1 Olasılık ve Rassal Değişkenler

Küme: Net bir şekilde tanımlılanmış olan nesneler topluluğuna küme denir. Kümeyi oluşturan nesnelere kümenin ögeleri, elemanları denir.
Sayılabilir Küme: Bir kümenin elemanları ile sayma sayılar kümesinin elemanları arasında birebir bir bağıntı tanımlanabiliryorsa küme sayılabilir kümedir. *Kümenin eleman sayısı sonsuz olan sayılabilir kümeler vardır.

$$A = \{Pazartesi, \qquad , \qquad \}$$

$$B = \{x|x \in R, \quad 1 \leq x \leq 5\}$$
$$C = \{1, 2, 3, \dots\}$$

A kümesi sayılabilir sonlu kümedir. B kümesi sayılamayan kümedir. C kümesi sayılabilir sonsuz kümedir. $D = \{\}$ yada $D = \emptyset$ boş kümedir. Ω evrensel kümedir.

Küme İlişkileri:

$A = B$ A ve B kümesinin tüm elemanları birbirinin aynısıdır.

$A \subset B$: B kümesi A kümesini kapsıyor. A'nın tüm elemanları B'de mevcut.

Küme Operasyonları:

1. $A \cup B$: A'nın veya B'nin elemanlarının kümesi.
2. $A \cap B$: A'nın ve B'nin elemanlarının kümesi.
3. A^c: A'nın tümleyeni; A'da olmayıp evrensel kümede olan elemanların kümesi.
4. $A - B$: A'nın B'den farklı olan elemanlarının kümesi. $A - \Omega =$.

Eğer iki küme ayrık ise $A \cap B =$

Bir Kümenin bölüntüsü: Eğer A_i kümelerinin herhangi bir kesişimi $\emptyset$ ise ve birleşimleri S kümesi ise A_i kümeleri S'in bölüntüsüdür. $S = \bigcup A_i$

Küme Operasyonlarının Özellikleri:

1.
2.
3.

$A \cap \emptyset =$; $A \cup \emptyset =$; $\emptyset^c =$; $\Omega^c =$; $A \cup A^c =$; $A \cap A^c =$; $A \cup \Omega =$; $A \cap \Omega =$

De Morgan Yasaları:

1.

2.

2 Olasılık Modeli

Olasılığın matematiksel modeli 3 ögeden oluşur. Deney, Örneklem Uzayı, Olasılık Yasası. **Deney:**

1. 1 Kilobyte lık bilgideki hatalı bayt sayısı.
2. Bir fabrikada üretilen ürünlerden kaçının hatalı olduğu.
3. Yazı tura atmak.
4. 3 kere yazı tura atmak.
5. Bir kadının çocuklarının sayısı.
6. Tura gelinceye kadar yazı tura atıp atış sayısını yazmak.
7. Yarı çapı r olan daireye dart atıp dartın merkeze olan uzaklığını ölçmek.
8. Kenar uzunluğu 1 olan bir karenin içerisinden rastgele bir (x, y) noktası seçmek.

Örneklem Uzayı: Bir olasılık deneyinden elde edilebilinecek tüm çıktıların kümesine (Ω) örneklem uzayı denir.

1. $\Omega = \{$
2. $\Omega = \{$
3. $\Omega = \{$
4. $\Omega = \{$
5. $\Omega = \{$
6. $\Omega = \{$
7. $\Omega = \{$
8. $\Omega = \{$

Olay:Örneklem uzayının herbir alt kümesine olay denir.,

Örnek:A : Deney4 'te ikinci atışta tura gelmesi

$A = \{$

Örnek:A :Turanın 5. atıştan önce gelmesi.

$A = \{$

Örnek: Dartın uzaklığının 1 den küçük olması.

$A = \{$

Örnek: Seçilen (x, y) noktasının 1. bölgede olması.

$A = \{$

Örnek: Ω olayına kesin olay, $\emptyset$ olayınada imkansız olay denir. Olasılık deneyinin her tekrarına deneme denir. Deneme sonunda A olay kümesinin bir elemanı elde edilmiş ise A olayı gerçekleşmiş denir.

Olasılık Yasası: Olasılık yasası her $A \in \Omega$ olayına negatif olmayan bir $P(A)$ değeri atar.

Olasılık Aksiyomları:

1. Tüm A olayları için $P(A) \geq$
2. Ayrık A ve B olayları için $P(A \cup B) =$
3. $P(\Omega) = 1$

Olasılık Yasasının Özellikleri:

1. $P(\emptyset) = 0$
   İspat:

2. $P(A^c) =$
   İspat:

3. Ayrık olmayan A ve B kümeleri için

$P(A \cup B) =$
İspat:

4. $A \subset B \Rightarrow$
   İspat:

5. $P(A \cup B) \leq$ ispatı yapıldı.

6. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) =$ ispatı yapıldı.

7. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

Ayrık Olasılık ModeliÖrneklem uzayı sayılabilir küme olan olasılık modeline ayrık olasılık modeli denir.
Örnek: Altı kenarlı bir zar atılıyor. Eğer zarın tüm kenarlarının gelme olasılığı aynı ise zarın 1 veya 6 gelme olasılığı nedir?

.

Örnek: Yazı gelme ihtimali p olan bir para yazı gelinceye kadar atılıyor. Örneklem uzayının tüm elemanlarının olasılığını bulunuz.

Örnek: 1 kilobyte'lık bir dosyada en az bir baytın hatalı olma ihtimali 0.01, en az iki baytın hatalı olma ihtimali 0.05 olarak verilmiştir. Dosyadaki hatalı bayt sayısını deney olarak kabul edersek;

a) Örneklem uzayını tanımlayınız.

b) Sıfır hata olma olasılığını bulunuz.

c) Bir hata olma olasılığını bulunuz.

d) En fazla bir hata olma olasılığını bulunuz.

Sürekli Olasılık Modeli: Örneklem uzayı kümesi sayılamıyor ise, olasılık modeline sürekli olasılık modeli denir.

** Eğer olasılık modeli sürekli ise Ω daki elaman sayısı sonsuzdur. Bu durumda tekil bir noktanın olasılığı sıfırdır. Fakat belli bir aralığın olasılığı sıfır yada sıfırdan farklı olabilir.

Örnek: Bir kişi evden okula araba ile gitmeye $[8:30, 9:00]$ aralığında başlıyor ve başlama saatinin olasılığı bu aralıkta eşit ise;

a) 8:45'den önce işe gitmesinin olasılığı nedir?

b) Kişinin sevdiği radyo programı 8:30 da başlıyor ve 5 ile 15 dakika rasında bir süre kadar devam ediyor ve bu programın süresinin olasılığı eşit ise kişinin programın en azından bir kısmını dinleyebilme olasılığı nedir?

Çözüm:

Koşullu Olasılık A ve B olaylarının gerçekleşme olasılığı $P(A)$ ve $P(B) \neq 0$ olsun. Eğer B olayının gerçekleştiği bilgisi verilirse A olayının gerçekleşme olasılığına koşullu olasılık denir ve

$$P(A \backslash B) =$$

şeklinde tanımlanır. B olayının gerçekleştiği bilgisi verildiğinde yeni örneklem uzayı B olur. Bu durumda A olayının gerçekleşmesi için $A \cap B$ olayının gerçekleşmesi gerekir.

Örnek: İki adet 4 yüzlü para atılıyor. Zarların herhangi bir yüzünün gelme olasılığı aynıdır. M olayı zarların maksimumunun 2 olması, B olayı ise zarların minimumunun 2 olması şeklide tanımlı ise; B olayının gerçekleştiği bilgisi size verildiğine göre;

a) $P(M = 1 \backslash B) =?$

b) $P(M = 2 \backslash B) =?$

Zincir Kuralı n adet olayın aynı anda gerçekleşmesi ihtimali koşullu olasılık kullanılarak hesaplanabilir.

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) =$$

Örnek: Bir kutunun içerisinde 0 ve 1 olarak rumaralandırılmış iki adet top vardır. Topların seçilme ihtimali eşittir. Rasgele seçilen top 0 ise top tekrar kutuya konuyor. Seçilen top 1 ise seçilen top ve bir adet 1 ile numaralandırılmış yeni bir topla birlikte torbaya konuyor. Bu durumda 3. seçimde de çekilen topun 1 olma ihtimali nedir?

Toplam Olasılık Teoremi

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ B olayının bölüntüsü olsun ve A_i olaylarının B kümesi içerisinde kesişimi $\emptyset$ olsun. Yani $A_i \cap A_j \cap B = \emptyset$ tüm i, j ler için.

$$P(B) =$$

olur. **Örnek:** 3 adet kapıdan birinin arkasında ödül var. Siz bir kapıyı seçince hostes seçmediğiniz kapılardan arkasında ödül olmayan bir kapıyı açıyor. Ödülü kazanmak için tercihinizi değiştirmeniz mi mantıklı yoksa ilk tercihinizded kalmanız mı?

Çözüm:

Baye's Kuralı

Örnek: Suçlu X ve suçlu Y'nin suç işleme ihtimali $\frac{1}{5}$ ise ve A suçunun işlendiği zaman X ve Y nin olay yerinde olma ihtimali 0.5 ise X ve Y nin suçu işleme ihtimali nedir? Yapılan araştırmada Y'nin olay yerinde olmadığı tespit edilmiş ise X ve Y nin suçu işleme ihtimali nedir?

Örnek: Bir hastalık için geliştirilen test 0.95 ihtimal ile doğru sonuç veriyor. Toplumda seçilen

herhangi bir insanın hastalıklı olma ihtimali 0.01 ise ve bir kişiye yapılan test pozitif ise o kişinin gerçekten hasta olma ihtimali nedir?

Örnek: Bir radar sistemi havada uçak var ise 0.99 ihtimal ile alarm veriyor. 0.1 ihtimal ile de havada uçak olmasa da alarm veriyor. Havada uçak olma ihtimali 0.05 dir.

a) Havada uçak varken radarın alarm verme ihtimali nedir?

b) Radarın alarm verme ihtimali nedir?

c) Radar alarm veriyorken havada gerçekten uçak olma ihtimali nedir?

Çözüm

Bağımsız Olaylar: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ise A ve B olayları bağımsızdır. Bu durumda *

*

Yani A ile B bağımsız ise A ile B^c de bağımsızdır.

* Ayrık iki olay her zaman bağımlıdır.($A \cap B = \emptyset$)

Örnek: İki adet 4 yüzlü zar atılıyor. Zar atışları birbirinden bağımsızdır. Aşağıda tanımlanan olayların bağımsız olup olmadığını bulunuz.

A_i : ilk zarın i gelmesi, B_j : ikinci zarın j gelmesi. S_i : Zarların toplamının i olması.

a) $P(A_i, B_j) =?$

b) $A = max(A_i, B_j) = 2, \quad B = min(A_i, B_j) = 2$

c) A_2 ve S_5

d) A_2 ve S_6

Şartlı Bağımsızlık A ve B olayları C olayı($P(C) \neq 0$) şartı altında bağımsız ise

$P(A \cap B \backslash C) =$

şartını sağlar.

Örnek: İki adet paranın yazı ve tura gelme ihtimalleri $P(Y \backslash A) = 0.9$, $P(Y \backslash B) = 0.1$ şeklindedir. A parasının seçilme ihtimali 0.3; B parasının seçilme ihtimali 0.7 dir. Bu paralardan biri seçiliyor ve 5 kere atılıyor.

a) Paranın tura gelme ihtimali nedir?

b) İlk dört atımın Tura geldiği biliniyorsa 5. atımında tura olma ihtimali nedir?

Grup Halinde Bağımsızlık n adet olayın grup halinde bağımsız olabilmesi için $2^n - n - 1$ adet bağımsızlık şartını sağlaması gerekir. $n = 3$ için örnek verirsek eğer,

Örnek: Yazı tura atışı sırasında 3 olay tanımlanıyor.
A: Birinci atımda Tura gelmesi
B: İkinci atımda Tura gelmesi
C: İlk iki atımın sonucunun aynı olması.

Bu üç olay grup halinde bağımsız mıdır?

Örnek: Aşağıdaki elektrik devresindeki anahtarlar grup halinde bağımsızdır. Herhangi bir anahtarın kapalı olma ihtimali p ise. A ve B arasında bağlantı olma ihtimali nedir?

Bağımsız Denemeler ve Binom Olasılıkları Bir deneyden elde edilen iki adet olay olsun. A'nın olasılığı $P(A) = p$, $P(A^c) = 1 - p$ dir. Deneyin her denemesi birbirinden bağımsız ise n denemede A olayının k kere gerçekleşmesi olasılığı

$P(k) =$ dir.

Örnek: Bir haberleşme kanalında 0 ve 1'ler iletiliyor. p_0 ihtimal ile yanlış iletim oluyor.

a) n uzunluğundaki bir bilginin hatasız iletim olasılığı nedir?

b) Alıcı tarafında 110 sinyali alınmış ise gerçekte 100 gönderilmiş olma ihtimali nedir?

1) $P(G = 0) = P(G = 1) = 0.5$ alınız.

2) $P(G = 0) = k \qquad P(G = 1) = 1 - k$ alınız.

Saymanın Temel İlkesi

Örnek: n adet nesneden k tanesi kaç değişik şekilde sıralanabilir.

Örnek: 7 arkadaş 1 kaptan, 1 kaleci, 5 oyuncu olacak şekilde kaç çeşit takım oluşturabilir.

. **Örnek:** n adet obje r adet kutuya kaç değişik şekilde taksim edilebilir.(Kutulara kaç adet konulacağı önceden belli ise)

. **Örnek:** Bir önceki soruyu bu formülle çözersek.

Örnek: n adet topu r adet kutuya kaç değişik şekilde dağıtabiliriz.(Kutulara kaç adet konulacağı tamamen serbest ise)

. **Örnek:** "probability" kelimesi ile kaç farklı anlamlı anlamsız kaç kelime yazılabilir.

Örnek: 9 oyuncudan 1 kaptan, 1 kaleci ve 5 oyuncu kaç değişik şekilde seçilebilir.

Örnek: Ankara'nın araba plakası kaç farklı şekilde yazılabilir. 2 veya 3 harf, 2 veya 3 basamaklı sayı verilebilir. (23 harf 9 rakam kullanılacak)

Örnek: 0,1, ve 9 sayıları istenilen sayıda kullanılabiliyor. 8 rakam uzunluğunda bir sayı yazılıyor ve sayının rakamları toplanıyor. Kaç farklı toplam elde edilebilir.

Örnek: $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n$ denkleminin $n \geq 1$ ve $x_i \geq 0$ tamsayı olmak üzere kaç farklı çözümü vardır.

3 Rassal Değişkenler

Rassal Değişkenler: Rassal değişkenler örneklem uzayından reel sayılar kümesine tanımlanmış bir fonksiyondur.

Örnek: Hilesiz bir zar atılıyor ve X rassal değişkeni ve $f_X(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanıyor.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x = 6 \\ 0 & x \neq 6 \end{cases}$$

Olasılık Kütle Fonksiyonu Sayılabilir bir küme üzerinde tanımlanmış olan X rassal değişkeninin olasılık yasasına Olasılık Kütle Fonksiyonu (PMF) denir ve

$P_X(x) \triangleq P(X = x)$ şeklinde tanımlıdır. Bir önceki örneğin PMF sini tanımlamak istersek.

Örnek: *M: Atılan iki zardan büyük olan* şeklinde bir rassal değişken tanımlarsak. $P_M(m)$ yi bulalım.

Bernoulli Rassal Değişkeni $X \sim Ber(p)$

Gösterge Fonksiyonu: Eğer bir rassal değişken sadece 1 ve 0 değerleri alıyorsa $X(\omega) = 1$, A olayının gerçekleştiği gösterdiğinden X Rassal değişkenine gösterge fonksiyonu denir ve $X(\omega) = I(\omega)$ şeklinde gösterilir. Bernoulli rassal değişkeni bir gösterge fonksiyondur.

Örnek: Z rassal değişkeni n adet Bernoulli denemesinden başarılı olanların sayısı (toplam 1 sayısı) olarak tanımlanmış olsun. Bu durumda

Geometrik Rassal Değişken: Bir Bernoulli denemesinde 1 gelme olasılığı p olsun. Y rassal değişkeni ise 1 gelene kadar tekrar eden Bernoulli denemelerinin sayısı şeklinde tanımlanırsa Y'ye Geometrik rassal değişken denir ve $Y \sim Geometric(p)$ şeklinde veya $Y \sim Geo(p)$ şeklinde gösterilir.

Örnek: Bir öğrenci başarılı oluncaya kadar sınava giriyor. Öğrencinin girdiği sınav sayısı $Geo(p)$ rassal değişkenidir.

$Geo(p)$ rassal değişkeninde tüm olasılıkların toplamının 1 olması gerekir.

(Tekrar) Binom Rassal Değişkeni: n adet Bernoulli denemesinde başarının sırası ile ilgilenirsek Geometrik rassal değişken elde ederiz. Fakat başarının sırası değil de sayısı ile ilgilenirsek Binom Rassal Değişkeni elde ederiz.(n kere sınava giren bir öğrencinin k kere başarılı olması)

Poisson Rassal Değişkeni: Poisson rassal değişkeni atomların foton ışıması, sırada bekleyen insan sayısı gibi pekçok rassal değişkeni ifade etmek için kullanılır ve

$P_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

şeklinde tanımlıdır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = 1$$

olduğunu gösterelim.

Poisson Rassal Değişkeninde n çok büyük p çok küçük olmak şartı ile $\lambda = np$ alınabilir. $k << n$ ise Poission rassal değişkeni Binom Rassal değişkenine dönüşür.

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \approx \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Kesikli Tekdüze Rassal Değişken $[a, b]$ aralığında tanımlı olan X rassal değişkeninin bu aralıkta alabileceği tüm değerlerin olasılığı eğer yanı ise tek düze rassal değişken olur.

Örnek: Hilesiz 4 yüzlü bir zar atılıyor. Aşağıdaki rassal değişkenler tanımlanıyor.

a) X: Zarın geldiği sayı.

b) $Y = \frac{X}{3}$

c) $Z = X^2$

d) $Q = 2X$

e) $R = X + 2$

Rassal Değişkenlerin Fonksiyonu X rassal değişkeni örneklem uzayından reel sayılara tanımlanmış bir fonksiyondur. Aynı şekilde $Y = f(X)$ şeklinde tanımlanmış olan Y değişkeni de rassal bir değişkendir. $Y = f(X)$ dönüşümü ile X ekseninden yeni bir Y ekseni elde edilir. Bu yeni eksene göre olasılıkların hesaplanması gerekir.

Örnek: X hava sıcaklığının santigrat cinsinden değeri olsun. X rassal değişken olduğuna göre

$F = 1.8X + 32$ rassal değişkeninde $P(Y \geq 14) =?$

.

Örnek: $X \sim U[-2, 2]$ tekdüze rassal değişkeni iken $Y = |X|$ rassal değişkeninin PMF sini bulalım.

Genelleştirmek isterse $Y = g(X)$ olsun. $P_Y(y)$ bulmak için y değerini veren tüm x'lerin olasılığını toplamamız gerekir.

Örnek: $X \sim U[-3, 3]$ rassal değişkeni üzerinde $Y = u(X)$ rassal değişkeni tanımlanıyor. Bu ifade deki $u(.)$ fonksiyonu birim basamak fonksiyonudur. Y'nin PMF sini bulalım.

Beklenen Değer (Expectation) ve Variyans Beklenen değer olasılık kütle fonksiyonunun (PMF) ağırlık merkezini ifade eder. Olasılık deneyinin defalarca tekrarlanması durumunda ortalamada elde edilecek olan değeri verir. Variyans ise olasılık kütle fonksiyonunun dağınıklılığının ölçüsünü ifade eder.

$$E[X] = \sum_x xP(X = x)$$

değerine beklenen değer denir.

Örnek: Bir gazinoda zar atılıyor. 1 veya 2 gelirse yatırdığınız parayı ve 30.000TL alınıyor.$3, 4, 5, 6$ gelirse de paranızı kaybediyorsunuz. Bu oyuna en fazla ne kadar para yatırmak mantıklıdır.

X rassal değişkeninin variyansı

$$var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

şeklinde tanımlıdır. Variyans her zaman pozitiftir. Görüldüğü gibi variyans X rassal değişkeninin aldığı değerlerin beklenen değerin karesi şeklinde tanımlanmıştır. Bu durumda variyans dağınıklığın bir ölçüsüdür.

Örnek:*Beklenen değerleri aynı olan rassal değişkenlerin variyansı* Aşağıdaki X rassal değişkenlerinin variyansını hesaplayınız.

a) $P_X(15) = P_X(20) = P_X(25) = \frac{1}{3}$

b) $P_Y(15) = P_Y(25) = \frac{1}{2}$

Çözüm

X rassal değişkeninin standart sapması variyansın karekökü olarak tanımlıdır.

$$\sigma_x = \sqrt{var(X)}$$

Teorem X rassal değişkeninin PMF si $P_X(x)$ olsun. X üzerinde $g(X)$ fonksiyonu tanımlanırsa

$E(g(X)) =$

Genellikle $E[g(X)] \neq g(E[X])$ dir.

Örnek: Bir kişi evden okula giderken 0.3 ihtimal ile radyo dinliyor. Radyo dinlediği zamanlarda $50km/saat$, dinlemediğinde ise $70km/saat$ hızla gidiyor. Bu kişi 4 km lik yolu ortalama kaç dakikada bitirir.

$E[X]$ **ve** $var(X)$ **in özellikleri:**

1. $E[aX + b] = aE[X] + b$ dir.

2. $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ şeklinde hesaplanabilir.

3. $var(aX) \neq avar(X)$

4. $var(X + b) = var(X)$

Örnek: Bernoulli rassal değişkeninin beklenen değerini ve variyansını bulunuz.

Örnek: Tekdüze rassal değişkeninin beklenen değerini ve variyansını bulunuz.

Örnek: Poisson rassal değikeninin beklenen değerini ve variyansını bulunuz.

Çoklu Rassal Değişkenler ve PMF

Daha önceki bölümlerde örneklem uzayında tanımlanmış tek rassal değişken incelendi. Örneklem uzayı üzerinde birden fazla rassal değişken tanımlanırsa bu rassal değişkenlerin ortak PMF'si tanımlanabilir.

X ve Y aynı örneklem uzayı üzerinde tanımlanmış rassal değişkenler olsun. $P_{XY}(x, y) = P_{XY}(X = x, Y = y)$ şeklinde tanımlanır. Farklı notasyonlarla ifade edersek

Örnek: İki ayrı radardan 1 ve 0 sinyalleri geliyor olsun. *1: Uçak var, 0: Uçak yok* anlamında ise aşağıdaki olayların olasılıklarını yazınız.

G: İki radar aynı sinyali veriyor

S: Radar sinyalleri farklı

Ortak PMF fonksiyonundan radarların PMF'lerini bulmak mümkündür.

. **Örnek** X ve Y rassal değişkenlerinin ortak PMF si aşağıdaki gibi ise $P(X < Y) =?$

	$X = 1$	2	3
Y=1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$
3	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Marjinal PMF: Bir X rassal değişkeninin PMF sini ortak PMF'den bulabilmek için $X = x$ sabit tutularak diğer rassal değişkenlerin alabiliceği tüm değerler için olasılıkların toplanması gerekir. Yani

$P_X(x) =$

Önceki örnekteki X ve Y rassal değişkenlerinin marjinal PMF lerini bulursak;

Örnek: X ve Y nin ortak PMF si

$$P_{XY}(x,y) = \begin{cases} c & 1 < x + y \leq 3 \\ 0 & d.y \end{cases}$$

X ve Y pozitif tamsayı değerleri alıyorsa

1. $c =?$

2. Marjinal PMF'leri bulunuz.

3.1 Çoklu Rassal Değişkenlerin Fonksiyonu

Çoklu rassal değişkenler üzerinde tanımlanan fonksiyonda rassal değişkendir. $Z = g(X, Y)$ fonksiyonu iki boyutlu XY örneklem uzayından Z örneklem uzayına tanımlanmış bir fonksiyondur. Yeni örneklem uzayındaki olasılık yasası bulmak için $z = g(x, y)$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) ikililerinin olasılıklarını toplayarak $P_Z(z)$ olasılığını bulmamız gerekir.

$$P_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|z=g(x,y)\}} P_{XY}(x, y)$$

Çoklu Rassal Değişkenlerin Beklenen Değeri:

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) P_{XY}(x, y)$$

Anlaşılacağı üzere iki adet rassal değişken söz konusu olduğundan iki adet toplama yapılıyor.

* Eğer $g(X, Y)$ birinci dereceden bir fonksiyon ise yani $g(X, Y) = aX + bY + c$ ise $E[g(X, Y)] =$

İspat:

Örnek: Binom rassal değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Örnek: n adet şapkalı kişinin şapkaları toplanıyor ve bir kutuda karıştırılıyor. Kişiler rasgele şeçilerek bir şapka veriliyor. İşlem sonunda kendi şapkasını alan kişiler sayılıyor. Bu sayının beklenen değeri nedir?

Örnek: Bir laser iletişiminde "1" ve "0" lar iletiliyor. Bir sensörün $1\nu s$ de tespit ettiği foton sayısı Poisson dağılımına uyuyorsa ($\lambda = 100$) 5 sensörlü bir haberleşme sisteminde tespit edilen toplam foton sayının beklenen değeri kaçtır?

Şartlı Kütle Olasılık Fonksiyonu: X rassal değişkeni ve A olayı aynı örneklem uzayında tanımlanmış ise, A olayının gerçekleştiği biliniyorsa A şartı altında X in kütle olasılık fonksiyonu (PMF)

$$P_{X\backslash A}(X = x\backslash A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

Örnek: 4 yüzlü bir zar atılıyor. A olayı zarın 1 den büyük olması şeklinde tanımlı ise, A şartı altında PMF yi bulunuz.

Örnek: Bir kişinin ehliyet alabilmek için n kere sınava girme hakkı olsun. Kişinin herhangi bir sınavdan geçme ihtimali bağımsız ve p olsun. Bu kişinin ehliyet aldığını biliniyor ise PMF yi bulunuz.

3.2 Şartlı Beklenen Değer

X ve Y aynı olasılık uzayında tanımlı olan rassal değişkenler olsun. $P(A) > 0$ olmak üzere A olayı da ayını olasılık uzayında tanımlı olsun. A olayının gerçekleştiği biliniyor ise X in şartlı beklenen değeri

$E[X\backslash A] =$

Burada bazı x değerlerinin yeni örneklem uzayında olmadığı bilinmesine rağmen, beklenen değer tüm x ler için alınmaktadır. Yeni örneklem uzayının elemanı olmayan x değerlerinin olasılığı sıfır olacağından, tüm x lerin alınması sorun teşkil etmez.

Örnek: 4 yüzlü para atılıyor. $P_X(x)$ ve $E[X]$ i bulunuz.

a) Gelen zarın 1 den büyük olduğu biliniyorsa $P_{X\backslash A}(X\backslash A)$ ve $E[X\backslash A]$ yı bulunuz.

Örnek: Bir haberleşme hattında düşük oranlı bilgi akışı 0.7 ihtimal ile olurken, yüksek oranlı bilgi akışı 0.3 ihtimal ile oluyor. Düşük oranlı bilginin beklenen değeri 10Kbps, yüksek oranlı bilgi akışının beklenen değeri 200Kpbs ise bilgi akışının oranı nedir?

Örnek: $P_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{27} & x \in \{4,5,6\}, y \in \{4,5,6\} \\ \frac{2}{27} & x \in \{1,2,3\}, y \in \{1,2,3\} \end{cases}$

$E[X] =?$

Örnek: Yüksüz bir zar 3 kere atılıyor.

X: Kaç kere 6 geldiği

Y: Kaç kere 1 geldiği şeklinde tanımlanmış olaylar olsun.
$P_{XY} =?$,$E[X \backslash Y] =?$ ve $E[X] =?$

E[X] 'in Iteratif Hesaplanması

$$E[X] = \sum_y E[X \backslash Y = y] P_Y(y) = E[E[X \backslash Y]]$$

ifadesi ile $E[X]$ iteratif bir şekilde hesaplanabilir.

Örnek: X ve Y rassal değişkenlerinin ortak PMF si $\{(-1,2),(1,2),(1,1),(2,1),(-1,-1),(1,-11)\}$ noktaları için $P_{XY}(x,y) = \{\frac{3}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$ ise $E[X]$ i iteratif hesaplayınız.

***Bir rassal değişkenin bir olaydan bağımsızlığı** X rassal değişkeni A olayından bağımsız ise

$P(\{X = x\} \cap A) =$
*** Eğer X ve Y bağımsız rassal değişkenler ise** $E[XY] =$

***** Eğer X ve Y bağımsız rassal değişkenler ise $g(X)$ ve $h(Y)$ fonksiyonlarıda bağımsızdır.

* Eğer X ve Y bağımsız rassal değişkenler ise $var(X+Y) =$

Örnek: Ankara'da Nisan ayında yağmur yağma ihtimali p olsun. Nisan ayında yağmurlu gün sayısının variyansını bulunuz.

4 Sürekli Rassal Değişken

Örneklem uzayı sayılamayan küme olması durumunda tanımlanan rassal değişkene sürekli rassal değişken denir.
Olasılık yoğunluk Fonksiyonu X rassal değişkeninin sürekli olması durumunda X üzerinde tanımlanmış olan B olayının olasılığı

$$P(B) = \int_{x \in B} f_X(x)dx$$

şeklinde tanımlıdır. $f_X(x)$ fonksiyonuna X rassal değişkeninin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (pdf) denir. $f_X(x_0)$ noktası herhangi bir olayın olasılığını vermez. Ancak x_0 noktasındaki yoğunluğunu verir.

X üzerindeki $[a, b]$ aralığının olasılığı

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

şeklindedir. $a = b = x_0$ alınırsa

$$P(X = x_0) = \int_{x_0^-}^{x_0^+} f_X(x)dx = 0$$

bulunur. **pdf nin Özellikleri**

1. $f_X(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

3. Yeterince küçük δ değeri için $P(x \leq X \leq x + \delta) =$

Örnek: $f_X(x)$ 1 den büyük değer alabilir.

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & d.y. \end{cases}$$

1. c değerini bulunuz.

2. $P(|X|^2 \leq 5) =?$

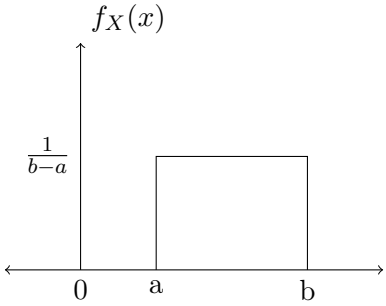
Çözüm:

Örnek: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{|x|}} & |X| \leq 2 \\ 0 & d.y. \end{cases}$

$f_X(x)$'in grafiğini çiziniz.

Bazı Sürekli Rassal Değişkenler Sürekli Tekdüze Rassal Değişken

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < X < b \\ 0 & d.y. \end{cases}$$



Gaussian Rassal Değişken

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Eponansiyel Rassal Değişken

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Beklenen Değer X rassal değişkeninin beklenen değeri

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

şeklinde tanımlıdır.

* $E[g(X)] =$

olacaktır.

$$var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$$

* $var(aX + b) =$

Örnek: Tekdüze rassal değişkenin ve Exponansiyel rassal değişkeninin beklenen değerini ve variyansını bulunuz.

4.1 Olasılık Dağılım Fonksiyonu (CDF)

X sürekli rassal değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu (CDF)

$F_X(x) = P(X \leq x)$
şeklinde tanımlıdır. CDF ayrık ve sürekli rassal değişkenleri için aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$F_X(x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} P_X(k) & \textit{ayrik} \\ \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(\tau) d\tau & \textit{surekli} \end{cases}$$

Olasılık Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $F_X(\infty) = 1$
3. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$
4. $F_X(x)$ fonksiyonu monoton azalmayan fonksiyondur ve $x \leq y$ ise $F_X(x) \leq F_Y(y)$ dir.
5. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
6. $F_X(x)$ sağdan süreklidir. Yani $\delta > 0$ için
   $\lim_{\delta \to 0} F_X(x + \delta) = F_X(x^+) = F_X(x)$
7. $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

Örnek: $X \sim exp(\lambda)$ rassal değişkeninin CDF sini bulunuz.

Örnek: $x \sim U[a, b]$ rassal değişkeninin CDF sini bulunuz.

Örnek: Geometrik rassal değişkeninin CDF ini bulalım. $X \sim Geo(p)$

Örnek: Geometrik rassal değişkenin exponansiyel rassal değişkene yakınsaması

Gaussian Olasılık Dağılım Fonksiyonu

Örnek: Elmadağda kar kalınlığı $Gauss(150, 50)$ dağılımı gösteriyorsa en az 200 cm kadar kar kalınlığı olma ihtimali nedir? ($\Phi(1) = 0.8413$)

Gaussian pdf fonksiyonu beklenen değere göre simetriktir.

Örnek: Bir haberleşme kanalında +1 ve -1 sinyalleri taşınıyor. Ancak istatistiksel özelliği $N(0, \sigma^2)$ olan gürültü ile sinyal bozulmaktadır. Alıcı kısmı negatif sinyallere -1, pozitifleride +1 olarak okuyor. Alıcının yanlış sinyal alma ihtimali nedir?

4.2 Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X sürekli rassal değişkenin A olayına bağlı pdf si

$f_{X\backslash A}(x) =$

Yeni $\Omega = A$ olduğundan $\int_A f_{X\backslash A}(x)dx = 1$ olur. Bu durumda A şartı altında B olayının olasılığı

$P(X \in B\backslash X \in A) = \int_B f_X(x)dx$ olur.

Örnek: $X \sim exp(\lambda)$ olsun. X bir lambanın ömrünü gösteriyor ve $X > t$ olduğu biliniyorsa $P(X > x + t)$ olasılığını bulalım.

$e^{-\lambda x}$ çıktı. Eğer en başta $P(X > x)$ i hesaplasaydık yine $P(X > x) = e^{-\lambda x}$ bulurduk. $P(X > t)$ olayının gerçekleşmiş olması sonucu değiştirmedi. Yani exponansiyel rassal değişken hafızasızdır.

4.3 Koşullu Beklenen Değer

$$E[X\backslash A] = \int_{X\in A} x f_{X\backslash A}(x\backslash A)dx$$

$$E[X\backslash A] = \int_{X\in A} g(x) f_{X\backslash A}(x\backslash A)dx$$

Örnek: $V \sim U(4.8, 5.2)$ olduğuna göre, V_s güç kaynağının ürettiği gücün beklenen değerini bulunuz. $I = aV$ olsun.

* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ örneklem uzayının bir bölüntüsü olsun. $P(\{X = A_i\}) > 0$ ise, toplam olasılık teoremine göre

$f_X(x) =$

şeklinde bulunabilir.

Örnek: Bir metroda saat 6:00 dan başlayarak her 15 dakikada bir gelmektedir. Bir kişinin istasyona varma zamanı 7:10-7:30 aralığında tekdüze dağılım gösteren rassal değişken ise, kişinin tren bekleme süresinin beklenen değerini ve variyansını bulunuz.

4.4 Sürekli Çoklu Rassal Değişkenler

Aynı örneklem uzayında tanımlı olan X ve Y rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{XY}(x, y)$ şeklinde tanımlıdır. B olayının olasılığı

$$P((X, Y) \in B) =$$

şeklindedir.

Marjinal pdf leri bulmak istersek yani $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ yi bulmak istersek.

$f_X(x) =$

$f_Y(y) =$

Örnek: Aşağıda X ve Y nin ortak pdf si çizilmiştir. $Z = X+2Y$ nin beklenen değerini bulunuz.

Örnek: X ve Y r yarıçaplı dairesel bir bölgede tekdüze ise, X ve Y in marjinal pdf lerini bulunuz. XY çarpımının beklenen değerini bulunuz.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & d.y \end{cases}$$

4.5 Bir Rassal Değişken Şartı altında Şartlı Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Ortak pdf leri $f_{XY}(x,y)$ olan X ve Y rassal değikenlerinin $Y = y$ şartı altındaki pdf si

$f_{X\backslash Y} =$

$f_{X\backslash Y} =$

olur.

Örnek: Bir önceki soruda $Y = y_0$ alınırsa $f_{XY}(x\backslash y_0)$ şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu ne olur?

Örnek: 40 cm lik bir sopa kırılıyor ve uzunluğu x oluyor. Daha sonra sopa tekrar kırılarak uzunluğu D ye düşüyor. $D \sim U(0, x)$ ise ve $X \sim U(0, 40)$ dağılımına sahip ise $f_D(d)$ yi bulunuz.

Sürekli Rassal Değişkenlerin Beklenen Değeri

Örnek: $U \sim U(0, 100)$ dağılımına sahip olsun. $B = \{U > 60\}$ şeklinde tanımlanan B olayı şartı altında $E[U]$ ve $E[U \backslash B]$ yi hesaplayınız.

Toplam Beklenen Değer

$E[X] =$

Genel olarak A_i olayları örneklem uzayının bölüntüsü ise

$E[X] =$

Bu durumda aynı formül kallanılarak

$E[g(X)] =$

ile de hesaplanabilir.

Örnek: Bir para 5 kere atılıyor. Atılan paranın tura gelme ihtimali P sürekli bir rassal değişkendir ve $P \sim U(0.4, 0.7)$ dağılımına sahiptir. 5 atımda gelen tura değerlerinin beklenen değerini bulunuz.

4.6 Bağımsız Sürekli Rassal Değişkenler

X ve Y rassal değişkeleri $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ şartını örneklem uzayının tüm A ve B olayları için sağlıyorsa ve X ve Y rassal değişkenleri bağımsızdır. Bu durumda $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ olur. Bu durumda $P(X \in A, Y \in B)$ olayının ihtimali hesaplarsak

Örnek:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c & 0 < x \leq 1 \quad 0 < y \leq x \\ 0 & d.y \end{cases}$$

Örnek: Aşağıda verilen ilişkilerin bağımsız X, Y rassal değişkenleri için doğru olduğunu gösteriniz.

$f_{x\backslash Y}(x\backslash y) =$

$f_{Y\backslash X}(x\backslash y) =$

Örnek: Bağımsız X ve Y rassal değişkenleri için tanımlı olan $g(x), h(y)$ fonksiyonları dikkate alalım. $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$ olduğunu gösterelim.

Örnek: X ve Y eğer bağımsız ise $var(X+Y) = var(X) + var(Y)$ dir.

4.7 Sürekli Olasılık Modelinde Bayes Kuralı ve Anlam Çıkarma

Örnek: Bir lambanın çalışma süresi $Y \sim exp(\lambda)$ dağılımına sahip olsun. Eğer bu ifade deki $\lambda \sim U(0.25, 1)$ dağılımına sahip ise ve bir lambanın 4 gün yandığı biliniyorsa bu yeni bilgiyi kullanılarak λ dağılımın tekrardan bulunuz.

Gaussian gürültü altında zıt işaret iletimi

Farz edelim ki $+1$ ve -1 sinyallerinin iletim ihtimali p ve $1-p$ olsun. Alıcı tarafında y sinyali okunmuş ise $+1$ gönderilme ardıl ihtimali nedir?

5 Türetilmiş Dağılımlar

$Y = g(X)$ olsun $f_X(x)$ dağılımı biliniyorsa $f_Y(y)$ dağılımını bulmak için:

1. Önce $F_Y(y) =$

   Y nin toplam olasılık dağılımını buluruz.

2. $f_Y(y) =$ ile Y nin pdf si bulunur.

Örnek:$Y = \frac{180}{X}$ olsun. Eğer $X \sim U(30, 60)$ olduğuna göre $f_Y(y) =?$

Örnek: X rassal değişkeninin pdf si $f_X(x)$ olsun. $Y = X^2$ in pdf sini bulalım.

Örnek: $Y = aX + b$ olduğuna göre $f_Y(y)$ yi $f_X(x)$ e bağlı bulalım.

5.1 İki Rassal Değişken var ise

$Z = g(X, Y)$ olsun. Z nin pdf sini daha önceki prosedürü takip ederek $f_{XY}(x, y)$ den bulabiliriz.

Örnek:$Z = XY$ ve X ve Y birbirinden bağımsız ve $[0, 1]$ aralığında tekdüze dağılıma sahip olsun. $f_Z(z)$ yi bulalım.

Eğer $Y = g(X)$ **dönüşümünde g(X)** monoton değilse

Örnek: $Z = X + Y$ olsun. Eğer X ve Y bağımsız ayrık rassal değişken ise Z nin PMF sini bulalım.

Örnek: Aynı soruyu X ve Y bağımsız ve sürekli olduğu durum için tekrar edelim.

Örnek: $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ olsun. $Z = X_1 + X_2$ ise $f_Z(z) =?$

$Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ve $X_i \sim U(0,1)$ olsun.

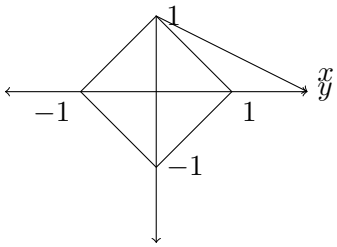
Kovariance ve Korelasyon X ve Y rassal değişkenlerinin kovariyansı

$cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

şeklinde tanımlıdır ve iki rassal değişken arasındaki ilişkinin ölçüsüdür.

$cov(X, Y) = 0$ çıkması durumunda X ve Y arasında ilişki olmadığını gösterir.

Örnek: $cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ olduğunu gösterelim.



Örnek: X ve Y şekildeki alanda tekdüze dağılıma sahip ise cov(X,Y) yi hesaplayınız.

Korelasyon Katsayısı

$var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X+Y)$ olduğunu gösterelim.

Örnek: $X_i \sim Ber(p)$ rassal değişkenleri olsun.

1. $cov(X_i, X_j)$ i bulunuz.

2. Her $X_i = 1$ durumunda yazı tura atılıyor ve tura gelince $Y_i = 1$ oluyor. $cov(Y_i, Y_j) =?$ ve $cov(X_i, Y_i) =?$

Moment X rassal değişkeninin n. momenti $E[X^n]$ şeklinde tanımlıdır.

Transform: Transform yada moment üreten fonksiyon

$M_X(s) = E[e^{sX}]$ şeklinde tanımlıdır.

Ayrık olasılık modelinde $M_X(s)$

Sürekli olasılık modelinde $M_X(s)$

Örnek: Poisson rassal değikeninin moment üreten fonksiyonunu bulalım.

Örnek: $X \sim exp(\lambda)$ rassal değikeninin moment üreten fonksiyonunu bulalım.

Örnek: X rassal değikeninin moment üreten fonksiyonu $M_X(s)$ olsun. $Y = aX + b$ ise $M_Y(s) =$?

Örnek:$X \sim Gaus(\mu, \sigma^2)$ ise $M_X(s)$ i bulalım.

Örnek: $X \sim Gaus(\mu, \sigma^2)$ iken $Y = aX + b$ nin de Gaussian dağılımına sahip olduğunu gösterelim.

$E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M_X(s)|_{s=0}$ olduğunu gösterelim.

Örnek: X_i rassal değişkenleri birbirinden bağımsız rassal değişkenler olsun.

$$Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

Örnek: $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ ve $X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ iken $Y = X_1 + X_2$ ise $M_Y(s) =?$

6 Limit Teoremi

Markov ve Chebychev Eşitsizliği

Markov Eşitsizliği Eğer X rassal değişkeni sadece pozitif değerler alıyorsa

$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$ dır.

Chebyshev Eşitsizliği $Y = (X - E[X])^2$ olarak tanımlarsak Y nin değerleri negatif değildir. Y rassal değişkenine Markov eşitsizliğini uygularsak Chebyshev eşitsizliğini buluruz.

Örnek: $X \sim Gauss(\mu, \sigma^2)$ olsun. X in değerinin 2σ aralığında olma ihtimalini Chebyshev eşitsizliği ile bulalım.

7 Rassal Süreçler

Ayrık Rassal Süreç: X_i rassal değişkenlerinin dizidir.

7.1 Bernoulli Rassal Süreci

Birbirinden bağımsız olan $Ber(p)$ rassal değişkenlerinin dizisine Bernoulli rassal süreci denir.

$$0100111001\ldots$$

Bernoulli rassal süreci için aşağıdaki rassal değişkenleri tanımlarsak;

1. S : rassal süreçteki 1 lerin toplamı
2. T : ilk 1'in varış zamanı. İlk 1'in kaçıncı denemede çıktığı

Örnek: Ayşe ve Burak bilgisayar oyunu oynuyorlar Ayşe'nin kazanma ihtimali p Burak'ın kazanma ihtimali 1-p olsun.Burak'ın kazandığı iki oyun arasında Ayşe'nin sürekli kazanması durumunun PMF sini bulalım.

Örnek: Bir önceki soruda Y_k k. oyunu Ayşe'nin kazandığı toplam oyun sayısı olsun. Y_k'nın PMF, $E[Y_k]$ ve $var(Y_k)$ değerlerini bulunuz.

Bernoulli Süreçlerini Parçalamak ve Birleştirmek

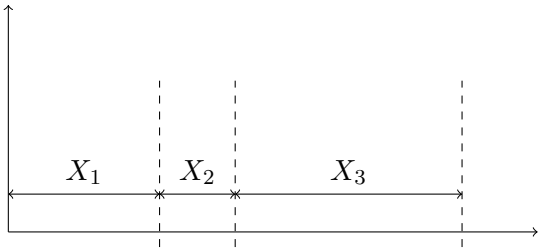
Örnek: $Ber(p)$ sürecini r ihtimal ile iki ayrı alt sürece parçalarsak sonuçta çıkan iki sürecind hala Bernoulli olacağını ve ihtimallerinin rp ve $(1-r)p$ olacağını gösterin.

Örnek: Eğer iki bağımsız Bernoulli sürecini birleştirirsek elde edilen sürecin $Ber(p_1+p_2-p_1p_2)$ olacağını gösterin.

7.2 Poisson Rassal Süreci

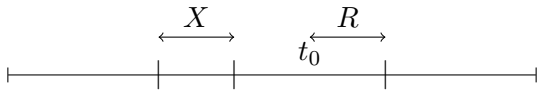
Otobüslerin geliş süresi, bir sırada bekleyen müşteri sayısı ve bekleme süresi, foton salınımı, e-postaların gelişi gibi olaylar Poisson süreçleri ile ifade edilir. Poisson'da iki olay arasında geçen süreler birbirinden bağımsızdır ve exponansiyel dağılıma sahiptirler.

$$X_i \sim exp(\lambda)$$



Örnek: Ortalama olarak 10 dakikada bir otobüsün geldiği bir durakta beklerken 3. otobüsün gelme süresinin beklenen değeri nedir? Otobüsler arasında geçen süre $exp(\lambda)$ dağılımına sahiptir.

Artık Süre Dağılımı: Herhangi bir $t > 0$ anı için bir sonraki olayın olması için geçen süre R rassal değişkeni olsun.. Bu r süresine artık süre denir ve t iki ardışık olay arasında kalan süreyi temsil eder.Exponansiyel dağılımın hafızasızlık özelliği dolayısı ile artık süre de exponansiyeldir.



Örnek: Bir önceki soruda $\lambda = \frac{1}{10} \quad otobus/dk$ dağılımına sahip bir otobüs durağına $t = 19dk$ gittiğimizde bir önceki otobüsün 2dk önce kalktığını biliyorsak 3. otobüs için bekleme süresinin beklenen değeri ne kadardır?

Poisson Sürecinin Eşdeğer Tanımı: Aşağıdaki şartları sağlayan süreçlerde Poisson süreci olarak adlandırılır.

1. τ zaman aralığında k olayın olmasının ihtimali $P(k, \tau)$

$$P(k, \tau) = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}$$

   Dikkat edilirse bu ihtimal $\lambda\tau$ ortalamaya sahip Poisson dağılımının ihtimalidir. $\lambda' = \lambda\tau$ alınırsa.

2. İki farklı zaman aralığındaki olay sayısı birbirinden bağımsız olmalı

Örnek: Eğer e-posta alışımız $\lambda = 0.1 \quad e - posta\backslash dk$ olmak üzere $Poisson(\lambda)$ dağılımına uyuyorsa;

1. Her saat başı e-posta kontrol ediyorsak aldığımız e-posta sayının beklenen değeri nedir?

2. Sıfır mesaj alma ihtimalimiz nedir?

3. 1 mesaj alma ihtimalimiz nedir?

4. 2 saatte bir kontrol edersek nasıl olur?

Örnek: Bir Poisson(λ) sürecini p ihtimal ile A sürecine $(1-p)$ ihtimal ile B sürecine yollarsak sonuçta

$A \sim Poisson(p\lambda)$

$B \sim Poisson((1-p)\lambda)$ süreçlerinin elde edileceğini gösterelim.