DERS 9

Grafik Çizimi , Maksimum Minimum Problemleri

Bundan önceki derste bir fonksiyonun grafiğini çizmek için izlenebilecek yol ve yapılabilecek işlemler ele alındı. Bu derste, grafik çizim stratejisini yani grafik çiziminde izlenecek adımları net olarak ifade edecek ve grafik çizimine çeşitli örnekler vereceğiz.

9.1. Grafik çiziminde izlenecek adımlar. $y = f(x)$ in grafiğini çizmek için aşağıdaki adımlar izlenebilir:

Adım 1. $f(x)$ **i analiz ediniz.**

A) f nin tanım kümesini belirleyiniz(f nin tanım kümesi, $f(x)$ in tanımlı olduğu tüm reel sayıların oluşturduğu kümedir).

B) Koordinat kesişimlerini bulunuz(Eğer varsa, y-kesişimi $f(0)$ dır; x-kesişimleri de $f(x)=0$ ın çözümleri).

C) Asimtotları bulunuz(($\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ veya $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ise, $x = a$ düşey aasimtot; $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = b$ ise, $y = b$ yatay asimtot).

Adım 2. $f'(x)$ **i analiz ediniz** (Hazırlayacağınız bir tabloda $f'(x)$ in sıfır olduğu veya tanımsız olduğu yerleri, işaret değişimini gösteriniz; böylece, $f(x)$ in nerelerde artan, nerelerde azalan olduğunu ve ayrıca yerel maksimum ve minimum değerlerini belirleyiniz).

Adım 3. $f''(x)$ **i analiz ediniz** (Hazırladığınız tabloda $f''(x)$ in de sıfır olduğu veya tanımsız olduğu yerleri, işaret değişimini gösteriniz; böylece, $f(x)$ in nerelerde aşağıya doğru, nerelerde yukarıya doğru konkav olduğunu ve ayrıca varsa dönüm noktalarını belirleyiniz).

Adım 4. Grafiği çiziniz (Hazırladığınız tablodan da yararlanarak, asimtotları çiziniz, koordinat kesişimlerini, yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını, dönüm noktalarını işaretleyiniz ve şeklinizi tamamlayınız).

Şimdi bu adımları bazı örnekler üzerinde gerçekleştirelim.

Örnek 1. $f(x) = x^4 - 2x^3$ ile verilen fonksiyonun grafiğini çizelim.

Adım 1. $f(x)$ i analiz edelim.

A) f nin tanım kümesi tüm reel sayılar kümesi **R** dir.

B) $f(0) = 0$ olduğundan, f nin y – kesişimi (0,0) dır.

$$f(x) = 0 = x^4 - 2x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = 2$$

oduğundan, x-kesişimleri (0,0) ve (2,0) noktalarıdır.

C) Asimtotlar : f bir polinom olduğundan düşey veya yatay asimtot yoktur.

Adım 2. $f'(x)$ i analiz edelim : $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2(x - 3/2)$ ifadesinden kritik değerlerin $x = 0$ ve $x = 3/2$ olduğu görülür. f nin artan veya azalan olduğu aralıkları $f'(x)$ in aşağıdaki işaret değişim tablosundan belirleyebiliriz.

x	$-\infty$	0		3/2		∞
$f'(x)$	- - - - -	0	- - - -	0	+ + + + +	
$f(x)$	azalan	0	azalan	-27/16	artan	

Tablo incelenince görülür ki f, $(-\infty,3/2)$ aralığında azalan, $(3/2, \infty)$ aralığında artan olup $x = 3/2$ de yerel minumum vardır.

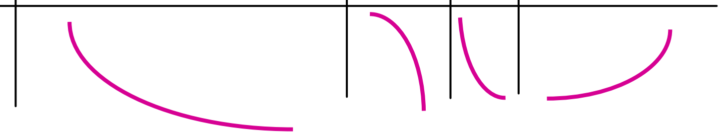
Adım 3. $f''/(x)$ i analiz edelim: $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$ ve $f''(x) = 0$ olan x değerleri $x = 0$, $x = 1$ değerleridir. f nin aşağıya veya yukarıya doğru konkav olduğu aralıkları $f''(x)$ in aşağıdaki işaret değişim tablosundan belirleyebiliriz.

x	$-\infty$	0		1		∞
$f''(x)$	+ + + + + + + +	0	- - - -	0	+ + + + + +	
$f(x)$	Yukarıya konkav	0	Aşağıya konkav	-1	Yukarıya konkav	

Tablonun incelenmesinden görülür ki f , $(-\infty,0)$ ve $(1, -\infty)$ aralıklarında yukarıya doğru, $(0,1)$ aralığında aşağıya doğru konkav olup $x = 0$ ve $x = 1$ de dönüm noktası vardır.

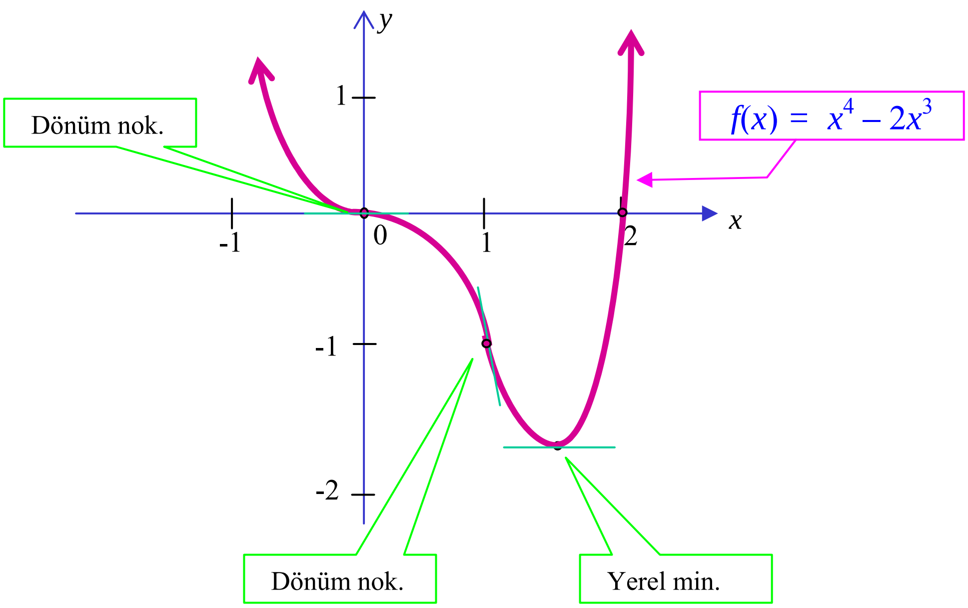
Şimdi, Adım 2 ve Adım 3 te elde edilenleri bir tabloda özetleyelim:

x	$-\infty$		0		1		3/2		2		∞
$f(x)$			0		-1		-27/16		0		
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - -	0	- - - -	-2	-	0	+ + + + +			
$f''(x)$		+ + + + ++ + + +	0	- - - -	0	+	9	+ + + + +			



Tablonun sonunda çizilen eğriler grafiğin hangi aralıklarda artan veya azalan; hangi aralıklarda aşağıya veya yukarıya doğru konkav olduğunu belirtmek için çizilmiştir. Bu eğrilerden, (0,0) ve (1,-1) noktalarının dönüm noktaları, $f(3/2) = -27/16$ nın da yerel minimum değeri olduğu görülmektedir.

Adım 4. Grafiği çizelim.



Örnek 2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ in grafiğini çizelim

Adım 1. $f(x)$ i analiz edelim.

A) f nin tanım kümesi tüm reel sayılar kümesi **R** dir.

B) $f(0) = 5$ olduğundan, y – kesişimi (0,5) noktasıdır.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x-1)2(x+5) = 0 \Rightarrow x = -5 \ , x = 1$$

olduğundan, x – kesişimleri (1,0) ve (-5,0) noktalarıdır.

C) Asimtotlar : f bir polinom olduğundan düşey veya yatay asimtot yoktur.

İlk örneğimizde de görüldüğü üzere, ikinci ve üçüncü adımları birlikte gerçekleştirerek bulguları bir tek tablo üzerinde göstermek daha elverişli olmaktadır ve bundan sonra öyle yapacağız.

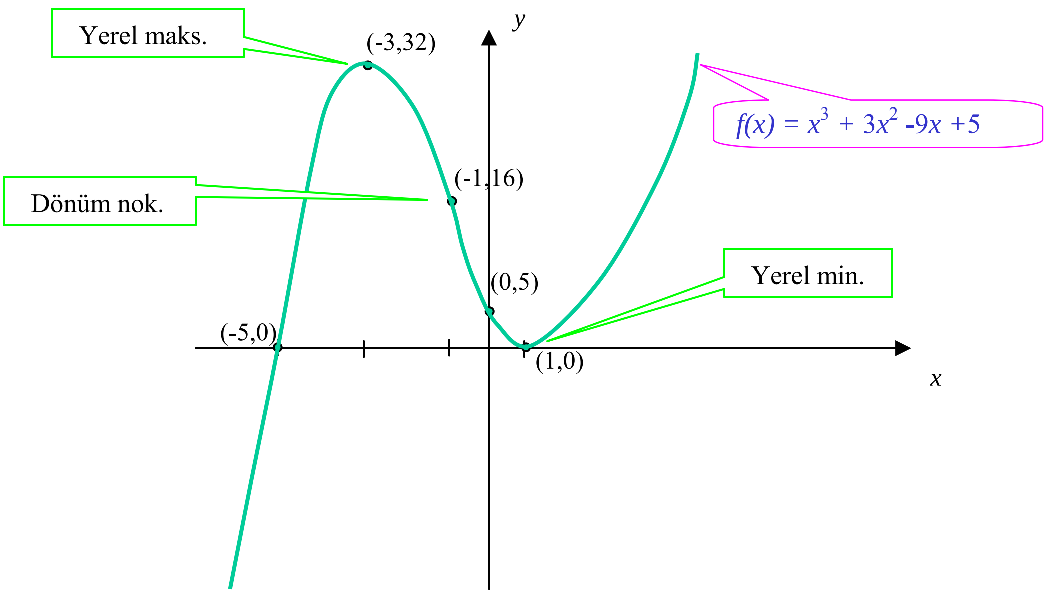
Adım 2-3. $f'(x)$ ve $f''(x)$ i analiz edelim.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x2 + 2x - 3) = 3(x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ve } x = 1.$$

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

	$-\infty$	-5		-3		-1	0	1		∞
$f(x)$		0		32		16	5	0		
$f'(x)$	+	+	+	0	- - - -	-	-	0	+ + + + +	
$f''(x)$	- -	-	- -	-	- -	0	+	+	+ + + + + + + +	

Adım 4.



Örnek 3. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ nin grafiğini çizelim.

Adım 1. $f(x)$ i analiz edelim.

A) f nin tanım kümesi $\mathbf{R}\setminus\{2\}$ dir.

B) $f(0) = \dfrac{0-1}{0-2} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan, y – kesişimi $(0,\dfrac{1}{2})$ noktasıdır. Bir kesrin sıfır olduğu yerler, payın sıfır olduğu, ancak paydanın sıfırdan farklı olduğu yerlerdir. Örneğimizde payın sıfır olduğu değer $x = 1$ dir. Dolayısıyla, x-kesişimi (1,0) noktasıdır.

C) $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x-1}{x-2} = 1$ olduğundan, $y = 1$ yatay asimtottur.

Adım 2-3. $f'(x)$ ve $f''(x)$ i birlikte analiz edip ilgili tabloyu hazırlıyoruz.

$$f'(x) = \frac{1(x-2)-1(x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

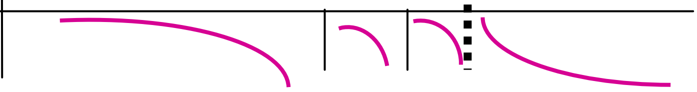
Her $x \in \mathbf{R}\setminus\{2\}$ için $f'(x) < 0$ olduğundan, f tüm tanım kümesinde azalan bir fonksdiyondur.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

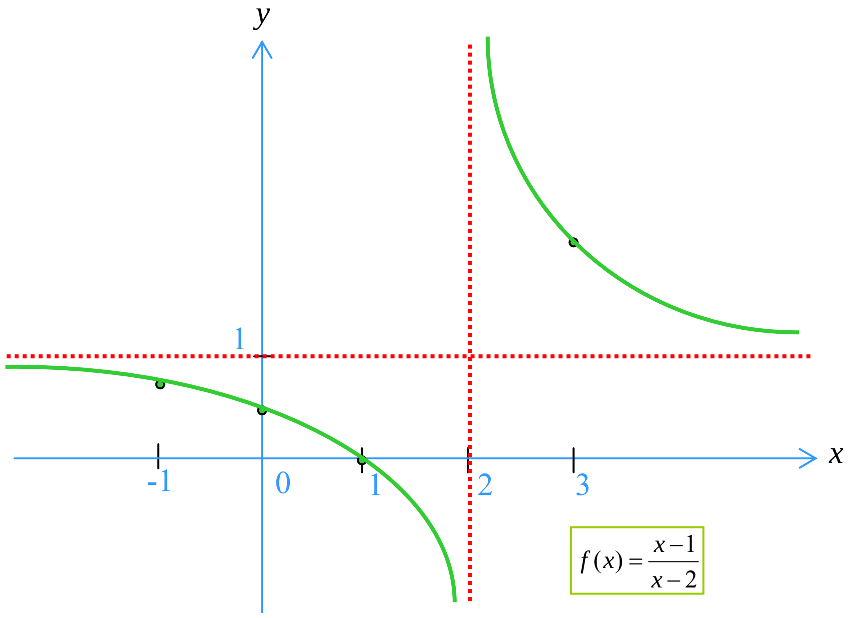
$f''(x)$ in bu ifadesinden her $x \in (-\infty,2)$ için $f(x) < 0$ ve her $x \in (2,\infty)$ için $f''(x) > 0$ olduğu görilmektedir. Dolayısıyla, f fonksiyonu $(-\infty,2)$ aralığında aşağıya doğru, $(2,\infty)$ aralığında yukarıya doğru konkavdır.

Bu hususlar aşağıdaki tablo üzerinde gösterilmiştir.

x	$-\infty$	0	1	2	∞
$f(x)$		1/	0		
$f'(x)$	- - - - - - - - - - -	-1/4	- - -1 - -		- - - - - - -
$f''(x)$	- - - - - - - - - - -	1/4	- - 2 - -		+ + + + +



Adım 4. Grafiği çizelim.



Örnek 4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ in grafiğini çizelim.

Adım 1. $f(x)$ i analiz edelim.

A) f nin tanım kümesi **R** dir.

B) $f(0)=\dfrac{1}{0^2+1}=1$ olduğundan, $y-$ kesişimi $(0,1)$ dir. $f(x)=0$ olan hiç x değeri bulunmadığından, bu fonksiyonun $x-$ kesişimi yoktur.

C) $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$ olduğundan, $y=0$ yatay asimtottur. f nin tanım kümesi **R** olduğundan, düşey asimtot yoktur.

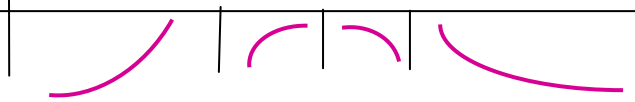
Adım 2 ve **Adım 3** ü birlikte gerçekleştirip bir tek tablo yapacağız.

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2+1)-2x\cdot 1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

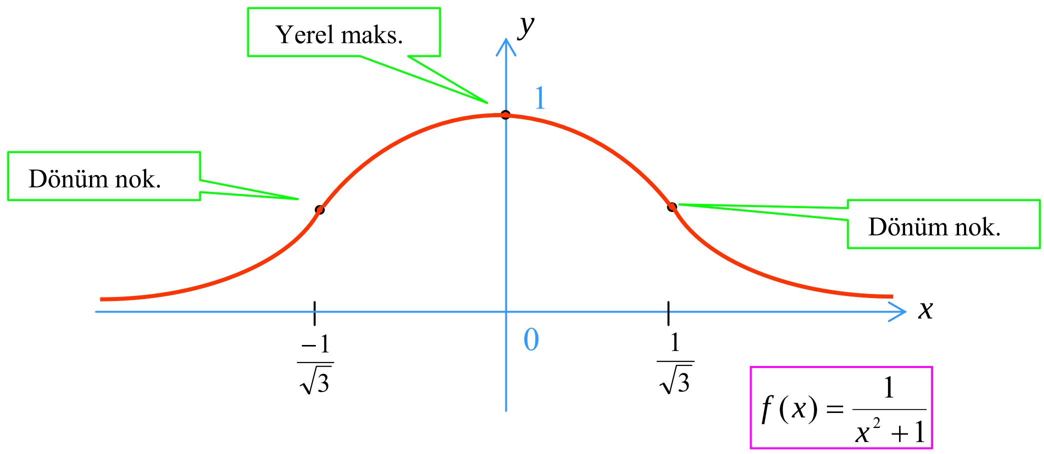
$$f''(x)=\frac{(-2)\cdot(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(-2x)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}=0 \quad\Rightarrow\quad x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$f'(x)$ ve $f''(x)$ in işaret değişimini ve $f(x)$ in bazı değerlerini gösteren aşağıdaki tabloyu hazırlayıp grafik çizimine geçeceğiz.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		∞
$f(x)$			3/4		1		3/4		1/2		
$f'(x)$		+ + + +	+	+ + + +	0	- - - -	-	- - - -	-	- - - -	
$f''(x)$		+ + + + +	0	- - -	-	- - -	0	+ + + +	+	+ + + +	



Adım 4.



Örnek 5. $f(x)=xe^x$ in grafiğini çizelim.

Grafik çizim stratejisindeki adımları sırasıyla izliyoruz.

Tanım kümesi : **R**

x-kesişimi ve y-kesişimi : (0,0).

Düşey asimtot yok.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{x} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ yatay asimtot.}$$

$$f'(x) = e^{x} + xe^{x} = e^{x}(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

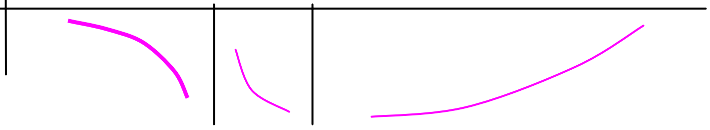
$f'(x)$ in bu ifadesinden, her $x < -1$ için $f'(x) < 0$ ve her $x > -1$ için $f'(x) > 0$ olduğu görülür.

$$f''(x) = e^{x} + e^{x}(x+1) = e^{x}(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

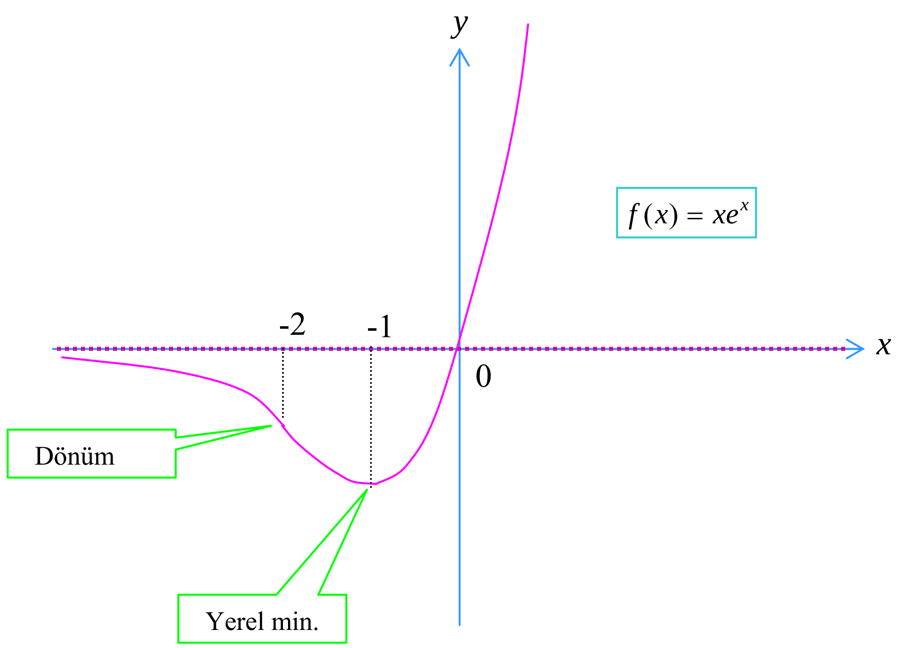
$f''(x)$ in bu ifadesinden, her $x < -2$ için $f''(x) < 0$ ve her $x > -2$ için $f''(x) > 0$ olduğu görülür.

Bu hususlar ve grafiğin artan veya azalan, yukarı veya aşağı doğru konkav olduğu aralıklar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x	$-\infty$		-2		-1		0		∞
$f(x)$			$-e^{-2}$		$-e^{-1}$		0		
$f'(x)$		- - - - - -	- - -	- - -	0	+ + +	+ + +	+ + +	
$f''(x)$		- - - - - -	0	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	



Tablodan yaralanılarak aşağıdaki grafik elde edilir.



Örnek 6. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ in grafiğini çizelim.

Grafik çizim stratejisindeki adımları sırasıyla izliyoruz.

Tanım kümesi : $\mathbf{R}\backslash\{0\}$

x-kesişimi : yok , y-kesişimi : yok.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=\infty \quad \Rightarrow x=0 \ \text{ düşey asimtot.}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x}=\infty \quad \Rightarrow y=0 \ \text{ yatay asimtot.}$$

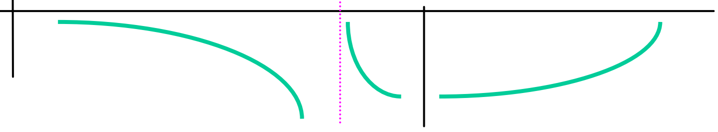
$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

$f'(x)$ in bu ifadesinden, her $x<1$ için $f'(x)<0$ ve her $x>1$ için $f'(x)>0$ olduğu görülür.

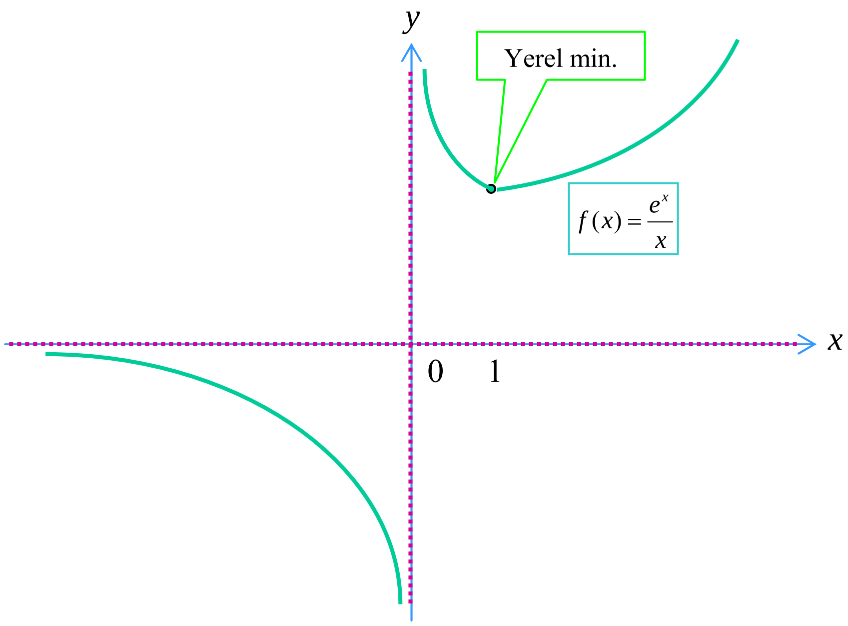
$$f''(x)=\frac{(e^x+(x-1)e^x)\cdot x^2-2x(x-1)e^x}{x^4}=\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$$

Her $x\in\mathbf{R}$ için $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ ve $e^x>0$ olduğundan, ikinci türevin asla sıfır olmadığına ve ikinci türevin işaretinin x^3 tarafından belirlendiğine dikkat ediyoruz. Bu düşüncelerle aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$	0		1		∞
$f(x)$				e		
$f'(x)$	- - - - - - - - - -		- -	0	+ + + + + + + +	
$f''(x)$	- - - - - - - - - -		+ +	e	+ + + + + + + +	



Tablodan yaralanılarak aşağıdaki grafik elde edilir.



Örnek 7. $f(x)=x\ln x$ in grafiğini çizelim.

Grafik çizim stratejisindeki adımları sırasıyla izleyelim.

Tanım kümesi : $(0,\infty)$.

x-kesişimi : $x = 1$, y-kesişimi : yok.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{1}{x})}{(\frac{-1}{x^2})} = 0 \text{ (Düşey asimtot yok.)}$$

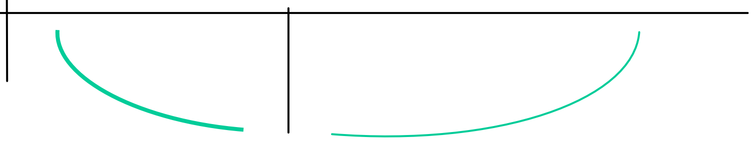
$$\lim_{x\to\infty} x\ln x = \infty \text{ (Yatay asimtot yok.)}$$

$$f'(x) = \ln x + x\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1 \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1/e$$

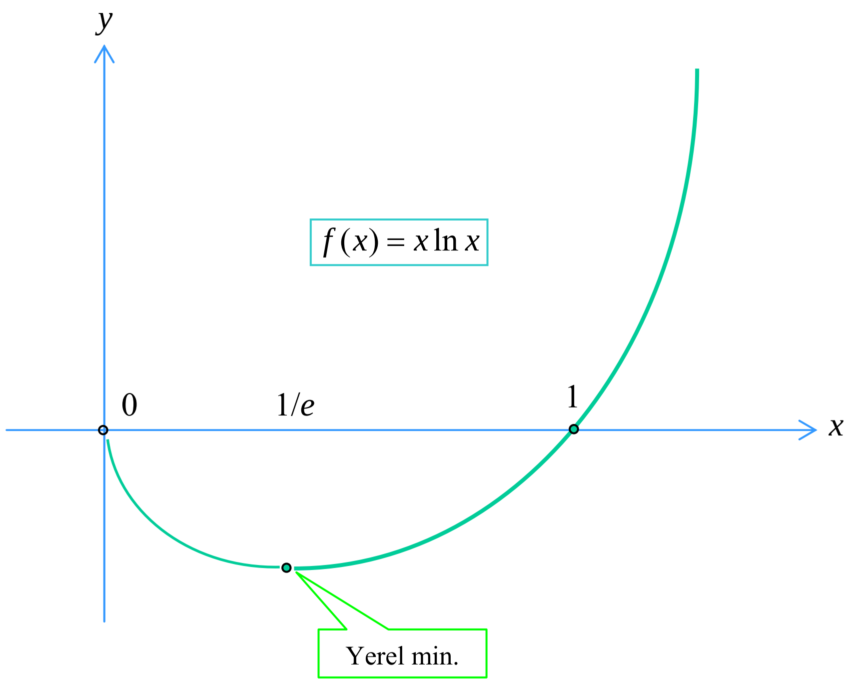
$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Elde edilenleri tabloda gösterelim:

x	0		$1/e$		1	∞
$f(x)$			$-1/e$		0	
$f'(x)$		- - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + +		
$f''(x)$		+ + + + + + +	e	+ + + + + + + + + + +		



Tanım kümesinin $(0,\infty)$ aralığı olduğunu, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} x\ln x = \infty$ olduğunu unutmuyoruz. Tablodan yararlanılarak grafik aşağıdaki gibi elde edilir.



9.2 Maksimum – Minimum Problemleri. Sekizinci derste bir fonksiyonun yerel maksimum, yerel minimum, mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini tanımlamıştık.

8.6 da bir fonksiyonun kapalı bir aralık üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerinden söz edilebileceğini ve eğer fonksiyon söz konusu kapalı aralıkta sürekli ise mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerin mevcut olduğunu görmüştük. 8.6 da günlük yaşamdan maksimum minimum problemleri ve çözümlerine örnekler vermiştik.

Dersimizin bu kısmında maksimum minimum problemlerine yeni örnekler vereceğiz.

Mutlak maksimum ve mutlak minimumla ilgili temel sonucu bir kez daha ifade ediyoruz:

Teorem. f fonksiyonu $[\,a\,,\,b\,]$ kapalı aralığında sürekli ise, f nin $[\,a\,,\,b\,]$ aralığı üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri vardır.

$[\,a\,,\,b\,]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir f fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulmak için

1. f nin $[\,a\,,\,b\,]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan emin olunuz.

2. f nin $(\,a\,,\,b\,)$ aralığında kritik noktalarını bulunuz.

3. f nin kritik noktalarda aldığı değerleri; $f(a)$ ve $f(b)$ yi bulunuz.

4. Adım 3 te bulduğunuz değerlerden en büyüğü f nin mutlak maksimum değeri, en küçüğü de mutlak minimum değeridir.

Örnek 1. Radyo üreten bir firmanın, haftada x radyo üretmesi durumunda toplam gideri $Gi(x) = 5000 + 2x$, fiyat – talep fonksiyonu ise $p = 10 - (0.001)\,x$, $0 \le x \le 10\,000$ olarak veriliyor . (*Para birimi olarak* **YTL** *alınız.*)

a) Haftalık maksimum geliri bulunuz.
b) Haftalık maksimum kârı, bu kârın gerçekleşmesi için haftada üretilmesi gereken radyo sayısını ve radyo başına fiyatı bulunuz.
c) Eğer firma her bir radyo için 2 YTL vergi ödemek durumunda kalırsa, maksimum kâr ne olur ve bunun için haftada kaç radyo üretilmelidir? Bu durumda maksimum kâr için bir radyonun satış fiyatı ne olur?

Çözüm. a) Gelir fonksiyonu

$$Ge\,(x) = (10 - 0.001\,x)\,x = 10\,x - (0.001)x^2 \;,\quad 0 \le x \le 10\,000$$

olacağından

$$Ge'(x) = 10 - (0.002)\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5000$$

olduğu görülür. Gelir fonksiyonunun kritik değer olan $x = 5000$ ve uç noktaları $x = 0$ ile $x = 10\,000$ de aldığı değerler

$Ge\,(0) = 0$, $Ge\,(5000) = 25\,000$, $Ge\,(10\,000) = 0$.

dir. Dolayısıyla, maksimum gelir 25 000 YTL olur.

b) Kâr fonksiyonu

$$K\,(x) = Ge\,(x) - Gi(x) = 10\,x - (0.001)x^2 - (5000 + 2x) = -5000 + 8x - (0.001)x^2$$

ve

$$K'\,(x) = 8 - (0.002)\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4000$$

olup kâr fonksiyonunun kritik değer olan $x = 4000$ ve uç noktaları $x = 0$ ile $x = 10\,000$ de aldığı değerler

$$K(0) = -5000 \quad , \quad K(10\,000) = -15\,000 \quad , \quad K(4000) = 11\,000$$

Dir. Böylece, maksimum kâr 11 000 YTL dir ve 4000 radyo üretilince gerçekleşir. Bir radyonun satış fiyatı $p = p(4000) = 10 - (0.001)(4000) = 6$ YTL dir.

c) Radyo başına 2 YTL vergi ödenince gider fonksiyonu

$$Gi(x) = 5000 + 2x + 2x = 5000 + 4x\,,$$

kâr fonksiyonu

$$K\,(x) = Ge(x) - Gi(x) = 10\,x - (0.001)x^2 - (5000 + 4x) = -5000 + 6x - (0.001)x^2.$$

ve

$$K'\,(x) = 6 - (0.002)\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3000$$

olup kâr fonksiyonunun kritik değer olan $x = 3000$ de aldığı değer, $K(3000) = 4\,00$, uç noktalarında aldığı değerlerden büyük olduğundan, maksimum kâr 4000 YTL dir ve 3000 radyo üretilince gerçekleşir. Bir radyonun satış fiyatı $p = 10 - (0.001)(3000) = 7$ YTL dir.

Örnek 2. Bir yüzme havuzu zararlı bakterilerin yok edilmesi için periyodik olarak ilaçlanıyor. İlaçlama yapıldıktan t gün sonra havuz suyunun her cm^3 ünde

$$C(t) = 30\,t^2 - 240\,t + 500 \quad , \quad 0 \le t \le 8$$

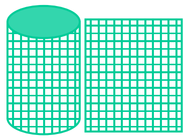
bakteri görülüyor . Havuzdaki bakteri sayısı ilaçlamadan kaç gün sonra minimum olur?

Çözüm. $C(t) = 30\,t^2 - 240\,t + 500 \quad , \quad 0 \le t \le 8$

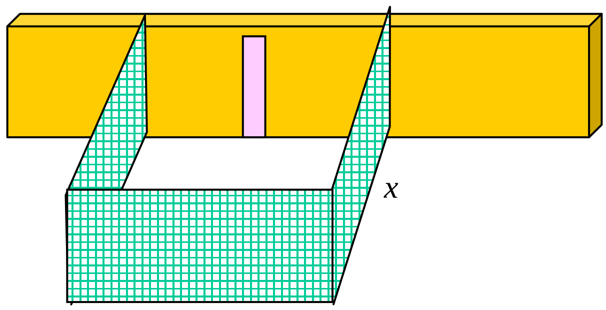
$$C'(t) = 60\,t - 240 = 0 \Rightarrow t = 4. \;;\; C\,(0) = 500 \;,\; C(4) = 20 \;,\; C(8) = 500.$$

Havuzdaki bakteri sayısı ilaçlama yapıldıktan 4 gün sonra minimum olur ve minimum sayı $C\,(4) = 20$ dir.

Örnek 3. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, uzun bir duvarın önünde bir ta-rafı duvar ve diğer üç tarafı tel-örgü ile çevrili dikdörtgen biçiminde bir alan oluşturulmak isteniyor. Bu iş için kullanılacak tel-örgü 24 m. olduğuna göre, oluşturulacak alanın maksimum olması için dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır? Maksimum alan ne olur?



24 m.



Problemin çözümü için dikdörtgenin duvara dik gelen kenarının uzunluğunu x ile gösterelim. O zaman duvara paralel olan kenarın uzunluğu $24 - 2x$ olur. Dik dörtgenin alanı $A(x) = x(24 - 2x) = 24x - 2x^2$, $0 \le x \le 12$, dir ve

$$A'(x) = 24 - 4x = 0 \Rightarrow x = 6$$

olduğu görülüp $A(0) = 0$, $A(12) = 0$, $A(6) = 72$ değerlerinden maksimum alanın $A(6) = 72$ m^2 olduğu ve maksimum alan için dikdörtgenin eninin $6\ m$, boyunun $12\ m$ olması gerektiği sonucu çıkar.

Örnek 4. Bir ceviz üreticisi, geçmiş deneyimlerinden, dönüm başına 20 ağaç dikerse, her bir ağacın yılda ortalama 60 kg. ceviz vereceğini tahmin ediyor. Dönüm başına 20 ağaçtan sonra dikilecek her ağaç, ağaç başına yıllık verimi 2 kg. düşürüyor. Bir dönüme en çok 45 ağaç dikilebildiğine göre, maksimum verim için dönüm başına kaç ağaç dikilmelidir? 100 dönümlük bir toprağa ceviz ekilirse alınabilecek yıllık maksimum verim ne olur?

Çözüm. Bir dönüme ekilecek ağaç sayısı

$$N(x) = 20 + x$$

olsun. Bu fonksiyonun tanım kümesi [0 , 25] aralığıdır. Dönüm başına yıllık verim

$$V(x) = (20 + x)(60 - 2x) = 1200 + 20x - 2x^2 ,\ 0 \le x \le 25$$

olarak gerçekleşir. Kritik değer olarak

$$V'(x)\ (x) = 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5$$

bulunur ve

$$V(0) = 1200\ ,\ V(25) = 450\ ,\ V(5) = 1250$$

değerlerinden dönüm başına $20 + 5 = 25$ ağaç dikilirse yıllık verimin maksimum olacağı görülür. Maksimum verim, $V(5) = 1250$ kg olur. 100 dönümlük topraktan yıllık maksimum verim, $100.1250 = 125000$ kilogram olur.

Problemler 9

1. $y = f(x)$ in grafiğini, grafik çizim stratejisi uygulayarak çiziniz.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ **b)** $f(x) = x^3 - 6x^2$

c) $f(x) = (x+4)(x-2)^2$ **ç)** $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

d) $f(x) = (x^2-4)^2$ **e)** $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 42x^2 - 36x + 15$

2. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin grafiğini grafik çizim stratejisini uygulayarak çiziniz.

a) $f(x) = x - \ln x$ **b)** $f(x) = (3-x)\,e^x$ **c)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ **ç)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$ denklemi ile verilen fonksiyonun [-4,2] kapalı aralığı üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini belirleyiniz.

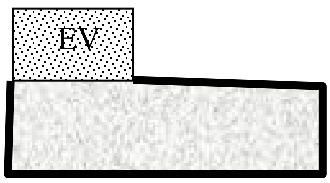
4. 250 odası bulunan bir otel 40 YTL lik oda fiyatı ile her gece dolmaktadır. Otel idaresi, fiyatı yükselterek kârını artırıp artıramayacağını belirlemek istiyor. Fiyattaki her 1 YTL lik artışın o gece 5 odanın boş kalmasına neden olduğu görülüyor. Her oda için günlük sabit gider 25 YTL ve her dolu oda için günlük servis gideri de 10 YTL olduğuna göre, otel idaresi maksimum kâr için oda fiyatını kaç YTL olarak belirlemelidir? (Oda fiyatında indirim asla düşünülmemektedir.)

5. Haftada x adet hesap makinesi üretip satan bir firmanın gider fonksiyonu ve fiyat fonksiyonu

$$Gi(x) = 68\,000 + 5x \quad , \quad p(x) = 14 - (x / 4000) \quad , \quad 0 \le x \le 25\,000$$

olarak veriliyor. Firmanın kârı hangi üretim seviyesinde maksimum olur?

6. Şekilde görüldüğü gibi, bir evin önünde dikdörtgen şeklinde bir alan tel örgü ile çevrilecektir. Bu alanın 60 metrelik kısmı ev ile kapatıldığından oraya tel örgü kullanılmayacaktır. Bu iş için kullanılmak üzere sadece 360 metre tel örgü bulunduğuna göre maksimum alan çevirmek için dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır?



7. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin $(0\ ,\ \infty)$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini (varsa) bulunuz.

a) $f(x) = 3x + \dfrac{27}{x}$ **b)** $f(x) = 5 + 3x + \dfrac{12}{x^2}$

8. Bir üründen x tane üretmek için yapılan toplam gider $Gi(x) = 600 + 100x - 100\ln x$ dir. Minimum ortalama gideri bulunuz.

9. Televizyon seti üreten bir firmanın, ayda x televizyon seti üretmesi durumunda, toplam gider fonksiyonu $Gi(x) = 72\,000 + 60x$, fiyat – talep denklemi de

$$p = 200 - \frac{x}{30} \quad , \quad 0 \le x \le 6000$$

olarak veriliyor. Para birimi, *birim para* ile gösterilsin.

a) Maksimum geliri bulunuz.
b) Maksimum kârı; bu kârın gerçekleşmesi için kaç adet televizyon seti üretilmesi gerektiğini ve her bir televizyon setinin kaça satılması gerektiğini belirleyiniz.
c) Eğer firma, ürettiği her televizyon seti için 5 birim para vergi öderse, kârın maksimum olması için kaç adet televizyon seti üretmelidir? Bu durumda maksimum kâr ne olur? Her bir televizyon setini kaça satmalıdır?

10. Elektrik sobası üreten bir firmanın, ayda x elektrik sobası üretmesi durumunda, toplam gider fonksiyonu $Gi(x) = 50\,000 + 350x$, fiyat – talep denklemi de

$$p = 500 - 0.025x \quad , \quad 0 \le x \le 20000$$

olarak veriliyor. Para birimi, *birim para* ile gösterilsin.

a) Maksimum geliri bulunuz
b) Maksimum kârı; bu kârın gerçekleşmesi için kaç adet elektrik sobası üretilmesi gerektiğini ve her bir elektrik sobasının kaça satılması gerektiğini belirleyiniz.
c) Eğer firma, ürettiği her elektrik sobası için 5 birim para vergi öderse, kârın maksimum olması için kaç adet elektrik sobası üretmelidir? Bu durumda maksimum kâr ne olur? Her bir elektrik sobasını kaça satmalıdır?

11. Bir bakteri kolonisine üremelerini arttıran bir ilaç veriliyor. İlaç verildikten t dakika sonra kolonideki bakteri sayısı aşağıdaki ifade ile veriliyor:

$$N(t) = 1000 + 36t^2 - t^3 \quad , \quad 0 \le x \le 30.$$

a) Kolonideki bakteri sayısı hangi t değeri için maksimum olur? Maksimum sayı kaçtır?
b) Kolonideki bakteri sayısı hangi t değerinde en çok artmaktadır?

12. Belli bir otomobil parçası üreten bir döküm firması bu parçadan her yıl 10 000 adet satmaktadır. Her bir parçanın yıl boyunca stokta bulundurulup depolanması firmaya 1 YTL ye mal olmaktadır. Firma, depolama ve döküm için toplam giderini minimuma indirmek amacıyla satacağı parçaları birkaç defada, her defasında dökümünü yaptığı parçalar satıldıktan sonra yenilerini dökmek suretiyle gerçekleştirmek istiyor. Yeni parçalar dökülürken, her seferinde kalıp hazırlanması gerekiyor ve kalıp hazırlanması için her seferinde 625 YTL masraf yapılması gerekiyor. Firmanın toplam giderinin minimum olması için yılda kaç kez döküm yapması ve her seferinde kaç adet parça üretmesi gerekir?