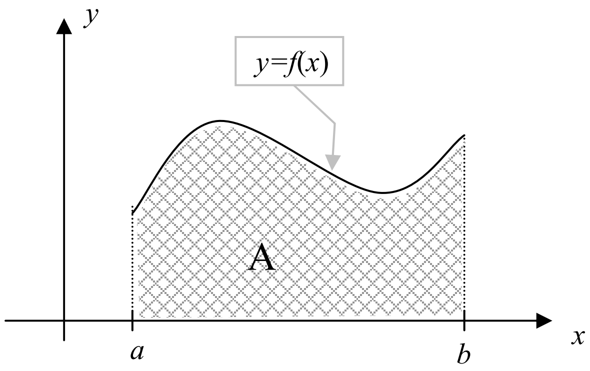
DERS 12

Belirli İntegral

12.1. Bir eğri altında kalan alan. Bir $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir f fonksiyonu verilmiş olsun ve her $x \in [a\ ,\ b]$ için $f(x) \geq 0$ olduğunu kabul edelim. $y = f(x)$ in grafiği ile x – ekseni arasında kalan bölgenin alanı ile bu derste göreceğimiz belirli integral kavramı çok yakından ilişkilidir.



Şekildeki taralı bölgenin alanının hesabı belirli integralle yapılır.

Belirli integrale geçmeden önce, bir sürekli eğri ile x-ekseni arasında kalan alanın yaklaşık olarak hesabına bir örnek verelim.

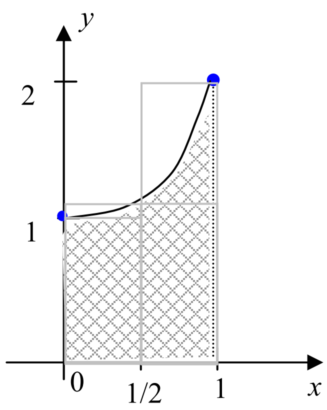
Örnek 1. $[0\ ,\ 1]$ aralığı üzerinde $y = x^2 + 1$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı A olsun. $[0\ ,\ 1]$ aralığı nın orta noktası olan $\frac{1}{2}$ sayısını kullanarak $[0\ ,\ 1]$ aralığını ikiye bölelim ve yandaki şekilde görüldüğü gibi tabanı bu iki parçaya oturan dik-dörtgenleri düşünelim. Hesaplamağa çalıştığımız A alanına yaklaşık değer olarak, alanın içinde kalan iki küçük dikdörtgenin alanları toplamı olan

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{9}{8}$$

ve alanı örten iki dikdörtgenin alanları toplamı olan

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2. = \frac{13}{8}$$

alınabilir:



$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{9}{8} \leq\ A\ \leq\ \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{13}{8}.$$

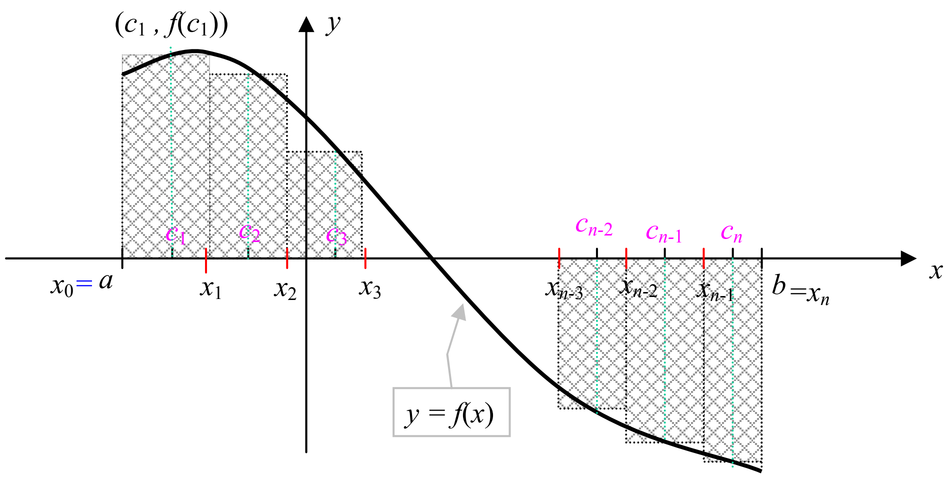
$[0\ ,\ 1]$ kapalı aralığı daha küçük aralıklara bölünerek A alanının gerçek değerine daha yakın değerler bulunabileceği açıktır.

12.2. Belirli integral, Riemann Toplamları. Bir $[a\,,\,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir f fonksiyonu verilmiş olsun.

$[a\,,\,b]$ aralığında

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n=b$$

olacak biçimde $x_0\,,\, x_1\,,\ \ldots\ ,\, x_{n-1}\,,\, x_n$ sayıları alalım. Bu sayılar $[a\,,\,b]$ aralığını küçük aralıklara(altaralıklara) böler. Bu şekilde seçilmiş $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n=b$ sayılarına $[a\,,\,b]$ aralığının bir **parçalanışı** denir.



Şimdi, her k=1,2, . . . ,n için $c_k \in [x_{k-1}\,,\, x_k]$ seçelim ve $[x_{k-1}\,,\, x_k]$ aralığının uzunluğunu Δx_k ile gösterelim:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad , \quad 1 \le k \le n.$$

Aşağıda ifade edilen

$$T_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

T_n toplamına f fonksiyonunun $a=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n=b$ parçalanışı için **Riemann Toplamı** denir.

Burada Δx_k lardan her biri sıfıra yaklaşırken (ki bu durumda n sayısı sınırsız olarak artar, yani sonsuza ıraksar) T_n Riemann Toplamı'nın limit değerinin mevcut olduğu kanıtlanabilir. İşte bu limit değere f fonksiyonunun $[a\,,\,b]$ kapalı aralığı üzerinde **belirli integrali** denir ve bu integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

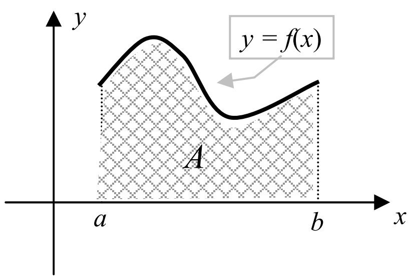
sembolü ile gösterilir. Bu gösterimde a sayısına belirli integralin **altsınırı**, b sayısına da **üstsınırı** denir. $f(x)dx$ ifadesine, belirsiz integralde olduğu gibi, **integrand** denir.

f fonksiyonunun $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığı üzerinde belirli integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} T_n$$
$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \left(f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \right)$$

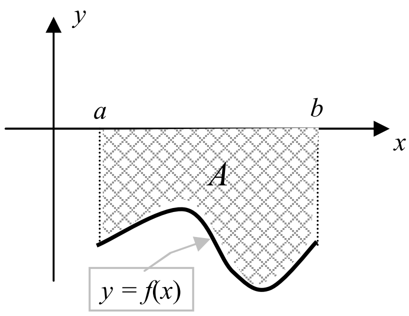
biçiminde ifade edilebilir.

Belirli integralin yukarıdaki tanımından, eğer f fonksiyonu $[a\ ,\ b]$ aralığında sürekli ve her $x \in [a\ ,\ b]$ için $f(x) \geq 0$ ise, $\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integralinin $[a\ ,\ b]$ aralığı üzerinde $y = f(x)$ in grafiği ile x – ekseni arasında kalan bölgenin alanını verdiği sonucunu çıkarabiliriz. Gerçekten bu durumda, T_n Riemann toplamındaki her bir $f(x_k)\Delta x_k$ teriminin taban uzunluğu Δx_k ve yüksekliği $f(x_k)$ olan dikdörtgenin alanını ifade etmekte olduğu; bu alanların toplamı olan T_n toplamlarının limitinin de $[a\ ,\ b]$ aralığı üzerinde $y = f(x)$ in grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı olduğunu görmek zor değildir.



$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

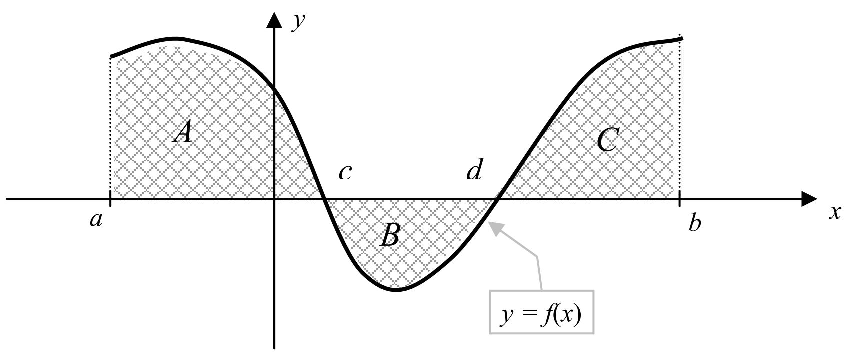
Benzer düşünce ile, eğer f fonksiyonu $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığında sürekli ve her $x \in [a\ ,\ b]$ için $f(x) \leq 0$ ise, $\int_a^b f(x)\,dx$ belirli integrali $[a\ ,\ b]$ aralığı üzerinde $y = f(x)$ in grafiği ile x – ekseni arasındaki bölgenin alanının ters işaretlisi olan negatif sayıyı verir. Başka bir deyimle, $[a\ ,\ b]$ aralığı üzerinde $y = f(x)$ in grafiği ile x – ekseni arasında kalan bölgenin alanı, $-\int_a^b f(x)\,dx$ dir.



$$\boxed{A = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Yukarıda açıklanan iki durum birleştirilerek $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığında sürekli bir f fonksiyonunun grafiği ile x – ekseni arasında kalan bölgenin alanı belirli integral cinsinden, ya da karşıt olarak, f nin $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığı üzerinde belirli integrali f nin grafiği ile x –

ekseni arasında kalan bölgenin alanı cinsinden ifade edilebilir. Örneğin, f nin $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığı üzerinde grafiği aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ise,



bu takdirde, $[a\ ,\ c]$ kapalı aralığı üzerinde eğri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı A, $[c\ ,\ d]$ kapalı aralığı üzerinde eğri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı B ve $[d\ ,\ b]$ kapalı aralığı üzerinde eğri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı C ile gösterilmek üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx = A - B + C$$

dir. Başka bir ifade ile, $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığı üzerinde eğri ile x-ekseni arasında kalan bölgenin tamamının alanı

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

dir.

Belirli integralin, tanımı, yukarıdaki alan yorumu ve limit özellikleri kullanılarak kanıtlana bilecek bazı özelliklerini aşağıya listeliyoruz.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

3. $\int_a^b (f(x) \mp g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$

4. $a < c < b$ için $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

5. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

12.3. Kalkülüs'ün Temel Teoremi. Batı çıkışlı kaynaklarda fonksiyonlar ve onların limit, türev ve integrallerini , yani bu dersimizin konularını işleyen derse **kalkülüs**(calculus) adı verilmektedir. Şimdi Bu kesimde ele alacağımız teorem, kalkülüs dersinin temel teoremidir. Bu teorem belirli integral ile belirsiz integral arasındaki ilişkiyi verir:

Kalkülüs'ün Temel Teoremi. f fonksiyonu $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığında sürekli ve f nin bir ters türevi F ise,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dir.

Bundan böyle, $F(b) - F(a)$ farkı için aşağıdaki gösterimi kullanacağız.

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

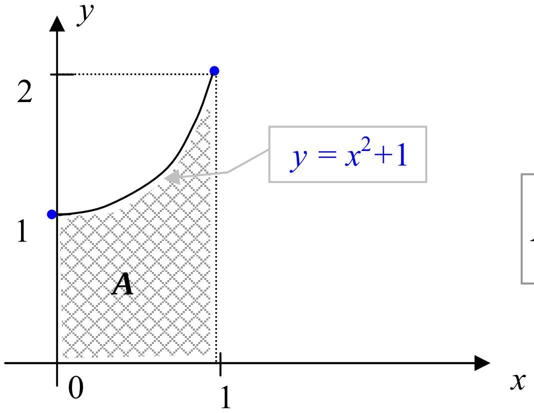
Böylece, yeni gösterimle,

$$F'(x) = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Örnek 1. $\int_0^1 (2x+1)dx = x^2 + x\Big|_0^1 = (1+1) - (0+0) = 2.$

Örnek 2. $\int_0^1 (x^2+1)dx = \dfrac{x^3}{3} + x\Bigg|_0^1 = \left(\dfrac{1}{3}+1\right) - (0+0) = \dfrac{4}{3}$. Böylece başlangıçta bazı yaklaşık değerlerini bulduğumuz aşağıdaki taralı bölgenin alanının gerçek değerini belirlemiş olduk.



$$\boxed{A = \int_0^1 (x^2+1)dx = \frac{4}{3}.}$$

Örnek 3. Aşağıdaki integrali daha önce belirsiz integral olarak hesaplamıştık.

$$\int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right)dx = x^2 + 3e^x - 4\ln x\Big|_1^2 = (4 + 3e^2 - 4\ln 2) - (1 + 3e - 0) = 3(1 + e^2 - e) - 4\ln 2.$$

Örnek 4. $\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}dx.$ belirli integralinin değerini bulmak için önce değişken değiştirme yöntemi ile $\int \frac{2x}{x^2+10}dx$ belirsiz integralini hesaplayıp daha sonra belirli integrale geçebiliriz. $u = x^2+10$ seçilirse, $du = 2xdx$ olur ve söz konusu belirsiz integral aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\int \frac{2x}{x^2+10}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln u = \ln(x^2+10) + C.$$

Dolayısıyla,

$$\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}dx = \ln(x^2+10)\Big|_0^5 = \ln 35 - \ln 10 = \ln(3.5).$$

12.4. Belirli integralde değişken değiştirme ve kısmî integrasyon. Son örneğimizde belirli integrali hesaplarken, ters türevin, yani belirsiz integralin belirlenmesinde *değişken değiştirme* yöntemini kullandık. Bu yöntemi doğrudan doğruya belirli integral üzerinde de uygulayabiliriz. Hatta bu yapıldığı takdirde zaman kazanılacağı da söylenebilir.

$\int_a^b F'(g(x))\,g'(x)\,dx$ gibi bir belirli integrali hesaplamak için, bu integral belirsiz integral olarak düşünülüp $u = g(x)$ seçilince $du = g'(x)dx$ olduğu ve integralin u cinsinden ifade edildiğini anımsayınız. Belirli integralde x değişkeni a ile b arasında değişmektedir. Bu durumda, u değişkeni de $g(a)$ ile $g(b)$ arasında değişeceğinden, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_a^b F'(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u)\,du.$$

Sağ taraftaki $F'(u)$ nun ters türevi $F(u)$ yu biliyorsak, hesabımızı

$$\int_a^b F'(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u)\,du. = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

biçiminde sürdürüp sonuçlandırırız.

O halde, belirli integrale değişken değiştirme yöntemi uygularken $u = g(x)$ seçiminden sonra $du = g'(x)dx$ ile birlikte $g(a)$ ve $g(b)$ değerleri de hesaplanıp bu değerler yeni değişken u cinsinden yazılmış olan integral için alt ve üst sınırlar olarak alınır ve yeni integral de belirli integral olarak yeni sınırları ile hesaplanmış olur.

Yukarıdaki son örneğimizi bu yolla yapalım:

Örnek 1. $\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}\,dx = \int_{10}^{35} \frac{1}{u}\,du = \ln u\Big|_{10}^{35} = \ln 35 - \ln 10 = \ln(3.5).$

$u = x^2 + 10$, $du = 2x\,dx$

$x=0 \Rightarrow u=10$; $x=5 \Rightarrow u=35$

Örneğimizde, x değişkenine göre verilmiş olan integralin altsınırı olan 0 a karşılık u değişkenine göre yazılmış integralin $u(0)=10$ altsınırı ve x değişkenine göre verilmiş olan integralin üstsınırı olan 5 e karşılık u değişkenine göre yazılmış integralin $u(5)=35$ üst sınırının kullanıldığına dikkat ediniz.

Bu örnekte olduğu gibi aşağıdaki örneklerde de u nun seçimi ve yeni sınırların hesabı kutu içinde gösterilmiştir.

Örnek 2. $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}\,dx = \frac{1}{6}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{1}{9}\cdot u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{9}(8-1) = \frac{7}{9}.$

$u = 3x^2 + 1$, $du = 6x\,dx$, $x\,dx = (1/6)\,du$

$x=0 \Rightarrow u=1$; $x=1 \Rightarrow u=4$

Örnek 3. $\int_0^1 (e^{2x}-2x)(e^{2x}-1)dx = \int_1^{e^2-2} \frac{1}{2}u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_1^{e^2-2} = \frac{1}{4}\cdot u^2\Big|_1^{e^2-2} = \frac{1}{4}(e^2-2)^2 - \frac{1}{4}.$

$u = e^{2x} - 2x$, $du = (2e^{2x} - 2)\,dx$, $(e^{2x} - 1)\,dx = (1/2)\,du$

$x=0 \Rightarrow u=1$; $x=1 \Rightarrow u = e^2 - 2$

Örnek 4(Uygulama). Haftada x televizyon ünitesi üreten bir işletmenin haftalık marjinal kârı, YTL olarak, $K'(x) = 165 - (0.1)x$, $0 \le x \le 4000$ biçiminde veriliyor. Şu anda haftada 1500 ünite üreten firma, haftalık üretimini artırmak istiyor. Haftalık üretimini 1600 e çıkarırsa, haftalık kârındaki değişim ne olacaktır?

Çözüm. Kârdaki artış

$$K(1600) - K(1500) = K(x)\Big|_{1500}^{1600} = \int_{1500}^{1600} K'(x)\,dx$$

$$= \int_{1500}^{1600} (165 - (0.1)x)\,dx = 165x - (0.05)x^2\Big|_{1500}^{1600}$$

Son ifdede değerler yerleştirilince,

$$K(1600)-K(1500)=165\cdot1600-0.05\cdot2\,560\,000-\left(165\cdot1500-0.05\cdot2\,250\,000\right)$$

$$=165\cdot1600-0.05\cdot2\,560\,000-\left(165\cdot1500-0.05\cdot2\,250\,000\right)$$

$$=16500-0.05\cdot31\,000=16500-15500=1000$$

YTL olarak elde edilir.

Daha önce belirsiz integral hesabında kullandığımız kısmî integrasyon yöntemini belirli integral hesaplarken de kullanabiliriz. Önce karşılık gelen belirsiz integralhesaplanır ve en sonunda sınırlar yerleştirilerek belirli integral bulunur.

Örnek 5. $\int_0^1 x\,e^x\,dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x\Big|_0^1=0-\left(-1\right)=1.$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=x\ , & dv=e^x\,dx \\ du=dx\ , & v=e^x \end{array}}$$

Bazı integrallerin hesabında değişken değiştirme ve kısmî integrasyon yöntemleri birlikte kullanılabilir.

Örnek 6. $\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx=\int_1^2(\ln t)\left(\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_1^2(\ln t)\,dt=\frac{1}{2}\left((t\ln t)-\int t\left(\frac{1}{t}\right)dt\right)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} t=x^2+1\ , & dt=2x\,dx\ ,\ x\,dx=(1/2)\,dt \\ x=0\Rightarrow t=1\ , & x=1\Rightarrow t=2 \end{array}}$$

$$=\frac{1}{2}\left((t\ln t)-t\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(2\ln2-2-(0-1)\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=\ln t\ , & dv=dt \\ du=(1/t)\,dt\ , & v=t \end{array}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\ln2-1\right)=\ln2-\frac{1}{2}.$$

Örnek 7. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1 2te^t\,dt=2\int_0^1 te^t\,dt=2\left((te^t)-\int e^t\,dt\right)=2(te^t-e^t)\Big|_0^1=2(0)-2(-1)=2.$

$$\boxed{\begin{array}{ll} t=\sqrt{x}\ , & dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\ ,\ dx=2\sqrt{x}\,dt=2t\,dt \\ x=0\Rightarrow t=0\ , & x=1\Rightarrow t=1 \end{array}}\ .$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=t\ , & dv=e^t\,dt \\ du=dt\ , & v=e^t \end{array}}$$

12.5. Ortalama Değerler. Bir fonksiyonun sonlu sayıda değeri verildiği zaman bu değerlerin ortalamasını nasıl hesapladığımızı anımsayalım. Örneğin, f fonksiyonunun

$$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$$

değerlerinin ortalaması

$$\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

olarak tanımlanır.

f fonksiyonu bir $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığında tanımlı ise, f nin bu aralıkta aldığı tüm değerlerin ortalaması nasıl hesaplanabilir? Eğer f fonksiyonu $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığında sürekli ise, bu ortalama değer aşağıdaki teorem ışığında integral yardımı ile hesaplanabilir.

Teorem(İntegral için ortalama değer teoremi). f fonksiyonu $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığında sürekli ise, öyle bir $c \in (a\ ,\ b)$ vardır ki

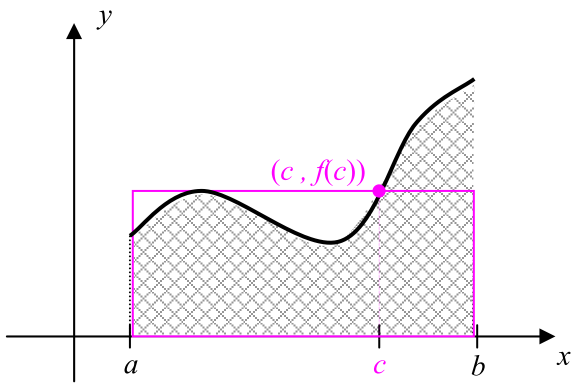
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

dir.

Teoremin ifadesindeki eşitlik

$$\int_a^b f(x)\,dx == (b-a)f(c)$$

biçiminde yazılırsa, yandaki şekilden de izlenebileceği üzere bu eşitlik, f nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanının, taban uzunluğu $(b-a)$ ve yüksekliği $f(c)$ olan dikdörtgenin alanına eşit olduğunu ifade etmektedir.



f nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı, kabaca, f nin $[a\ ,\ b]$ kapalı aralığında aldığı tüm değerlerin toplamı olarak düşünülürse, f fonksiyonunun $[a\ ,\ b]$ aralığı üzerinde **ortalama değeri**nin

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx$$

olarak tanımlanabileceği görülür.

Örnek 1. $f(x) = x - 3x^2$ nin [-1 , 2] aralığı üzerinde ortalama değeri

$$f(c) = \frac{1}{(2-(-1))}\int_{-1}^{2} (x-3x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(2 - 8 - \left(\frac{1}{2} - (-1)\right)\right) = -\frac{5}{2}$$

dir.

Örnek 2. Fiyat-talep fonksiyonu $p = 500e^{(-0.01)x}$ olarak verilmişse, [200 , 300] talep aralığı üzerinde ortalama fiyatın ne olduğunu(YTL olarak) belirleyelim.

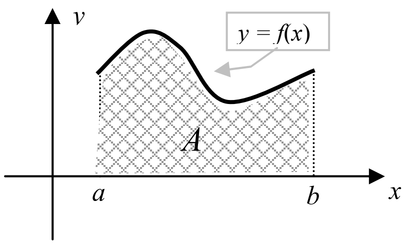
Verilen aralıktaki ortalama fiyat $\overline{p}$ ile gösterilirse,

$$\overline{p} = \frac{1}{300-200}\int_{200}^{300} 500e^{-(0.001)x}dx = \frac{500}{100}\left(\int_{200}^{300} 500e^{-(0.001)x}dx\right) = 5\,\frac{e^{(-0.001)x}}{-0.001}\Bigg|_{200}^{300}$$

$$= -5000e^{(-0.001)x}\Big|_{200}^{300} = -5000(e^{-3} - e^{-2}) \approx 42.75$$

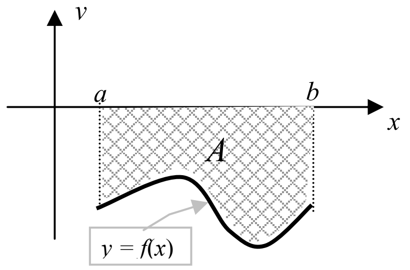
YTL olur.

12.6. Alan Hesabı. Bir eğri ile x-ekseni arasında kalan alan ile belirli integral arasındaki ilişkiyi dersimizin başlangıcında görmüştük. Eğer eğrinin tamamı x-ekseninin yukarısında ise



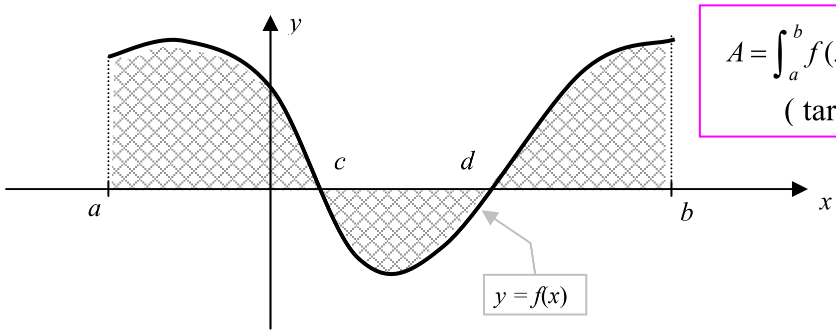
$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Eğer eğrinin tamamı x-ekseninin aşağısında ise



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Eğer eğrinin bir kısmı eğrinin x-ekseninin yukarısında bir kısmı da x-ekseninin aşağısında ise

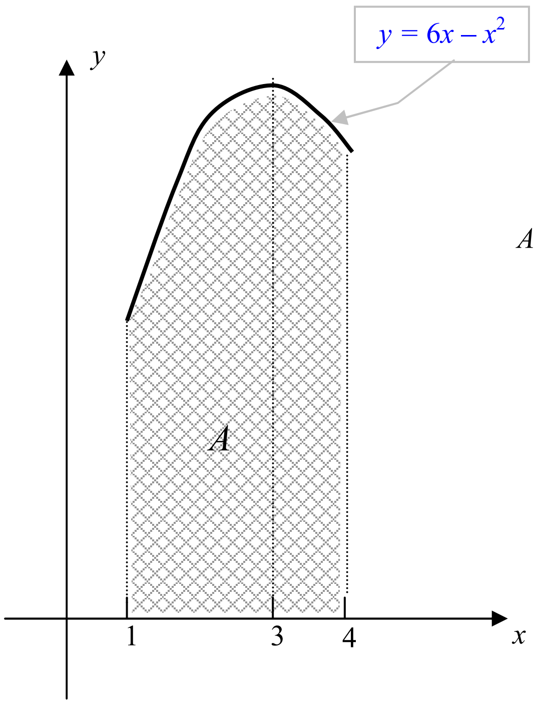


$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)$$

(taralı bölgenin alanı = A)

Şimdi alan hesabına bazı somut örnekler vereceğiz.

Örnek 1. $f(x) = 6x - x^2$, $1 \le x \le 4$ ile verilen bölgenin alanı.

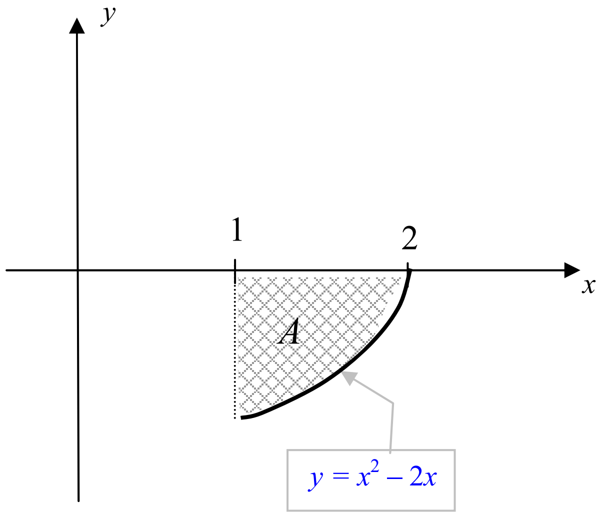


$$A = \int_1^4 \left(6x - x^2\right) dx = 3x^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4$$

$$= 3\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} - \left(3\cdot 1^3 - \frac{1^3}{3}\right)$$

$$= 45 - \frac{63}{3} = 24.$$

Örnek 2. $f(x) = x^2 - 2x \quad , \quad 1 \leq x \leq 2$ ile verilen bölgenin alanı.



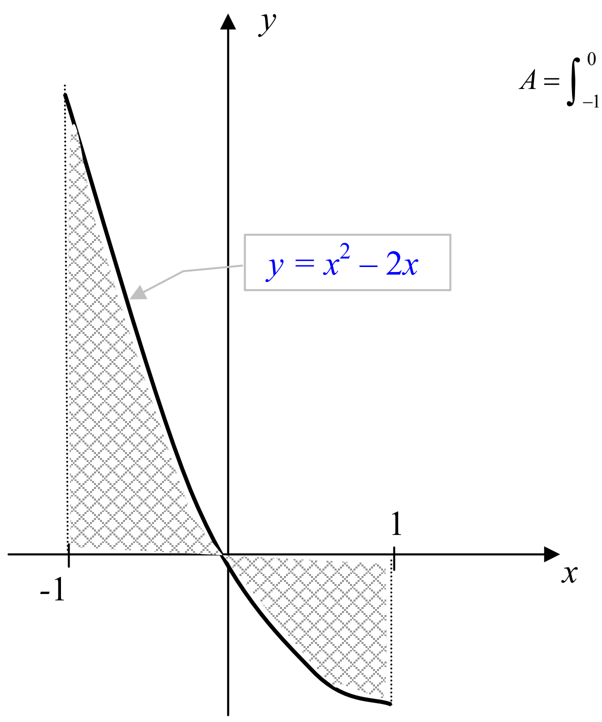
$$A = -\int_1^2 \left(x^2 - 2x\right) dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_1^2$$

$$= -\left(\frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}.$$

Örnek 3. $f(x) = x^2 - 2x \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$ ile verilen bölgenin alanı.



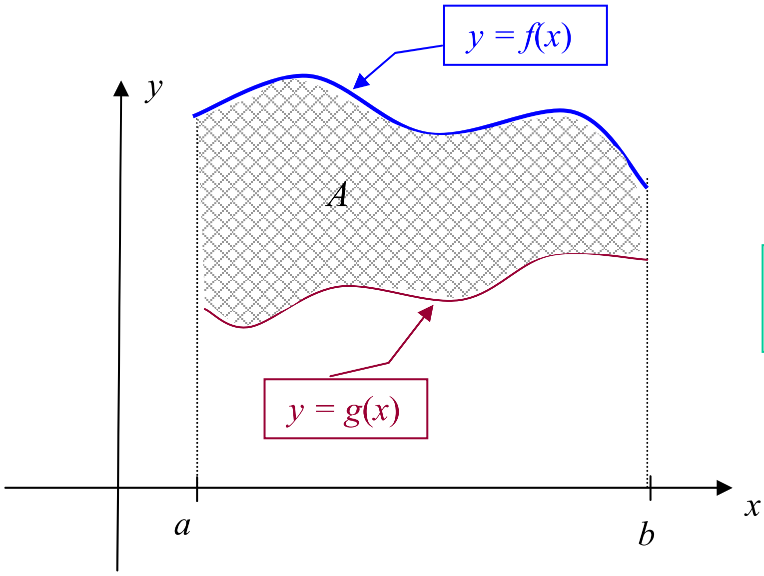
$$A = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x\right) dx - \int_0^1 \left(x^2 - 2x\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 0 - \left(\frac{-1}{3} - 1\right) - \left(\left(\frac{1}{3} - 1\right) - 0\right)$$

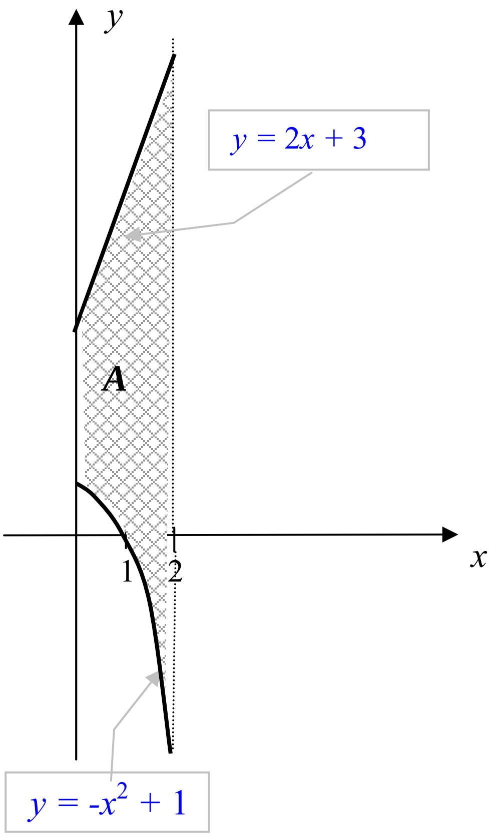
$$= \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = 2.$$

12.7. İki Eğri Arasında Kalan Bölgenin Alanı. f ve g $[a\ ,\ b\ ]$ aralığında sürekli fonksiyonlar, her $x \in [a\ ,\ b\ ]$ için $g(x) \le f(x)$ olsun . Bu durumda $y = f(x)$ in grafiği $y = g(x)$ in grafiğinin yukarısındadır ve $[a\ ,\ b\ ]$ aralığı üzerinde bu iki eğri arasında kalan alan integral olarak şöyle ifade edilir:



$$\boxed{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx}$$

Örnek 1. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x^2 + 1$, $0 \le x \le 2$ ile verilen bölgenin alanı.



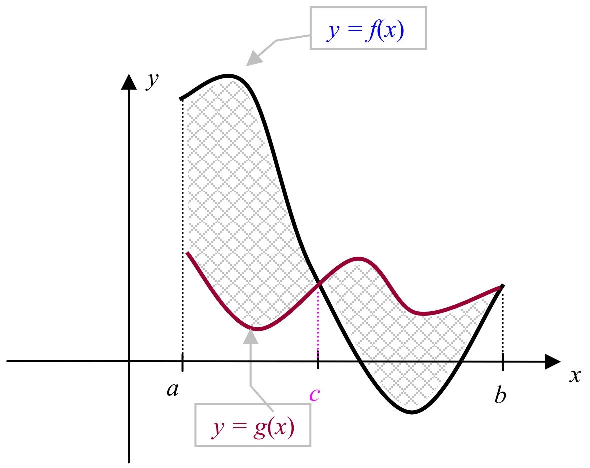
$$A = \int_0^2 \big((2x+3) - (-x^2+1)\big)\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 + 2x + 2\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{8}{3} + 4 + 4 = \frac{32}{3}.$$

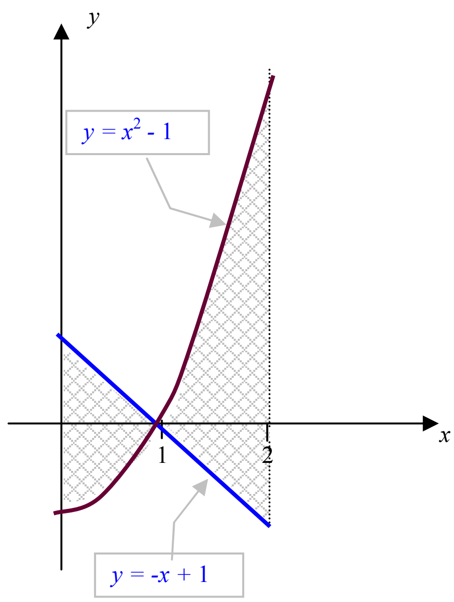
İki eğri arasında kalan bölgenin alanı hesaplanırken, $y = f(x)$ in grafiğinin bir kısmı $y = g(x)$ in grafiğinin yukarısında, bir kısmı da aşağısında olabilir. Bu durumda söz konusu aralık alt aralıklara bölünerek alan hesaplanır. Örnek olarak aşağıdaki şekilde gösterilen bölgenin alanına bakalım.



A : Taralı bölgenin alanı

$$A = \int_a^c \big(f(x) - g(x)\big)\,dx + \int_c^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

Örnek 2. $f(x) = -x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $0 \le x \le 2$ ile verilen bölgenin alanı.



$$A = \int_0^1 \big((-x+1) - (x^2-1)\big)\,dx$$
$$+ \int_1^2 \big((x^2-1) - (-x+1)\big)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(-x^2 - x + 2\right)dx + \int_1^2 \left(x^2 + x - 2\right)dx$$

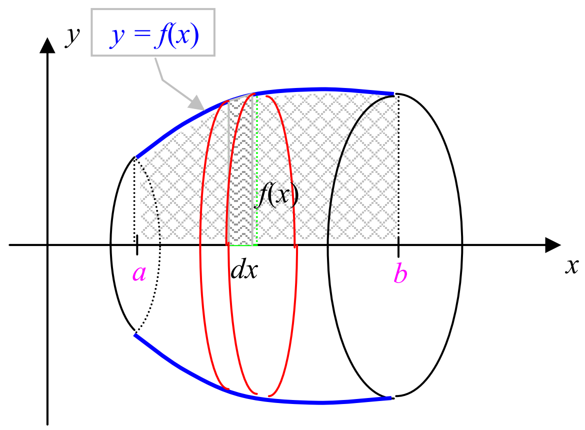
$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 0\right) + \left(\frac{8}{3} + 2 - 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)\right)$$

$$= 3$$

12.8. Hacim Hesabı , Dönel Cisimlerin Hacmi. Düzlemde bir bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmi integral yardımıyla hesaplanabilir.

$[a\ ,\ b]$ aralığı üzerinde $y = f(x)$ in grafiği ile x – ekseni arasında kalan bölgenin x – ekseni etrafında döndürüldüğünü düşünelim. Yandaki şekilde görülene benzer bir katı cisim ortaya çıkacaktır. Bu katı cismin hacmini belirli integral kullanarak hesaplayabiliriz. Gerçekten , taban uzunluğu dx ve yüksekliği $f(x)$ olan dikdörtgen x – ekseni etrafında döndürülürse bir silindir(şekilde kırmızı olarak çizilen silindir) elde edilir. Bu silindirin hacmi



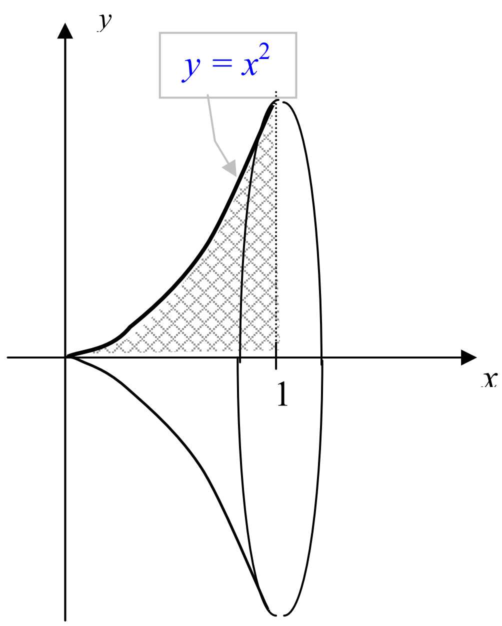
$$dV = \pi\,(f(x))^2\,dx$$

dir ve integral tanımı göz önüne alınarak şekildeki katı cismin hacminin

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

olduğu sonucu çıkarılabilir.

Örnek 1. $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$ ile verilen bölgeyi x - ekseni etrafında döndürünce meydana gelen cismin hacmini hesaplayalım.

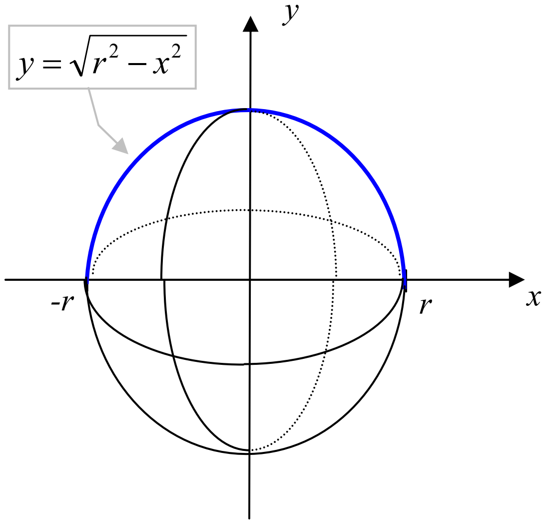


$$V = \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^1 x^4\,dx$$

$$= \pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Örnek 2(Kürenin hacmi). Yarıçapı r birim olan küre, yarıçapı r birim olan bir yarım çemberin çapı etrafında döndürülmesiyle elde edilir. Dolayısıyla, sözü edilen hacim $f(x) = (r^2 - x^2)^{1/2}$, $-1 \leq x \leq 1$ eğrisinin x - ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilir.



$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$

$$= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right)$$

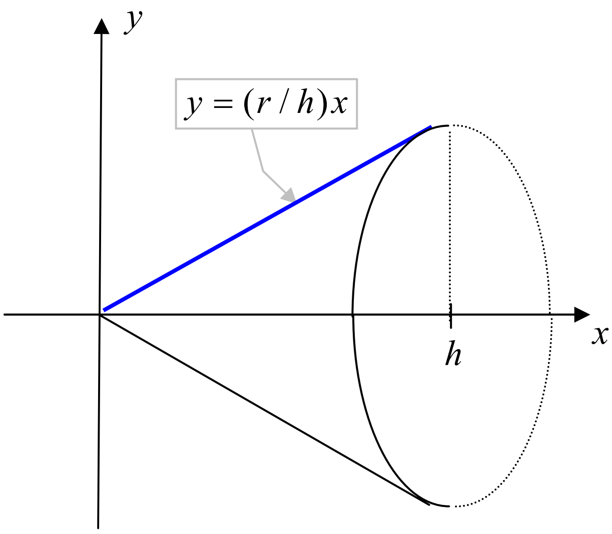
$$= \frac{4\pi r^3}{3}$$

.

Örnek 3(Koninin hacmi). Taban yarıçapı r birim ve yüksekliği h birim olan koni,

$$f(x) = (r/h)x \quad , \quad 0 \leq x \leq h$$

eğrisinin x - ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilir.



$$V = \pi \int_{0}^{h} \left((r/h)x\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{0}^{h} \left(\frac{r^2}{h^2} x^2 \right) dx$$

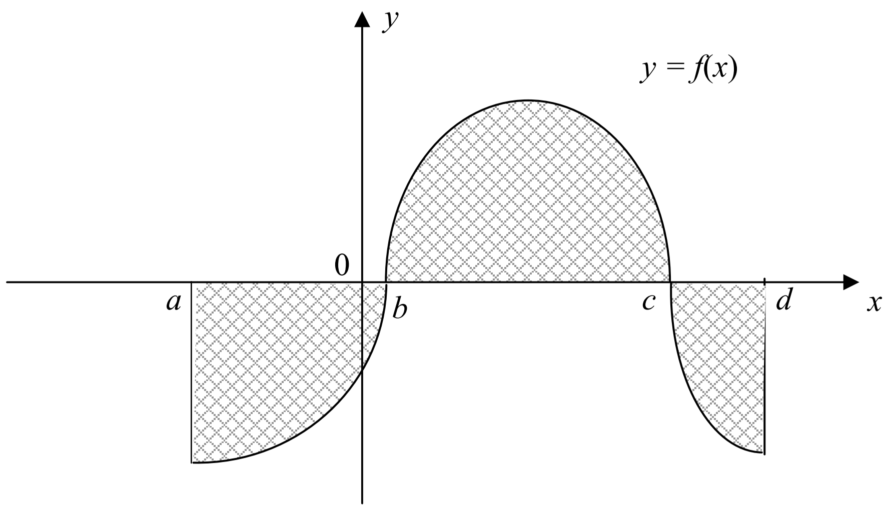
$$= \pi \left(\frac{r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{0}^{h}$$

$$= \pi \left(\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi}{3} r^2 h \, .$$

.

Problemler 12

1. Aşağıdaki şekilde verilen alanları belirli integraller olarak ifade ediniz:



a) $[a\ ,b]$ aralığı ile grafik arasındaki alan.

b) $[b\ ,c]$ aralığı ile grafik arasındaki alan.

c) $[c\ ,d]$ aralığı ile grafik arasındaki alan.

ç) $[a\ ,c]$ aralığı ile grafik arasındaki alan.

d) $[b\ ,d]$ aralığı ile grafik arasındaki alan.

e) $[a\ ,d]$ aralığı ile grafik arasındaki alan.

2. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a) $\int_1^2 (3x^2 - 4x + 5)dx$ **b)** $\int_1^2 (2x^{-2} - 3x^2)dx$ **c)** $\int_1^4 (x + \sqrt{x})dx$ **ç)** $\int_0^1 (x^3 + x^{\frac{1}{3}})dx$

d) $\int_1^e (x + \frac{1}{x})dx$ **e)** $\int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x^2})dx$ **f)** $\int_0^1 (x^e + e^x)dx$ **g)** $\int_0^{\ln 2} (2e^{x+2})dx$

3. Aşağıdaki belirli integralleri değişken değiştirme yöntemi ile hesaplayınız.

a) $\int_2^3 12(x^2 - 4)^5 x dx$ **b)** $\int_3^5 \frac{1}{x-1}dx$ **c)** $\int_{-5}^{10} e^{-0.05x}dx$ **ç)** $\int_0^1 \frac{x}{x^2+2}dx$

d) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+2}dx$ **e)** $\int_0^1 (e^{2x} - 2x)(e^{2x} - 1)dx$ **f)** $\int_{-1}^7 \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

4. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^1 (x+1)e^x dx$ **b)** $\int_1^3 \ln(2x)dx$ **c)** $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

ç) $\int_0^3 10(2x-1)^4 dx$ **d)** $\int_0^{10} 10e^{-0.02x} dx$ **e)** $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}} dx$

5. Dağ bisikleti üreten bir firmanın araştırma departmanı, marjinal gider fonksiyonunu, ayda x adet bisiklet üretilmesi durumunda, $Gi'(x) = 500 - \frac{3}{x}$, $0 \le x \le 1000$ olarak belirliyor. 300 bisikletlik bir üretim seviyesinden 900 bisikletlik bir üretim seviyesine geçilmesi durumunda toplam giderde ne kadar artış olacağını bir belirli integral olarak ifade edip hesaplayınız.

6. Aşağıda verilen eğriler ile verilen aralık üzerinde çevrelenmiş bölgelerin alanlarını bulunuz.

a) $y = 3x^2$, $y = 0$; $1 \le x \le 2$ **b)** $y = -2x - 1$, $y = 0$; $0 \le x \le 4$

c) $y = x^2 + 2$, $y = 0$; $-1 \le x \le 0$ **ç)** $y = e^x$, $y = 0$; $-1 \le x \le 2$

d) $y = \frac{-1}{t}$, $y = 0$; $0.5 \le t \le 1$ **e)** $y = -2x + 8$, $y = 12$; $-1 \le x \le 2$

f) $y = x^2 + 1$, $y = 2x - 2$; $-1 \le x \le 2$ **g)** $y = x^3$, $y = x$; $-2 \le x \le 2$

7. Aşağıda verilen iki eğri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

a) $y = 3x^2$, $y = 12$ **b)** $y = 4 - x^2$, $y = -5$ **c)** $y = x^3$, $y = 4x$

ç) $y = \sqrt{x}$, $y = x$ **d)** $y = 2 - x$, $y = x^2$ **e)** $y = x^4 - 6x^2$, $y = 4x^2 - 9$

8. Alıştırma 6 da verilen bölgelerin x – ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cisimlerin hacimlerini bulunuz.