonun resmi olan grafik konusuna özel önem verdik ve bilgisayarla gerçeğe uygun grafikler çizdik. 4. ünite den itibaren kitabın büyük bölümünü tek değişkenli fonksiyonlara ayırdık ve bu tür fonksiyonların, limit, süreklilik, türev ve integralini inceledik. Bu kavramların temel özelliklerini genellikle örneklerle açıkladık, ayrıntılı ve zor ispatlardan kaçındık.

Son iki ünite de, çok değişkenli fonksiyon kavramı, katlı integraller ve diferansiyel denklemler konularında sadece bir ön bilgi vermeyi amaçladık.

Ünitelerde incelenen konular, çözümü okuyucuya bırakılan ve ünite içerisinde soru işaretiyle birlikte belirttiğimiz sorular ve değerlendirme sorularıyla birlikte düşünülmelidir. Her iki grup soruların cevapları verildiğinden okuyucuların, bu soruları çözerek hem bilgilerini pekiştireceklerine hem de kendilerini kontrol edebileceklerine inanmaktayız.

Dizgi anında her türlü nazımımızı olgunlukla karşılayan dizgi ve grafik ekibine teşekkür ederiz.

Sağlık ve başarı dileklerimizle.

Editör
Öğr.Gör.Dr. Mehmet ÜREYEN

Sayılar

Yazar

Prof.Dr. Vakıf CAFEROV

ÜNİTE

1

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- küme kavramını ve kümelerle işlemleri,
- sayı kümelerini ve sayıların bazı temel özelliklerini,
- bir sayının mutlak değerini,
- üslü ve köklü sayıları,
- logaritma kavramını

hatırlayacaksınız.

İçindekiler

- | | |
|---------------------------------------|----|
| • Giriş | 3 |
| • Küme Kavramı | 3 |
| • Gerçek Sayılar | 6 |
| • Aralıklar | 18 |
| • Mutlak Değer | 20 |
| • Üslü ve Köklü Sayılar | 21 |
| • Logaritma | 26 |
| • Gerçek Sayıların Aksiyomatik Yapısı | 28 |

• Doğal Sayılarla İlgili Bazı Çözülmemiş Problemler	29
• Değerlendirme Soruları	30

Çalışma Önerileri

- Tanımları iyi öğreniniz
- Mutlaka yazarak çalışınız
- Yanınızda hesap makinesi bulundurunuz
- Çözümleri size bırakılan soruları cevaplarına bakmadan çözmeye çalışınız.

1. Giriş

Sayıların tarihi gelişimi insanlık tarihinin gelişimine paralel bir süreç izlemiştir. İnsanoğlu asırlar boyu "1 nedir?", "2 nedir?", "3 nedir?", daha genel olarak "sayı nedir?" sorularına cevap aramış ve ancak 19. yüzyılın sonlarında tam bir cevap bulabilmiştir. Bu cevap sayıların ünite sonunda verdiğimiz aksiyomatik tanımıdır.

Sayıların tarihi gelişimini merak eden okuyuculara TÜBİTAK tarafından seri halinde dilimize çevrilen "Ifrah Georges; Rakamların Evrensel Tarihi" isimli eser önerilebilir.

Bu ünite de küme kavramı ile ilgili bazı hatırlatmalar yaptıktan sonra, sayı kümelerini ve sayılarla ilgili sıkça kullanılan bazı özellikleri ele alacağız.

2. Küme Kavramı

Kümeler teorisi geçen asrın sonlarında ortaya çıkmış olup matematiğin gelişmesinde önemli rol oynamıştır. Kümenin kesin tanımı yapılmamakla beraber, canlı ya da cansız varlıklardan oluşan bir topluluğa ait olan nesneler açık ve kesin olarak biliniyorsa, böyle bir topluluğa küme denir. Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine kümenin elemanı denir. Kümeler sembolik olarak $A, B, C, \dots$ gibi büyük harflerle, onların elemanları ise $a, b, c, \dots$ gibi küçük harflerle gösterilir. a elemanının A kümesine dahil olması sembolik olarak $a \in A$, dahil olmaması ise $a \notin A$ biçiminde ifade edilir. Hiç bir eleman içermeyen kümeye boş küme denir ve sembolik olarak $\emptyset$ ile gösterilir.

Kümeler çeşitli yollarla ifade edilir. Bunlardan birincisi, kümedeki elemanları tek tek belirtmektir. Örneğin, a, b, c ve d elemanlarından oluşan bir A kümesi,

$$A = \{ a, b, c, d \}$$

biçiminde yazılır. Ancak kümenin eleman sayısı çok olduğunda bu tür yazılım zorlaşır. Bu durumda, eğer mümkünse, küme elemanları noktalar yardımı ile gösterilir. Örneğin, A , 50 den büyük olmayan doğal sayılar kümesi ise, A kümesi

$$A = \{ 1, 2, 3, \dots, 49, 50 \}$$

şeklinde gösterilir. Fakat, bazen bu tür yazılım da mümkün olmayabilir. A kümesi, ancak ve ancak P özelliğini sağlayan elemanlardan oluşuyorsa, bu durumda A kümesi şu şekilde gösterilir:

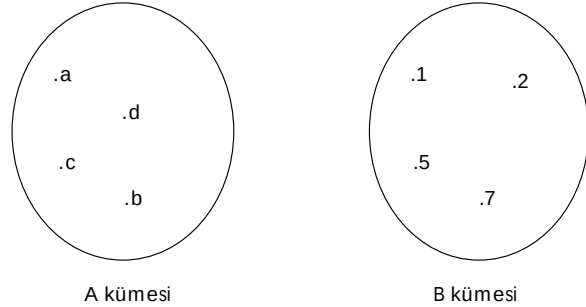
$$A = \{ x \mid x \text{ elemanı } P \text{ özelliğini sağlar} \}$$

Örneğin, A kümesi, 1998 yılında A.Ü. Açıköğretim Fakültesini kazanan öğrenciler kümesini gösteriyorsa, o zaman

$$A = \{ x \mid x \text{ 1998 yılında A.Ü. Açıköğretim Fakültesi'ni kazanmıştır} \}$$

şeklinde yazılabilir.

Kümeleri ve onlar üzerindeki işlemleri daha iyi anlayabilmek için kümeler, sembolik olarak, dikdörtgen, çember veya elips gibi eğriler ile sınırlanan bir düzlem parçasıyla temsil edilir. Bu durumda bazen sınırlanan bölge içerisine kümenin elemanları yazılır. Kümenin bu tür gösterimine **Venn şeması** ile gösterimi denir. Aşağıda $A = \{ a, b, c, d \}$ ve $B = \{ 1, 2, 5, 7 \}$ kümeleri sembolik olarak Venn şeması ile gösterilmiştir.



A ve B gibi iki küme verilsin. A kümesindeki her eleman B kümesinin de elemanı ise o zaman **A kümesi B'nin altkümesidir** denir ve sembolik olarak $A \subset B$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 8, 9 \}$ verilsin. A kümesindeki her eleman B kümesinin de elemanı olduğundan $A \subset B$ dir.

A ve B gibi iki küme verilsin. Eğer hem $A \subset B$ ve hem de $B \subset A$ ise **A kümesi ile B kümesi eşittir** denir ve sembolik olarak $A = B$ şeklinde gösterilir.

Elemanları ya A, ya da B kümesinin elemanları olan kümeye **A ile B'nin birleşimi** denir ve birleşim kümesi sembolik olarak $A \cup B$ şeklinde gösterilir.

Elemanları hem A, hem de B kümesinin elemanları olan kümeye **A ile B'nin kesişimi** denir ve kesişim kümesi sembolik olarak $A \cap B$ gibi gösterilir.

A kümesinin B ye dahil olmayan elemanlarının kümesine **A ile B'nin farkı** denir ve sembolik olarak $A - B$ veya $A \setminus B$ gibi gösterilir.

Bu tanımlara göre,

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ veya } x \in B \},$$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \},$$

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B \}$$

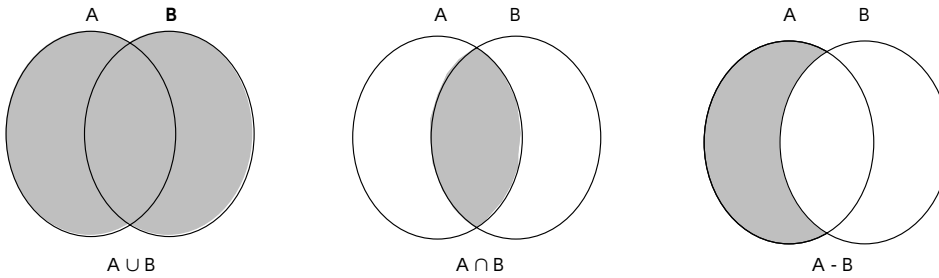
yazılabilir.

Kümelerde alt küme, birleşim, kesişim ve fark ile ilgili şu temel özellikleri verebiliriz. A , B ve C herhangi üç küme olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
 &A \subset A \\
 &\emptyset \subset A \\
 &A \subset B \text{ ve } B \subset C \text{ ise } A \subset C \text{ dir.} \\
 &A \cup A = A \\
 &A \cup B = B \cup A \\
 &A \subset (A \cup B) \text{ ve } B \subset (A \cup B) \\
 &(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
 &A \cap A = A \\
 &A \cap B = B \cap A \\
 &(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
 &(A \cap B) \subset A \text{ ve } (A \cap B) \subset B \\
 &A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
 &A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).
 \end{aligned}$$

Örnek: $A = \{1, 2, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 9, 10\}$ verilsin. O zaman $A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$, $A - B = \{2, 7\}$ olur.

Kümelerin birleşimi, kesişimi ve farkı Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilebilir.



- 1) $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin alt kümelerini yazınız
- 2) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c\}$ kümeleri veriliyor. $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ kümelerini bulunuz.

?

Cevaplarınız şöyle olmalıdır: 1) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$

2) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{a, c\}$, $A - B = \{b, d\}$, $B - A = \emptyset$.

A ve B gibi boş kümeden farklı herhangi iki küme verilsin ($A = B$ de olabilir). $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere, bu iki eleman yardımıyla, sıra gözetilerek oluşturulan ve (a, b) şeklinde gösterilen eleman çiftine bir **sıralı ikili** denir. (a, b) sıralı ikilisinde a ya ikilinin birinci terimi veya birinci bileşeni, b ye ikinci terim veya ikinci bileşeni denir. (a, b) ve (c, d) sıralı ikilileri verilsin. Bu iki sıralı ikilinin eşit olması için gerek ve yeter koşul, birinci ve ikinci bileşenlerin kendi aralarında eşit olmasıdır. Yani,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

dir. Buna göre örneğin, $(2, 1) \neq (1, 2)$ dir.

A ve B kümeleri verilsin.

$$\{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

kümesine A ile B nin **çarpım kümesi (kartezyen çarpımı)** denir ve $A \times B$ biçiminde gösterilir. Buna göre,

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Örnek: $A = \{-1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümeleri veriliyor. $A \times B$ kümesini bulunuz.

Çözüm:

$$A \times B = \{ (-1, a), (-1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}.$$

Genel olarak, $A \times B \neq B \times A$ dır.

$A \times A$ kümesi kısaca A^2 biçiminde de gösterilir.

3. Gerçel Sayılar

Sayma, sıralama ve numaralama amacıyla kullandığımız 1, 2, 3, ... gibi sayılara **doğal sayılar** diyoruz. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}.$$

Sıfır sayısı sayım işleminde kullanılmadığından doğal sayılar kümesine katılmıyor.

İki doğal sayının toplamı yine doğal sayıdır, fakat farkı doğal sayı olmayabilir. Doğal sayılar kümesi, negatifleri ve sıfırı da katmakla **Z tam sayılar** kümesine genişletilir:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

olduğu açıktır. Her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır.

m ve n tam sayıları verilsin. Eğer $m - n$ bir doğal sayı ise m sayısı n sayısından büyüktür veya buna denk olarak n sayısı m sayısından küçüktür denir ve sırasıyla

$m > n$ veya $n < m$ şeklinde gösterilir. 0 dan büyük tam sayılar pozitif, 0 dan küçük tam sayılar ise negatif olur. 0 pozitif veya negatif değildir. Pozitif tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$ ile, negatif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^-$ ile gösterilir.

Buna göre,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

yazılabilir.

Bölüşmenin, parçalamanın gerekli olduğu durumlarda iki tam sayıyı bölmek gerekmektedir ve bölme sonucu tam sayı çıkmayabilir. Bu sebepten tam sayılar, iki tam sayının oranı şeklinde gösterilebilen **rasyonel sayılara** genişletilir. Böylece $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ ve } n \neq 0 \right\}$$

olarak tanımlanır.

Herhangi bir m tamsayısı $\frac{m}{1}$ şeklinde yazılabildiğinden her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır. Bu nedenle

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

yazılabilir.

Örnek: $\frac{2}{3}, \frac{5}{-7}, 0, \frac{7}{3}, 3, \frac{-13}{3}$ sayıları birer rasyonel sayıdır.

$\frac{m}{n}$ rasyonel sayısında, m ve n tam sayıları aynı işaretli ise rasyonel sayı pozitif, ters işaretli ise negatif rasyonel sayı olur. Bundan başka,

$$-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$$

dir. Bunun sonucu olarak, $\frac{m}{n}$ rasyonel sayısında her zaman n pozitif bir tam sayı olarak düşünülebilir.

Pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^+$, negatif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^-$ olmak üzere,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$$

dir.

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$$

dir. Buna göre, örneğin

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24} = \dots = \frac{-4}{-6} = \frac{-8}{-12} = \frac{-16}{-24} = \dots$$

yazabiliriz.

Eğer $\frac{m}{n}$ rasyonel sayısında, n pozitif olmak üzere, m ve n nin ortak bölenleri yoksa yani, her iki tam sayıyı da bölen 1 den farklı bir tam sayı bulunmuyorsa, $\frac{m}{n}$ sayısı **sadeleşmiş şekildedir** denir. Örneğin, $\frac{3}{5}$ sadeleşmiş şekilde bir rasyonel sayıdır. Buna karşılık, $\frac{4}{6}$ sadeleşmiş şekilde değildir. Ancak, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ olduğundan ve 2 ile 3 ün ortak böleni bulunmadığından $\frac{4}{6}$ sayısının sadeleşmiş şekli $\frac{2}{3}$ dir. Benzer şekilde, $\frac{30}{40}$ in sadeleşmiş şekli $\frac{3}{4}$ iken, $\frac{-20}{25}$ in sadeleşmiş şekli ise $\frac{-4}{5}$ dir.

$\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{k}$ rasyonel sayıları verilsin.

$$1) \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

$$2) \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$$

$$3) \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

$$4) \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}$$

$$5) \frac{m}{n} \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{k} \right) = \frac{mp}{nq} + \frac{mr}{nk} = \frac{mpk + mrq}{nqk}$$

$$6) \text{ Herhangi bir } p \neq 0 \text{ tam sayısı için } \frac{m}{n} = \frac{mp}{np}$$

$$7) \frac{0}{m} = 0, (m \neq 0)$$

$$8) -\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$$

dir.

$$\text{Örnek: } \frac{5}{9} + \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 8 + 7 \cdot 9}{72} = \frac{40 + 63}{72} = \frac{103}{72},$$

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 3 - 7 \cdot 8}{24} = \frac{15 - 56}{24} = \frac{-41}{24} = -\frac{41}{24}.$$

m ve n iki doğal sayı olsun. Eğer $m > n$ ise, p bölüm, k kalan olmak üzere, $m = pn + k$ yazılabilir. Bu durumda $\frac{m}{n}$ rasyonel sayısı $p \frac{k}{n}$ biçiminde gösterilir. Örneğin, $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$ dir. $p \frac{k}{n}$ sayısına tam sayılı kesir de denmektedir. $p \frac{k}{n} = p + \frac{k}{n}$ demek olduğuna dikkat edip bu tür sayılarla işlem yaparken dikkatli olunuz.

$$3\frac{2}{7} \left(5\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{23}{7} \left(\frac{21}{4} + 1 \right) = \frac{23}{7} \cdot \frac{3 \cdot 21 + 4}{4 \cdot 3} = \frac{23}{7} \cdot \frac{67}{12} = \frac{1541}{84}.$$

Herhangi iki rasyonel sayıyı karşılaştırmak mümkündür. Yani $\frac{m}{n}$ ve $\frac{p}{q}$ gibi iki rasyonel sayı verildiğinde bu sayılar ya eşit, ya birinci ikinciden büyük, ya da birinci ikinciden küçük olacaktır. Herhangi iki rasyonel sayıyı karşılaştırmak için onları ortak paydaya getirip paylarını karşılaştırmak yeterlidir.

Örnek:

1) $\frac{3}{4}$ ve $\frac{4}{5}$ sayılarını karşılaştırmak için $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$ gibi yazarsak 16 sayısı

15 den büyük olduğundan $\frac{4}{5}$ in $\frac{3}{4}$ den büyük olduğu sonucuna varıyoruz.

2) $\frac{6}{7}$ ve $\frac{21}{23}$ verilsin. O zaman $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 23}{7 \cdot 23} = \frac{138}{161}$, $\frac{21}{23} = \frac{21 \cdot 7}{23 \cdot 7} = \frac{147}{161}$ gibi yazarsak $\frac{21}{23}$

ün $\frac{6}{7}$ den büyük olduğunu görüyoruz.

3) $-\frac{8}{11}$ ve $-\frac{5}{7}$ sayıları verilsin. O zaman $-\frac{8}{11} = \frac{-8 \cdot 7}{11 \cdot 7} = \frac{-56}{77}$; $-\frac{5}{7} = \frac{-5 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{-55}{77}$

gibi yazılımları mümkün olduğundan ve -55 sayısı -56 sayısından büyük

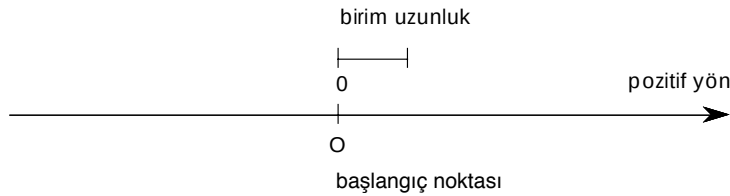
olduğundan $-\frac{5}{7}$ sayısı $-\frac{8}{11}$ den büyüktür.

4) $\frac{19}{3}$ ve $\frac{50}{7}$ sayılarını karşılaştırmak için ortak paydaya gerek yoktur, çünkü

$\frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$, $\frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$ gibi yazarsak ikincinin tam kısmı büyük olduğundan $\frac{50}{7}$

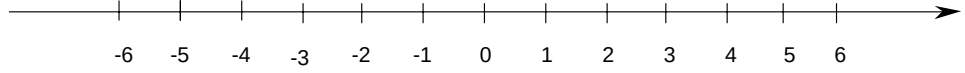
nin $\frac{19}{3}$ den büyük olduğu sonucuna varıyoruz.

Rasyonel sayıları kolaylıkla geometrik olarak göstermek mümkündür. Bunun için bir doğru seçilir ve bu doğru üzerinde sıfır sayısına karşılık gelmek üzere bir O başlangıç noktası, soldan sağa olmak üzere pozitif yön ve bir birim uzunluk seçilir.



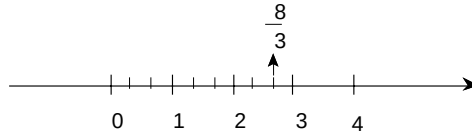
Bu doğruya **sayı doğrusu** veya **sayı eksen**i denir.

0 noktasından itibaren birim uzunluk, sağa doğru 1 defa, 2 defa, 3 defa, ... taşınarak 1, 2, 3, ... sayılarına karşılık gelen noktalar belirlenir. Aynı işlem 0 noktasından sola doğru tekrarlanarak -1, -2, -3, ... sayılarına karşılık gelen noktalar belirlenmiş olur.



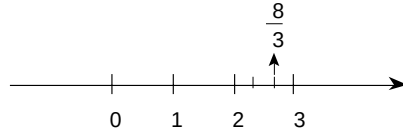
Sadeleşmiş şekli $\frac{m}{n}$ olan rasyonel sayı verilsin. Birim uzunluğu, herbirinin uzunluğu $\frac{1}{n}$ olan n tane eşit parçaya bölelim ($n > 0$ olduğunu hatırlayalım). Sonra eğer, $m > 0$ ise 0 noktasından sağa doğru m tane, $m < 0$ ise sola doğru $-m$ tane $\frac{1}{n}$ uzunluğunu taşıdığımızda son ulaştığımız nokta $\frac{m}{n}$ sayısına karşılık gelen nokta olarak belirlenmiş olur.

Örneğin, $\frac{8}{3} = 8 \cdot \frac{1}{3}$ olduğundan $\frac{1}{3}$ uzunluğunu 0 dan itibaren sağa doğru 8 adım taşıdığımızda gelinen nokta $\frac{8}{3}$ noktasıdır:



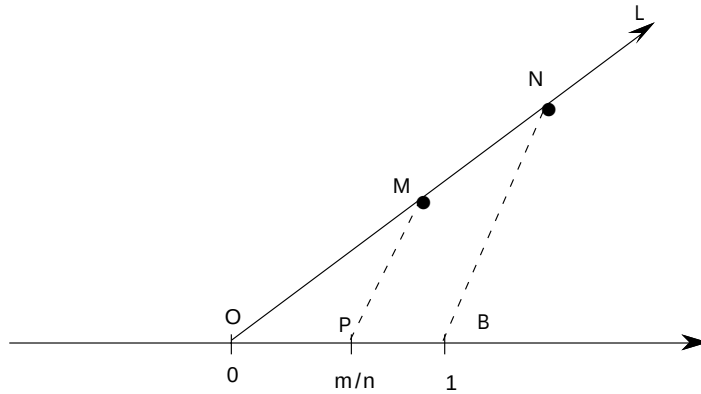
Eğer rasyonel sayı 1 den büyükse bu sayıya karşı gelen nokta aşağıdaki yöntemle daha kolay bulunabilir. $\frac{m}{n} > 1$ ise $\frac{m}{n} = p + \frac{k}{n}$ ($p, k \in \mathbb{N}$) yazılır ve birim uzunluk n eşit parçaya bölünür. Daha sonra p den itibaren $\frac{1}{n}$ uzunluğu sağa doğru k kez taşınırsa $\frac{m}{n}$ ye karşı gelen nokta bulunmuş olur.

Örneğin, $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$ olduğundan bu sayıya karşı gelen nokta aşağıdaki gibi de bulunabilir.



$\frac{m}{n} < 0$ ise $-\frac{m}{n}$ ye karşı gelen nokta yukarıdaki yöntemle bulunur, daha sonra bu noktanın başlangıç noktasına göre simetriği alınır.

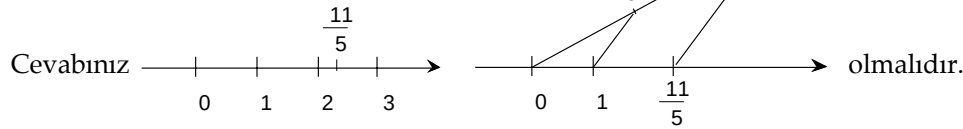
$\frac{m}{n}$ nin pozitif olması durumunda bu nokta aşağıdaki şekilde de bulunabilir.



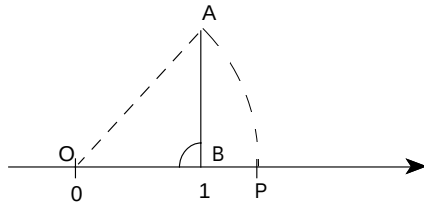
Şekilde görüldüğü gibi önce, OL yarı doğrusu çizilir. OL yarı doğrusu üzerinde $|OM| = m$ ve $|ON| = n$ olacak şekilde M ve N noktaları belirlenir (OL yarı doğrusu üzerindeki birim uzunluk sayı doğrusu üzerindeki birim uzunluktan farklı olabilir). Daha sonra N noktası sayı doğrusu üzerinde 1'e karşı gelen B noktası ile birleştirildikten sonra M noktasından NB doğrusuna bir paralel çizilir. Bu paralel doğrunun sayı doğrusunu kestiği nokta olan P noktası $\frac{m}{n}$ pozitif sayısına karşı gelen nokta olur.

Böylelikle her rasyonel sayıyı sayı doğrusunda bir nokta ile göstermek mümkündür. Eğer bir rasyonel sayıya karşı gelen nokta, başka bir sayıya karşı gelen noktanın sağında ise, birinci sayı ikinciden büyük olur.

$\frac{11}{5}$ sayısına sayı ekseninde karşı gelen noktayı bulunuz.



Şimdi doğal olarak şu soru ortaya çıkar. Sayı doğrusu üzerindeki her nokta bir rasyonel sayıyı gösterir mi? Bu sorunun cevabı hayırdır. Gerçekten, aşağıdaki şekildeki gibi bir ikizkenar dik üçgen alalım. Bu dik üçgende OA kenarı hipotenüstür ve Pisagor teoremine göre, $|OA|^2 = |OB|^2 + |BA|^2$ dir. $|OB| = |BA| = 1$ olduğundan $|OA|^2 = 2$ olur. Şimdi sayı ekseninde $|OA| = |OP|$ olacak şekilde P noktasını işaretleyelim.



O zaman $|OP|^2 = 2$ olur. Buna göre P noktasının O noktasına uzaklığı, karesi 2 olan bir sayı kadar birimdir. Ancak bilinen odur ki karesi 2 olan rasyonel sayı yoktur. O zaman $|OP|$ uzunluğu rasyonel sayı değildir ve P noktasına rasyonel sayı karşı gelmez. $|OA|$ uzunluğunun kenar uzunluğu 1 birim olan karenin köşegen uzunluğuna eşit olduğuna dikkat ediniz. P noktasında olduğu gibi O noktasına uzaklığı bir rasyonel sayı ile ifade edilemeyen çok fazla sayıda noktanın varlığı bilinmektedir. Bu tür noktalara karşı gelen sayılara **irrasyonel sayılar** denir. Örneğin yukarıda varlığını gördüğümüz, karesi 2 ye eşit olan sayı ki bu sayıyı $\sqrt{2}$ şeklinde göstereceğiz, bir irrasyonel sayıdır. Sayı ekseninde bir B noktası verildiğinde $|OB|$ uzunluğu rasyonel sayılarla ifade edilemezse o zaman B noktasının gösterdiği sayı irrasyonel sayıdır. Daha sonra tanıyacağımız ve orta öğreniminizden de hatırlayacağımız $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{4}, \dots$ köklü sayıları birer irrasyonel sayılardır. Rasyo-

nel sayılar kümesine irrasyonel sayıların da eklenmesi, herhangi doğru parçasının uzunluğu kavramını tanımlamaya imkan verir. İrrasyonel sayılar köklü sayılarla bitmiyor. Örneğin, herhangi çemberin çevresinin çapına oranı olan π sayısı ve daha sonra tanıyacağımız ünlü bir limitin değeri olan e sayısı da irrasyoneldir. Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine **gerçek sayılar kümesi**, bu kümenin her bir elemanına da bir **gerçek (reel) sayı** denir. Gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilir.



Her gerçek sayıya sayı ekseninde bir nokta, ve tersine, sayı eksenindeki her noktaya bir gerçek sayı karşı gelir.

Sayı doğrusu üzerinde rasyonel ve irrasyonel sayılara karşılık gelen noktalar farklı olduğundan bir sayı hem rasyonel hem de irrasyonel olamaz. Yani rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar kümesinin kesişimi boş kümedir.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

olduğu da açıktır.



Bundan sonra sayı dediğimizde gerçek sayıyı kastedeceğiz.

Her rasyonel sayının devirli ondalık yazılımı vardır. Devirli ondalık yazılım, rasyonel sayının ondalık yazılımında aynı doğal sayının sonsuza kadar tekrarlanmasıdır. Bu yazılımı bulmak için, pay paydaya bölünür ya da bazı özel durumlarda rasyonel sayının paydası 10'un kuvvetlerinden birine dönüştürülür.

Örnek:

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad , \quad \frac{1}{3} = 0,333 \dots \quad , \quad \frac{32}{9} = 3,555 \dots,$$

$$\frac{3}{7} = 0,428571428571 \dots, \quad \frac{11}{4} = \frac{11 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{275}{100} = -2,75.$$

Eğer bir rasyonel sayının ondalık yazılımı sonlu ise, bu durumda 0 devrediyor kabul edilir. Örneğin, $\frac{1}{2} = 0,5$ ve $-\frac{11}{4} = -2,75$ sayılarında 0 devrediyor kabul edilir. Bu tür sayıların ondalık kesirlerle ikinci tür yazılımı da mümkündür. İkinci yazılım, 9'un devrettiği devirli ondalık yazılımdır. Örneğin, $\frac{1}{2} = 0,5$ ve $\frac{1}{2} = 0,4999 \dots$,

$$\frac{13}{5} = 2,6 \text{ ve } \frac{13}{5} = 2,5999 \dots, \quad -\frac{1}{4} = -0,25 \text{ ve } -\frac{1}{4} = -0,24999 \dots \text{ yazılabilir.}$$



Herhangi bir rasyonel sayının payını paydasına böldüğümüzde devirli ondalık sayı çıkacağına dikkat ediniz.

Rasyonel sayıların bu özelliğine karşılık, irrasyonel sayıları onluk sistemde yazmak istediğimizde devirsiz bir ondalık yazılımla karşılaşırız.

Her irrasyonel sayı devirli olmayan sonsuz ondalıklı bir sayıdır.



Örneğin, $\sqrt{2} = 1,414213 \dots$, $\sqrt{3} = 1,73205 \dots$, $\pi = 3,141592 \dots$, $e = 2,718281 \dots$

Aşağıdaki sayılardan hangileri irrasyoneldir?



-256 , $3\sqrt{2} + 1$, $\frac{23}{6}$, $\frac{5\pi}{2}$

Cevabınız ikinci ve dördüncü sayılar olmalıdır.

a ve b gibi iki sayı verilsin. Eğer sayı doğrusu üzerinde a sayısına karşı gelen nokta, b sayısına karşı gelen noktanın solunda ise o zaman a sayısı b sayısından küçüktür veya buna eşdeğer olarak b sayısı a dan büyüktür denir. Bu bağıntı $a < b$ veya buna eşdeğer olarak $b > a$ gibi gösterilir.

Herhangi a ve b sayıları için $a < b$, $a = b$, $a > b$ bağıntılarından ancak ve ancak biri doğrudur.



$a > 0$ ise a sayısı pozitif, $a < 0$ ise negatif sayı olur. Pozitif gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^+$, negatif gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^-$ olmak üzere,

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

dir.

Eğer a ve b sayıları için a sayısı b sayısından büyük değilse (yani küçük veya eşit ise) bu bağıntı $a \leq b$ veya buna eşdeğer olarak $b \geq a$ gibi yazılır.

Buna göre $1 \leq 2$, $-0.5 \leq 1$, $3 \leq 3$ yazılımları doğru yazılımlardır. Böylece $a \leq b$ bağıntısı, " $a < b$ veya $a = b$ " demektir. Benzer şekilde $a \geq b$ bağıntısı, " $a > b$ veya $a = b$ " demektir. " $<$ ", " $>$ ", " $\leq$ ", " $\geq$ " bağıntılarına **eşitsizlikler** denir.

Eğer a sayısı b sayısına eşit değilse bu bağıntı $a \neq b$ şeklinde gösterilir.

Eğer a , b ve c sayıları için hem $a < b$, hem de $b < c$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa bu iki eşitsizlik $a < b < c$ şeklinde yazılır ve **b sayısı a ile c nin arasındadır** denir.

$a \leq b \leq c$, $a < b \leq c$ ve $a \leq b < c$ eşitsizlikleri de benzer anlam taşımaktadır. Gerçel sayılar kümesinin eşitsizliklerle ifade olunan ve çok sık kullanılan aşağıdaki özellikleri vardır.

- Her bir a sayısı için $a < n$ olacak şekilde (sonsuz sayıda) n doğal sayısı vardır (Arşimet özelliği)
- Her hangi iki sayı arasında (sonsuz sayıda) rasyonel sayı vardır
- Her hangi iki sayı arasında (sonsuz sayıda) irrasyonel sayı vardır



Sayı dediğimizde gerçel sayıyı kastedtiğimizi bir daha hatırlayalım.

Gerçel sayılar üzerinde tanımlanan iki esas işlem toplama ve çarpma işlemleridir. Fark ve bölme işlemleri ise bu iki işlemden elde edilebilir.

a ve b sayıları verilsin. O zaman $a + b$ toplamı öyle bir gerçel sayıdır ki $r_1 < a < r_2$, $r_3 < b < r_4$ eşitsizliklerini sağlayan tüm r_1, r_2, r_3, r_4 rasyonel sayıları için

$$r_1 + r_3 < a + b < r_2 + r_4$$

eşitsizliği sağlanmış olsun.

Gerçel sayıların toplamının aşağıdaki özellikleri vardır.

A1) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$a + b = b + a$$

A2) Her a, b ve $c \in \mathbb{R}$ için

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

A3) Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$a + 0 = a$$

A4) Her hangi $a \in \mathbb{R}$ verildiğinde

$$a + (-a) = 0$$

olacak şekilde bir tek $-a$ sayısı vardır.

Sayı ekseninde $-a$ sayısına karşı gelen nokta, a sayısına karşı gelen noktanın başlangıç noktasına göre simetriğidir. $-a$ sayısına a nın **toplamaya göre tersi** denir.

a ve b sayılarının $a-b$ farkını tanımlamak için önce $(-b)$ bulunur, sonra ise a ile $(-b)$ toplanır:

$$a - b = a + (-b) .$$

Aşağıda, A1)- A4) özelliklerinden yararlanarak bazı önermeler ispatlanmıştır.

Önerme 1: Her $a \in \mathbb{R}$ için $-(-a) = a$ dır.

İspat: Eğer $a + b = 0$ ise A1) ve A4) den ve a nın toplamaya göre tersinin tekliğinden $b = -a$ olmak zorundadır.

$$(-a) + a = a + (-a) = 0$$

olduğundan, $(-a)$ nın toplamaya göre tersi olan $-(-a)$ sayısı a ya eşit olmak zorundadır: $-(-a) = a$.

Önerme 2: Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $(-a) + (-b) = -(a+b)$ dir.

İspat: A1), A2), A3), A4) özelliklerinden,

$$\begin{aligned} (a+b) + [(-a) + (-b)] &= [(a+b) + (-a)] + (-b) = [(b+a) + (-a)] + (-b) \\ &= [(b+(a+(-a)))] + (-b) \\ &= (b+0) + (-b) \\ &= b + (-b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, $a+b$ nin toplamaya göre tersi olan $-(a+b)$ sayısı $(-a) + (-b)$ dir:

$$-(a+b) = (-a) + (-b).$$

İki irrasyonel sayının toplamı her zaman bir irrasyonel sayı mıdır?



Cevabınız hayır olmalıdır ($\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ sayılarını düşününüz).

Her ikisi pozitif a ve b sayılarının $a.b$ çarpımı, öyle bir sayıdır ki $r_1 < a < r_2$, $r_3 < b < r_4$ eşitsizliklerini sağlayan tüm pozitif r_1, r_2, r_3 ve r_4 rasyonel sayıları için

$$r_1 r_3 < a \cdot b < r_2 r_4$$

eşitsizliği sağlanmış olsun. Eğer

$$\begin{aligned} a < 0, b > 0 \text{ ise } a.b \text{ çarpımı } a \cdot b &= -((-a) \cdot b) \\ a > 0, b < 0 \text{ ise } a.b \text{ çarpımı } a \cdot b &= -(a \cdot (-b)) \\ a < 0, b < 0 \text{ ise } a.b \text{ çarpımı } a \cdot b &= (-a) \cdot (-b) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmakla, a ve b den en az birisi negatif olduğunda çarpma pozitif sayıların çarpımına dönüştürülebilir. Çarpma işleminin aşağıdaki özellikleri vardır.

M1) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$a \cdot b = b \cdot a$$

M2) Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

M3) Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$a \cdot 1 = a$$

M4) Her $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sayısı için, tek bir a^{-1} sayısı vardır, öyle ki

$$a \cdot (a^{-1}) = 1$$

a^{-1} sayısına a nın **çarpmaya göre tersi** denir. Buna göre, $a \cdot a^{-1} = 1$ dir.

M5) Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$a(b + c) = ab + ac.$$

a ve b sayıları verilsin ve $b \neq 0$ olsun. $a \cdot b^{-1}$ sayısına a nın b ye bölümü denir ve $\frac{a}{b}$ şeklinde gösterilir:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

Çarpma ve bölme işlemlerinin aşağıdaki özellikleri vardır.

Önerme 3: Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0$

İspat: A3) e göre $0 + 0 = 0$. Buradan M5) e göre

$$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

yazılır. Şimdi bunu ve A4) ü kullanırsak,

$$0 = a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)] = a \cdot 0 + a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)] = a \cdot 0 + [a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))] = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0,$$

buradan

$$a \cdot 0 = 0$$

elde edilir.

Önerme 4: Her $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, için

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

dir.

İspat: Bir sayının çarpmaya göre tersinin tanımına göre, $(a^{-1})^{-1} = a$ olması için $a^{-1} \cdot a = 1$ olmalıdır. M1) ve M4) ü kullanırsak

$$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$$

dir. Buna göre a^{-1} in çarpmaya göre tersi a dır. Yani $(a^{-1})^{-1} = a$.

Önerme 5: $a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = 0$ ise o zaman ya $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: a sayısı için iki durum söz konusu olabilir:

$$a = 0 \text{ veya } a \neq 0.$$

Eğer $a = 0$ ise teoremin ispatı biter.

Eğer $a \neq 0$ ise M4) e göre öyle bir $a^{-1} \in \mathbb{R}$ vardır ki $a \cdot a^{-1} = 1$ sağlanır. O zaman önerme 3, M2), M4), M3) e göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Böylece eğer $a \neq 0$ ise $b = 0$ olmalıdır.

Önerme 6: $a, b \in \mathbb{R}$ için eğer $a \neq 0, b \neq 0$ ise o zaman $a \cdot b \neq 0$ ve $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ dir.

İspat: $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğundan önerme 5 e göre $a \cdot b \neq 0$ olmalıdır. $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ eşitliğini ispatlamak için ise $(a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = 1$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Şimdi M1), M2), M3), M4) özelliklerini kullanırsak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) &= (b \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = b \cdot [a \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1})] \\ &= b \cdot [(a \cdot a^{-1}) \cdot b^{-1}] = b \cdot [1 \cdot b^{-1}] \\ &= b \cdot b^{-1} = 1, \end{aligned}$$

ve önerme ispatlanmış olur.

Önerme 7: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için eğer $b \neq 0, d \neq 0$ ise o zaman

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

dir.

İspat: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}, \frac{c}{d} = c \cdot d^{-1}$ yazılabildiğinden M1), M2) özellikleri ve önerme 6 dan

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) = a \cdot [b^{-1} \cdot (c \cdot d^{-1})] = a \cdot [(b^{-1} \cdot c) \cdot d^{-1}] = a \cdot [(c \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1}] \\ &= a \cdot [c \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1})] = (a \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \end{aligned}$$

olur.

Önerme 8: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0, b \neq 0$, ise o zaman $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ dir.

İspat: M2) ve M3) özelliklerini kullanırsak

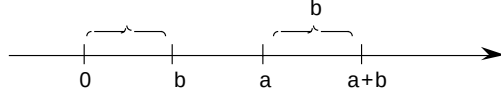
$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (b \cdot a^{-1}) = a \cdot [b^{-1} \cdot (b \cdot a^{-1})] = a \cdot [(b^{-1} \cdot b) \cdot a^{-1}] \\ &= a \cdot (1 \cdot a^{-1}) = a \cdot a^{-1} = 1 \end{aligned}$$

olur. O zaman çarpıma göre tersin tanımından dolayı

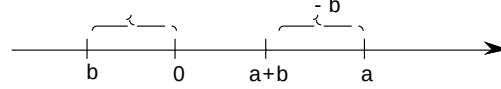
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

yazabiliriz.

Gerçek sayıların toplamı sayı ekseninde kolayca yorumlanabilir. a ve b sayıları verilsin. Bu sayılara karşı gelen noktaları eksen üzerinde bulalım. Eğer $b \geq 0$ ise a sayısına karşılık gelen noktadan itibaren pozitif yönde b kadar uzunluğu taşıdığımızda vardığımız nokta $(a + b)$ yi temsil eder.



Eğer $b < 0$ ise b ile 0 arasındaki uzunluğu a noktasından itibaren negatif yönde taşıdığımızda vardığımız nokta $(a+b)$ yi temsil eder.



Bu yolla a ve b sayılarının farkını da kolayca yorumlamak mümkündür. a ve b sayılarının çarpımı da sayı ekseninde yorumlanabilir, fakat bunun üzerinde durmayacağız.

4. Aralıklar

Aralıklar, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin önemli altkümeleridir. $a < b$ olmak üzere a ve b sayıları verilsin. b den büyük ve a dan küçük olmayan bütün sayılar kümesine **$[a, b]$ kapalı aralığı** denir. Tanıma göre,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

b den küçük ve aynı zamanda a dan büyük olan (başka deyişle a ile b arasında olan) bütün sayıların kümesine **(a, b) açık aralığı** denir:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Benzer yolla $(a, b]$, $[a, b)$ yarı kapalı (veya yarı açık) aralıkları tanımlanır:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Bundan başka sınırsız aralıklar da tanımlanabilir. Bunun için ∞ (artı sonsuz) ve $-\infty$ (eksi sonsuz) sembolleri kullanılır:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \\ (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.$$

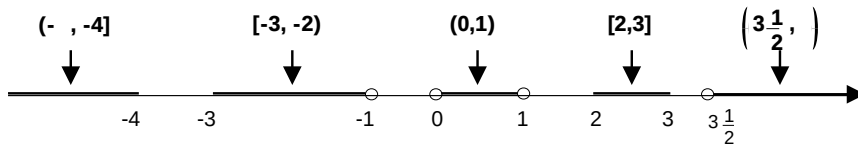
Bu işaretlere göre $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin kendisi de $(-\infty, \infty)$ aralığı gibi gösterilebilir.

Örneğin, 1 den büyük tüm gerçel sayılar kümesi $(1, \infty)$ aralığıdır. $1,3 \in (1, \infty)$, $\sqrt{2} \in (1, \infty)$, $\frac{10}{9} \in (1, \infty)$, $0,5 \notin (1, \infty)$ dır.

Negatif sayılar kümesi $(-\infty, 0)$ şeklinde gösterilebilir. $-3 \in (-\infty, 0)$, $-100.000 \in (-\infty, 0)$, $-\sqrt{2} \in (-\infty, 0)$, $0 \notin (-\infty, 0)$ dır.

Örnek: $(0, 1)$, $[2, 3]$, $(3\frac{1}{2}, \infty)$, $(-\infty, -4]$, $[-3, -1)$ aralıklarını sayı ekseninde gösteriniz.

Çözüm:



Örnek: $[0, 1]$ aralığı ile $[\frac{1}{2}, 3)$ aralığının birleşimini, kesişimini ve farkını bulunuz.

Çözüm:

$$[0, 1] \cup [\frac{1}{2}, 3) = [0, 3)$$

$$[0, 1] \cap [\frac{1}{2}, 3) = [\frac{1}{2}, 1]$$

$$[0, 1] - [\frac{1}{2}, 3) = [0, \frac{1}{2})$$

bulunur.

4. Mutlak Değer

Bir gerçel a sayısının mutlak (salt) değeri, o sayıyı sayı ekseninde gösteren noktanın başlangıç noktasından olan uzaklığını ifade eder ve $|a|$ ile gösterilir. Buna göre, eğer $a > 0$ ise $|a| = a$, $a = 0$ ise $|a| = 0$ ve $a < 0$ ise $|a| = -a$ olur. Bu tanıma büyük parantez kullanarak

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \text{ ise,} \\ 0 & a = 0 \text{ ise,} \\ -a & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

gibi yazabiliriz.

Örneğin, $|4| = 4$, $\left|5\frac{1}{2}\right| = 5\frac{1}{2}$, $|-2| = 2$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|-e| = e$, $|0| = 0$.

Örnek: $|a+1|$ sayısını a nın aldığı değerlere bağlı olarak mutlak değersiz açık yazınız.

Çözüm: Tanıma göre mutlak değer işareti altındaki ifade pozitif ise o zaman ifadenin mutlak değeri kendisine eşittir. Eğer $a+1 > 0$ ise $|a+1| = a+1$. Benzer yolla $a+1 = 0$ ise $|a+1| = 0$ ve $a+1 < 0$ ise $|a+1| = -(a+1)$ dir. Buradan

$$|a+1| = \begin{cases} a+1 & a > -1 \text{ ise,} \\ 0 & a = -1 \text{ ise,} \\ -(a+1) & a < -1 \text{ ise} \end{cases}$$

yazılabilir.

Örnek: $\frac{|-3| \cdot |-4+6|}{|3-5|} - \frac{|3-6|}{1+|-2|} = \frac{3|2|}{|-2|} - \frac{|-3|}{1+2} = \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{3}{3} = 3 - 1 = 2$.

$b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b.$$

Bir sayının mutlak değeri ile ilgili aşağıdaki özellikler vardır.
Her a ve b sayıları için

$$\begin{aligned} |-a| &= |a| \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \text{ (üçgen eşitsizliği)} \\ ||a| - |b|| &\leq |a-b| \\ |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0) \end{aligned}$$

$|a+b| = |a| + |b|$, $|a-b| = |a| - |b|$ yazılımlarının genellikle doğru olmayacağına dikkat edelim.



Örneğin, $a = -3$, $b = 4$ ise $|a| = |-3| = 3$, $|b| = |4| = 4$, $|a| + |b| = 3 + 4 = 7$,
 $|a+b| = |-3+4| = |1| = 1$, $|a-b| = |-3-4| = |-7| = 7$ ve $|a+b| \neq |a| + |b|$,
 $|a-b| \neq |a| - |b|$ olur.

Yukarıda bahsettiğimiz açık ve kapalı aralıklar da mutlak değer yardımı ile gösterilebilir. $[a, b]$ kapalı ve (a, b) açık aralığı verildiğinde bu aralığın $b-a$ uzunluğu ve $c = \frac{a+b}{2}$ orta noktası bulunursa,

$$[a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - c| \leq \frac{b-a}{2} \right\},$$

$$(a, b) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < \frac{b-a}{2} \right\}$$

şeklinde yazılım mümkün olur.

Örnek: $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$ ve $(-1, 4)$ aralıklarını mutlak değer yardımı ile yazınız.

Çözüm: Uzunluklar $\frac{5}{2} - (-2) = \frac{5}{2} + 2 = \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2}$, $4 - (-1) = 5$;

$$\text{orta noktalar } \frac{(-2) + \frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{(-2) \cdot 2 + 5}{2}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2}$$

dir.

$$\text{Buna göre } \left[-2, \frac{5}{2}\right] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left|x - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{9}{4} \right\}$$

$$(-1, 4) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{5}{2} \right\}$$

yazılabilir.

5. Üslü ve Köklü Sayılar

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n tane a nın çarpımına a sayısının **n .ci kuvveti** denir ve a^n ile gösterilir. Bu tanıma göre,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ tane}}$$

Bundan başka $a \neq 0$ için

$$a^0 = 1 \text{ ve } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

olarak tanımlanır.

Bu yolla sıfırdan farklı gerçel sayının herhangi tam kuvveti tanımlanmış olur. Sıfırın pozitif kuvvetleri sıfır iken negatif kuvvetleri ve sıfırın kuvvetleri tanımsızdır. a nın birinci kuvveti a nın kendisidir. a^n biçiminde yazılan sayılara **üslü sayılar** denir.

$$\text{Örneğin, } (-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243, \quad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125},$$

$$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \quad (3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8 = 6561.$$

Şimdi $a \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, a nın n . dereceden (kuvvetten) kökünü tanımlayalım.

Eğer bir b sayısının n .ci kuvveti a ise, o zaman b ye a nın n . **dereceden (kuvvetten) kökü** denir. n çift sayı olduğunda b sayısı, birisi pozitif, diğeri negatif olmak üzere iki tanedir. n tek ise b bir tanedir. Pozitif kök $b = \sqrt[n]{a}$ şeklinde gösterilir.

Örnek: 3 sayısı 27 nin 3. dereceden köküdür, çünkü $3^3 = 27$; 2 sayısı 32 nin 5. dereceden köküdür. Çünkü $2^5 = 32$ dir. 3 sayısı 81 in 4. dereceden köküdür. Çünkü $3^4 = 81$ dir. Buna göre, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$ dür

(-2) sayısı 16 nın 4. kuvvetten köküdür, çünkü $(-2)^4 = 16$.

$$\text{Örnek: } \sqrt[2]{4} = 2, \sqrt[3]{64} = 4, \sqrt[5]{243} = 3, \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}.$$

Bu örnekler sizi yanıltmamalıdır. Her sayının n . dereceden kökü bir rasyonel sayı olmayabilir. Örneğin karesi 10 olan sayı bir rasyonel sayı değildir, bunun gibi, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[7]{1000}$ sayıları birer rasyonel sayı değildir.

$\sqrt[n]{a}$ sayısı bazen $a^{\frac{1}{n}}$ gibi yazılır. Eğer $n=2$ ise $\sqrt[2]{a}$ yerine $\sqrt{a}$ yazılır ve **karekök** a şeklinde okunur. $\sqrt[3]{a}$ **küp kök** a şeklinde okunur. $\sqrt[n]{a}$ sayısı bir rasyonel sayı değilse, bu sayılara **köklü sayı (çokluk)** denir. Bir sayı $a^{\frac{1}{n}}$ biçiminde yazılmış ise bu durumda sayıya **rasyonel üslü sayı** denir.

Köklü çoklukların aşağıdaki özellikleri vardır.

Her $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

- i) ${}^n\sqrt{a} \cdot {}^n\sqrt{b} = {}^n\sqrt{a \cdot b}$
 ii) $({}^n\sqrt{a})^m = {}^n\sqrt{a^m}, (m \in \mathbb{Z})$
 iii) $\frac{{}^n\sqrt{a}}{{}^n\sqrt{b}} = {}^n\sqrt{\frac{a}{b}}$
 iv) ${}^m\sqrt{{}^n\sqrt{a}} = {}^{mn}\sqrt{a}, (m \in \mathbb{N})$
 v) ${}^n\sqrt{a^m} = {}^{np}\sqrt{a^{mp}}, (p \in \mathbb{N})$
 vi) ${}^n\sqrt{a^n} = a.$

Örnek:

$${}^5\sqrt{2} \cdot {}^5\sqrt{16} = {}^5\sqrt{2 \cdot 16} = {}^5\sqrt{32} = 2$$

$$\frac{{}^3\sqrt{54}}{{}^3\sqrt{2}} = {}^3\sqrt{\frac{54}{2}} = {}^3\sqrt{27} = 3$$

$$\sqrt{5} \cdot {}^3\sqrt{5} = {}^{2 \cdot 3}\sqrt{5^{1 \cdot 3}} = {}^{3 \cdot 2}\sqrt{5^{1 \cdot 2}} = {}^6\sqrt{5^3} \cdot {}^6\sqrt{5^2} = {}^6\sqrt{5^3 \cdot 5^2} = {}^6\sqrt{5^{3+2}} = {}^6\sqrt{5^5} = {}^6\sqrt{3025} \approx 3,803$$

$$\begin{aligned} {}^3\sqrt{12} \cdot {}^3\sqrt{45} &= {}^3\sqrt{12 \cdot 45} = {}^3\sqrt{3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5} = {}^3\sqrt{3^3 \cdot 4 \cdot 5} = {}^3\sqrt{3^3} \cdot {}^3\sqrt{20} = \\ &= 3 \cdot {}^3\sqrt{20} \approx 3 \cdot 2,714 = 8,142 \end{aligned}$$

$${}^3\sqrt{5\sqrt{5}} = {}^3\sqrt{\sqrt{5^2} \cdot 5} = {}^6\sqrt{5^3} = {}^6\sqrt{125} = {}^{3 \cdot 2}\sqrt{5^{3 \cdot 1}} = {}^2\sqrt{5} = \sqrt{5} \approx 2,236$$

Yukarıdaki örneklerde $\approx$ işareti köklü sayının hesap makinesinden bulunan yaklaşık değerini göstermektedir.

$$\sqrt{75} - 10\sqrt{27} + 9\sqrt{48} = ?$$

?

$$\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} = ?$$

?

Hacmi $36\pi \text{ cm}^3$ olan kürenin yarıçapını bulunuz

?

Cevaplarınız şu şekilde olmalıydı: $11 \sqrt{3} \approx 19,052$; $\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,408$; 3 cm

Genel olarak $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ olduğuna dikkat ediniz.



a negatif ve n tek ise $b^n = a$ koşulunu sağlayan b sayısına a'nın n kuvvetten kökü denir ve ${}^n\sqrt{a}$ şeklinde gösterilir. Bu durumda ${}^n\sqrt{a} = -{}^n\sqrt{-a}$ dır.

Örneğin $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{(-27)} = -\sqrt[3]{27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{(-32)} = -\sqrt[5]{32} = -2$ dir.



Eğer n tek ise her $a \in \mathbb{R}$ için a nın n . dereceden tek bir gerçel kökü vardır. Eğer a sayısı pozitif ve n çift sayı ise a nın n . dereceden kökü iki tanedir. Eğer n çift ve a negatif ise a nın n . dereceden gerçel kökü yoktur.

Örneğin 81 in 4-üncü dereceden gerçel kökü 2 tanedir ve bu kökler -3 ile 3 dür.

Köklü sayılarla ilgili olarak yukarıda verdiğimiz özellikler, köklü sayılar tanımlı olması koşuluyla, a nın negatif olması halinde de doğrudur.

$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\frac{m}{n}$ sadeleşmiş biçimde bir rasyonel sayı (bu durumda n nin pozitif olduğunu, m ve n nin ortak bölenlerinin bulunmadığını hatırlayalım) olmak üzere, a sayısının $\frac{m}{n}$ -inci kuvveti, $a^{\frac{m}{n}}$ şeklinde gösterilir ve $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ eşitliği ile tanımlanır. Eğer n çift ise bu kuvvet ancak $a > 0$ değerleri için, eğer n tek ise tüm a değerleri için tanımlıdır. Bu biçimde yazılan sayılara da rasyonel üslü sayılar denir.

Rasyonel üslü sayılarla ilgili aşağıdaki özellikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} & \text{ii)} \quad \frac{a^{m/n}}{a^{p/q}} &= a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} & \text{iii)} \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \\ \text{iv)} \quad a^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{a^{m/n}} & \text{v)} \quad (ab)^{\frac{m}{n}} &= a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} & \text{vi)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} &= \frac{a^{m/n}}{b^{m/n}} \end{aligned}$$

Örnek:

$$\begin{aligned} 9^{\frac{3}{2}} &= (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27, \quad 81^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27, \\ 4^{\frac{5}{2}} &= (\sqrt{4})^5 = 2^5 = 32, \quad \left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32} \approx 1,781,$$

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{4}} = \sqrt[5]{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{8}{3}}} = 2^{\frac{8/3}{5}} = 2^{\frac{8}{15}} = 2^{\frac{5/3}{5}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \approx 1,259,$$

$$(-2)^{\frac{5}{4}} \text{ tanımsızdır, çünkü } \sqrt[4]{-2} \text{ tanımsızdır.}$$

Şimdi her hangi pozitif gerçel sayının irrasyonel kuvvetini tanımlayalım. $a > 0$ ve b gerçel sayıları verilsin ve b nin irrasyonel olduğunu varsayalım. Önce $a > 1$ olsun.

O zaman a^b kuvveti öyle bir gerçel sayıdır ki $\frac{m}{n} < b < \frac{m'}{n'}$ koşulunu sağlayan tüm $\frac{m}{n}$ ve $\frac{m'}{n'}$ rasyonel sayıları için $a^{\frac{m}{n}} < a^b < a^{\frac{m'}{n'}}$ eşitsizliği sağlanmış olsun (Burada $a^{\frac{m}{n}}$ ve $a^{\frac{m'}{n'}}$ rasyonel üsler olduklarından tanımlıdır). Eğer $a = 1$ ise $1^b = 1$ dir. $0 < a < 1$ ise, o zaman $a^b = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$, $\frac{1}{a} > 1$ olduğundan $\left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$ yukarıdaki gibi tanımlanabilir. Böylece herhangi pozitif sayının irrasyonel kuvveti de tanımlanmış olur.

Görüleceği gibi bu tanımla a^b sayısı ancak yaklaşık olarak hesaplanabilir. Günümüzde bu sayılar hesap makinaları ile yaklaşık olarak bulunabilmektedir. Bu sayıların gerçek değeri sonsuz basamaklı devirsiz ondalık sayılar olduklarından gerçek değerler onluk sistemde tam olarak yazılamazlar, ancak yaklaşık değerleri ifade edilebilirler.

Örnek: $2^{\sqrt{2}} \approx 2,665$, $3^{\sqrt{5}} \approx 11,664$,
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} \approx 0,375$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{7}} = (\sqrt{3})^{-\sqrt{7}} \approx 0,233$

Rasyonel kuvvetler için yazılan özellikler gerçel kuvvetler için de geçerlidir. $a, d \in \mathbb{R}^+$, $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

- i) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
- ii) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- iii) $(a \cdot d)^b = a^b \cdot d^b$
- iv) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
- v) $\left(\frac{a}{d}\right)^b = \frac{a^b}{d^b}$
- vi) Eğer $a \neq 1$ için $a^b = a^c$ ise o zaman $b = c$ dir.

Örnek: $(3^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = 3^{\sqrt{16}} = 3^4 = 81$
 $2^{\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{3}} = (2 \cdot 4)^{\sqrt{3}} = 8^{\sqrt{3}} \approx 36,660$
 $\frac{21^{\sqrt{3}}}{7^{\sqrt{3}}} = \left(\frac{21}{7}\right)^{\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}} \approx 6,704$
 $\frac{2^{\sqrt{2}+1}}{2^{\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 2^1 = 2$.

6. Logaritma

Pozitif gerçel sayının gerçel kuvvetlerinin tanımından yola çıkarak logaritma işlemi tanımlanabilir. $a > 0$, $a \neq 1$ ve $b > 0$ gerçel sayıları verilsin. $a^c = b$ eşitliğini sağlayan c sayısına **b nin a tabanına göre logaritması** denir ve $c = \log_a b$ olarak yazılır ($a = 1$ durumu bir anlam ifade etmiyor). Bu tanıma göre, b sayısının a tabanına göre logaritması, b yi elde etmek için a nın yükseltilmesi gereken kuvvet demektir:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b .$$

Tanımdan görüldüğü gibi logaritma işlemi, $a^c = b$ eşitliğinde a ve b verildiğinde c nin bulunmasıdır ve buna göre bu işlem kuvvet alma işleminin ters işlemidir. $a^c = b$ ve $c = \log_a b$ eşitliklerinden

$$a^{\log_a b} = b$$

eşitliği çıkar.

Örneğin, $2^1 = 2$ olduğundan $\log_2 2 = 1$; $2^3 = 8$ olduğundan $\log_2 8 = 3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ olduğundan $\log_{1/3} \left(\frac{1}{27}\right) = 3$; $5^{-2} = \frac{1}{25}$ olduğundan $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$, $4^0 = 1$ olduğundan $\log_4 1 = 0$ dır.

Bu örneklerimizde logaritmasını aradığımız sayı tabanın rasyonel bir kuvvetine eşittir. Ancak her zaman bu kadar şanslı olmayız. Logaritmasını aradığımız sayı tabanın rasyonel bir kuvvetine eşit değilse, bu sayının logaritmasını bulmak için logaritma cetvelleri veya günümüzde hesap makinalarından yararlanılır. Hesap makinalarından bir sayının 10 tabanına göre veya e tabanına göre logaritması bulunabilir. Aşağıda vereceğimiz taban değiştirme özelliği yardımıyla 10 veya e tabanına göre logaritmaları bilinen bir sayının her hangi bir tabana göre logaritması hesaplanabilir.

Logaritmanın aşağıdaki özellikleri vardır:

a, b, c pozitif gerçel sayılar, $a \neq 1$, r herhangi gerçel sayı olsun. O zaman

$$i) \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$ii) \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$iii) \log_a (b^r) = r \cdot \log_a b$$

$$iv) \log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

$$v) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{taban değiştirme özelliği})$$

vi) $a > 1$ olsun. Bu durumda eğer $b > 1$ ise $\log_a b > 0$, $0 < b < 1$ ise $\log_a b < 0$ dır. $0 < a < 1$ olsun. Bu durumda eğer $b > 1$ ise $\log_a b < 0$, $0 < b < 1$ ise $\log_a b > 0$ dır.

Bu özelliklerin ispatı kuvvetlerin özellikleri ve logaritma tanımından çıkar. i) in ispatı için $a^{\log_{abc}} = bc$, $a^{\log_{ab}} = b$, $a^{\log_{ac}} = c$ olduklarından, kuvvetlerin özelliğinden yararlanırsak $a^{\log_{abc}} = bc = a^{\log_{ab}} \cdot a^{\log_{ac}} = a^{\log_{ab} + \log_{ac}}$, buradan $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ elde edilir.

iii) ün ispatı için $a^{\log_a b^r} = b^r = (a^{\log_a b})^r = a^{r \log_a b}$, buradan $\log_a b^r = r \log_a b$.
Kalan özellikler de benzer yolla ispatlanır.

Tabanları 10 ve e olan logaritmalar için özel işaretler kullanılır. Şöyle ki e tabanına göre logaritmaya **doğal logaritma** denir ve $\log_e b$ yerine **lnb** yazılır, 10 tabanına göre logaritmaya **bayağı logaritma** denir ve $\log_{10} b$ yerine **logb** yazılır. Her hangi a tabanına geçmek için v) özelliği kullanılır. Bugün sayıları 10 nun kuvvetleri yardımıyla yazdığımızdan, sayısal işlemlerde 10 tabanına göre logaritma çok kullanışlıdır.

Sayılarla yapılan işlemleri karşılaştırdığımızda toplama ve çıkarma işlemlerinin, çarpma ve bölme işlemlerinden, çarpma işleminin ise kuvvet alma işleminden daha kolay olduğunu söyleyebiliriz. Logaritma yukarıdaki özellikleri ile kuvvet alma işlemini daha kolay olan çarpma işlemine, çarpma ve bölme işlemlerini daha kolay olan toplama ve çıkarma işlemlerine dönüştürmektedir. Bu nedenle logaritma, hesaplama işlemlerinde oldukça kullanışlı bir araçtır.

Örnek: 1) $\log_2 18 = \log_2(2 \cdot 9) = \log_2 2 + \log_2 9 = 1 + \log_2 3^2 = 1 + 2 \log_2 3$
 $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0,477}{0,301} \approx 1,584$

olduğundan $\log_2 18 \approx 1 + 2 \cdot 1,584 = 4,168$

2) $\log 2 \approx 0,301$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \log \sqrt[4]{200} &= \log(200)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log(2 \cdot 100) = \frac{1}{4} (\log 2 + \log 100) = \frac{1}{4} (0,301... + \log 10^2) \\ &= \frac{1}{4} (0,301... + 2) = \frac{1}{4} \cdot 2,301... \approx 0,575 \end{aligned}$$

olur.

Örnek: $0 < a < b$ olsun. Bu durumda $\frac{b}{a} > 1$ olduğundan $\log \frac{b}{a} > 0$ dir.

Buradan $\log b - \log a > 0$, $\log b > \log a$ olur. Yani sayı büyüdükçe 10 tabanına göre logaritması da büyür. Burada tabanın 1 den büyük olduğuna dikkat ediniz.

$\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10^n = n$ dir. Yukarıda ispatladığımız özelliğe göre,

$$\begin{aligned} 1 < b < 10 &\text{ ise } 0 < \log b < 1, \\ 10 < b < 100 &\text{ ise } 1 < \log b < 2, \\ 100 < b < 1000 &\text{ ise } 2 < \log b < 3. \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\frac{1}{10} < b < 1 \quad \text{ise} \quad -1 < \log b < 0$$

$$\frac{1}{100} < b < \frac{1}{10} \quad \text{ise} \quad -2 < \log b < -1$$

$$\frac{1}{1000} < b < \frac{1}{100} \quad \text{ise} \quad -3 < \log b < -2$$

dir.

Örnek: $N = \left(\frac{23,15}{82,3 \cdot \sqrt{53}} \right)^{0,1}$ sayısını hesaplayınız.

Çözüm: N sayısının doğal logaritmasını alalım.

$$\begin{aligned} \ln N &= 0,1 \cdot \ln \frac{23,15}{82,3 \cdot \sqrt{53}} = 0,1 \cdot [\ln 23,15 - \ln(82,3 \cdot \sqrt{53})] = \\ &= 0,1 \cdot [\ln 23,15 - (\ln 82,3 + \ln \sqrt{53})] \\ &= 0,1 \cdot \left[\ln 23,15 - \ln 82,3 - \frac{1}{2} \ln 53 \right] \approx 0,1 \left(3,141 - 4,410 - \frac{1}{2} \cdot 3,970 \right) \\ &= 0,1 \cdot (-3,254) = -0,3254. \end{aligned}$$

$\ln N \approx -0,3254$ olduğundan, yine hesap makinası veya tablodan $N \approx e^{-0,3254} \approx 0,722$ bulunur.

7. Gerçel Sayıların Aksiyomatik Yapısı

Şimdi, gerçel sayıların, ünitenin girişinde sözünü ettiğimiz, aksiyomatik tanımını verelim.

Bir $\mathbb{R}$ kümesi verilsin. Bu küme üzerinde adına “toplama” denilen ve $+$ ile gösterilen, “çarpma” denilen ve $\cdot$ ile gösterilen işlemler tanımlanmış olsun. Bundan başka $\mathbb{R}$ deki bazı elemanlar arasında “küçüktür” denilen ve $<$ ile gösterilen bir bağıntının olduğunu kabul edelim. $a, b \in \mathbb{R}$ için bu elemanların toplamını $a + b$, çarpımını $a \cdot b$ ile, eğer a ile b arasında $<$ bağıntısı varsa bunu $a < b$ ile gösterelim.

$\mathbb{R}$ üzerinde, “toplama”, “çarpma” işlemleri ve “küçüktür” bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlarsa, $\mathbb{R}$ kümesine gerçel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ nin her bir elemanına da bir gerçel sayı denir.

- 1) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$
- 2) Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$
- 3) $\mathbb{R}$ nin “sıfır” denilen öyle bir 0 elemanı vardır ki her $a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = a$ dır.

- 4) Her $a \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}$ de $-a$ ile gösterilen öyle eleman vardır ki $a + (-a) = 0$ dir.
- 5) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a \cdot b = b \cdot a$
- 6) Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 7) $\mathbb{R}$ 'de "bir" denilen ve 1 ile gösterilen öyle bir eleman vardır ki her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 1 = a$ dir.
- 8) Sıfırdan farklı $a \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}$ de a^{-1} ile gösterilen öyle bir eleman vardır ki $a \cdot (a^{-1}) = 1$ dir.
- 9) Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- 10) $a, b \in \mathbb{R}$ elemanları verildiğinde, $a = b$, $a < b$, $b < a$ durumlarından bir ve yalnız biri doğrudur.
- 11) $a, b, c \in \mathbb{R}$ elemanları verildiğinde $a < b$ ve $b < c$ ise, o zaman $a < c$ dir.
- 12) $a, b \in \mathbb{R}$ elemanları verildiğinde $a < b$ ise, o zaman her $c \in \mathbb{R}$ için $a + c < b + c$ dir.
- 13) $a, b \in \mathbb{R}$ elemanları verildiğinde $0 < a$ ve $0 < b$ ise $0 < a \cdot b$ dir.

Son aksiyomu vermek için bazı yeni kavramlara ihtiyacımız vardır. Boş küme olmayan $A \subset \mathbb{R}$ altkümesi verilsin. Eğer öyle bir $b \in \mathbb{R}$ elemanı varsa ki her bir $a \in A$ elemanı için $a < b$ sağlansın, o zaman A ya **üstten sınırlı küme**, b ye A nın **üst sınırı** denir. Üstten sınırlı A kümesi için üst sınırların (b lerin) kümesini S ile gösterelim.

Eğer S kümesinde öyle bir s elemanı varsa ki her bir $b \in S$, $b \neq s$ elemanı için $s < b$ sağlansın, o zaman bu s elemanına A kümesinin **en küçük üst sınırı** denir ve **supA** ile gösterilir.

Şimdi $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin son aksiyomunu söyleyebiliriz.

- 14) $\mathbb{R}$ nin boş küme olmayan ve üstten sınırlı her A alt kümesi için $\sup A$ mevcuttur.

8. Doğal Sayılarla İlgili Bazı Çözülmemiş Problemler

İki p ve q doğal sayıları verilsin. Eğer p sayısı q ya kalansız bölünüyorsa o zaman q ya p nin çarpanı denir. Örneğin $p = 6$ nın çarpanları 1, 2, 3, 6, $p = 20$ nin çarpanları ise 1, 2, 4, 5, 10, 20 sayılarıdır. p sayısının p den başka tüm çarpanlarına öz (proper) çarpanları denir. Eğer bir p doğal sayısı kendi öz çarpanlarının toplamına eşitse bu sayıya **mükemmel (perfect)** sayı denir. Örneğin $6 = 1 + 2 + 3$ olduğundan 6 mükemmel sayıdır.

Birden büyük her bir doğal sayının en az iki çarpanı vardır. Bunlar 1 ve sayının kendisidir. Eğer birden büyük bir p doğal sayısının başka çarpanları bulunmuyorsa p ye **asal sayı** denir. 1 sayısı asal sayı olarak kabul edilmiyor. Asal sayılar

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

gibi sayılardır.

Sayılar teorisi çok ilginç problemler bakımından oldukça zengindir. Bunlardan bazıları bugüne kadar da henüz çözülmüş değildir. Bu çözülmemiş problemlerin ifadeleri çok basittir, ama buna rağmen çözümleri bulunamamaktadır. Aşağıda sayılar teorisinden birkaç çözülmemiş problem sıralanmıştır.

1) Goldbach problemi:

Dörtten büyük her çift doğal sayı iki asal sayının toplamı olarak yazılabilir.

Örneğin $8 = 5 + 3$, $14 = 11 + 3$, $32 = 19 + 13$, $46 = 17 + 29$, ...

Fakat her çift sayı için böyle gösterimin mümkün olduğu ispatlanmış değil.

2) Asal sayılar çifti ile ilgili problem:

Farkları iki olan asal sayılar çifti sonsuz tanedir.

Örneğin (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), ...

bu tür çiftlerdir. Bu tür çiftlerin sonsuz sayıda olduğu iddia ediliyor.

3) Tek mükemmel sayı problemi:

Tek ve mükemmel olan bir doğal sayı yoktur. Bu iddia bugüne kadar ispatlanamamıştır.

4) Ulam problemi:

Herhangi doğal sayıyı alalım. Bu sayı çift ise 2 ye bölelim, tek ise 3 ile çarpıp 1 ekleyelim. Eğer böyle devam edersek sonlu adımdan sonra 1 sayısını elde ederiz.

Örneğin 19 sayısı için bu işlem şöyle geliyor:

$19 \rightarrow 58 \rightarrow 29 \rightarrow 88 \rightarrow 44 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Bu iddianın da doğru olup olmadığı ispatlanamamıştır.

Değerlendirme Soruları

1. $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı kaçtır?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

2. $2\sqrt{7} + 2\sqrt{28} - 2\sqrt{63}$ sayısı kaçtır?
A. -1
B. 0
C. 1
D. $\sqrt{7}$
E. $2\sqrt{7}$
3. $x \geq 2$ ise $|2x - 4| - |2x + 1| = ?$
A. 3
B. 5
C. $4x - 3$
D. -3
E. -5
4. $(\sqrt{7 - \sqrt{13}} + \sqrt{7 + \sqrt{13}})^2 = ?$
A. 26
B. 14
C. $\sqrt{7\sqrt{13}}$
D. $\sqrt{14}$
E. $\sqrt{7 + \sqrt{13}}$
5. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7} - 2\sqrt{2}} = ?$
A. $\sqrt{7}$
B. $\sqrt{2}$
C. -5
D. -10
E. -15
6. $\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,2} + (810\,000)^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = ?$
A. 0
B. 29,5
C. 30
D. 30,5
E. 31
7. Aşağıdakilerden hangileri a hangi gerçel sayı olursa olsun her zaman doğrudur?
i) $a < |a|$, ii) $a + |a| = 0$, iii) $a^2 = |a|^2$, iv) $\sqrt{a^2} = |a|$ v) $\sqrt[3]{a^3} = |a|$
A. i, ii, v
B. ii, iii, iv
C. iii, iv
D. i, iii, iv
E. iii, v

8. $\frac{x^{2/3} \cdot x^{-1/3}}{x^{-5/3}} = ?$

- A. x^2
- B. x
- C. 1
- D. $x^{1/2}$
- E. x^{-2}

9. $(1,5)^3 \cdot (2,25)^{-1,5} \cdot (0,75)^{-1} \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(1\frac{1}{5}\right)^0 \right] = ?$

- A. -40
- B. -30
- C. -20
- D. 20
- E. 40

10. $\log 5 = a$ ise $\log_5 1000$ kaçtır?

- A. $\frac{1}{a}$
- B. a^2
- C. $-\frac{3}{a}$
- D. $3a$
- E. $-3a$

11. Aşağıdakilerden hangileri her bir $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için doğrudur.

- i) $|a + b| < |a| + |b|$, ii) $|ab| = |a| \cdot |b|$, iii) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$,
- iv) $\sqrt{a^2 + b^2} = |a| + |b|$, v) $|a - b| > |a| -$

- A. i, ii, v
- B. i, iii, iv
- C. ii, iii
- D. iv, v
- E. ii

12. $[-2, 2]$, $(0, 3)$, $[1, 3]$ ve $(1, 4)$ aralıklarının kesişimi hangisidir?

- A. $\emptyset$
- B. $[0, 1]$
- C. $(1, 2]$
- D. $[1, 2]$
- E. $[0, 2]$

13. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3^5}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^5}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?
- A. $\sqrt[7]{9}$
 B. $\sqrt[21]{243}$
 C. $\sqrt[28]{243}$
 D. $\sqrt[84]{243}$
 E. $\sqrt[84]{81}$
14. $a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdakilerden hangileri her zaman doğrudur?
- i) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ ii) $a \neq 0, b \neq 0$ ve $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ iii) $0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
 iv) $a \leq a^2$ v) $-a < a$
- A. i, ii, iii
 B. ii, iii
 C. ii, iii, iv
 D. ii, iii, iv, v
 E. iii
15. $a, b \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdakilerden hangileri her zaman doğrudur?
- i) $a < b \Rightarrow \log_3 a < \log_3 b$ ii) $a < b \Rightarrow \log_{\frac{1}{10}} a < \log_{\frac{1}{10}} b$
 iii) $\log(a + b) = \log a \cdot \log b$ iv) $\log_c a \cdot \log_c b = \log_c a + \log_c b$
 v) $\log a = \log b \Leftrightarrow a = b$
- A. i, v
 B. i, ii, v
 C. i, ii, iv, v
 D. i, ii
 E. iii, iv, v

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. B 3. E 4. A 5. E 6. D 7. C 8. A 9. A 10. C
 11. E 12. C 13. D 14. E 15. A