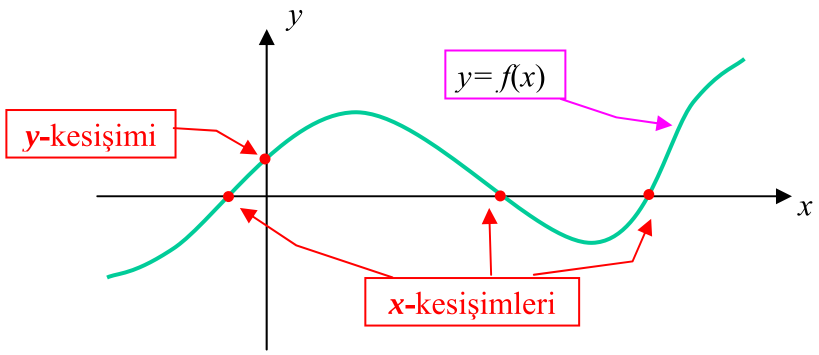
DERS 3

Fonksiyonlar - II

Bu derste fonksiyonlar için yeni örnekler göreceğiz. Önce, grafik çiziminde kolaylık sağlayacak bir kavramdan söz edeceğiz.

3.1. Bir Fonksiyonun Koordinat Kesişimleri. Bir fonksiyonun grafiğine bakınca dikkatimizi ilk çekecek noktalar arasında grafiğin koordinat eksenlerini kestiği noktalar olacaktır. Bir fonksiyonun grafiğinin koordinat eksenlerini kestiği noktalara o fonksiyonun **koordinat kesişimleri** denir. Grafiğin x-eksenini kestiği noktalar varsa bu noktalara fonksiyonun x-**kesişimleri**, varsa y-eksenini kestiği noktaya da y-**kesişimi** denir.

Bir f fonksiyonunun x-kesişimleri, varsa $f(x) = 0$ olan $(x , 0)$ noktaları; y-kesişimi de varsa $(0 , f(0))$ noktasıdır. Tanım gereği, bir fonksiyonun en çok bir y-kesişimi bulunabilir; ancak, birden çok x-kesişimine sahip olan fonksiyonlar vardır.



Örnek. $f(x) = x^2 - x - 6$ denklemi ile tanımlanan fonksiyonun x-kesişimleri

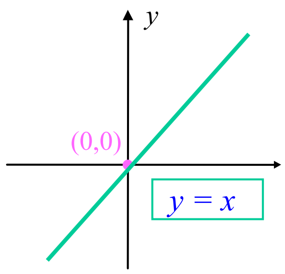
$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{veya} \quad x = 3$$

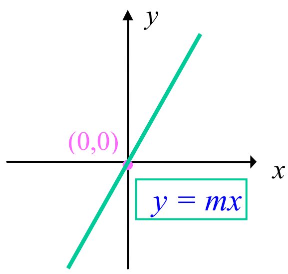
ten de görüleceği üzere, (-2,0) ve (3,0) noktaları; y-kesişimi de $f(0) = -6$ dan (0,-6) noktasıdır.

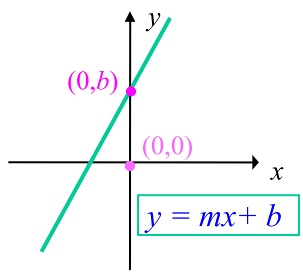
3.2. Doğrusal Fonksiyonlar. m ve b reel sayılar, $m \neq 0$ olmak üzere $f(x) = mx + b$ denklemi ile tanımlanan fonksiyona bir **doğrusal fonksiyon** denir. Her doğrusal fonksiyonun tanım kümesi ve değer kümesi **R** dir.

Elemanter fonksiyonlardan ilki olarak tanıdığımız birim fonksiyon, $f(x) = x,$ bir doğrusal fonksiyondur: $m=1$ ve $b=0$. Bu fonksiyonun grafiğinin bir doğru olduğunu anımsayınız. Her doğrusal fonksiyon, birim fonksiyon $f(x) = x$ e bazı elemanter dönüşümler uygulanarak elde edilebilir.

$$y = x \quad \rightarrow \quad y = mx \quad \rightarrow \quad y = mx + b$$







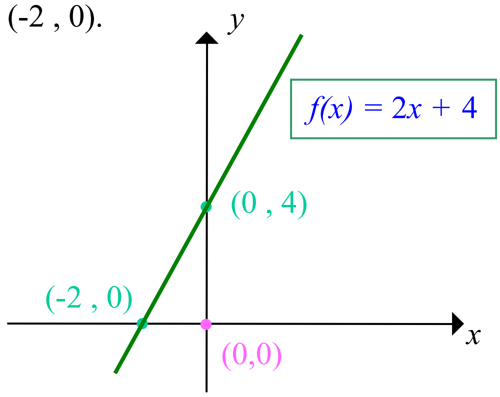
O halde, her doğrusal fonksiyonun grafiği bir doğrudur. Böylece, "Doğrusal Fonksiyon" deyiminin nereden kaynaklandığı da anlaşılmaktadır.

Grafik bir doğru olduğuna göre, bir doğrusal fonksiyonun grafiğini çizmek için iki farklı noktasını belirlemek yeterlidir. Özel olarak, koordinat kesişimlerinin belirlenmesi, grafik çizimi için yararlı olur.

Örnek 1. $f(x) = 2x + 4$ doğrusal fonksiyonunun grafiğini çizmek için koordinat kesişimlerini bulalım.

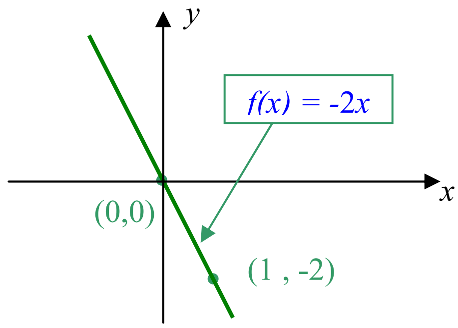
x-kesişimi : $f(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ olduğundan, $(-2 , 0)$.

y-kesişimi : $(0 , f(0)) = (0 , 4)$.



$f(x)=2x+4$ ün koordinat kesişimleri bulunarak yanda çizilen grafiğinin, $y=x$ in grafiğinden, bu grafik önce 2 kat gerilerek ve sonra da elde edilen grafik 4 birim yukarıya kaydırılarak elde edilebileceğine dikkat ediniz.

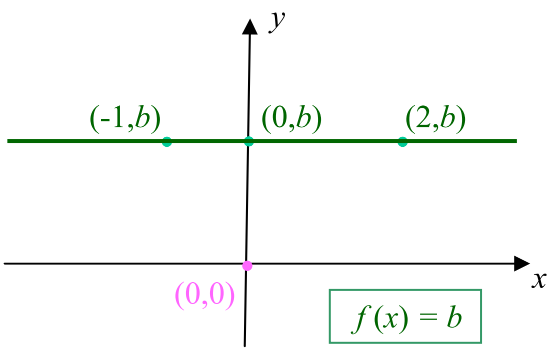
Örnek 2. $f(x) = -2x$ doğrusal fonksiyonu koordinat eksenlerini sadece bir noktada, orijinde, kestiğinden, bu fonksiyonun grafiğini çizebilmek için bir noktasını daha belirlemek gerekir. Örneğin, $f(1) = -2$ olduğundan, (1,-2) noktası grafik üzerindedir ve grafik yanda görüldüğü gibi, orijin ile (1,-2) noktasını birleştiren doğru olarak elde edilir.



$f(x)=-2x$ in yukarıda çizilen grafiğinin, $y=x$ in grafiğinden, bu grafik önce 2 kat gerilerek ve sonra da elde edilen grafik x-eksenine göre yansıtılarak elde edilebileceğine dikkat ediniz.

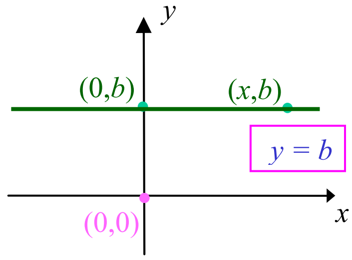
3.3. Sabit Fonksiyon. b her hangi bir reel sayı olmak üzere, $f(x) = b$ denklemi ile verilen, yani, her x reel sayısına aynı b reel sayısını karşılık getiren fonksiyona, **sabit fonksiyon** denir.

Sabit fonksiyonun grafiği, yandaki şekilde görüldüğü gibi, bir yatay doğrudur:

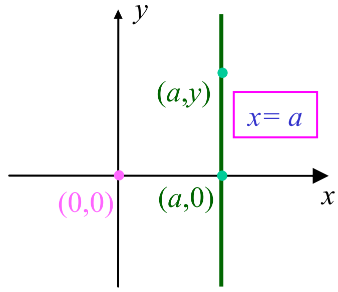


3.4. Düzlemde Doğrular. Düzlemde bir doğrunun koordinat eksenlerine göre konumu için üç durumdan biri söz konusudur. Doğru **yatay**, yani x-eksenine paralel; **dikey**, yani x-eksenine dik ya da **eğik**, yani ne yatay ne de dikey olabilir. Yukarıda, her doğrusal fonksiyonun grafiğinin bir eğik doğru ve her sabit fonksiyonun grafiğinin bir yatay doğru olduğunu gördük. Aşağıda göreceğiz ki, her yatay doğru bir sabit fonksiyonun ve her eğik doğru da bir doğrusal fonksiyonun grafiğidir. Bu arada, dikey doğruların da denklemini belirleyeceğiz.

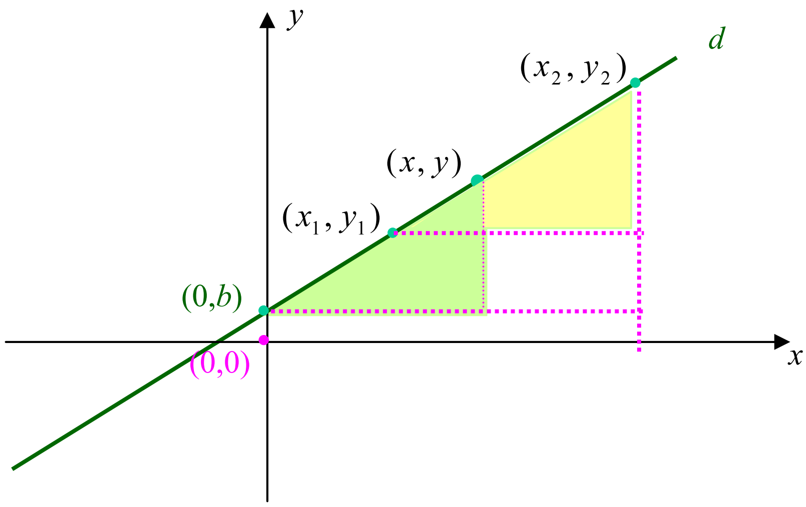
Bir yatay doğru y-eksenini $(0,b)$ noktasında kesiyorsa, her $x \in \mathbf{R}$ için (x,b) noktası o doğru üzerindedir. Karşıt olarak, o yatay doğru üzerindeki her noktanın koordinatları, uygun bir $x \in \mathbf{R}$ için (x,b) biçimindedir. Dolayısıyla, y-eksenini $(0,b)$ noktasında kesen yatay doğru, $y = b$ denklemi ile tanımlanan sabit fonksiyonun grafiğidir.



Bir düşey doğru x-eksenini $(a,0)$ noktasında kesiyorsa, her $y \in \mathbf{R}$ için (a,y) noktası o doğru üzerindedir. Karşıt olarak, o yatay doğru üzerindeki her noktanın koordinatları, uygun bir $y \in \mathbf{R}$ için (a,y) biçimindedir. Dolayısıyla, x-eksenini $(a,0)$ noktasında kesen yatay doğru, $x = a$ denkleminin grafiğidir. **Dikey doğru** deyimi yerine **düşey doğru** deyimi de kullanılır.



Şimdi yatay veya düşey olmayan bir doğru (eğik doğru) için durumu gözden geçireceğiz.



Şekilde görülen benzer dik üçgenlerin dik kenarlarının oranları aynı olacağından,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - b}{x - 0} = m$$

eşitlikleri elde edilir. Bu oranların ortak değeri olan m sayısına d doğrusunun **eğim**i denir.

Eğer d doğrusunun eğimi ve y-kesişimi biliniyorsa, yukarıda m ye eşit olan son orandan, yani $\frac{y-b}{x}=m$ eşitliğinden

$$y = mx + b$$

denklemi elde edilir ki bu denkleme d doğrusunun **Eğim -Kesişim Denklemi** denir. Bir (x,y) noktasının d doğrusu üzerinde olması için gerek ve yeter koşul, (x,y) noktasının eğim- kesişim denklemini sağlamasıdır.

Eğer d doğrusunun bir noktası ve eğimi biliniyorsa, yukarıda m ye eşit olan ikinci orandan, yani $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$ eşitliğinden

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme d doğrusunun **Nokta-Eğim Denklemi** denir. Bir (x,y) noktasının d doğrusu üzerinde olması için gerek ve yeter koşul, o noktanın nokta-eğim denklemini sağlamasıdır.

İki noktası bilinen bir doğrunun denklemi de "nokta-eğim denklemi" olarak yazılabilir. Söz konusu iki nokta (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ise, doğrunun eğiminin

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

olduğunu biliyoruz. Noktalardan biri ve eğim kullanılarak denklem elde edilir.

Şimdi doğru denklemlerine örnekler verelim.

Örnek 1. Eğimi $m = 3$ ve $y-$kesişimi $b = 4$ olan doğrunun (eğim-kesişim) denklemi:

$$y = 3x + 4\,.$$

Örnek 2. Eğimi $m = 3$ olan ve (-2,3) noktasından geçen doğrunun (nokta-eğim) denklemi:

$$y = 3(x - (-2)) + 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 9\,.$$

Örnek 3. (-2 , 3) ve (1 ,4) noktalarından geçen doğrunun denklemi : Bu doğrunun eğimi

$$m = \frac{4-3}{1-(-2))} = \frac{1}{3}$$

olacağından, (-2 , 3) noktası kullanılarak doğrunun aşağıdaki denklemi elde edilir:

$$y = \frac{1}{3}(x - (-2)) + 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}\,.$$

3.5. Doğrusal Denklemler. A , B ve C reel sayılar olmak üzere

$$Ax + By = C$$

denklemine bir **doğrusal denklem** denir. A ve B ye bu denklemin **katsayı**ları, C ye de **sağ taraf sabiti** denir. x ve y sembollerine bu denklemin **değişken**leri denir.

Bundan önceki çalışmalarımız, katsayılarından en az biri sıfırdan farklı olan bir doğrusal denklemin grafiğini belirlememize yardımcı olur:

- Eğer $A \neq 0 , B \neq 0$ ise, $Ax + By = C \iff y = \frac{-A}{B}x + \frac{C}{B}$ olduğundan, $Ax + By = C$ doğrusal denkleminin grafiği , $y = \frac{-A}{B}x + \frac{C}{B}$ doğrusal fonksiyonunun grafiği olan eğik doğrudur.

- Eğer $A = 0 , B \neq 0$ ise, $Ax + By = C \iff y = \frac{C}{B}$ olduğundan, $Ax + By = C$ doğrusal denkleminin grafiği , $y = \frac{C}{B}$ sabit fonksiyonunun grafiği olan yatay doğrudur.

- Eğer $A \neq 0 , B = 0$ ise, $Ax + By = C \iff x = \frac{C}{A}$ olduğundan, $Ax + By = C$ doğrusal denkleminin grafiği , $x = \frac{C}{A}$ nın grafiği olan dikey doğrudur.

Sonuç olarak, katsayılarından en az biri sıfırdan farklı olan her doğrusal denklemin grafiği bir doğrudur. Grafik, iki noktası tarafından tamamen belirlenir. (Katsayılarının her ikisi de sıfır olan bir doğrusal denklemin grafiği üzerine düşününüz..)

3.6. Karesel Fonksiyonlar. a , b ve c reel sayılar, $a \neq 0$ olmak üzere,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

denklemi ile verilen fonksiyona bir **karesel fonksiyon** denir. Bazı kitaplarda karesel sözcüğü yerine **kuadratik** sözcüğü veya **ikinci derece** deyimi de kullanılır.

Kareye tamamlama işlemi ile

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

ve $f(x) = a(x + \frac{b}{a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$ ifadesinde

$$h = -\frac{b}{2a} \quad , \quad k = c - \frac{b^2}{4a}$$

yazılarak, fonksiyonu tanımlayan başlangıçtaki denklem

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

biçimine dönüştürülebilir.

Son ifadeden görüyoruz ki, her karesel fonksiyon $y = x^2$ kare fonksiyonuna elemanter dönüşümler uygulanarak elde edilebilir.

$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad y = (x-h)^2 \quad \rightarrow \quad y = a(x-h)^2 \quad \rightarrow \quad y = a(x-h)^2 + k$$

Dolayısıyla, karesel fonksiyonun grafiği de $y = x^2$ nin grafiğinin kaydırılması, x-ekseni etrafında yansıtılması veya büzülüp gerilmesiyle elde edilir.

Karesel fonksiyonun grafiği **parabol** olarak adlandırılır.

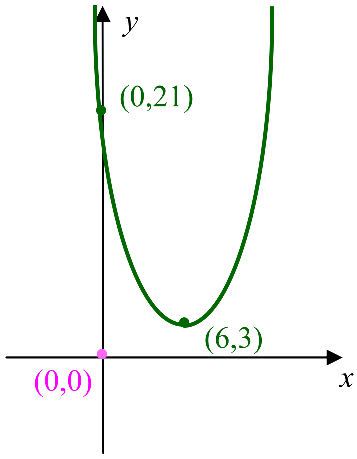
$y = a(x-h)^2 + k$ ifadesinde $(x-h)^2$ nin alabileceği en küçük değer $x = h$ için sıfır değeri olduğundan, $f(x) = a(x-h)^2 + k$ karesel fonksiyonu için $f(h) = k$ değeri, $a>0$ olması durumunda minimum, $a<0$ olması durumunda maksimum değerdir. Bu karesel fonksiyonun $a>0$ olması durumunda maksimum değeri, $a<0$ olması durumunda da minimum değeri yoktur.

(h,k) noktasına $f(x) = a(x-h)^2 + k$ karesel fonksiyonunun (veya onun grafiği olan parabolün) **köşe noktası** denir. $a>0$ olması durumunda, köşe noktası parabolün en alt, yani dip noktasıdır ve parabol yukarıya doğru açılır; $a<0$ olması durumunda, köşe noktası parabolün en üst, yani tepe noktasıdır ve parabol aşağıya doğru açılır.

Bir karesel fonksiyonun grafiği, koordinat kesişimleri ve köşe noktası belirlenip yukarıdaki bilgilerden yararlanılarak çizilir.

Örnek 1. $f(x) = 0.5x^2 - 6x + 21$ karesel fonksiyonunun grafiğini çizelim. Burada, $a = 0.5$, $b = -6$, $c = 21$ olduğundan, köşe noktasının koordinatları

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{1} = 6 \quad , \quad k = c - \frac{b^2}{4a} = 21 - \frac{36}{2} = 3$$



ve dolayısıyla köşe noktası, (6,3) noktasıdır. $a = 0.5 > 0$ olduğundan, köşe noktası grafiğin en alt noktasıdır ve parabol yukarıya doğru açılır. Buradan, görülür ki, grafik, x-ekseninin üst tarafında kalmaktadır; x-kesişimi yoktur. x-kesişimi bulunmadığı,

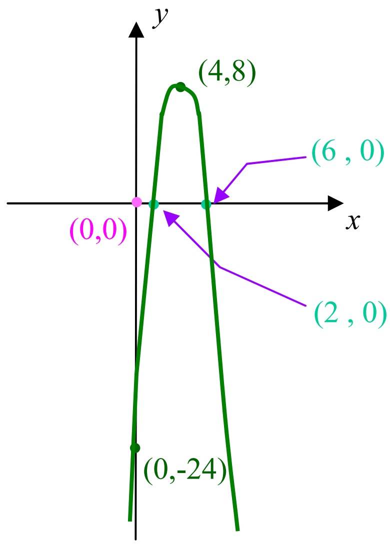
$$f(x) = 0.5x^2 - 6x + 21 = 0.5(x - 6)^2 + 3 > 0$$

ifadesinden görülebilir. $f(0) = 21$ olduğundan, y-kesişimi (0,21) noktasıdır. Bu bilgiler ışığında yanda görülen grafik elde edilir.

Fonksiyonun minimum değeri 3, değer kümesi $[3 , \infty)$ dur.

Örnek 2. $f(x) = -2x^2 + 16x - 24$ karesel fonksiyonunun grafiğini çizelim. Burada, $a = -2$, $b = 16$, $c = -24$ olduğundan, köşe noktasının koordinatları

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{-4} = 4 \, , \, k = c - \frac{b^2}{4a} = -24 - \frac{256}{-8} = 8$$



ve dolayısıyla köşe noktası, (4,8) noktasıdır. $a = -2 < 0$ olduğundan, köşe noktası grafiğin en üst noktasıdır ve parabol aaşağıya doğru açılır. $f(x) = -2x^2 + 16x - 24 = 0$ denklemi çözülerek, x-esişimleri (2,0), (6,0) olarak elde edilir. Ayrıca $f(0) = -24$ olduğundan y-kesişimi (0,-24) noktasıdır. Bu bilgiler ışığında yandaki grafik elde edilir.

Fonksiyonun maksimum değeri 8, değer kümesi $(-\infty,8]$ dir.

Karesel fonksiyonlarla ilgili bilgileri özetleyelim:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,, \qquad h = -\frac{b}{2a} \quad , \quad k = c - \frac{b^2}{4a} \qquad \Rightarrow \quad f(x) = a(x-h)^2 + k$$

- f nin grafiği, köşe noktası $(h\ ,\ k)$ olan paraboldür. f nin y-kesişimi $(0\ ,\ c\ )$ noktasıdır; x-kesişimleri $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi çözülerek belirlenir.
- Eğer $a > 0$ ise, parabol yukarıya doğru açılır ; f nin minimum değeri $f(h) = k$ ve değer kümesi $[k,\infty)$ dur.
- Eğer $a < 0$ ise, parabol aşağıya doğru açılır ; f nin maksium değeri $f(h) = k$ ve değer kümesi $(-\infty,k]$ dır.

Aşağıda karesel ve doğrusal fonksiyonlarla ilgili bir uygulama örneği veriyoruz.

Örnek 3. Bir firmanın yıllık gelir ve gider fonksiyonları, x bin adet ürün için

$$Ge(x) = x(100 - 5x) \quad , \quad Gi(x) = 160 + 20x$$

bin YTL olarak veriliyor. Bu firmanın yılda en az bin, en çok 16 bin ürün ürettiği varsayıldığına göre, Ge ve Gi nin grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizerek aşağıdaki soruları yanıtlayınız:

a) Gelir ve giderin eşit olduğu x sayılarını bulunuz.
b) Kâr edilen ve zarar edilen bölgeleri ve maksimum kârı belirleyiniz.

Çözüm. Firma, yılda en az bin en çok 16 bin ürün ürettiğinden, yıllık gelir ve gider fonksiyonlarının tanım kümesi, [1,16] , yani $1 \leq x \leq 16$ alınmalıdır. Gelir fonksiyonu bir karesel fonksiyon,

$$G(x) = x(100 - 5x) = -5x^2 + 100x = -5(x-10)^2 + 500 \quad , \quad 1 \leq x \leq 16$$

$a = -5$, $b = 100$, $c = 0$ olduğundan $h = 10$, $k = 5.10^2 = 500$ dür. O halde gelir fonksiyonunun grafiği, köşe noktası (10,500) olan ve aşağıya doğru açılan (a=-5) bir parabolün bir parçası olacaktır. Grafiği çizerken

$$Ge(1) = 100 - 5 = 95 \quad \text{ve} \quad Ge(16) = 16(100 - 80) = 320$$

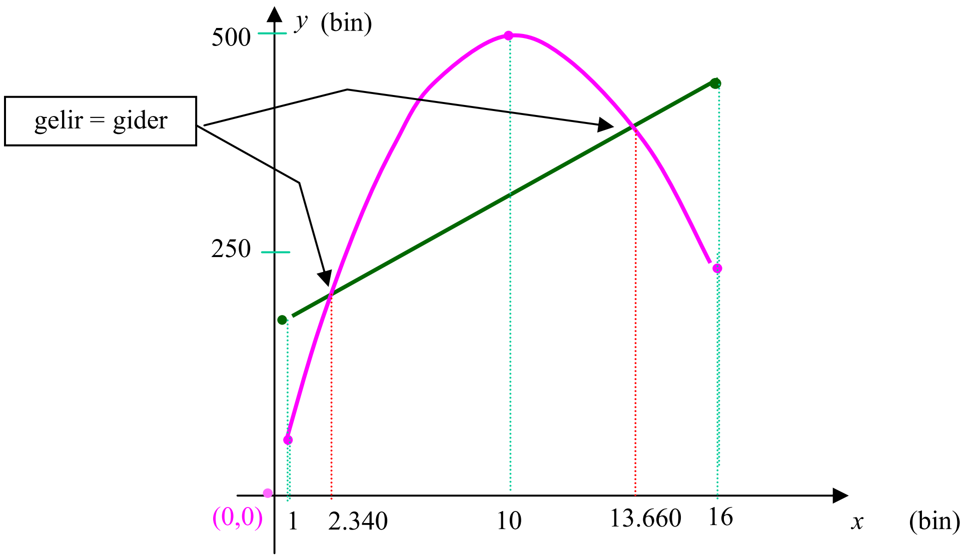
olduğunu da kullanacağız.

Gider fonksiyonu bir doğrusal fonksiyon,

$$Gi(x) = 160 + 20x \quad , \quad 1 \leq x \leq 16$$

olup $Gi(1) = 180$ ve $Gi(16) = 480$ olduğundan, grafik, (1,180) , (16,480) noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.

Gelir ve gider fonksiyonlarının grafiklerini aşağıda veriyoruz:



a) Grafikten de görülebileceği üzere, gelir ve giderin eşit olduğu x sayıları gelir ve gider fonksiyonlarının grafiklerinin kesim noktalarının x-koordinatlarıdır. Cebirsel olarak bu sayılar

$$Ge(x) = Gi(x) \;\Rightarrow\; -5x^2 + 100x = 160 + 20x \;\Rightarrow\; -5x^2 + 80x - 160 = 0$$

denklemi çözülerek bulunur. Çözüm yapılınca, $x = 8 - 4\sqrt{2}$ ve $x = 8 + 4\sqrt{2}$ değerleri bulunur. Üretilen ürün sayısı bin ile ölçüldüğünden en yakın binliğe tamamalanınca 2 343 ve 13 657 ürün üretilince gelir ve giderin eşit olduğu görülür.

b) Kâr ve zarar edilen bölgeleri grafikten görebiliriz. Gelir fonksiyonunun grafiğinin gider fonksiyonunun grafiğinin yukarısında bulunduğu aralıklarda kâr, aşağısında bulunduğu aralıklarda zarar edilir. Böylece, (2.343 , 13.657) aralığında, yani 2 343 üründen çok ve 13 657 üründen az ürün üretildiğinde kâr edilir; [1 , 2.343) ve (13.657 , 16] aralıklarında, yani 2 343 üründen az veya 13 657 üründen fazla ürün üretildiğinde zarar edilir. Maksimum kârı belirlemek için kâr fonksiyonuna bakalım. Kâr fonksiyonu

$$K(x) = Ge(x) - Gi(x) = -5x^2 + 100x - 160 - 20x = -5x^2 + 80x - 160$$

bir karesel fonksiyon olup köşe noktasının koordinatları

$$h = -\frac{80}{-10} = 8 \quad , \quad k = -160 - \frac{80^2}{-20} = 160$$

tir. Dolayısıyla, maksimum kâr, $K(8)$=160 bin YTL dir.

3.7. Polinom Fonksiyonlar. Pratikte karşılaşılan fonksiyon türlerinden biri de polinom fonksiyonlardır. $a_0, \ , a_1 , \ . \ . \ . \ , a_n$ reel sayılar olmak üzere

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

denklemi ile verilen fonksiyona bir **polinom fonksiyon** denir. $a_0, \ , a_1 , \ . \ . \ . \ , a_n$ sayılarına bu polinom fonksiyonun **katsayı**ları denir.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ifadesinde $a_n \neq 0$ ise, f nin **derece**si n dir denir. Bu durumda a_n ye f nin **başkatsayısı** denir.

Daha önce bazı polinom fonksiyonları ele aldığımızı anımsayınız.

$f(x) = b$	Sabit fonksiyon
$f(x) = ax + b$	Doğrusal fonksiyon ($a \neq 0$)
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Karesel fonksiyon ($a \neq 0$)
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Kübik fonksiyon ($a \neq 0$)

Doğrusal fonksiyonun derecesi 1, karesel fonksiyonun derecesi 2, kübik fonksiyonun derecesi 3 tür.

Her polinom fonksiyonun tanım kümesi tüm reel sayılar kümesi **R** olup grafiği, k*esiksiz* (*sürekli*) dir ve hiç *sivri köşe* bulundurmaz.

Bir grafikte kesiklilik(süreksizlik) veya sivri köşe varsa, o grafik bir polinom fonksiyonun grafiği olamaz.

Herhangi bir fonksiyonun grafiğini çizerken olduğu gibi, bir polinom fonksiyonun grafiğini çizerken de koordinat kesişimlerini belirlemek yararlı olur. f polinom fonksiyonunun x-kesişimlerini veren sayılara, yani $f(x) = 0$ denlemini sağlayan x sayılarına, f polinomunun **kök**leri denir.

Bir polinom en çok derecesi kadar köke sahip olabilir, dolayısıyla, en çok derecesi kadar x-kesişimine sahip olabilir.

Herhangi bir a reel sayısı ve bir n doğal sayısı verildiğinde, $x \to c$ için $x^n \to c^n$ olduğu göz önüne alınarak, f bir polinom fonksiyon ve a bir reel sayı ise,

$$x \to c \quad \text{için} \quad f(x) \to f(c)$$

olduğu görülür. Ayrıca f nin başkatsayısı pozitif ise, $x \to \infty$ için $f(x) \to \infty$ olduğu görülür. Benzer şekilde, başkatsayısı pozitif olan bir f polinom fonksiyonunun derecesi tek ise, $x \to -\infty$ için $f(x) \to -\infty$ ve böyle bir polinom fonksiyonun derecesi çift ise, $x \to -\infty$ için $f(x) \to \infty$ olduğu görülür.

Örnek 1. $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 4$ olsun. $x \to 1$ için $f(x) \to f(1) = 2$ olduğu açıktır. Diğer yandan, $x \to \infty$ için $x^5 \to \infty$ ve $x \to -\infty$ için $x^5 \to -\infty$ olduğundan

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 + 7x + 4 = x^5(3 + 2\frac{1}{x^3} - 7\frac{1}{x^4} + 4\frac{1}{x^5})$$

ifadesinden $x \to \infty$ için $f(x) \to \infty$ ve $x \to -\infty$ için $f(x) \to -\infty$ olduğunu görürüz(1.10 a bakınız.)

3.8. Rasyonel Fonksiyonlar. $p(x)$ ve $d(x)$ polinom fonksiyonlar olmak üzere

$$f(x) = \frac{p(x)}{d(x)}$$

ile tanımlanan fonksiyona bir rasyonel fonksiyon denir. $p(x)$ ve $d(x)$ polinomlarına, sırasıyla, bu rasyonel fonksiyonun **pay**ı ve **payda**sı denir.

Payı $p(x)$ ve paydası $d(x)$ olan bir rasyonel fonksiyonun tanım kümesi

$$\{ x : d(x) \neq 0 \}$$

kümesidir.

Bir rasyonel fonksiyonun grafiğini çizerken, $x \to \infty$ için veya $x \to -\infty$ için $f(x)$ in nasıl değiştiğini bilmek önem kazanır.

Örnek 1. $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ rasyonel fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonun tanım kümesi

$$\{ x : x \neq 0 \} = \mathbf{R}\setminus\{0\} = (-\infty , 0) \cup (0 , \infty)$$

dur. $x \to \infty$ için $f(x) \to 0$, $x \to -\infty$ için $f(x) \to 0$ olduğunu kolayca görebilirsiniz(1.10 a bakınız).

Örnek 2. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ rasyonel fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonun tanım kümesi

$$\{\, x \;:\; x+1 \;\neq\; 0 \,\} = \mathbf{R}\backslash\{-1\} = (-\infty\ ,\ -1) \cup (-1\ ,\ \infty)$$

dur. $f(x)$ ifadesini

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+1-3}{x+1}=1+\frac{-3}{x+1}$$

biçiminde yazarak ve

$$x \to \infty \quad \text{için} \quad \frac{-3}{x+1} \to 0 \quad \text{ve} \quad x \to -\infty \quad \text{için} \quad \frac{-3}{x+1} \to 0$$

olduğunu kullanarak $x \to \infty$ için $f(x) \to 1$ ve $x \to -\infty$ için $f(x) \to 1$ olduğunu görürüz. Aynı sonuca $f(x)$ ifadesini

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1}=\frac{x(1-\frac{2}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}=\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

biçiminde yazarak da ulasşılabileceğine dikkat ediniz.

Bir rasyonel fonksiyonun tanımsız olduğu, yani paydasının sıfır olduğu, reel sayılar o fonksiyonun süreksiz olduğu noktalardır. Eğer f

$$f(x)=\frac{p(x)}{d(x)} \quad , \quad d(x)\neq 0$$

ifadesi ile verilmişse, paydanın bir a kökünü, yani $d(a) = 0$ olan bir a sayısını düşünelim. $f(a)$ tanımlı olmamakla beraber, x in a ya yakın her değeri için $f(x)$ tanımlıdır. İşte bu noktada x değişkeni a ya sağdan veya soldan yaklaşırken $f(x)$ in nasıl değerler aldığı önem kazanmaktadır. Eğer $p(a) \neq 0$ ise, x değişkeni a ya sağdan veya soldan yaklaşırken $d(x)$ sıfıra yaklaşacağından $f(x)=\dfrac{p(x)}{d(x)}$ sınırsız olarak büyüyen pozitif değerler veya sınırsız olarak küçülen negatif değerler alacaktır. Başka bir ifade ile, $d(a) = 0$ olan bir a sayısı verildiğinde, $x \to a^-$ veya $x \to a^+$ için $f(x) \to -\infty$ veya $f(x) \to \infty$ olur.

Örnek 3. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ rasyonel fonksiyonu $x = 0$ da tanımsızdır. İlk dersimizde gördüğümüz gibi(1.10 a bakınız)

$$x \to 0^+ \quad \text{için} \quad f(x) \to \infty \quad \text{ve} \quad x \to 0^- \quad \text{için} \quad f(x) \to -\infty$$

dur. Benzer şekilde,

$$x \to -1^+ \text{ için } \frac{-3}{x+1} \to -\infty \text{ ve } x \to -1^- \text{ için } \frac{-3}{x+1} \to \infty;$$

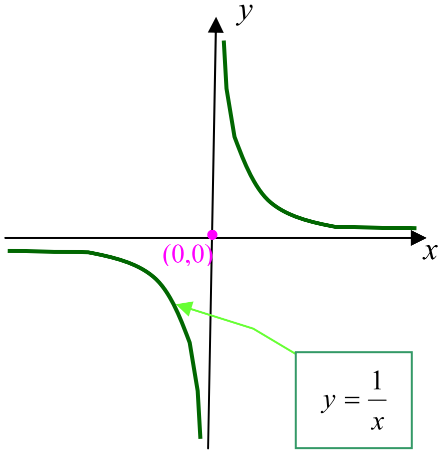
$$x \to 2^+ \text{ için } \frac{1}{x-2} \to \infty \text{ ve } x \to 1^- \text{ için } \frac{1}{x-2} \to -\infty.$$

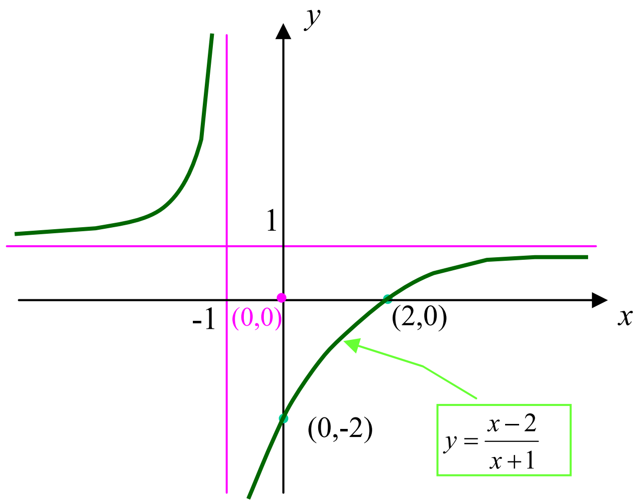
Örnek 4. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ rasyonel fonksiyonu $x = -1$ de tanımsızdır. Daha önce de yazdığımız

$$y = \frac{x-2}{x+1} = \frac{x+1-3}{x+1} = 1 + \frac{-3}{x+1}$$

ifadesinden , $x \to -1^-$ için $f(x) \to \infty$ ve $x \to -1^+$ için $f(x) \to -\infty$ dur.

Yukarıdaki örneklerde ele alınan iki rasyonel fonksiyonu grafikleri aşağıda gösterilmiştir.





$y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ in grafiğinde

$$x \to \infty \text{ için } f(x) \to 0, \; x \to -\infty \text{ için } f(x) \to 0$$

olması x sınırsız olarak büyüdükçe veya sınırsız olarak küçüldükçe $f(x)$ in sıfıra yaklaştığını, yani grafiğin $y = 0$ doğrusuna (x-eksenine) yaklaştığını gösterir. Benzer şekilde,

$$x \to 0^+ \text{ için } f(x) \to \infty \text{ ve } x \to 0^- \text{ için } f(x) \to -\infty$$

olması, x sıfıra yaklaştıkça grafiğin $x = 0$ doğrusuna(y-eksenine) yaklaştığını gösterir.

$y = f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ in grafiğini inceleyince,

$$x \to \infty \quad \text{için} \quad f(x) \to 1 \quad \text{ve} \quad x \to -\infty \quad \text{için} \quad f(x) \to 1$$

olmasının x sınırsız olarak büyüdükçe veya sınırsız olarak küçüldükçe $f(x)$ in 1 sayısına yaklaştığını ve dolayısıyla grafiğin $y = 1$ doğrusuna yaklaştığını gösterir. Diğer yandan,

$$x \to -1^- \quad \text{için} \quad f(x) \to \infty \quad \text{ve} \quad x \to -1^+ \quad \text{için} \quad f(x) \to -\infty$$

olmasının da x değişkeni 1 e yaklaştıkça grafiğin $x = 1$ doğrusuna yaklaştığını gösterir.

Aşağıda tanımlanan **asimtot** kavramını bu gözlemler ışığında değerlendiriniz.

3.9. Asimtotlar. $y = f(x)$ denklemi ile tanımlanan bir f fonksiyonu verilmiş olsun. $x \to -\infty$ veya $x \to \infty$ için $f(x) \to b$ olan her b için $y = b$ doğrusuna f nin bir **yatay asimtot**u denir.

$a \in \mathbf{R}$ olmak üzere $x \to a^-$ veya $x \to a^+$ için $f(x) \to -\infty$ veya $f(x) \to \infty$ ise, $x = a$ doğrusuna f nin bir **düşey asimtot**u denir.

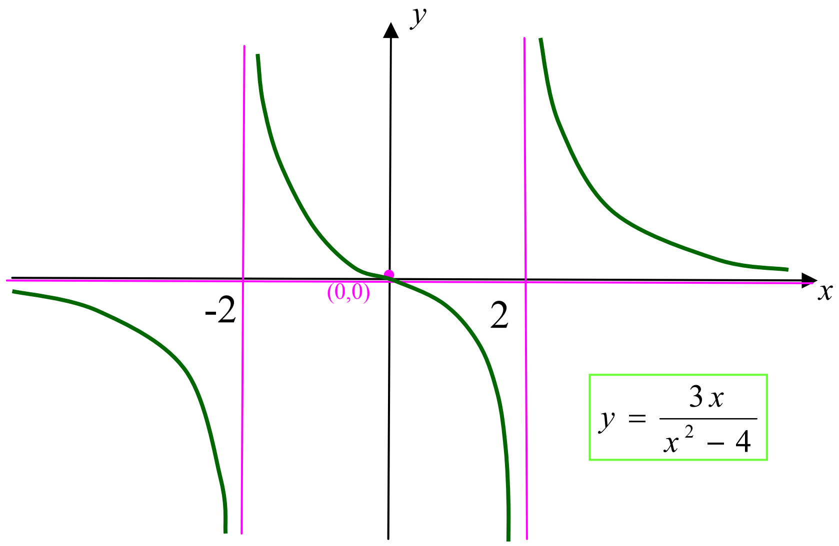
Örnek 1. Örnek 3 ve Örnek 4 te elde edilen sonuçlardan görülür ki, $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu için $y = 0$ yatay asimtot, $x = 0$ düşey asimtottur; $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ fonksiyonu için $y = 1$ yatay asimtot, $x = -1$ düşey asimtottur.

Örnek 2. $y = f(x) = \dfrac{3x}{x^2-4}$ rasyonel fonksiyonuna bakalım. $x \to -\infty$ veya $x \to \infty$ için $y \to 0$ olduğundan $y = 0$ doğrusu yatay asimtottur. Fonksiyon $x = 2$ ve $x = -2$ için tanımsız olup

$$x \to -2^- \quad \text{veya} \quad x \to 2^- \quad \text{için} \quad y \to -\infty \quad ; \quad x \to -2^+ \quad \text{veya} \quad x \to 2^+ \quad \text{için} \quad y \to \infty$$

olduğundan $x = -2$ ve $x = 2$ doğruları bu fonksiyonun düşey asimtotlardır.

Bu rasyonel fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir. İleride bu tür grafikleri çizmek için daha elverişli yöntemler göreceğiz.



3.10. Uygulama (Meslek içi eğitim). Bilgisayar üreten bir firma t gün iş başında eğitim görmüş bir teknisyenin günde monte ettiği bilgisayar sayısı $N(t)$ ile gösterilirse,

$$N(t) = \frac{50t}{t+4} \quad , \quad t \geq 0$$

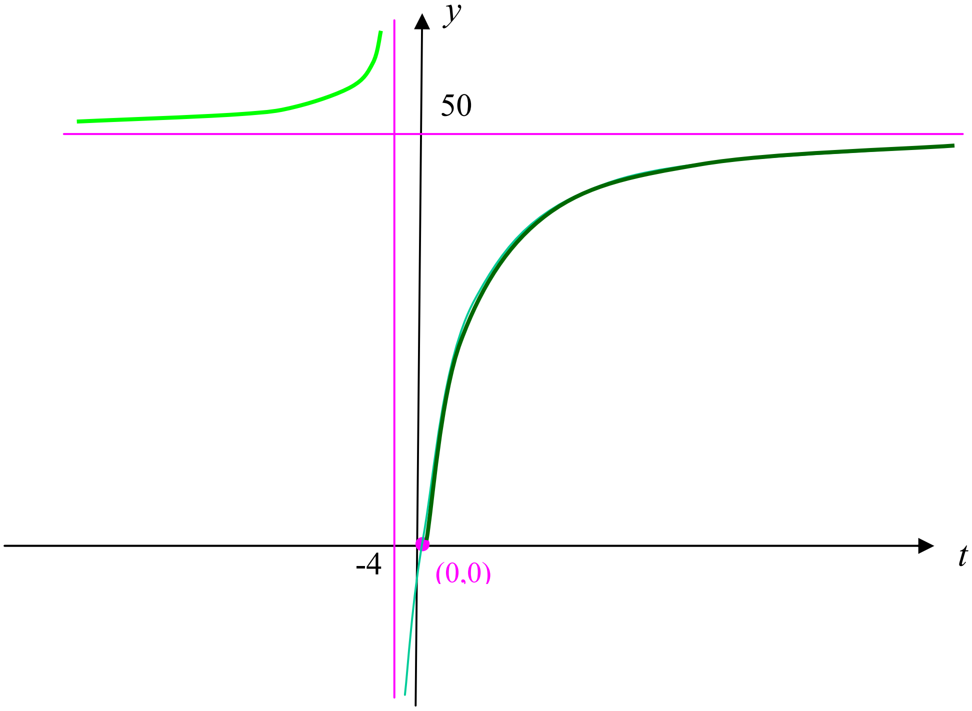
olarak gerçekleştiğini görüyor. $y = N(t)$ nin grafiğini çizelim ve yorumlayalım.

Üretilen bilgisayar sayısını veren N fonksiyonunun tanımında bağımsız değişken olarak t sembolü kullanılmış ve tanım kümesi, $t \geq 0$ yani $[0, \infty)$ aralığı olarak verilmiştir. Söz konusu grafik, $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ rasyonel fonksiyonunun grafiğinin $[0, \infty)$ aralığı üzerinde kalan kısmı olacaktır. Önce rasyonel fonksiyonun grafiğinin tamamını çizelim.

- Grafik, koordinat eksenlerini orijinde, yani $(0,0)$ noktasında keser.
- $N(-4)$ tanımsız olup $t \to -4^-$ için $N(t) \to \infty$, $t \to -4^+$ için $N(t) \to -\infty$ dur. Dolayısıyla, $t = -4$ düşey asimtottur.

- $t \to -\infty$ veya $t \to \infty$ için $y \to$ 50 olduğundan y = 50 yatay asimtottur.

O halde $N(t) = \dfrac{50t}{t+4}$ nin grafiği aşağıdaki gibidir.



Biz, grafiğin $t \geq 0$ olan kısmı ile ilgileneceğiz. Grafikten görüyoruz ki, eğitim süresi arttıkça monte edilen bilgisayar sayısı da artar. Ancak, belli bir süreden sonra bu artış çok yavaşlar; monte edilen bilgisayar sayısı daima 50 den azdır.

3.11. Parçalı tanımlı fonksiyonlar. Bazı fonksiyonlar değişik aralıklar üzerinden değişik denklemlerle tanımlanırlar. Bunun en yalın örneği mutlak değer fonksiyonudur:

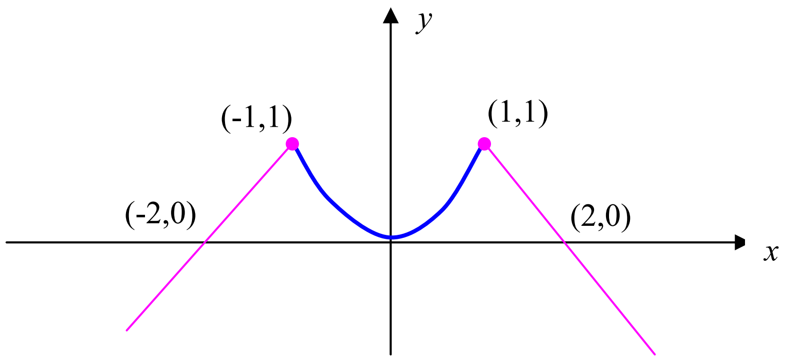
$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases} \quad .$$

Bu ifadeden, mutlak değer fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığı üzerinde $|x| = x$ denklemi, $(-\infty,0)$ aralığı üzerinden ise $|x| = -x$ denklemi ile tanımlandığını anlıyoruz.

Mutlak değer fonksiyonunda olduğu gibi farklı aralıklar üzerinde farklı denklemlerle tanımlanmış fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyonlar** denir.

Parçalı tanımlı bir fonksiyonun grafiği çizilirken tanımda söz konusu olan her bir aralık için fonksiyonu o aralıkta tanımlayan denklemin grafiği çizilir.

Örnek 1. Parçalı olarak $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \quad x\le -1 \\ x^2 & , \quad -1<x<1 \\ -x+2 & , \quad x\ge 1 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterilmiştir.



Örnek 2. Toptan kumaş satan matematiğe meraklı bir tüccar, her bir müşterisinin satın aldığı kumaşın metre fiyatını ilk 10 metresi için 10 YTL, on metreden fazla 50 metreye kadar olan kısmı için 8 YTL ve 50 metreden sonraki kısmı için 6 YTL olarak uyguluyor. Bu tüccardan kumaş alan bir müşterinin ödemesi gereken tutarı satın aldığı kumaş miktarının fonksiyonu olarak ifade edelim.

Müşteri x metre kumaş satın almış olsun ve ödeyeceği YTL miktarını $f(x)$ ile gösterelim. Eğer $0<x\le 10$ ise, gelir $f(x) = 10x$ YTL olur. Eğer $10 < x \le 50$ ise, ilk 10 metre için $10 \cdot 10 = 100$ YTL, geri kalan $(x-10)$ metre için $8(x-10)$ YTL ödemesi gerekir ve $f(x) = 100 + 8(x-10) = 8x + 20$ YTL olur. Eğer $x > 50$ ise, ilk 10 metre için $10 \cdot 10 = 100$ YTL , sonraki 40 metre için $8 \cdot 40 = 320$ YTL, geri kalan $(x-50)$ metre için $6(x-50)$ YTL ödemesi gerekir ve $f(x) = 100 + 320 + 6(x-50) = 6x + 120$ YTL olur. Dolayısıyla,

$$f(x)=\begin{cases} 10x & , \quad 0<x\le 10 \\ 8x+20 & , \quad 10<x\le 50 \\ 6x+120 & , \quad x>50 \end{cases} .$$

Problemler 3

1. Aşağıdaki denklemlerin her birinin grafiğini çiziniz:

a) $y = 2x - 3$ **b)** $y = \frac{x}{2} + 1$ **c)** $2x + 3y = 12$

2. Aşağıda denklemi verilen her bir doğrunun eğimini ve y-kesişimini bulunuz:

a) $y = 2x - 3$ **b)** $y = \frac{x}{2} + 1$ **c)** $3x - 2y = 12$

3. Verilen eğim ve y-kesişimine sahip olan doğrunun denklemini yazınız ve grafiğini çiziniz:

a) eğim = -2 , y-kesişimi = 4 **b)** eğim = $-\frac{2}{3}$, y-kesişimi = -2

c) eğim = 1 , y-kesişimi = -2 **ç)** eğim = -1 , y-kesişimi = 2

4. Aşağıda, her şıkta bir doğrunun eğimi ve geçtiği bir nokta verilmiştir. Doğrunun denklemini $y = mx + b$ biçiminde yazınız:

a) $m = -3$, nokta (-4 , 1) **b)** $m = -2$, nokta (-3 , 2)

c) $m = \frac{2}{3}$, nokta (-6 , -5) **ç)** $m = \frac{3}{2}$, nokta (-5 , -6)

5. Verilen iki noktadan geçen doğrunun denklemini önce $y = mx + b$, sonra $Ax + By = C$ biçiminde yazınız:

a) (1 , 3) , (7 , 5) **b)** (-5 , -2) , (5 , -4) **c)** $(0 , \frac{1}{2})$, $(1 , \frac{3}{2})$

6. Eğer A YTL, r faiz oranı ile t yıl bankada tutulursa, t yıl sonunda ulaşacağı değer $B = Ar\,t + A$ olur. (Burada r ondalık kesir olarak düşünülmektedir. Örneğin, faiz oranı % 6 ise, $r = 0.06$ dır ve 100 YTL, % 6 dan t yıl faizde kalırsa, ulaşacağı değer $B = 6\,t + 100$ YTL olur.)

a) 100 YTL, % 6 faizle 5 yıl sonunda kaç YTL olur? 20 yıl sonunda kaç YTL olur?
b) $B = 6t + 100$ ün $0 \le t \le 20$ için grafiğini çiziniz.
c) Grafiğin eğimi nedir?

7. Radyo üreten bir firmanın günlük giderinin üretilen radyo sayısının doğrusal fonksiyonu olduğu bilinmektedir. Firmanın, günlük 200 \$ sabit gideri vardır ve eğer bir günde 20 radyo üretirse, o günkü toplam gideri 3 800\$ olmaktadır. Firmanın günde x adet radyo üretmesi durumunda günlük toplam gideri $Gi(x)$ ile gösteriliyor.

a) $Gi(x)$ i bulunuz.
b) Günde 12 radyo üretilmesi durumunda toplam gider nedir?
c) Gider fonksiyonunun $0 \le x \le 20$ için grafiğini çiziniz.

8. Aşağıdaki karesel fonksiyonlardan her birinin
(i) koordinat kesişimlerini, **(ii)** köşe noktasını,
(iii) maksimum veya minimumunu, **(iv)** değer kümesini
bulunuz ve grafiğini çiziniz

a) $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$ **b)** $m(x) = (x-3)^2 - 4$ **c)** $r(x) = x^2 - 10x + 24$

ç) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$ **d)** $m(x) = 3x^2 + 18x + 15$ **e)** $r(x) = -x^2 + 3x + 10$

9. Bir firmanın yıllık gelir ve gider fonksiyonları, x milyon adet ürün için

$$Ge(x) = x(80 - 4x) \quad , \quad Gi(x) = 128 + 16x$$

milyon YTL olarak veriliyor. Bu firmanın yılda en az 1 milyon, en çok 16 milyon ürün ürettiği varsayıldığına göre, Ge ve Gi nin grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizerek aşağıdaki soruları yanıtlayınız:
a) Gelir ve giderin eşit olduğu x sayılarını bulunuz.
b) Kâr edilen ve zarar edilen bölgeleri ve maksimum kârı belirleyiniz.

10. Aşağıdaki rasyonel fonksiyonlardan her birinin
(i) koordinat kesişimlerini bulunuz **(ii)** tanım bölgesini belirleyiniz
(iii) yatay ve düşey asimtotlarını bulunuz **(iv)** grafiğini çiziniz

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ **ç)** $f(x) = \dfrac{4-2x}{x+4}$

11. Aşağıdaki fonksiyonların her biriningrafiğini çiziniz.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 , & x \le 0 \\ (x+1)^2 , & x > 0 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \le -1 \\ -x , & -1 < x \le 0 \\ x , & 0 < x \le 1 \\ 1 - x^2 , & x > 1 \end{cases}$

12. Sular idaresi, abonelerinin aylık su tüketimine göre bir m^3 suyun fiyatını , ilk $5\ m^3$ için 3 YTL, 5 m^3 ten $10\ m^3$ e kadar 3.5 YTL, 10 m^3 ten 20 m^3 e kadar 4 YTL ve 20 m^3 ten sonrası için 5 YTL olarak belirliyor. Ayda x m^3 su tüketen bir abonenin o ay kaç YTL ödemesi gerektiğini ifade eden fonksiyonu parçalı olarak tanımlayınız ve bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.