



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ**

İnşaat Mühendisliği Bölümü Öğrencileri İçin

DİNAMİK DERS NOTLARI

Hazırlayanlar :

Doç. Dr. Zireddin MEMMEDOV

Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜMÜŞÇÜ

**ŞANLIURFA
2004**

ÖNSÖZ

İnşaat Mühendisliği lisans öğretimi çerçevesinde hazırlanmış bu ders notlarında, üniversitelerin inşaat mühendisliği bölümlerinde işlenen dinamik dersi müfredat programına uyulmuştur.

Dinamik dersi inşaat öğrencileri için ileri sınıflarda okutulan Yapı Dinamiği ve Yapıların Deprem Hesabı derslerine hazırlık amacı ile verilmektedir.

Ders notlarında; her bölümde, işlenmiş konuların sonunda yeterli sayıda karakteristik problemlerin açıklamalı çözümü verilmiştir.

Ders notları yedi bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerde “Bir Parçacığın Kinematiği”, “Bir Parçacığın Dinamiği”, “Rijit Cismin Kinematiği”, “Ötelemede Rijit Cismin Dinamiği”, “Rijit Cismin Düzlemsel Hareketinin Dinamiği” konuları, diğer bölümlerinde ise “İş ve Enerji”, “Mekanik Titreşimler”, “Virtüel İş” ve “Kütlesel Atalet Momentleri” konuları verilmiştir.

Ders notlarının hazırlanmasında, özellikle problemlerin seçilmesinde çeşitli ders kitaplarından yararlanılmıştır.

Elden geldiğince açık bir anlatımla yazılmaya çalışılan ders notlarının öğrencilerimize yararlı olmasını diliyoruz.

Ders notlarının bilgisayarda yazımında, şekil çiziminde ve düzenlenmesinde gösterdiği ilgi ve katkıları için bölümümüzün Öğretim Görevlisi Mahir Kaya’ya ve Araştırma Görevlisi Nilay Kaya’ya teşekkürlerimizi bildiririz.

Yardımcı ders kitabı olarak, öğrencilerin yararına sunulan bu kitapta bütün gayretlerine rağmen gözden kaçması mümkün hatalar ve hususlarla ilgili uyarı ve eleştirilerde bulunacak okuyuculara şimdiden teşekkürlerimizi sunarız.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
1. Rijit cisimler dinamiği	3
Giriş	3
1.1 Rijit cisim kinematiği	3
2. Bir parçacığın kinematiği	8
2. Örnekler	13
2. Problemler	20
3. Bir parçacığın dinamiği	22
4. Ötelemede rijit cismin dinamiği	25
5. Rijit cismin düzlemsel hareketinin dinamiği	26
6. Dönmede rijit cismin dinamiği	28
6. Örnekler	31
6. Problemler	37
7. İş ve enerji	38
7. Örnekler	40
7. Problemler	43
8. İmpuls ve momentum	44
8. Örnekler	48
9. Mekanik titreşimler	53
10. Serbest (lineer) titreşimler	54
11. Zorlanmış titreşimler (sönümsüz)	58
11. Örnekler	61
11. Problemler	64
12. Virtüel iş	65
13. Kütleli atalet momentleri	68
Kaynaklar	75

1. RİJİT CİSİMLER DİNAMİĞİ

GİRİŞ

Bildiğimiz gibi rijit cisimler mekaniği statik ve dinamik diye ikiye ayrılır. Statik dengedeki, dinamik hareketteki cisimlerle uğraşır.

Dinamik de **KİNEMATİK** ve **KİNETİK** diye ikiye ayrılır:

1. Kinematik- kuvvetlerin hareket üzerindeki tesirini düşünmeden, hareketin geometrisi incelenir;
2. Kinetik- hareketi sağlayan kuvvet verildiğinde ortaya çıkan hareket incelenir.

Mekanğin bu dalında da cisimlerin tam rijit oldukları kabul ediliyor. Gerçek inşaat sistemleri hiçbir vakit salt (mutlak) rijit değildir ve kendilerine etkiyen yükler altında şekillerini değiştirirler. Fakat genel olarak bu şekil değiştirmeler küçüktür ve göz önüne alınan sistemin hareket durumuna önemli bir etkide bulunmaz .

Ancak sistemin göçme mukavemeti söz konusu olunca şekil değiştirmeler önem kazanır ve şekil değiştiren cisimler mekaniğinin bir alt dalı olan mukavemette bunlar incelenir.

1.1. Rijit Cisim Kinematığı

Rijit bir cisim içindeki bir noktanın yer değiştirmesi, hızı veya ivmesi yeryüzündeki sabit bir noktaya göre yer değiştirmesi, hızı veya ivmesidir. Yeryüzünün sabit olmadığı bilinmesine rağmen, birçok mühendislik problemlerinde yeryüzünü sabit kabul etmek kafi (yeter) derecede doğrudur.

Rijit bir cisim içindeki bir noktanın mutlak yer değiştirmesi, hızı veya ivmesi, dünyaya nazaran hareket eden bir noktaya göre yer değiştirmesi, hızı veya ivmesidir. A noktasının S_A mutlak yer değiştirmesi, A'nın B'ye göre relatif yer değiştirmesi olan $S_{A/B}$ ile B noktasının S_B mutlak yer değiştirmesinin vektörel toplamıdır. Matematiksel olarak ifade edilirse

$$\vec{S}_A = \vec{S}_{A/B} + \vec{S}_B \quad (1.1)$$

olur.

A noktasının V_A mutlak hızı; A'nın B'ye göre relatif hızı olan $V_{A/B}$ ile B noktasının V_B mutlak hızının vektörel toplamıdır. Bu matematik olarak ifade edilirse

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A/B} + \vec{V}_B \quad (1.2)$$

olur.

A noktasının $\mathbf{a}_A$ mutlak ivmesi; **A** noktasının **B**'ye göre relatif ivmesi olan $\mathbf{a}_{A/B}$ ile **B** noktasının $\mathbf{a}_B$ mutlak ivmesinin vektörel toplamıdır. Matematiksel olarak ifade edilirse

$$\vec{\mathbf{a}}_A = \vec{\mathbf{a}}_{A/B} + \vec{\mathbf{a}}_B \quad (1.3)$$

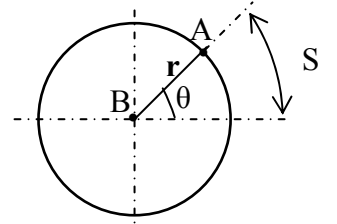
olur.

Rijit bir cismin basit hareket tipleri şu şekilde gruplara ayrılabilir:

- 1) **Ötelenme:** Cisim içindeki her doğru parçası daima başlangıç doğrultularına paralel kalıyorsa bu harekete ötelenme denir. Ötelenmede cismin bütün noktalarının yer değiştirmesi, hızı ve ivmesi aynı şekilde değişir.
- 2) **Dönme:** Cisim içindeki bir doğru üzerinde noktalar hariç olmak üzere diğer bütün noktalar, merkezleri bir doğru (dönme eksenini) üzerinde olan dairesel yörüngelerde hareket ederler. Dönmede cismin bütün noktalarının dönme eksenini etrafındaki açısal yer değiştirmesi hızı ve ivmesi aynıdır.
- 3) **Düzlem hareket:** Cismin bütün noktaları sabit bir düzlemde sabit uzaklıkta kalırlar. Düzlem harekette genel olarak dünyaya göre lineer hızı ve ivmesi bilinen bir **B** baz noktası seçilir. Rijit cismin diğer bir **A** noktasının mutlak hareketi yukarıda listesi verilen denklemlerle **A** noktasının baz **B** noktasına göre relatif hareketi ile **B** noktasının mutlak hareketi birleştirilerek bulunur.

A noktasının **B** noktasına göre relatif hareketi bir dönmedir. Bundan dolayı rijit bir cismin herhangi bir andaki düzlem hareketi dönme ve ötelenme hareketlerinin birleştirilmesi olarak göz önüne alınabilir. Yukarıda verilen mutlak büyüklükler ve relatif büyüklüklere ait eşitlikler

$$S_{A/B} = r\theta ; \quad V_{A/B} = r\omega ; \quad \mathbf{a}_{A/B} = r(\omega^2 + \alpha) \quad (1.4)$$



olur.

Şekil 1.1

Burada $\mathbf{BA} = \mathbf{r}$; θ : $\mathbf{BA}$ 'nın düzlem hareketteki açısal yer değiştirmesi ve α : $\mathbf{BA}$ 'nın açısal ivmesidir.

Ani dönme eksenini: Düzlem harekette cismin içinde veya dışında olabilen hızsız bir eksenidir. Hareket düzlemine diktir. Rijit cismin bütün diğer noktaları o anda dönme eksenini

etrafında dönerler. Bu hızsız çizginin konumunun genellikle sürekli olarak değiştiğini iyice kavramak önemlidir.

CORİOLİS KANUNU: Bu kanun dönen bir cismin içindeki bir yörünge boyunca hareket eden bir parçacığa tatbik edilir. Toplam ivme

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P/Y} + \mathbf{a}_M + 2\mathbf{v}_{P/Y} \cdot \boldsymbol{\omega}_Y \quad (1.5) \text{ dir.}$$

Burada

$\mathbf{a}_{P/Y}$: $\mathbf{P}$ noktasının sabit olarak kabul edilen yörüngeye göre relatif ivmesi. (yörüngeyi teğet ve normal bileşenleri kullanılıyor);

$\mathbf{a}_M$: herhangi bir anda $\mathbf{P}$ noktası ile çakışan yörünge üzerindeki $\mathbf{M}$ noktasının ivmesi (nokta dönen yörünge üzerinde bulunduğundan yörüngeyi dönme merkezini $\mathbf{M}$ noktasına birleştiren yarıçap vektörü ve buna dik doğrultuda ivmenin bileşenleri kullanılır);

$\mathbf{v}_{P/Y}$: $\mathbf{P}$ noktasının herhangi bir anda $\mathbf{P}$ noktası ile çakışan yörünge üzerindeki $\mathbf{M}$ noktasına göre relatif hızı. (Bu hızsadece cisim içindeki yörüngede hareket eden parçacığın yörüngesine teğet olarak çizilmeli);

$\boldsymbol{\omega}_Y$: yörüngeyi dönme merkezine göre açısal hızı. Ekseriyetle bu merkez yörüngeyi eğrilik merkezi değildir.

$2\mathbf{v}_{P/Y} \cdot \boldsymbol{\omega}_Y$ — doğrultusu $\mathbf{v}_{P/Y}$ yi $\boldsymbol{\omega}_Y$ ile aynı doğrultuda bir dik açı kadar döndürerek bulunan

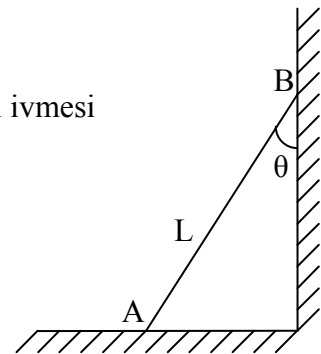
CORİOLİS bileşenidir.

Örnek 1.1: L uzunluklu bir çubuk $\mathbf{A}$ noktasının hızı sabit şiddete ve sola yönlü olacak şekilde hareket etmektedir. Hareketi inceleyelim (Şekil 1.1).

Çubuk düşeyle θ açısı yaptığı anda ω açısal hızı ve α açısal ivmesi oluşturuyor.

$\mathbf{A}$ noktasının $\mathbf{v}_A$ mutlak hızı $\mathbf{A}$ 'nın $\mathbf{B}$ 'ye göre relatif hızı cinsinden ifade edilecektir:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A/B} + \vec{v}_B \quad (I)$$

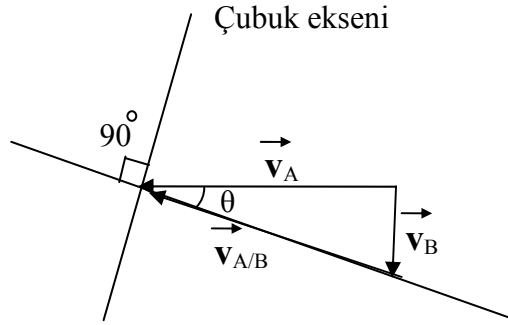


Şekil 1.1

$\vec{v}_A$: vektörü yatay doğrultuda olup; şiddeti $\mathbf{v}_A$ ya eşittir.

$\vec{v}_B$: düşey doğrultuda olup, şiddeti bilinmiyor.

$\vec{v}_{A/B}$: dik doğrultuda olup, şiddeti bilinmiyor.



Sekil 1.1a

Bilinmeyen iki şiddettir. Tamamıyla bilinen v_A ile başlayan bir vektör üçgeni çizilir. v_A nın bir ucundan çubuğa dik bir doğru çizerek, diğer ucundan da Şekil 1.2a'da gösterildiği gibi kapayacak dik doğru çizeriz. Gösterildiği gibi düşey kol v_B , çubuğa dik kolda $v_{A/B}$ dir.

Dik üçgende;

$$v_{A/B} = v_A / \cos \theta \quad \text{olur}$$

Fakat $v_{A/B} = L \cdot \omega$

Buradan;

$$\omega = v_{A/B} / L = v_A / L \cdot \cos \theta$$

$$\omega = v_A / L \cdot \cos \theta$$

$v_{A/B}$ sol yukarı doğru yönelmiş olduğundan A etrafında saat ibreleri yönünde dönmelidir.

Bundan dolayı da ω saat ibreleri yönündedir.

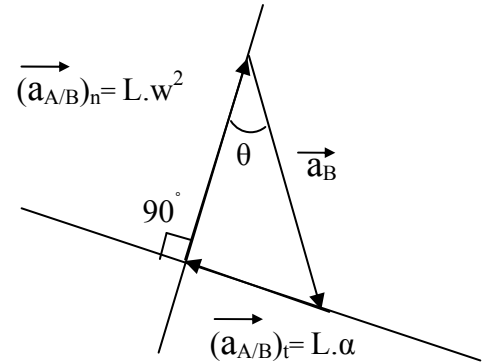
Şimdi α açısal ivmesini tayin edelim:

B'nin A'ya göre teğetsel bileşeni $L \cdot \alpha$ dır. Denklem:

$$\vec{a}_A = (\vec{a}_{A/B})_t + (\vec{a}_{A/B})_n + \vec{a}_B \quad (II) \quad \text{olur.}$$

$\vec{a}_A$ vektörünün şiddeti sıfıra eşittir (çünkü $v_A = \text{sabit}$)

$(\vec{a}_{A/B})_t$ çubuğa dik doğrultuda olup şiddeti $L \cdot \alpha$ ya eşittir.



Şekil 1.1b

$(\vec{a}_{A/B})_n$ çubuk boyunca olup şiddeti, $L.\omega^2$ eşittir.

$\vec{a}_B$ düşey doğrultuda olup şiddeti bilinmeyendir. Gösterilen iki bilinmeyeni bulmak için vektörel denklemin sağ tarafındaki üç vektörel büyüklüğün toplamının sıfıra eşit olması gerekir. Bilinen $(\vec{a}_{A/B})_n$ nin uçlarından biri çubuğa dik, diğeri düşey, yani $(\vec{a}_{A/B})_n$ ile θ açısı yapan iki doğru çizilirse (Şekil 1b) ivmenin $(\vec{a}_{A/B})_n$ A'dan B'ye yöneldiğine dikkat edilmelidir.

Bu dik üçgenden:

$$(\vec{a}_{A/B}) = L.\alpha = L.\omega^2 \tan \theta$$

$$\alpha = \omega^2 \tan \theta = V_A^2 . \tan \theta / L^2 . \cos \theta \quad \text{bulunur.}$$

α saat ibreleri yönündedir. Çünkü $(\vec{a}_{A/B})_t$ teğetsel bileşen A'yı B etrafında saat ibreleri yönünde hızlandırmaktadır.

2. BİR PARÇACIĞIN KİNEMATİĞİ

Kinematik, kuvvetlerin veya diğer faktörlerin hareket üzerindeki tesirini düşünmeden hareketin incelenmesidir. Burada sadece hareketin geometrisi incelenir.

Maddesel noktanın hareketini inceleyelim:

2.1) Doğrusal hareket: **P** noktasının bir doğru (burada kolaylık olsun diye seçilen **X** eksen) boyunca hareketidir.

P noktasının herhangi bir **t** zamanındaki konumu **X** eksen üzerindeki sabit **O** başlangıç noktasından itibaren, **X** yer değiştirmesi cinsinden ifade edilir. **X** yer değiştirmesi işaret kabulüne göre pozitif veya negatif olabilir.

Ortalama hız :

Yer değiştirmenin **x**'den **(x + Δx)** e kadar değiştiği **t** ile **(t + Δt)** zaman aralığında **P** noktasının **v_{ort}** ortalama hızı **(Δx / Δt)** oranıdır.

Matematiksel olarak:
$$v_{\text{ort}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır.

Ani hız :

P noktasının **t** anındaki ani hızı **v** zaman artımının **(Δt)** sıfıra gitmesi halinde ortalama hızın limitidir. Matematiksel olarak:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.2)$$

Ortalama ivme:

Hızın **v** den **(v + Δv)** ye kadar değiştiği **t** ile **(t + Δt)** zaman aralığında **P** noktasının **a_{ort}** ortalama ivmesi **Δv/Δt** oranıdır. Matematiksel olarak:

$$a_{\text{ort}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Ani ivme:

P noktasının **t** anındaki ani ivmesi **a**, zaman artımının **Δt** sıfıra gitmesi halinde ortalama ivmenin limitidir.

Matematiksel olarak:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.4)$$

Sabit ivme $a=k$ için aşağıdaki formüller geçerlidir:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + kt \\ v^2 &= v_0^2 + 2ks \\ s &= v_0 t + \frac{1}{2} kt^2 \\ s &= \frac{v + v_0}{2} \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Burada v_0 ilk hız; v son hız; k sabit ivme; t zaman, s yer değiştirmedir.

2.2) Basit Harmonik hareket: İvmenin negatif olarak yer değiştirme ile orantılı olduğu doğrusal bir harekettir.

$$a = -k^2 x \quad (2.6)$$

Eşitliği örnek olarak yer değiştirmesi

$$x = -b \sin \omega t \quad (2.7)$$

ile verilen titreşim denklemini sağlar. Burada b uzunluk cinsinden genlik, ω rad / sn cinsinden sabit dairesel frekans, t sn cinsinden zamandır. Böylece;

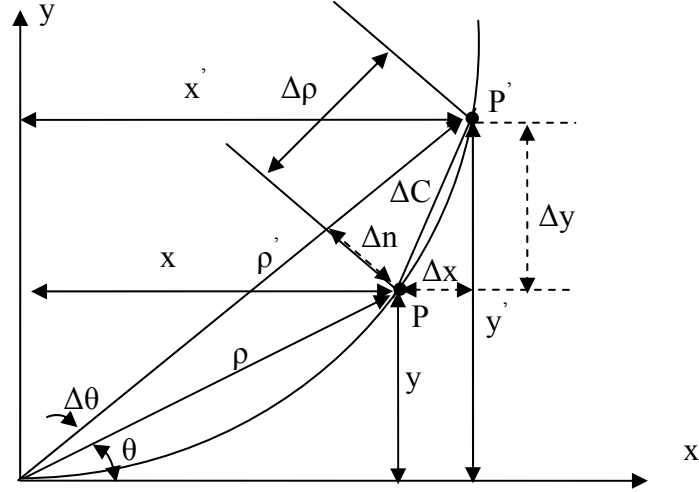
$$\begin{aligned} x &= -b \sin \omega t \text{ den } v = \frac{dx}{dt} = -\omega b \cos \omega t \text{ ve} \\ a &= \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 b \sin \omega t = -\omega^2 x \text{ bulunur.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bundan dolayı $a = -kx^2$ dir.

Burada $k=\omega$ bir sabit, hareket basit harmonik bir harekettir.

2.3) Eğrisel hareket: P noktasının eğrisel bir yörünge üzerinde hareket etmesidir (Şekil 2.1).

P noktasının t anındaki durumu (kartezyen) dik koordinatlar x ve y veya kutupsal koordinatlar ρ ve θ cinsinden ifade edilir.



Şekil 2.1

$(t + \Delta t)$ anında hareketli nokta koordinatları $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ veya $(\rho', \theta + \Delta\theta)$ olan P' noktasında bulunur. Yer değiştirme P ve P' yi birleştiren Δc kirişi kadardır. Bu mesafe noktanın eğri üzerinde Δs kadar hareket etmesi ile meydana gelmiştir. Küçük zaman aralıklarında Δs takriben Δc ye eşittir:

$$\Delta s = \Delta c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (2.9)$$

Vektörel olarak;

$$\Delta c = \Delta n + \Delta p = \rho \cdot \Delta \theta + \Delta \rho \quad (\Delta n = \rho \cdot \Delta \theta) \quad (2.10)$$

Yer değiştirmenin Δc kadar olduğu t ve $t + \Delta t$ zaman aralığında P noktasının v_{ort} ortalama hızı $\Delta c / \Delta t$ oranıdır:

$$v_{ort} = \frac{\Delta c}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{(v_{ort})_x^2 + (v_{ort})_y^2} \quad (2.11)$$

veya;

$$v_{ort} = \frac{\Delta c}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta \theta}{\Delta t} + \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \quad (2.12)$$

bulunur. Burada; v_{ort} ortalama hızın şiddeti, $(v_{ort})_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ortalama hızın x bileşeninin şiddeti,

$(v_{ort})_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ ortalama hızın y bileşeninin şiddeti; $\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \rightarrow \Delta \theta, p$ doğrusunun açısal yer

değiştirmesinin değişimini gösterir.

t anındaki ani hız matematiksel olarak yazılırsa:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta t} = \sqrt{\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2.13)$$

veya

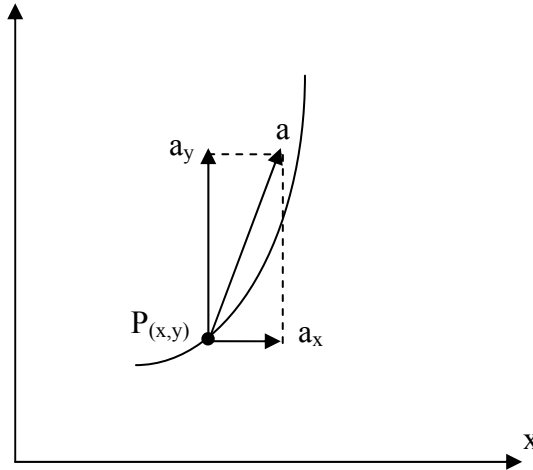
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho \frac{\Delta \theta}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \rho \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \quad (2.14)$$

elde edilir.

Burada; v_x, v_y ani hızın sırasıyla x, y bileşenlerinin şiddeti; $\rho \rightarrow p$ noktasının seçilen 0

kutup noktasına uzaklığı; $\frac{d\rho}{dt}$ ani hızın radyal bileşeni $\frac{d\theta}{dt} \rightarrow p$ çizgisinin ani açısal hızı

P noktasının t anındaki ani ivmesi ortalama ivmenin Δt zaman artımı sıfıra giderken limitidir.



Şekil 2.2

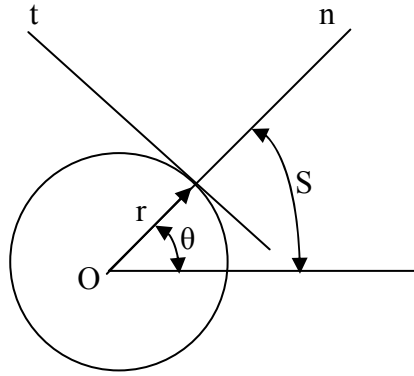
Dik koordinatlarda (Şekil 2.2):

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}_x^2 + \mathbf{a}_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{v}_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{v}_y}{dt}\right)^2} \quad (2.15)$$

Burada $\mathbf{a}$ ani ivmenin şiddetidir.

$\mathbf{a}_x$ ve $\mathbf{a}_y$ ani ivmenin $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ bileşeninin şiddetidir.

2.4) Dairesel hareket: Eğrilik yarıçapı sabit ve $\mathbf{R}$ olan bir eğri üzerindeki harekettir. Aşağıdaki dairesel harekete ait formüller önceki genel eşitliklerin özel halleridir:



Şekil 2.3

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta}; \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}; \quad \mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{v}_t^2}{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}^2 = \mathbf{v}_t \cdot \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{a}_t &= \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Burada; $\mathbf{S}$ dairesel yörüngenin yay uzunluğu;

$\boldsymbol{\theta} \rightarrow$ açısal yer değiştirme; $\mathbf{r} \rightarrow$ dairenin yarıçapı; $\mathbf{v}_t \rightarrow \mathbf{t}$ anındaki lineer hızın teğetinin şiddeti; $\mathbf{a}_n \rightarrow$ ivmenin $\mathbf{O}$ merkezine yarıçap doğrultusunda yöneltmiş normal bileşeninin şiddeti

$\boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{t}$ anında $\mathbf{r}$ yarıçapının açısal hızı ; $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \mathbf{t}$ anında $\mathbf{r}$ yarıçapının açısal ivmesi.

2. ÖRNEKLER:

Örnek 2.1: Bir P noktası bir doğru üzerinde $S=4t^3+2t+5$ denklemine göre hareket etmektedir. a) $t=3$ sn deki yer değiştirme, hız ve ivmeyi;

b) $t=4$ sn esnasında ortalama ivmeyi belirtiniz.

Çözüm: a) $S=4t^3+2t+5=4.3^3+2.3+5=119$ m

$$v = \frac{ds}{dt} = 12t^2 + 2 = 12.3^2 + 2 = 110 \text{ m/sn}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 24t = 24.3 = 72 \text{ m/sn}^2$$

$$t=4\text{sn} \quad v=12t^2+2=12.4^2+2=194 \text{ m/sn} \quad \Delta v=v_{t=4}-v_{t=3}=194-110=84 \text{ m/sn};$$

$$\Delta t=t_2-t_1=4-3=1 \text{ sn.} \quad a_{\text{ort}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 84 : 1 = 84 \text{ m/sn}^2$$

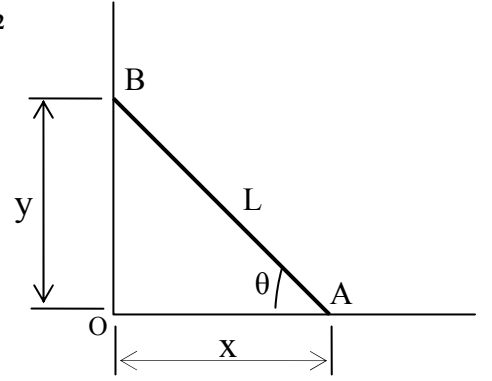
Örnek 2.2: Şekil 2.1 de görülen AB çubuğunun en alt

A noktası sağa doğru sabit $v_a=5$ m/sn

lik hızla hareket etmektedir.

$\theta=60^\circ$ olduğu zaman B noktasının hızı nedir?

Çözüm: $x^2+y^2=L^2$ olduğundan $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$



Şekil 2.II

$$v_B = \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} = -\cot \theta \cdot v_A = -\cot 60^\circ \cdot 5 = -2,89 \text{ m/sn}$$

aksi işareti B noktasının sağa doğru hareket ettiğini göstermektedir.

Örnek 2.3: Bir noktanın yer değiştirmesinin x ve y bileşenleri metre olarak $x=10t^2+2t$,

$y=t^3+5$ ifadeleri ile verilmiştir. $t=3$ sn de noktanın yer değiştirmesini, hız

ve ivmesini belirtiniz.

Çözüm: $v_x = \frac{dx}{dt} = 20t + 2$; $v_y = \frac{dy}{dt} = 3t^2$; $t=3\text{sn}$, $x=96$ m; $y=32$ m.

$$t=3\text{sn.} \quad v_x=62 \text{ m/sn} ; \quad v_y=27 \text{ m/sn}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{62^2 + 27^2} = 67,6 \text{ m/sn} \quad v=67,6 \text{ m/sn.}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 20; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 6t \quad t=3\text{sn}, \quad a_x=20 \text{ m/sn}^2, \quad a_y=18\text{m/sn}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{20^2 + 18^2} = 26,9\text{m/sn}^2$$

Örnek 2.4: Bir noktanın hareketi aşağıdaki denklemlerle ifade edilmiştir

$$v_x=20t+5, \quad v_y=t^2-20$$

Ayrıca $t=0$ iken, $x=5\text{m}$ ve $y=-15\text{m}$ olduğu bilinmektedir. $t=2\text{sn}$ için yer değiştirme, hız ve ivmeyi belirtiniz.

Cözüm: $v_x = \frac{dx}{dt} = 20t + 5$ den $x = \int (20t + 5)dt = 10t^2 + 5t + C_1$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = t^2 - 20 \quad \text{den} \quad y = \int (t^2 - 20)dt = \frac{t^3}{3} - 20t + C_2$$

x denkleminde $x=5$, $t=0$ ise $C_1=5$; y denkleminde $y=-15$, $t=0$ ise $C_2=-15$ bulunur.

$$x=10t^2+5t+5, \quad y=\frac{t^3}{3} - 20t - 15, \quad a_x = \frac{dx}{dt} = 20; \quad a_y = \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$t=2\text{sn} \quad \text{için} \quad x=55\text{m}; \quad y=-52,3\text{m}; \quad v_x=45\text{m/sn}; \quad v_y=-16 \text{ m/sn}.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{45^2 + (-16)^2} = 47,8 \frac{\text{m}}{\text{sn}}; \quad a_x = 20 \frac{\text{m}}{\text{sn}^2}; \quad a_y = 4 \frac{\text{m}}{\text{sn}^2};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{20^2 + 4^2} = 20,4 \frac{\text{m}}{\text{sn}^2}.$$

Örnek 2.5: Bir maddesel nokta $a = 2\sqrt{v}$ ivmesi ile düşey doğru boyunca hareket etmektedir. $t=2\text{sn}$ iken yer değiştirmesi $s = \frac{64}{3}\text{m}$ ve hızı $v=16\text{m/sn}$ dir. $t=3\text{sn}$ iken noktanın yer değiştirme, hız ve ivmesini hesaplayınız.

Cözüm: $a = \frac{dv}{dt}$ den $2\sqrt{v} = \frac{dv}{dt}$ ise $2dt = \frac{dv}{\frac{1}{v^2}}$ buradan $2t+C_1=2v^{1/2}$ (a)

$$t=2\text{sn} \quad \text{için}, \quad v=16 \text{ m/sn}; \quad 2.2+C_1=2.(16)^{1/2} \quad C_1=4 \text{ bulunur. (I) dan}$$

$$4v=(2t+4)^2 \quad \text{ise} \quad v=(t+2)^2 \quad \text{olur.} \quad v = \frac{ds}{dt} = (t+2)^2 \quad \text{ve} \quad ds = (t+2)^2 dt$$

İntegral alarak $s = \frac{1}{3}(t + 2)^3 + C_2$ bulunur. Burada $t=2\text{sn}$ olduğunda $s = \frac{64}{3}$ olur. Onda

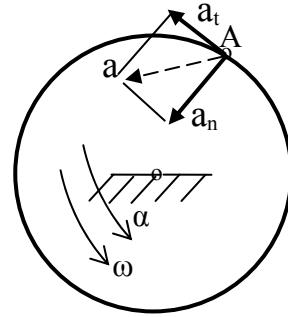
$$\frac{64}{3} = \frac{1}{3}(2 + 2)^3 + C_2; \quad C_2=0. \quad \text{Buna göre denklemler:}$$

$$s = \frac{1}{3}(t + 2)^3, \quad v=(t+2)^2, \quad a=\frac{dv}{dt} = 2(t + 2) \quad \text{dir.}$$

$t=3\text{sn}$ için

$$s=41,7\text{m} ; \quad v=25\text{m/sn} ; \quad a=10\text{m/sn}^2 \quad \text{değerleri elde edilir.}$$

Örnek 2.6: 18 cm çapında bir disk 15 saniyede sükunetten üniform olarak 280 devir/dak'lık hıza getirilmektedir. Durgun halden 1sn sonra disk üzerindeki bir noktanın hız ve ivmesini hesaplayınız.(Şekil 2.VI)



Şekil 2.VI

Cözüm: Bu problem dönme denklemlerinin bir uygulamasını

göstermektedir.Önce , hız verildikten sonraki α açısal ivmesini bulalım:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\frac{280 \text{ devir}}{60 \text{ sn}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{devir}} - 0}{15\text{sn}} = 1,96 \frac{\text{rad}}{\text{sn}^2}$$

Şimdi başlangıçtan 1sn sonraki açısal hızı bulalım:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t = 0 + 1,96 \frac{\text{rad}}{\text{sn}^2} \cdot 1\text{sn} = 1,96 \frac{\text{rad}}{\text{sn}}$$

Disk üzerinde bir nokta

$$\text{Hızı } v = r \cdot \omega_1 = 9\text{cm} \cdot 1,96 \frac{\text{rad}}{\text{sn}} = 17,64 \frac{\text{cm}}{\text{sn}}$$

$$\text{Normal ivmesi } a_n = r \cdot \omega_1^2 = 9 \cdot (1,96)^2 = 34,56 \frac{\text{cm}}{\text{sn}^2}$$

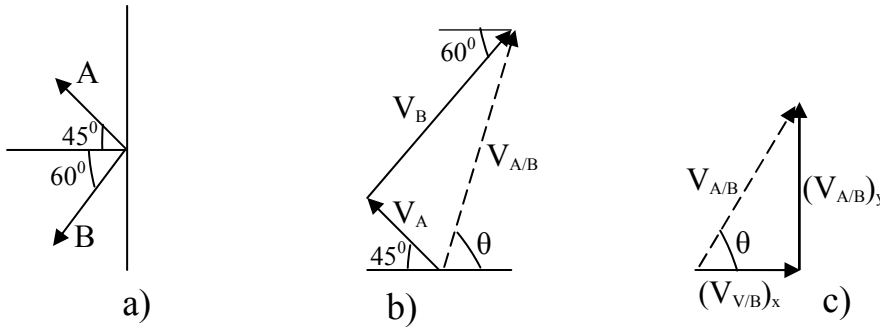
Teğetsel ivmesi $a_t = r \cdot \alpha = 9.1,96 = 17,64 \frac{\text{cm}}{\text{sn}^2}$

Toplam ivmesi $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(17,64)^2 + (34,56)^2} = 38,76 \frac{\text{cm}}{\text{sn}^2}$

Toplam ivme vektörü ile O noktasındaki yarıçap arasındaki açı

$$\cos \theta = \frac{a_n}{a} = \frac{34,56}{38,76} = 0,8916 \quad \theta = 26^\circ$$

Örnek 2.7: A otomobili kuzey batıya yönelmiş bir yol boyunca 36km/saat' lık bir hızla gitmektedir, B otomobili ise 126km/saat ' lık hızla batı ile güneydoğru 60° lik açı yapan yol boyunca hareket etmektedir. A nın B ye göre relatif hızı ve doğrultusunu belirtiniz (Şekil 2.VIIa).



Şekil 2.VII

Cözüm: Hızları bağlayan vektörel denklem

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_a + (-\vec{v}_B) \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_{A/B} + \vec{v}_B$$

Vektörlerin x ve y' ye göre bileşenlerini bulalım:

$$(v_A)_x = -36 \cdot \cos 45^\circ = -36 \cdot 0,707 = -25,45 \text{ km/s}$$

$$(v_A)_y = 36 \cdot \sin 45^\circ = 36 \cdot 0,707 = 25,45 \text{ km/s}$$

$$(v_B)_x = -126 \cdot \cos 60^\circ = 126 \cdot 0,5 = -63 \text{ km/s}$$

$$(v_B)_y = -126 \cdot \sin 60^\circ = -126 \cdot 0,866 = -109,12 \text{ km/s}$$

Buradan

$$(v_{A/B})_x = (v_A)_x - (v_B)_x = -25,45 + 63 = 37,55 \text{ km/s}$$

$$(v_{A/B})_y = (v_A)_y - (v_B)_y = 25,45 + 109,12 = 134,57 \text{ km/s}$$

$$v_{A/B} = \sqrt{(v_{A/B})_x^2 + (v_{A/B})_y^2} = \sqrt{(37,55)^2 + (134,57)^2} = 140 \text{ km/s}$$

$$v_{A/B} \text{ nin doğru ile yaptığı } \theta \text{ açısı ise: } \theta = \tan^{-1} \frac{134,57}{37,55} ; \quad \theta = 74^\circ$$

Örnek 2.8 : 1,8m uzunluğunda ve küçük kesitli bir çubuk yatay bir düzlemde bir ucundan geçen düşey eksen etrafında dönmektedir. Bu çubuğun hızı 5 saniyede 20 devir/sn den 30 devir/sn ye yükselmektedir.

- a) Çubuğun orta noktasının zaman aralığının başlangıç ve bitiminde lineer hızını hesaplayınız.
- b) İvme başladıktan 3 sn sonra çubuğun orta noktasının ivmesinin normal ve teğetsel bileşenlerini tayin ediniz.

Cözüm: Verilenler:

$$\omega_B = 20 \text{devir / sn} = 40\pi \text{rad / sn}$$

$$\omega_s = 30 \text{devir / sn} = 60\pi \text{rad / sn}$$

$$r = 1,8/2 = 0,9 \text{ m}$$

$$t = 5 \text{sn} \quad t_1 = 3 \text{sn}$$

$$\text{a) } v_B = r \cdot \omega_B = \frac{1,8}{2} \cdot 40\pi \text{rad / sn} = 113,04 \text{m / sn} ;$$

$$v_s = r \cdot \omega_s = \frac{1,8}{2} \cdot 60\pi = 169,6 \text{m / sn}$$

- b) 5sn' lik aralıkta herhangi bir anda üniform α açısal ivmesi

$$\alpha = \frac{\omega_s - \omega_B}{t} = \frac{60\pi - 40\pi}{5} = 4\pi \text{rad / sn}^2$$

$$3 \text{ sn sonra } \omega \text{ açısal hızı } \omega = \omega_B + \alpha t = 40\pi + 4\pi \cdot 3 = 52\pi \text{rad / sn}$$

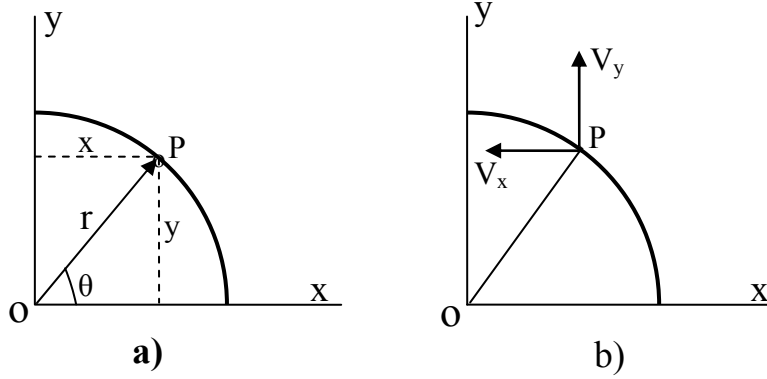
İvmenin bileşenleri:

$$a_t = r\alpha = 0,9 \cdot 4\pi \text{rad / sn}^2 = 11,3 \text{m / sn}^2$$

$$a_n = r\omega^2 = 0,9 \cdot 52^2 = 2434 \text{m / sn}^2$$

Örnek 2.9: Bir P noktası dairesel bir yörünge üzerinde katettiği yayın uzunluğu $s = t^3 + 3$ olacak şekilde hareket etmektedir. Dairenin yarıçapı 12 m dir:

- a) $t = 2\text{sn}$ anındaki hızın eksenel bileşenleri v_x ve v_y ni belirtiniz (Şekil 9.1a).
- b) Noktanın ivmesinin $t = 2\text{sn}$ için a_x ve a_y eksenel bileşenlerini bulunuz.



Şekil 2.IX

Çözüm: AP mesafesi 2sn de katedilmiş olsun $AP = s = 2^3 + 3 = 11\text{m}$. $x = 12 \cos\theta$,

$$y = 12 \sin\theta. \quad v_x = \frac{dx}{dt} = -12 \sin\theta \frac{d\theta}{dt}, \quad v_y = 12 \cos\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

$$s = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{r} = \frac{t^3 + 3}{12}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4}t^2.$$

$$t = 2\text{sn} \text{ için; } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1\text{rad/sn}; \quad \theta = \frac{2^3 + 3}{12} = \frac{11}{12}\text{rad}.$$

$$v_x = -12 \left(\sin \frac{11}{12} \right) \cdot 1 = -9,48\text{m/sn} \quad v_y = 12 \left(\cos \frac{11}{12} \right) \cdot 1 = 7,30\text{m/sn}$$

Negatif işaret hızın x bileşeninin sola doğru yönlü olduğunu gösterir. Toplam hız

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-9,48)^2 + (7,3)^2} = 12\text{m/sn} \text{ dir.}$$

v ni $v = r \frac{d\theta}{dt}$ formülünden de bulmak olabilir. $v = 12 \cdot \left(\frac{2^2}{4} \right) = 12\text{m/sn}$

Noktanın ivmesinin $t=2\text{sn}$ için a_x ve a_y eksenel bileşenlerini blalım.

$$a_x = -12 \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 12 \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_y = -12 \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 12 \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} , \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4} t^2 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{t}{2}$$

$t=2\text{sn}$ de $\theta = \frac{11}{12} \text{rad}$ ve $\frac{d\theta}{dt} = 1 \text{rad/sn}$:

$$a_x = -12 \cdot \cos \frac{11}{12} \cdot (1)^2 - 12 \cdot \sin \frac{11}{12} \cdot 1 = 16,8 \text{m/sn}^2$$

$$a_y = -12 \cdot \sin \frac{11}{12} \cdot 1 + 12 \cdot \cos \frac{11}{12} \cdot 1 = -2,19 \text{m/sn}^2$$

Toplam ivme $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 17 \text{m/sn}^2$ olur.

2. PROBLEMLER

Problem 2.1: A noktası bir doğru üzerinde $S=4t^2+2t$ ifadesi ile hareket etmektedir.Yer değiştirme, hız ve ivme ifadelerinin zamana göre değişimlerini çiziniz (Yani $S- t$; $v- t$ ve $a- t$ diyagramlarını).

Problem 2.2: Problem 1'i $S=3t^2+2t+5$ yer değiştirme ifadesi ile verilen hareket için çözünüz.

Problem 2.3: Problem 1'i $S=6t^3-2t^2+10$ yer değiştirme ifadesi ile verilen hareket için çözünüz.

Problem 2.4: Yer değiştirmesinin x ve y bileşenleri metre olarak $x = 5t^3 - 2t^2 + 2$, $y=2t^2+8t$ ifadeleri ile verilmiş noktanın $t=10$ sn de yer değiştirmesini,hız ve ivmesini belirtiniz.

Problem 2.5: Noktanın hareketi aşağıdaki denklemlerle ifade edilmiştir $v_x=2t^2+4$; $v_y=6t-8$. Ayrıca $t=0$ iken, $x=6$ m, $y=-4$ m olduğu bilinmektedir. $t=5$ sn için yer değiştirme, hız ve ivmeyi hesaplayınız.

Problem 2.6: Bir noktanın doğrusal hareketinde ivme $a=- 9,81$ denklemi ile verilmiştir. Bilinmektedir ki $t=0$ olduğu anda x yer değiştirmesi $7,5$ m v hızı 0 dır:

- a) s yer değiştirmenin denklemini belirtiniz;
- b) $t=5$ sn deki yer değiştirme, hız ve ivmeyi;
- c) $t=7$ sn deki yer değiştirme, hız ve ivmeyi;
- d) Ortalama hız ve ivmeyi belirtiniz.

Problem 2.7: Düşey bir doğru boyunca hareket eden noktanın ivmesi $a=12t- 20$ denklemi ile verilmiştir. $t=0$ anında yer değiştirmesi $s=- 10$ m ve $t=5$ sn iken yer değiştirmesi $s=+10$ m dir.

- a) Hareketin denklemini çıkarınız;
- b) $t=10$ sn deki yer değiştirme,hız ve ivmeyi hesaplayınız.

Problem 2.8: 20 cm çapındaki bir disk 10 dakikada 800 devir/dak hızdan sükunete geçmektedir. Açısal ivmeyi tayin ediniz.

Problem 2.9: Bir disk üniform olarak $\frac{1}{2}$ saniyede sükunetten 200 devir/dak hızlandırılmaktadır. Bu hızı ile iki saniye döndükten sonra $\frac{1}{2}$ sn de sükunete getirilmektedir. Disk bütün zaman aralığı boyunca ne kadar dönme yapar?

3. BİR PARÇACIĞIN DİNAMİĞİ

Bir parçacığın dinamiğinde, hareketi sağlayan kuvvet verildiğinde ortaya çıkan hareket incelenir.

Bir cismin (parçacığın) dinamiği problemlerinin çözülmesinde hareketin NEWTON Kanunları kullanılabilir:

Newtonun 1.kanunu. Bir cisim sükunetteki durumuna veya bir doğru boyunca üniform hareketine (sabit hız), durumunu değiştirecek bazı kuvvetler zorlayıncaya kadar devam eder. Başka bir deyişle, bir parçacık ancak dengelenmemiş kuvvetler tesiri altında ivme kazanır.

Newtonun 2. kanunu. Bir **F** kuvveti bir cismin üzerine etki ettiği zaman kuvvet doğrultusunda, kuvvetle doğru ve cismin **m** kütlesi ile ters orantılı olmak üzere bir ivme meydana getirir.

$$\text{Bu kanuna göre } \mathbf{ka} = \mathbf{F/m} \text{ veya } \mathbf{F= kma} \quad (3.1)$$

Burada **k** bir orantı sabitidir. **k=1** olmak üzere birimler uygun seçilirse

$$\mathbf{F= ma} \quad (3.2)$$

olur.

Newtonun 3. kanunu. Her etkiye veya kuvvete eşit ve ters yönlü olmak üzere tepki veya kuvvet vardır. Diğer bir deyişle, bir cisim ikinci bir cisim üzerine bir kuvvet tesir ettirirse, ikinci cisim de birinci cisim üzerine şiddeti eşit ve zıt yönlü aynı bir kuvvet tesir ettirir. Birimler kullanılan sisteme bağlıdır. Mühendislik çalışmalarında genellikle yukarıdaki formülde **k** değeri birim olacak şekilde değerlere uygun seçilir. Buna göre esas birimler ayrılırsa bunlar: kuvvet için **kN** ve ivme için **m/s²** dir. Kütle birimi bu iki birim cinsinden türetilir.

Yeryüzüne yakın mesafelerde serbestçe düşen bir cisme kuvvet olarak yalnız kendi **W** ağırlığı etki etmektedir. İvmesi, **g** yerçekimi ivmesine eşittir (kullanılan birim sisteminde **g = 9,81 m/s²** dir).

$$\text{İkinci kanuna göre } \mathbf{W= kmg} \quad (3.3)$$

$$\text{veya } \mathbf{k=1} \text{ olmak üzere } \mathbf{W=mg} ; \mathbf{m=W/g (kg/m/sn^2=kg.sn^2/m)} \text{ dir.} \quad (3.4)$$

Bir cisme herhangi bir kuvvetler sistemi etkiyorsa bu parçacığın herhangi bir eksen doğrultusunda ivmesini bulmak için, sistemdeki bütün kuvvetlerin o eksene göre bileşenleri toplanır ve (**kg sn²/m** cinsinden) **m** kütlesi ile(**m / sn²** cinsinden) ivmesinin çarpımına eşitlenir. **X** doğrultusunda bu eşitlik

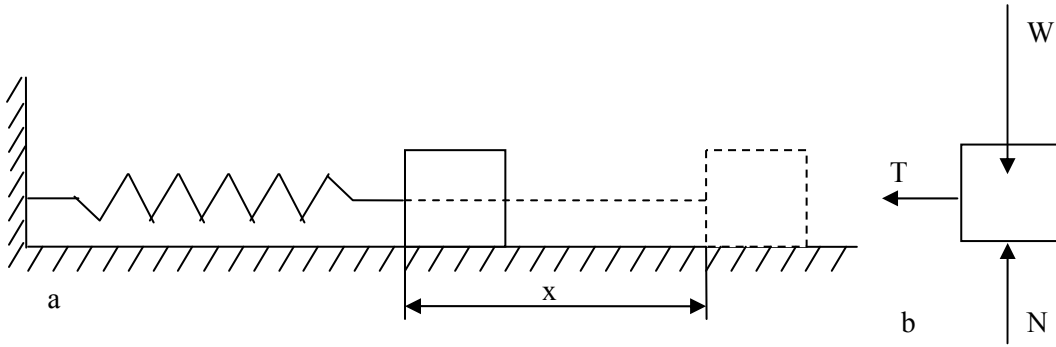
$$\sum F_x = ma_x$$

veya

$$a_x = \sum F_x / m \quad (3.5)$$

dir.

W ağırlığında bir cisim sürtünmesiz yatay düzlemde şekil 1a da görüldüğü gibi durmaktadır. Cisim yay katsayısı **k (kN /cm)** olan bir yaya bağlanmıştır. Ağırlık denge konumundan (denge konumunda yayda çekme ve basınç kuvveti sıfırdır.) **x₀** kadar ayrılın ve sıfır hızla bırakılsın. Hareketi inceleyelim.



Şekil 3.1

Cismin denge konumundan **x** kadar ayrıldığı zamanki serbest cisim diyagramı şekil 1b- de çizilmiştir. Yay **x** kadar uzatıldığı zaman cisime yatay doğrultuda **T** kuvveti etki ettirir. durumdaki boyunun farkı ile orantılı kabul edilir. Bu ifade matematiksel olarak Maddenin elastik limiti içinde yaydaki kuvvet yayın uzamış boyu ve gerilme kuvveti bulunmadığı

$$T = kx \quad (3.6)$$

şeklinde yazılır.

Burada **T**– kN cinsinden yay kuvveti; **k** - kN /cm boyutunda bir sabit; **x** ise uzunluğun cm olarak değişimidir. Kuvvetlerin yatayda toplanması ile

$$\sum F_x = -T = \frac{W}{g} \cdot a_x \quad (3.7)$$

bulunur.

dikkat Sola doğru olan kuvvetler ve dengenin solundaki mesafelerin negatif alındığına edilmelidir. Bu durumda **x** mesafesi sağa doğrudur. Yani **a_x** pozitif yazılmıştır. **T** gerilmesi ise sola doğru olup negatiftir.

T = kx ve **a_x = $\frac{d^2x}{dt^2}$** konursa (3.7) denklemi

$$-kx = \frac{W}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kg}{W} \cdot x = 0 \quad (3.8) \quad \text{olur.}$$

Bu denklemin çözümü diferansiyel denklemler teorisinden sinüslü ve kosinüslü terimler

$$\text{şeklinde elde edilir. } x = A \sin\left(\sqrt{\frac{kg}{W}} \cdot t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{kg}{W}} \cdot t\right) \quad (3.9)$$

Şimdi **A** ve **B** değerlerini hesaplayalım. **t=0** iken **x=x₀** ve buradan

$$x_0 = A \sin\left(\sqrt{\frac{kg}{W}} \cdot 0\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{kg}{W}} \cdot 0\right) \quad \text{ve} \quad B = x_0 \text{ bulunur.}$$

A'yı belirtmek için **x**'i zamana göre türetmek lazımdır. Yani **t=0** iken **v=0** olmalıdır.

$$v = dx/dt = A \sqrt{\frac{kg}{W}} \cos\left(\sqrt{\frac{kg}{W}} \cdot t\right) - x_0 \sqrt{\frac{kg}{W}} \sin\left(\sqrt{\frac{kg}{W}} \cdot t\right) \text{ ve buradan } t=0 \Rightarrow$$

v=v₀=0 ; **A=0** bulunur. Bu problem için hareket denklemi

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{kg}{W}} \cdot t\right) \quad \text{olar.} \quad (3.10)$$

4. ÖTELEMEDE RİJİT CİSMİN DİNAMİĞİ

Rijit cismin ötelenmesinde herhangi bir parçacığın ivmesi diğer bir parçacıkla aynıdır.

Bir parçacığın aktif kuvveti , kütlesi **dm** ile ivmesi **a**'nın çarpımına eşittir. Bu kuvvet **a** ivme vektörü doğrultusundadır

$$dF = dm \cdot a$$

D'ALEMBERT ilkesine göre bir cisme tesir eden dış kuvvetlerin bileşkesi bütün etken kuvvetlerinin bileşkesine eşit olmalıdır.

$$\sum F_{dış} = \sum ma$$

D'ALEMBERT ilkesine göre öteleme denklemleri şöyle ifade edilebilir:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= \sum (dm) a_x = a_x \sum dm = m a_x \\ \sum F_y &= \sum (dm) a_y = a_y \sum dm = m a_y \\ \sum M &= I \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Burada $\sum F_x$, $\sum F_y$ dış kuvvetlerin sırasıyla **x** ve **y** eksenleri üzerindeki bileşenlerinin cebirsel toplamı ; **m** cismin kütlesi; a_x , a_y cismin ivmesinin sırasıyla **x** ve **y** eksenleri üzerindeki bileşenleri; $\sum M$ dış kuvvetlerin kütle merkezine göre momentlerinin cebirsel toplamı; **I** cismin kütle merkezine göre atalet momenti; α ise cismin açısal ivmesidir.

Atalet kuvveti metodu ile çözüm; cisme tesir eden etken kuvvetler ters döndürülüp dış kuvvetler toplandığı zaman uygulanabilir. Bu kuvvetler sistemi, çalışma kolaylığı bakımından o an için dengede tutarlar. Ters döndürülmüş etken kuvvetler (atalet kuvvetleri) gerçekte yoktur. Statik denge denklemleri ancak bundan sonra kullanılır.

5. RİJİT CİSMİN DÜZLEMSEL HAREKETİNİN DİNAMİĞİ

Bu genel halde hareketin denklemleri

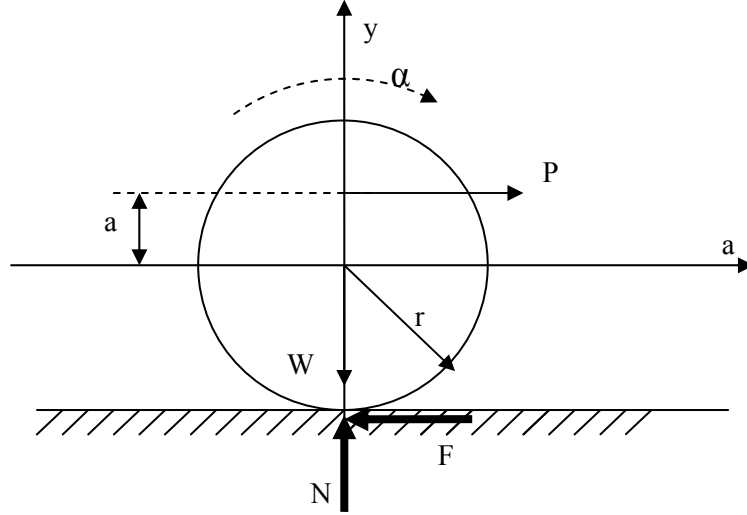
$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= m a_x \\ \Sigma F_y &= m a_y \\ \Sigma \bar{M} &= I_o \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

olur.

Momentlerin kütle merkezine göre alınacağına dikkat etmek gerekir. Kural olarak, başka bir noktanın seçilmesi halinde denklemler çok daha karışık olur. Ancak O noktasının, ivmesi sıfıra eşit veya kütle merkezine yönelmiş bir nokta olması halinde $\Sigma M_o = I_o \alpha$ denkleminin korunacağını belirtilmesi gereklidir.

a_x ivmesi ve ΣF_x aynı doğrultuda, a_y ivmesi ile ΣF_y aynı doğrultudadır. Dış kuvvetlerin kütle merkezi etrafında momenti α ile aynı doğrultuda ise pozitif kabul edilir.

Şekil 1’de görüldüğü gibi düşey bir eksen üzerinde çeşitli konumlar alabilen , yatay bir P kuvveti etkisi altında yatay düzlem üzerinde hareket eden r yarıçaplı



Şekil 5.1

ve W ağırlıklı homojen silindirin hareketini inceleyelim.

Serbest cisim diyagramı, merkezden a yüksekliğinde uygulanan P kuvvetini göstermektedir.

F sola doğru etkidiği zaman hareketin denklemleri

$$\Sigma F_x = P - F = (W/g) a_x \quad (5.2)$$

$$\sum F_y = N - W = 0 \quad (5.3)$$

$$\sum \bar{M} = P \cdot a + F \cdot r = \frac{1}{2} \frac{W}{g} r^2 \alpha \quad (5.4) \text{ dir.}$$

Hareketin sağa doğru olması için P , F 'den büyük olmalıdır.

$a_x = r \cdot \alpha$ değeri (5.4) denkleminde yerine konursa

$$P \cdot a + F \cdot r = \frac{1}{2} \frac{W}{g} r \cdot a_x \quad (5.5) \text{ bulunur}$$

(5.5) denklemi (1/2) r ile bölünerek

$$\frac{2Pa}{r} + 2F = \frac{W}{g} a_x \quad (5.6) \text{ bulunur.}$$

(5.6) denklemi ile (5.2)'nin sol tarafları eşitlenirse

$$\frac{2Pa}{r} + 2F = P - F \quad \text{veya} \quad 3F = P(1 - \frac{2a}{r}) \quad (5.7)$$

1. $a = r/2$ olması halinde $F=0$ olur. Yani P kuvveti yarıçapın yarısı kadar merkezin üstünde uygulanırsa sürtünme kuvveti sıfır olur.
2. $a = r$ olursa $3F = -P \Rightarrow F = -P/3$ olur. Bu durumda sürtünme yön değiştirmiş olur ve sağa doğru etkiler.

$F = -P/3$ halinde (5.4) denklemi $a = r$ için

$$P \cdot r - \frac{P}{3} \cdot r = \frac{1}{2} \frac{W}{g} r^2 \cdot \alpha \quad \text{veya} \quad \frac{2}{3} P = \frac{1}{2} \frac{W}{g} r \cdot \alpha \quad (5.8) \text{ olur. Bu ise } \alpha' \text{ nin pozitif}$$

olduğunu veya silindirin sağa yuvarlandığını gösterir. Ancak P fazla büyütülürse F 'nin de artacağı tabiidir.

Mümkün olan maksimum sürtünme değeri aşılar aşılmaz silindir kayacaktır. Bu durumda yeni bir kabul yapılmalıdır. F sürtünmesi şimdi sürtünme katsayısı (μ) ile N normal kuvvetinin çarpımına eşit olur. Bu durumda hareket denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\sum F_x = P - \mu N = (W/g) a_x \quad (5.9)$$

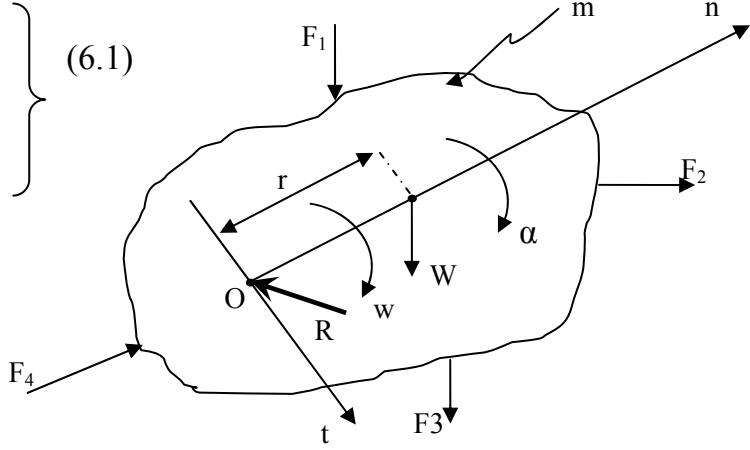
$$\sum F_y = N - W = 0 \quad (5.10)$$

$$\sum \bar{M} = P a + \mu N r = \frac{1}{2} \frac{W}{g} r^2 \cdot \alpha \quad (5.11)$$

Bu denklemler hem kayma (lineer ivme a_x) ve hem de yuvarlanma (açısal ivme α) gösterirler.

6. DÖNMEDE RİJİT CİSMİN DİNAMİĞİ

Bir cismin bir simetri düzlemi varsa ve cisim bu simetri düzlemine dik, sabit bir eksen etrafında dönüyorsa, dengelenmemiş kuvvet sistemi altında bu cismin hareket denklemleri şunlardır:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_n &= m r \omega^2 \\ \sum F_t &= m r \alpha \\ \sum M_o &= I_o \alpha \end{aligned} \right\} (6.1)$$


Şekil 6.1

Burada (şekil 1'e göre) :

$\sum F_n$: dış kuvvetlerin (cismin W ağırlığı ve F_i yükleri) dönme dış merkezi O ile kütle merkezi G 'yi birleştiren n eksenini üzerinde bileşenlerinin cebirsel toplamı; $\sum F_t$: dış kuvvetlerin O noktasında n eksenine dik olan t eksenini üzerinde bileşenlerinin cebirsel toplamı;

$\sum M_o$: Dış kuvvetlerin O noktasından geçen dönme eksenine göre momentlerinin cebirsel toplamı;

m : cismin kütlesi ($\text{kg.sn}^2/\text{m}$) ($m= W/g$)

r : O dönme merkezinin kütle merkezi G ' ye uzaklığı (m)

I_o : dönme eksenine göre cismin atalet momenti ($\text{kg.sn}^2.\text{m}$)

ω : açısal hız (rad/sn)

α : açısal ivme (rad/sn^2)

Simetri eksenini etrafında dönen bir cismin hareket denklemleri şu şekli alır:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum \bar{M} &= I \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Burada:

$\sum F_x$: dış kuvvetlerin x eksenini olarak seçilen herhangi bir doğru üzerindeki bileşenlerinin cebirsel toplamı;

$\sum F_y$: dış kuvvetlerin y eksenini üzerindeki bileşenlerinin cebirsel toplamı;

$\sum \bar{M}$: dış kuvvetlerin kütle merkezi G 'den geçen dönme eksenine(simetri eksenini) göre momentlerinin cebirsel toplamı,

I : cismin G kütle merkezinden geçen dönme eksenine göre atalet momenti ($\text{kg} \cdot \text{sn}^2 \cdot \text{m}$),

α : cismin açısal ivmesi (rad/sn^2).

Örnek 6.1: Alt ucundan yatay bir eksen etrafında mafsallaşmış bir çubuk düşey konumdan bırakılıyor.

Çubuğun hareketini inceleyelim (Şekil 6.2) :

Çubuğun boyu l ve kütlesi m olsun.

Serbest cisim diyagramı aşağı doğru etkiyen W ağırlığını ve mesnet noktasındaki R_x ve R_y reaksiyonlarını göstermektedir. Çubuğun düşey eksenle θ açısı yaptığı kabul edilsin.

Hareket denklemleri:

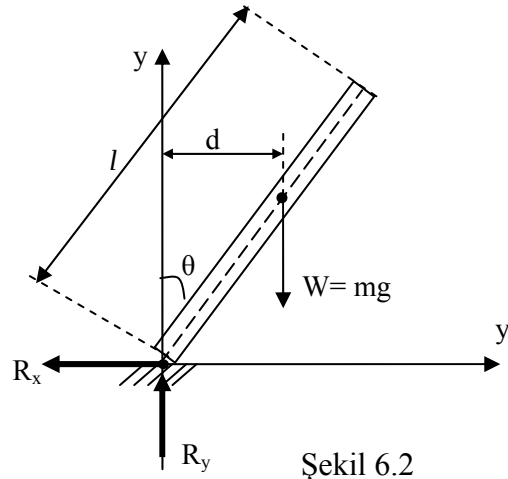
$$\sum F_n = m F \omega^2$$

$$\sum F_t = m F \alpha$$

$$\sum \bar{M}_O = I_O \alpha$$

olmak üzere çubuk, dengelenmemiş bir kuvvet sistemi etkisi ile sabit eksen etrafında dönmektedir. Bu durumda gerekli tek denklem

$$\sum \bar{M} = I \alpha \quad \text{dır.}$$



Şekil 6.2'den $M_o = W.d$, $d = L \sin \theta / 2$ olur. $I_o = \frac{1}{3} m l^2$; $\alpha = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ olduğu göz önüne

alınırsa; $mg \frac{l}{2} \sin \theta = \frac{1}{3} m l^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ veya $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{3g}{2l} \sin \theta$ (a)

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega \quad (a) \text{ ya göre } \omega d\omega = \frac{3g}{2l} \sin \theta d\theta$$

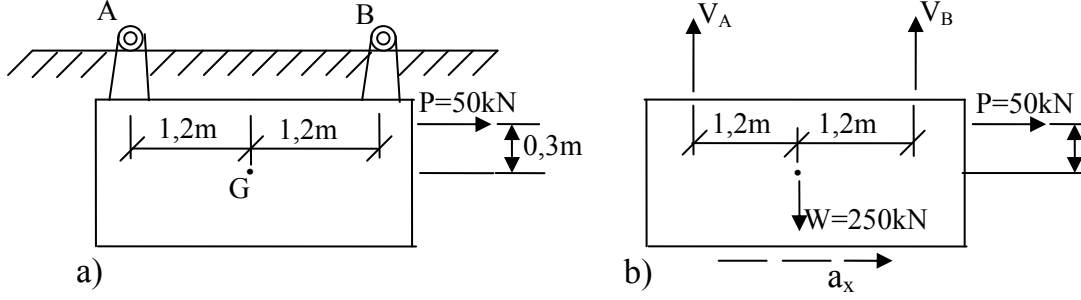
integrasyon alınarak $\frac{\omega^2}{2} = -\frac{3g}{2l} \cos \theta + C_1$

$\theta = 0 \rightarrow \omega = 0$ olur $\rightarrow C_1 = \frac{3g}{2l}$ integrasyon sabiti bulunur. Böylece

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{3g}{2l} \cos \theta + \frac{3g}{2l} \quad \text{ve} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (1 - \cos \theta)} \quad \text{dir.}$$

6. ÖRNEKLER

Örnek 6.1: 250 kN ağırlığında homojen bir kapı, yatay bir ray üzerinde sükunette bulunan A ve B makaralarına mesnetlenmiştir. Sabit P kuvveti 50 kN dır. Kapı sükunetten harekete geçiyor:



Şekil 6.I

- a) 5 saniyede kapının hızı ne olur?
b) Makaralardaki reaksiyonlar ne kadardır?

(Yuvarlanma sürtünmesi ihmal edilecektir). (Şek.1a)

Cözüm: Verilenler: $W = 250 \text{ kN}$, $P = 50 \text{ kN}$, $t = 5 \text{ sn}$, $a_y = 0$.

a_x ivmesi serbest cisim diyagramlarında x yönündedir (Şek 1b).

- a) $\sum F_x = ma_x$; $\sum F_y = ma_y$; $\sum \bar{M} = 0$ denklemleri uygulanarak yazabiliriz;

$$\sum F_x = 50 = \frac{250}{9,8} \cdot a_x \quad (6.I)$$

$$\sum F_y = V_A + V_B - 250 = \frac{250}{9,8} \cdot 0 \quad (6.II)$$

$$\sum \bar{M} = V_B \cdot 1,2 - V_A \cdot 1,2 - 50 \cdot (0,3) = 0 \quad (6.III)$$

(6.I) dan $a_x = \frac{9,8 \cdot 50}{250} = 1,96 \text{ m/sn}^2$ olarak elde edilir. Kapının hızı

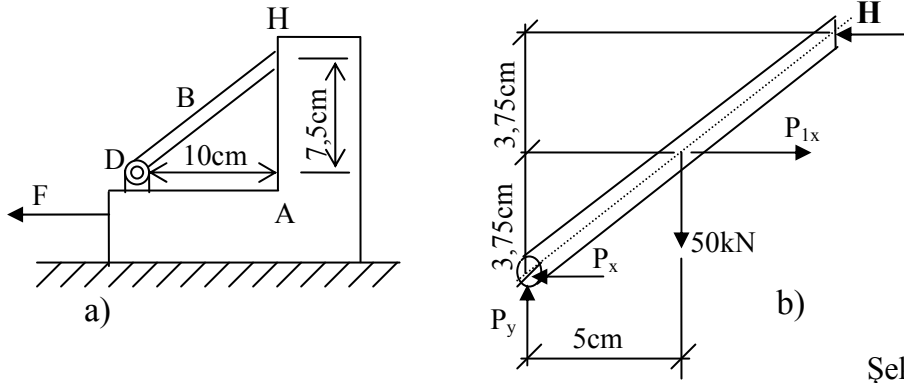
$$a_x = v_0 + at = 0 + (1,96) \cdot 5 = 9,8 \text{ m/sn}$$

- b) (6.II) ve (6.III) den $V_A + V_B = 250$; $1,2V_B - 1,2V_A = 15$

$$V_A = 118,75 \text{ kN}; \quad V_B = 131,25 \text{ kN} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek 6.2: A sehpasında sola doğru 4 m/sn^2 lik ivme veriliyor. B çubuğu D noktasında mesnetlenmiş olup tepesi H noktasında, düşey düzlemde sükunette bulunuyor. A'nın ağırlığı 200 kN , B'nin ağırlığı 50 kN dır.

- Yatay F kuvvetini;
- Çubuğun tepesindeki yatay itkiyi hesaplayınız.



Şekil 6.II

Cözüm: Verilenler: $a = 4 \text{ m/sn}^2$; $W_A = 200 \text{ kN}$; $W_B = 50 \text{ kN}$.

Bütün şekli serbest cisim kabul ederek F kuvvetini aşağıdaki gibi buluruz:

$$F = \frac{W}{g} \cdot a = \frac{(200 + 50) \text{ kN}}{9,8 \text{ m/sn}^2} \cdot 4 \text{ m/sn}^2 = 102 \text{ kN}$$

Şekil1b göre

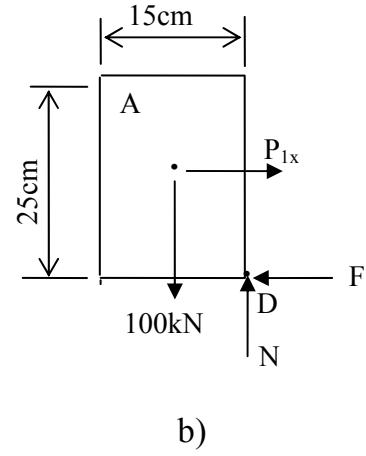
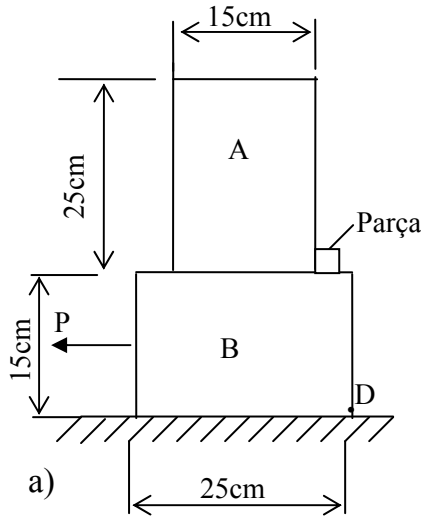
$$P_{1x} = \frac{W_B}{g} \cdot a = \frac{50}{9,8} \cdot 4 = 20,4 \text{ kN} \quad \text{buluruz.}$$

D noktasına göre momentler toplanarak H bulunur:

$$20,4 \cdot \frac{7,5}{2} + 50 \cdot 5 - H \cdot 7,5 = 0 \Rightarrow H = 43,5 \text{ kN.}$$

Örnek 6.3: A ve B cisimlerinin her biri 100 kN gelmektedir. P kuvveti sola doğru bir ivme verirken, A'nın kaymaması için B'ye küçük bir parça çivilenmiştir.

- A'nın devrilmemesi şartı ile P nin değerini bulunuz;
- Sistemin başlangıçta sağa doğru 3 m/sn lik hız ile hareket ettiği kabul edilirse 10 m gittikten sonraki hızı ne olur?



Şekil 6.III

Cözüm: Verilenler: $W_A = W_B = 100 \text{ kN}$, $v_0 = 3 \text{ m/sn}$, $s = 10 \text{ m}$.

a) **A** nın serbest cisim diyagramını çizelim. **A** nın maksimum değerini bulmak için, alt sağ köşeye göre momentlerin toplamı yazılır:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow P_{1x} = \frac{W_A}{g} \cdot a \Rightarrow P_{1x} = \frac{100}{9,8} \cdot a; \quad \sum M_D = -\left(\frac{100}{9,8} \cdot a\right) \cdot \frac{25}{2} + 100 \cdot \frac{15}{2} = 0$$

$$a = 5,88 \text{ m/sn}^2$$

Bütün sistemin serbest cisim diyagramında yatay kuvvetler toplanırsa

$$\sum F_x = \frac{W}{g} \cdot a \quad (\text{I}) \quad \text{veya} \quad P = \frac{200}{9,8} \cdot 5,88 = 120 \text{ kN} \quad \text{elde edilir.}$$

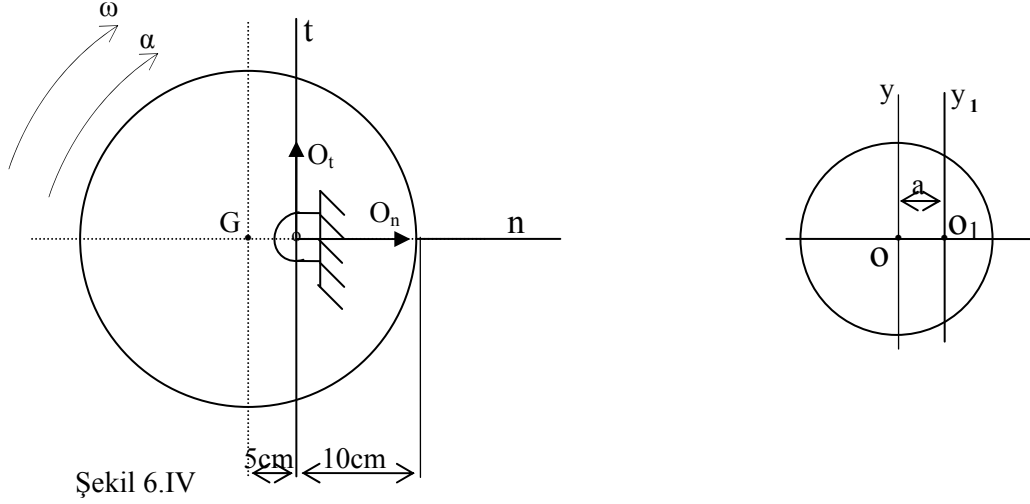
b) Önce sağa doğru alınan mesafeyi bulalım:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad (\text{II}); \quad 0 = 3^2 - 2 \cdot 5,88 s \Rightarrow s = 0,765 \text{ m}$$

10 m den geri kalan 9,235 m sola doğru olacaktır. (II) ye göre

$$v_0^2 = 0 + 2 \cdot (5,88) \cdot (9,235) \Rightarrow v = 10,42 \text{ m/sn} \quad \text{alırız.}$$

Örnek 6.4: Ağırlığı 200 kN olup vibratör olarak kullanılan eksantrik bir silindir geometrik merkezinden 5 cm mesafede ve (Şekil 6.IV) de gösterilen konuma dik bir eksen etrafında dönmektedir. Açısal hızı 10 rad/sn ve açısal ivmesi 2 rad/sn² ise silindir üzerindeki **O** mesnetinin tepkisini bulunuz.



Cözüm: Verilenler: $W = 200 \text{ kN}$, $\alpha = 2 \text{ rad/sn}^2$,

$$r = 5 \text{ cm} , \quad \omega = 10 \text{ rad/sn.}$$

n ve t eksenleri (Şekil 6.IV) deki gibi seçilsin.

Hareket denklemlerini yazalım:

$$\sum F_n = mr\omega^2 \Rightarrow O_n = \frac{200}{9,8} (0,05).10^2 = 102,04 \text{ kN}$$

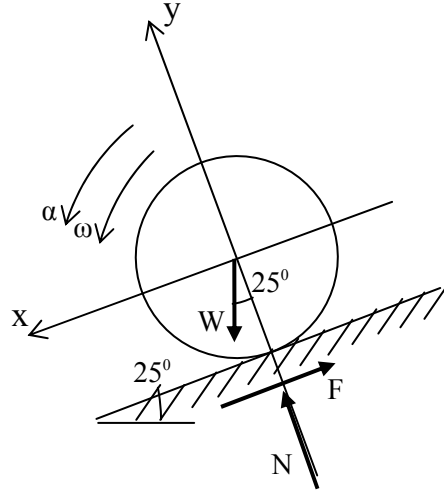
$$\sum F_t = mr\alpha \Rightarrow O_t = \frac{200}{9,8} \cdot (0,05).2 = 2,04 \text{ kN}$$

$$\sum M_o = I_o \alpha \Rightarrow M_o = I_o \alpha . \quad I_G = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} r^2$$

$$I_o = I_G + ma^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{9,8} \cdot (0,05)^2 + \frac{200}{9,8} \cdot (0,05)^2 = 0,28 \text{ kN.sn}^2 . \text{m}$$

$$\text{Gerekli moment: } M_o = I_o \alpha = 0,28.2 = 0,56 \text{ kN.m} \quad M_o = 0,56 \text{ kN.m}$$

Örnek 6.5: 75 cm çaplı 300 N luk bir tekerlek yatayile 25^0 lik açı yapan eğik düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. F sürtünme vektöle merkezinin ivmesini bulunuz.



Şekil 6.V

Cözüm: Şekil 6.V’de tekerleğe etkiyen kuvvetler sistemi görülmektedir.

$$\sum \bar{M} = \bar{I} \cdot \alpha$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{300}{9,8} = 30,6 \text{ Nsn}^2/\text{m}$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \cdot 30,6 \cdot \left(\frac{0,75}{2}\right)^2 = 2,14 \text{ N.sn}^2 \cdot \text{m}$$

Hareket denklemleri:

$$\sum F_x = m \bar{a}_x \quad (\text{I}), \quad \sum F_y = m \bar{a}_y \quad (\text{II}), \quad \sum \bar{M} = \bar{I} \alpha \quad (\text{III}).$$

Buradan :

$$300 \cdot \sin 25^\circ - F = 30,6 \bar{a}_x \quad (\text{I})^1,$$

$$N - 300 \cdot \cos 25^\circ = 30,6 \cdot \bar{a}_y = 0 \quad (\text{II})^1, \text{ (düzleme dik doğrultuda ivme mevcut değildir).}$$

$$F \cdot \frac{0,75}{2} = 2,14 \alpha \quad (\text{III})^1.$$

Şekilden (yuvarlanma problemi olduğundan)

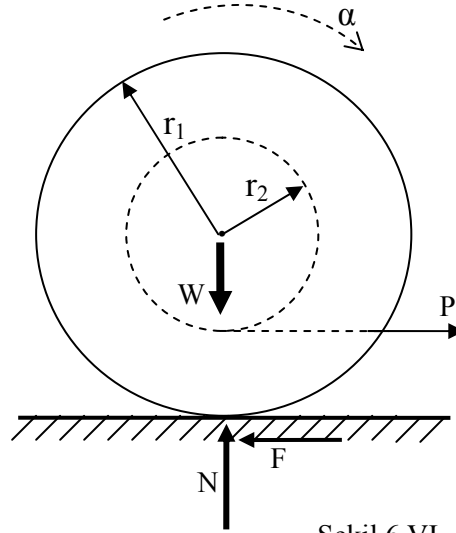
$$\bar{a}_x = r \cdot \alpha = \frac{0,75}{2} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{0,75} \cdot \bar{a}_x$$

(III)¹ den $F = (15,28) \bar{a}_x$. (I)¹ den $F = (15,28 \bar{a}_x)$ konularak $\bar{a}_x = 2,74 \text{ m/sn}^2$ bulunur.

Böylece $F = (15,28) \cdot (2,74) = 41,68 \text{ N}$ olur.

Örnek 6.6: 160 kN ağırlığında homojen bir silindir üzerinde (Şekil 6.VI) bir oyuk açılmıştır. Oyuğa yatay yönde 60 kN lık bir kuvvet etkiyor. Silindirin kaymadan yuvarlandığını farz ederek

- Silindirin kütle merkezinin ivmesini;
- Sürtünme kuvvetini bulunuz.



Şekil 6.VI

Cözüm: Verilenler: $W = 160 \text{ kN}$; $r_2 = 45 \text{ cm}$; $r_1 = 60 \text{ cm}$; $P = 60 \text{ kN}$

Yuvarlanma sağa doğru olsun. Bu durumda α (açısal ivme) saat ibreleri yönünde ve kütle merkezi ivmesi $\bar{a}$ sağa doğrudur. Hareket denklemleri;

$$\sum F_x = ma \text{ veya } P - F = \frac{160}{9,8} \cdot \bar{a} \Rightarrow 60 - F = \frac{160}{9,8} \cdot \bar{a} \quad (I)$$

$$\sum M = I\alpha \text{ veya } F \cdot 0,6 - P \cdot 0,45 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} \cdot r_1^2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} \frac{160}{9,8} \cdot (0,6)^2 \cdot \alpha$$

$$\bar{a} = r\alpha \text{ olduğu için } 0,6F - 27 = 2,94\alpha \Rightarrow 0,6F - 27 = 2,94 \frac{\bar{a}}{0,6} \quad (II)$$

(I) ve (II) denklemlerinden $\bar{a} = 0,61 \text{ m/sn}^2$, $F = 50 \text{ kN}$ buluruz.

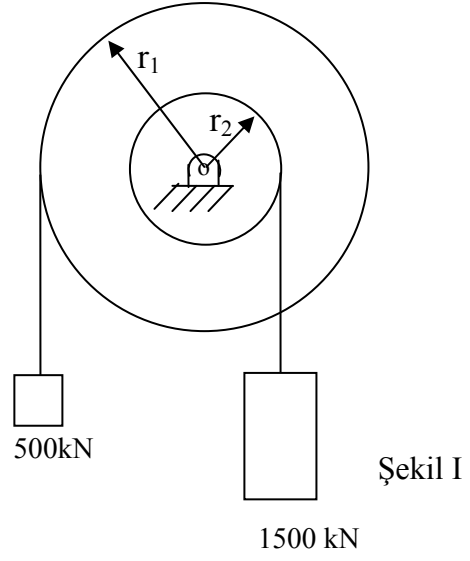
6. PROBLEMLER

Problem 6.1: Şekil I de görülen sistemin ağırlığı

320 kN ve jirasyon yarıçapı 0,45 m dir.

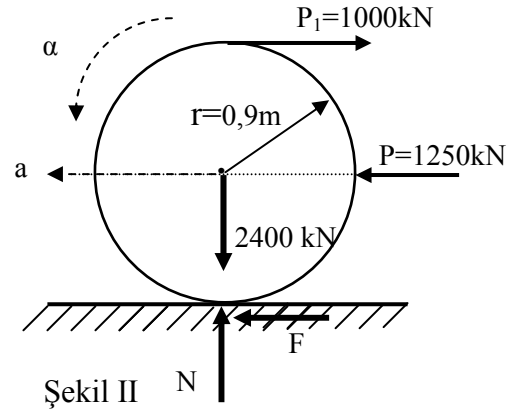
Ağırlıkların serbest bırakılması halinde ;

- makaraların açısai ivmesini bulunuz;
- İplerdeki gerilmeleri hesaplayınız

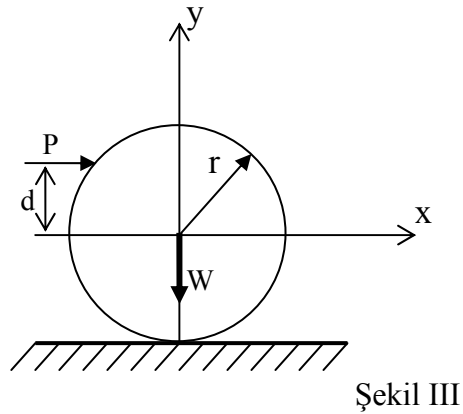


Problem 6.2: Şekil II de gösterilen homojen bir silindir kaymadan yatay bir yüzey üzerinde yuvarlanmaktadır.

- Kütle merkezinin ivmesini;
- Silindire gelen düzlem reaksiyonunu hesaplayınız.



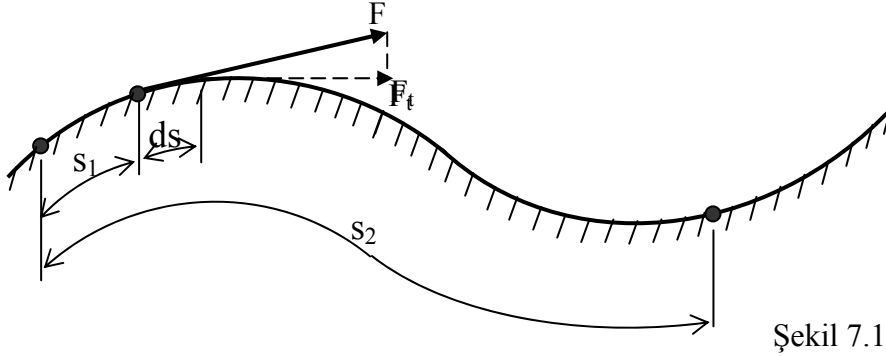
Problem 6.3 : Bir bilyardo topuna (Şekil III), kendisi ile masa arasında sürtünmesiz harekete başlaması için yatay tutulan masadan ne kadar yükseklikte vurulmalıdır?



7. İŞ VE ENERJİ

Bir parçacığa etkiyen bir F kuvveti onu herhangi bir yörünge boyunca hareket ettirdiği zaman aşağıda tarif edildiği gibi **iş** yapar

$$W_k = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds \quad (7.1)$$



Burada s_1, s_2 –parçacığın sırasıyla hareketin başlangıcında ve sonundaki yer değiştirmesi;

F_t : F kuvvetinin şekilde gösterildiği gibi teğetsel bileşeninin şiddeti;

ds : parçacığın yörünge boyunca küçük yer değiştirmesidir.

Aşağıdaki gibi özel durumlar ola bilir:

1) Şiddeti ve doğrultusu sabit bir kuvvetin bir doğru boyunca yer değiştirmesi halinde

$$W_k = F \cdot s \quad (7.2)$$

Burada W_k : yapılan iş , F : sabit kuvvet , s : hareket esnasında doğru boyunca toplam yer değiştirmedir.

2) Şiddeti sabit fakat bir doğru ile sabit açı yapan,kuvvetin yer değiştirmesi halinde

$$W_k = F s \cos \theta \quad (7.3)$$

Burada θ : kuvvetin tesir çizgisi ile yer değiştirme arasındaki açıdır.

3) Kuvvetler bir kuvvet çifti ise (dönme meydana gelir)

$$W_k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (7.4)$$

Burada **M** : kuvvet çifti; **dθ** : açısal yer değiştirme difereansiyeli; **θ₁** ve **θ₂** -ilk ve son açısal yer değiştirmelerdir (rad).

Kuvvet hareket doğrultusunda etkiyorsa iş pozitif, aksi yönde ise negatiftir.

İş, birimi (kN.m) gibi olan skaler büyüklüktür.

Güc yapılan işin değişimidir .Gücün birimi saniyede (**kN.m**) gibidir.

Verim, zamanın bazı periyotları için **alınan işin verilen işe** bölümüdür. Aynı zamanda **verim alınan gücün verilen güce** bölümü gibi de ifade edilebilir. İş israf edildiği için alınan iş verilen işten daha küçüktür (ekseriyetle sürtünme kuvvetlerini yenmek için).

V hızıyla hareket eden ve kütlesi **m** olan bir parçacığın **kinetik enerjisi**

$$T_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (7.5)$$

eşittir. Burada **m** : cismin kütlesi; **v** : cismin hızıdır.

Bir parçacık üzerine etkiyen bütün kuvvetlerin yaptığı iş, parçacığın kinetik enerjisindeki değişime eşittir:

$$W_k = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad (7.6)$$

Burada **W_k** : yapılan iş; **m** : parçacığın kütlesi; **v₁** , **v₂** : sırasıyla ilk ve son hız;

T₁ , **T₂** : sırasıyla ilk ve son enerjidir. Birimi işin birimiyle aynıdır.

Ötelenmede rijit cismin kinetik enerjisi (5) formülü ile hesaplanır.

Dönmede ise

$$T_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad (7.7)$$

. Burada **I₀** : dönme eksenine göre cismin atalet momentidir (**kg.sn².m**) ;

ω : açısal hız (rad/sn).

Düzlem harekette rijit cismin kinetik enerjisi:

$$T_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad (7.8)$$

İş ve enerji prensibine göre rijit cisim üzerine yerdeğiştirme süresince etkiyen dış kuvvetler tarafından yapılan iş, aynı yerdeğiştirme esnasında cismin kinetik enerjisindeki değişime eşittir.

7. ÖRNEKLER

Örnek 7.1: Başlangıçta serbest uzunluğu 20 cm olan bir yay, basınç altında net 5 cm kısalarak

15 cm oluyor. Yayı 7,5 cm daha (toplam 12,5 cm) kısaltarak 7,5 cm uzunluğuna getirmek için yapılan ilave işi hesaplayınız (Yay katsayısı $k=4 \text{ N/cm}$ kabul edilecektir. Yani, $F_t=4 s$).

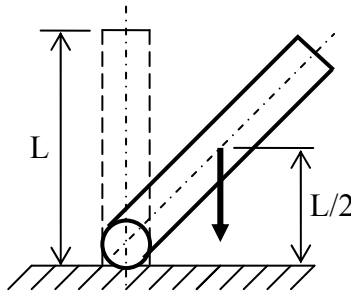
Cözüm: Tarif gereğince ((7.1) formülü) yayı 5 cm den 12,5 cm-e kadar kısaltmak için gereken iş:

$$W_k = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_5^{12,5} 4s ds = 4 \cdot \frac{1}{2} s^2 \Big|_5^{12,5} = 262,5 \text{ (N.cm)}.$$

İş aşağıdaki gibi de bulunabilir:

$$W_k = \int_0^{12,5} 4s ds - \int_0^5 4s ds = 312,5 - 50 = 262,5 \text{ (N.cm)}.$$

Örnek 7.2: W ağırlığında ve L uzunluğunda ince bir çubuk, bir ucundan yatay düzleme bir pimle bağlanmıştır (Şekil 7.II). Başlangıçta düşey konumda olan çubuğun düşmede açısal hızını bulunuz.



Şekil 7.II

Cözüm: İş yapan tek kuvvet $\frac{1}{2}$ düşey mesafe kadar düşen W ağırlığıdır. Bu zaman

yapılan iş $\frac{WL}{2}$ dir. Kinetik enerji:

$T_1=0$ den $T_2 = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{W}{g} L^2 \right) \cdot \omega^2$ kadar değişmiştir. Bu durumda

$$W_k = T_2 - T_1 \text{ veya } \frac{WL}{2} = \frac{1}{6} \frac{W}{g} L^2 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \text{ bulunur.}$$

Örnek 7.3: Ağırlığı 40 kN olan 1,8 m uzunluğunda ince bir çubuğun, bir ucundan geçen düşey bir eksene göre hızı 10 devirde 20 devir/dak dan 50 devir/dak ya çıkıyor. Bunu yapmak için gerekli sabit **M** momentini bulunuz.

Cözüm: Verilir: $W = 40 \text{ kN}$; $\omega_1 = 20 \text{ devir/dak} = \frac{20 \text{ devir}}{60 \text{ sn}} \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{sn}} = 2,09 \text{ rad/sn}$

$$\omega_2 = 50 \text{ devir/dak} = \frac{50}{60} \cdot 2\pi = 5,23 \text{ rad/sn}$$

$$\theta = 10 \text{ devir} = 10 \text{ devir} \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{devir}} = 62,8 \text{ rad} \quad L=1,8 \text{ m}$$

Bir ucundan geçen eksene göre çubuğun kütleli atalet momenti

$$I_0 = \frac{1}{3} mL^2 \text{ dir. } m = \frac{W}{g}$$

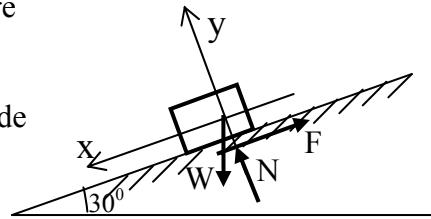
$$I_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{40}{9,8} \cdot (1,8)^2 = 4,2 \text{ kN sn}^2 \text{ m}$$

Yapılan iş dönen cismin kinetik enerjisindeki değişime eşittir:

$$W_k = M\theta = \frac{1}{2} I_0 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \Rightarrow M \cdot 62,8 = \frac{1}{2} \cdot 4,2 \cdot (5,23^2 - 2,09^2)$$

M = 0,77 kN.m bulunur.

Örnek 4: 10 m/sn lik bir ilk hızla yuvarlanan bir küre 30° lik bir eğik düzlem üzerinde harekete başlıyor (Şekil 7.IV). Küre düzlem üzerinde nereye kadar yuvarlanacaktır?



Şekil 7.IV

Cözüm: İlk kinetik enerji T_1 , yolun sonunda $T_2=0$ olur. İş yapan tek bileşen **W** ağırlığının düzlem üzerindeki (negatif)

bileşenidir. Yapılan iş: $W_k = -(W \sin 30^\circ) \cdot x = -\frac{1}{2} W \cdot x$ dir.

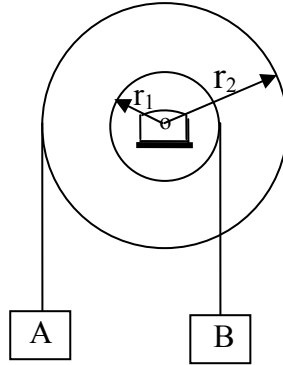
İlk kinetik enerji: $T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2$ ve $v_1 = \omega_1 \cdot r$ olduğundan

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{5} m v_1^2 = \frac{7}{10} m v_1^2 = \frac{7}{10} \frac{W}{g} v_1^2 = 0,7 \cdot \frac{W}{9,8} \cdot 10^2 \Rightarrow T_1 = 5,78 W$$

Yapılan iş kinetik enerjideki değişime eşittir:

$$W_k = T_2 - T_1 \text{ veya } -\frac{1}{2} \cdot W \cdot x = 0 - 5,78 W \Rightarrow x = 11,6 \text{ m.}$$

Örnek 7.5: Şekil 1 de **A** bloğu 500 kN, **B** bloğu 640 kN dir. Tamburun atalet momenti $I = 17 \text{ kN} \cdot \text{sn}^2 \cdot \text{m}$ dir. **A** cismi 1,8 m/sn lik hıza erişmeden önce ne kadar yol alır?



Şekil 7.V

Cözüm: Verilir: $W_A = 500 \text{ kN}$, $W_B = 640 \text{ kN}$,
 $r_1 = 0,3 \text{ m}$, $r_2 = 0,9 \text{ m}$,
 $v_A = 1,8 \text{ m/sn}$, $I = 17 \text{ kN} \cdot \text{sn}^2 \cdot \text{m}$

$$s_A = ?$$

Yapılan iş $W_k = 500 \cdot s_A - 640 \cdot s_B$ dir. Sistemin geometrisinden

$$s_B = \frac{1}{3} s_A \text{ dir veya } v_B = \frac{1}{3} v_A$$

$$W_k = 500 s_A - 640 \cdot \frac{1}{3} s_A = 286,7 s_A \quad (I)$$

Sistemin ilk kinetik enerjisi $T_1 = 0$. Son kinetik enerji

$$T_2 = -\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 \text{ dir.}$$

$$v_A = 1,8 \text{ m/sn, } v_B = \frac{1}{3}v_A = 0,6 \text{ m/sn o halde}$$

$$\omega = \frac{v_A}{r_2} = \frac{1,8}{0,9} = 2 \text{ rad/sn dir. Buradan}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{500}{9,8} \cdot (1,8)^2 + \frac{1}{2} \cdot 17,2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{600}{9,8} \cdot (0,6)^2 = 125 \quad (\text{II})$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } 286,7 s_A = 125 \Rightarrow s_A = 0,44 \text{ m bulunur.}$$

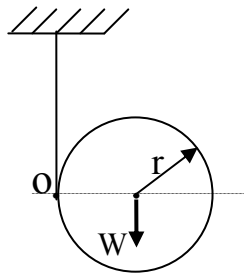
7. PROBLEMLER

Problem 7.1: Ağırlığı 200 N olan bir yapma uydu, dünya yüzünden 2500 km yükseklikte dairesel bir yörünge üzerinde dönmektedir. Bu yükseklikte yer çekim ivmesi $5,1 \text{ m/sn}^2$ dir. Yörünge hızı 24000 km/s olduğuna göre uydunun kinetik enerjisi ne olur?

Problem 7.2: Ağırlığı 400 kN olan bir demiryolu arabası, yüzde 2 eğiminde bir rampada aşağı doğru 150 m yuvarlandıktan sonra, bunu izleyen yine yüzde 2 eğimli ikinci bir rampada yukarı doğru 100 m çıkarak duruyor. Arabanın ortalama yuvarlanma direncini hesaplayınız.

Problem 7.3: Bir ip 300 kN gelen katı, homojen bir silindir etrafında sarılmıştır (Şekil I).

Sükunetten itibaren 1,8 m düştüğünde **G** merkezinin hızını bulunuz ($r = 0,45 \text{ m}$).



Şekil I

8. İMPULS VE MOMENTUM

F kuvvetinin **t₁** ve **t₂** zaman arasındaki **lineer impulsu** **F** ile **dt** çarpımının **t₁** ile **t₂** arasındaki integrali olarak tarif edilir. Matematiksel olarak

$$I_{mp} = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt \quad (8.1)$$

dir.

Burada **F**, **t**'nin fonksiyonudur.

F kuvveti, (**t₂ - t₁**) zaman aralığında sabit ise

$$I_{mp} = F \cdot (t_2 - t_1) \quad (8.2)$$

olur.

İmpuls, vektör (kuvvet) ve skaler (zaman) çarpımı ile belirlendiği için bir vektördür. O halde eksenler boyunca bileşenlerine ayrılabilir. Birimi **N.sn**' dir.

Bir parçacığın herhangi bir andaki **lineer momentumu**, kütlesi ile, o andaki hızının çarpımına eşittir.

$$M_{om} = m \cdot V \quad (8.3)$$

Lineer momentum bir vektör (hız) ve bir skaler (kütle) ile belirlendiği için bir vektördür. O halde eksenler boyunca bileşenlerine ayrılabilir. Birimi **N.sn**' dir..

Parçacıklar grubunun lineer momentumu, toplam kütlenin kütle merkezine toplandığı kabul edilerek hesaplanan lineer momentumuna eşittir :

$$M_{om} = (m_1 + m_2 + + m_n) \cdot v \quad (8.4)$$

Burada **M_{om}** → grubun lineer momentumu ; **m₁, m₂m_n** her bir parçacığın kütlesi(N.sn²/m) cinsinden; **v** kütle merkezinin lineer hızı (m/sn) cinsinden.

Lineer impuls ve momentum prensibine göre herhangi bir zaman aralığında bir parçacık grubuna etkiyen lineer impulsların verilen bir doğrultu üzerindeki bileşenlerinin cebirsel toplamı, parçacık grubunun lineer momentumunun aynı doğrultudaki bileşenlerinin değişimine eşittir. Matematik olarak **x** doğrultusu için bu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\sum (I_{mp})_x = \Delta(M_{om})_x \quad (8.a)$$

Bir F kuvvetinin O noktasından geçen bir eksen etrafında açısıl impulsu, kuvvetin M_o momenti ile dt çarpımının zaman limitleri t_1 ve t_2 arasında alınan integrali ile belirtilir. Bu matematiksel olarak ifade edilirse

$$(A_{\phi} \cdot I_{mp})_0 = \int_{t_1}^{t_2} M_o \cdot dt \text{ dir.} \quad (8.b)$$

F kuvveti zaman aralığı $(t_2 - t_1)$ esnasında sabit kalırsa açısıl impuls

$$(A_{\phi} \cdot I_{mp})_0 = M_o \cdot (t_2 - t_1) \quad (8.c)$$

Açısıl İmpuls bir vektör (kuvvetin momenti) ve bir skalerin (zaman) çarpımı ile belirlendiği için bir vektördür. Birimi kuvvet, mesafe ve zaman çarpımı ile belirtilir $(N \cdot m \cdot sn)$.

Bir parçacık grubunun açısıl momentumu grup içindeki her parçacığın açısıl momentumunun toplamına eşittir :

$$(A_{\phi} \cdot M_{om})_0 = m_1 \cdot v_1 \times r_1 + m_2 \cdot v_2 \times r_2 + + m_n \cdot v_n \times r_n \quad (8.5)$$

Burada O herhangi bir eksen üzerindeki nokta; $(A_{\phi} \cdot M_{om})_0$ - parçacık grubunun O noktası etrafındaki açısıl momentumu ; m_1, m_2, m_n her bir parçacığın kütlesi ; v_1, v_2, v_n her bir parçacığın hızı ; r_1, r_2, r_n: v_1, v_2, v_n hız vektörlerinin sırasıyla O noktasından dik uzaklığıdır.

Açısıl İmpuls ve açısıl momentum prensibine göre bir parçacık gurubuna herhangi bir zaman aralığı esnasında tesir eden dış kuvvetlerin O noktasından geçen bir eksen etrafında açısıl impulslarının cebirsel toplamı, parçacık gurubunun aynı eksen etrafındaki açısıl momentumunun değişimine (aynı zaman aralığında) eşittir.

Bu matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\sum (A_{\phi} \cdot I_{mp})_0 = \Delta (A_{\phi} \cdot M_{om})_0 \quad (8.6)$$

Şu prensibe göre, cismin ötelenmesinde daha önce geçen eşitlikler şu hali alır :

$$\left. \begin{aligned} \sum (I_{mp})_x &= \Delta (M_{om})_x = m \cdot (v_{x_2} - v_{x_1}) \\ \sum (I_{mp})_y &= \Delta (M_{om})_y = m \cdot (v_{y_2} - v_{y_1}) \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Burada $\sum (I_{mp})_x$, $\sum (I_{mp})_y$ dış kuvvetlerin sırasıyla x , y doğrultusundaki lineer impulsları, $(N \cdot sn)$ cinsinden;

$\mathbf{v}_{x_2}$; $\mathbf{v}_{y_2} \rightarrow$ cismin **x** ve **y** doğrultusundaki son hızları (**m/sn**);

$\mathbf{v}_{x_1}$; $\mathbf{v}_{y_1} \rightarrow$ cismin **x** ve **y** doğrultusundaki ilk hızları .

Gösterilen prensibe göre, bir cismin dönmesinde daha önce geçen eşitlikler şu hali alır :

$$\sum (\mathbf{A}_\zeta \cdot \mathbf{I}_{mp})_0 = \Delta \cdot (\mathbf{A}_\zeta \cdot \mathbf{M}_{om})_0 = \mathbf{I}_0 \cdot (\omega_2 - \omega_1) \quad (8.8)$$

Burada $\sum (\mathbf{A}_\zeta \cdot \mathbf{I}_{mp})_0$ - dış kuvvetlerin O noktasından geçen dönme eksenine göre açısıl impulsu (**N.sn.m**); $\mathbf{I}_0$ - cismin dönme eksenine etrafındaki atalet momenti (**N.m.sn²**); ω_2 ve ω_1 - sırasıyla cismin son ve ilk açısıl hızı (**rad/sn**).

Bir cismin düzlemsel hareketinde daha önce geçen eşitlikler şu hali alırlar :

$$\left. \begin{aligned} \sum (\mathbf{I}_{mp})_x &= \Delta \cdot (\mathbf{M}_{om})_x = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{V}_{x_2} - \mathbf{V}_{x_1}) \\ \sum (\mathbf{I}_{mp})_y &= \Delta \cdot (\mathbf{M}_{om})_y = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{V}_{y_2} - \mathbf{V}_{y_1}) \\ \sum (\mathbf{A}_\zeta \cdot \mathbf{I}_{mp})_c &= \Delta \cdot (\mathbf{A}_\zeta \cdot \mathbf{M}_{om})_c = \mathbf{I}_c \cdot (\omega_2 - \omega_1) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

burada $\mathbf{I}_c$ – kütle merkezinden geçen eksene göre atalet momenti.

İki cismin çarpışmasının bütün hallerinde kütleler çok küçük zaman aralığında tesir eder ve genellikle belirsizdir; impuls ve momentum denklemlerinde zaman ihmal edilir.

İki cisim arasında direkt merkezsel çarpışma için çarpışma katsayısı, ayrılma relatif hızının, iki cismin yaklaşma relatif hızına oranıdır :

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2} \quad (8.10)$$

burada $\mathbf{e} \rightarrow$ çarpışma katsayısı, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rightarrow$ çarpışmadan önce sırasıyla **1** ve **2** cisimlerinin hızları (**m/sn**). İki cisimde aynı doğrultuda hareket ediyorsa çarpma meydana gelmesi için $\mathbf{u}_1 > \mathbf{u}_2$ olmalıdır. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rightarrow$ cisimlerin sırasıyla çarpışmadan sonraki hızları (**m/sn**).

Çarpışma esnasında cisme aynı kuvvet (eşit ve zıt reaksiyon) tesir ettiği için, çarpışmadan önceki momentumun toplamı, çarpışmadan sonraki momentumun toplamına eşit olmalıdır. Bunun matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir :

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (8.11)$$

burada $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rightarrow$ sırasıyla **1** ve **2** cisimlerinin kütesidir.

$u_1, u_2 \rightarrow$ sırasıyla 1 ve 2 cisimlerinin çarpışmadan önceki hızları

$v_1, v_2 \rightarrow$ sırasıyla 1 ve 2 cisimlerinin çarpışmadan sonraki hızları.

v_1 ve v_2 bilinmeyenlerine göre (8.10) ve (8.11) denklemleri çözülürse

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{m_2 \cdot u_2 \cdot (1 + e) + u_1 \cdot (m_1 - e \cdot m_2)}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{m_1 \cdot u_1 \cdot (1 + e) + u_2 \cdot (m_2 - e \cdot m_1)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

alırız.

a) Tam elastik cisimler için, yani $e = 1$ için

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{2 \cdot m_2 \cdot u_2 + u_1 \cdot (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{2 \cdot m_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

olur.

$m = m_1 = m_2$ hali için

$$v_1 = u_2 \quad ; \quad v_2 = u_1 \quad \text{olur.} \quad (8.14)$$

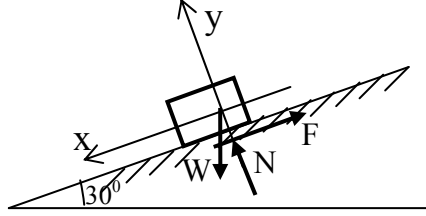
b) Elastik olmayan çarpışmada ($e = 0$)

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2}{m_1 + m_2} \quad (8.15)$$

olarak bulunur.

8. ÖRNEKLER

Örnek 8.1: 30 kN ağırlığında bir blok, yatayla 30° lik eğimli bir düzlem üzerinde, durgun halden başlayarak, aşağıya kayıyor. Blok ile arasında kinetik sürtünme katsayısı $\mu = 1/4$ olduğuna göre 3 sn sonunda bloğun hızını bulunuz.



Şekil 8.I

Çözüm: Verilenler: $W = 30 \text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 1/4$, $t = 3 \text{ sn}$, $v_{x1} = 0$.

$$V_{x2} = ?$$

$$\sum (I_{mp})_x = \Delta(M_{om})_x \text{ veya } (\sum F_x).t = m.(v_{x2} - v_{x1})$$

$$t = 3 \text{ sn} ; v_{x1} = 0 ; v_{x2} \Rightarrow 3 \text{ sn sonundaki hız.}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{30}{9,8} = 3,06 \frac{\text{kNsn}^2}{\text{m}}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ (Çünkü } y \text{ yönünde hareket yoktur)} \Rightarrow$$

$$N - W.\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N = 30.0,866 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow W.\sin 30^\circ - \mu.N = 0 , N = 25,98 \text{ kN.}$$

$$(8.1) \text{ den: } (W.\sin 30^\circ - \mu.N).t = (v_{x1} - v_{x2}).m$$

$$(30.0,5 - \frac{1}{4}.25,98).3 = 3,06.v_{x2} \Rightarrow v_{x2} = 8,34 \text{ m/sn}$$

Örnek 8.2: 25 kN lık bir blok yatay düzlem üzerinde sükunetten $F = 3t - 5t^2$ ye göre değişen F yatay kuvveti etkisi ile harekete geçer. Maksimum hızı bulunuz.

Çözüm: Verilenler: $v_1 = 0$, $W = 25 \text{ kN}$, $v_2 = v$.

$$V_2 = ? ; v_{\max} = ?$$

$$\sum (I_{mp})_x = \Delta(M_{om})_x \text{ veya } \int_0^t F dt = m(v_2 - v_1)$$

$$\int_0^t (3t - 5t^2) dt = \frac{W}{g} (v - 0) \Rightarrow 3 \frac{t^2}{2} - 5 \frac{t^3}{3} = \frac{25}{9,8} v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 0,588t^2 - 0,653t^3 + C_1. \quad v_{\max} \text{ için } dv/dt = 0 \text{ olmalıdır.}$$

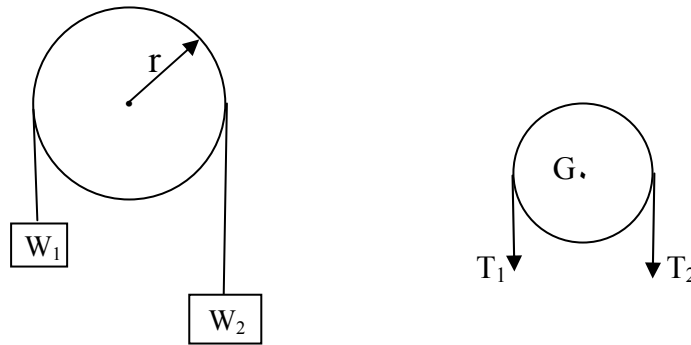
$$\frac{dv}{dt} = 1,176t - 1,959t^2 = 0 \Rightarrow t = 0,6 \text{ sn.}$$

$$v_{\max} = 0,588.(0,6)^2 - 0,653.(0,6)^3 = 0,07$$

$$v_{\max} = 0,07 \text{ m/sn .}$$

Örnek 8.3 : Şekil 1 de gösterilen ve yarıçapı 0,6 m olan bir makara asılı olarak 5 kN ve 7,5 kN

luk iki ağırlık taşımaktadır. Ağırlıkların hızını 3m/sn den 6m/sn ye yükseltmek için gerekli zamanı bulunuz .



Şekil 8.III

Cözüm: Verilenler: $W_1=5 \text{ kN}$, $W_2=7,5 \text{ kN}$, $r=0,6 \text{ m}$, $v_1=3 \text{ m/sn}$, $v_2=6 \text{ m/sn}$.

Bir serbest cisim diyağramı çizilir. 5 kN ve 7,5 kN luk ağırlığı taşıyan iplerdeki gerilme kuvvetleri T_1 ve T_2 olsun. (8.9) denklemlerine göre yazabiliriz:

$$(T_1 - 5).t = \frac{5}{9,8} (6 - 3), \quad (\text{I})$$

$$(7,5 - T_2).t = \frac{7,5}{9,8} (6 - 3), \quad (\text{II})$$

$$((T_2 - T_1).0,6).t = \bar{I}(\omega_2 - \omega_1) \quad (\text{III})$$

(III) denkleminde $T_2 \cdot 0,6$ ve $T_1 \cdot 0,6$ gerilme kuvvetlerinin makara merkezine göre

momentleridir.

$$(I_{G_x} + I_{G_y}) = I_G \Rightarrow I_G = mr^2$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{6}{0,6} = 10 \text{ rad/sn} ; \quad \omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{3}{0,6} = 5 \text{ rad/sn}$$

Konularak (III) denklemini

$$(T_2 - T_1) \cdot 0,6t = \frac{0,5}{9,8} (10 - 5) \quad \text{olur} \quad (III)^1$$

(I) ve (II) nin toplanması ile

$$(T_1 - T_2) \cdot t + 2,5t = \frac{12,5}{9,8} \cdot 3 \quad \text{bulunur} \quad (IV)$$

$$(III)^1 \text{ den } (T_1 - T_2) \cdot t = -\frac{25,5}{58,8} \text{ bu de\u011fer (4) de yerine konularak}$$

$$t = 1,7 \text{ sn bulunur.}$$

Örnek 8.4: Ağırlığı 485 kN ve çapı 20 cm olan homojen

silindir ani olarak yatay bir düzleme

düşürüldüğünde yatay geometrik eksenini etrafında

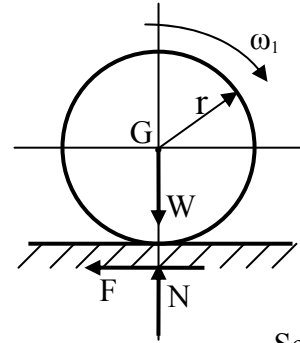
saat ibreleri yönünde 36 rad/sn hızla dönmektedir.

Sürtünme katsayısını 0,15 kabul ederek:

a) Sıfır yuvarlanma başladığında G kütle

merkezinin hızını ;

b) Bu başlamadan önce kütle merkezinin aldığı yolu bulunuz (Şekil 8.IV).



Şekil 8.IV

Cözüm : Verilir : $W = 485 \text{ kN}, r = 10 \text{ cm}, \omega_1 = 36 \text{ rad/sn}, \mu = 0,15, F = \mu N.$

$$v = ? ; s = ?$$

Serbest cisim diyagramını çizerek (Şekil 8.IV)

$$N = W = 485 \text{ kN} ; F = 0,15N = 0,15 \cdot 485 = 72,75 \text{ kN} ;$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{485}{9,8} = 49,5 \text{ kN.sn}^2 / \text{m} ;$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \cdot 49,5 \cdot (0,1)^2 = 0,25 \text{ kN.sn}^2 \cdot \text{m} \quad \text{buluruz.}$$

İmpuls momentum denklemlerini yazalım:

$$\sum (I_{mp})_n = \Delta (M_{om})_n \quad \text{veya} \quad F \cdot t = m(v_2 - v_1); \quad v_1 = 0, \quad v_2 = v. \quad (I)$$

$$\sum (A\dot{\phi} I_{mp})_G = \Delta (A\dot{\phi} I_{mp})_G \quad \text{veya} \quad F \cdot r \cdot t = I(\omega_2 - \omega_1) \quad (II)$$

(II) de saat ibreleri yönü pozitif kabul edilmiştir.

$$(I) \text{ ve } (II) \text{ den } 72,75t = 39,5 \quad (1)^1 \quad - 72,75 \cdot 0,1, t = 0,25(\omega - 36) \quad (II)^1$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{0,1} = 10v \quad \text{dir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 72,75t = 39,5v \\ - 72,75t = 2,5v - 9 \end{array} \right\} \text{ bu denklemlerden } v = 1,2 \text{ m/sn}; \quad t = 0,8 \text{ sn};$$

$$s = \frac{v + 0}{2} \cdot t = 0,48 \text{ m.}$$

Örnek 8.5: Eşit iki bilye topunun çarpışmadan önceki hızları sırasıyla $u_1 = 6 \text{ m/sn}$ ve $u_2 = -8 \text{ m/sn}$ dir. Çarpışma katsayısı $e = 0.8$ olduğuna göre çarpışmadan sonraki hızları bulunuz.

Cözüm : Aşağıdaki temel temel denklemler uygulanarak :

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \quad \text{ve} \quad m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2; \quad (u_1 + u_2 = v_1 + v_2).$$

$$0,8 = \frac{v_2 - v_1}{6 - (-8)} \quad \text{veya} \quad v_2 - v_1 = 11,2 \quad (I)$$

$$m_1 = m_2 = m \Rightarrow 6m - 8m = m v_1 + m v_2 \Rightarrow v_1 + v_2 = -2 \quad (II)$$

$$(I) \text{ ve } (II) \text{ den } \boxed{v_1 = -66 \text{ m/sn}}, \quad \boxed{v_2 = 4,6 \text{ m/sn}}$$

Örnek 8.6 : Bir top düşey olarak zeminden 19,2 m sıçırıyor. Bir sonraki sıçramada 13,8 m yüksekliğe ulaşıyor. Top ile zemin arasındaki sıçrama katsayısı nedir ?

Cözüm : Verilenler: $h_1 = 19,2 \text{ m}, \quad h_2 = 13,8 \text{ m}.$

$$e = ?$$

Sükunette olduğu için $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ olur.

$$\mathbf{u}_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 19,2} = 19,4 \text{ m / sn.}$$

$$\mathbf{v}_1 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 13,8} = 16,4 \text{ m / sn.}$$

Aşağı doğru hareket hızı pozitif kabul ediliyor

$$e = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2} = \frac{0 - (-16,4)}{19,4 - 0} = 0,84.$$

$$(e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{13,8}{19,2}} = 0,84 \text{ gibi de bulunabilir}).$$

9. MEKANİK TİTREŞİMLER

Kütlesi ve elastikliği bulunan bir cismin belirli zaman aralığında tekrarlanan hareketine **mekanik titreşim** denir.

Hareketin kendisini tekrarlaması için geçen zamana **periyot** denir.

Birim zamandaki salınım sayısına **frekans** denir.

Sistemin içindeki kuvvetlerin tesiriyle sistemde **serbest titreşimler** meydana gelir.

Sistemin serbest titreşimindeki frekansına **tabii frekans** denir.

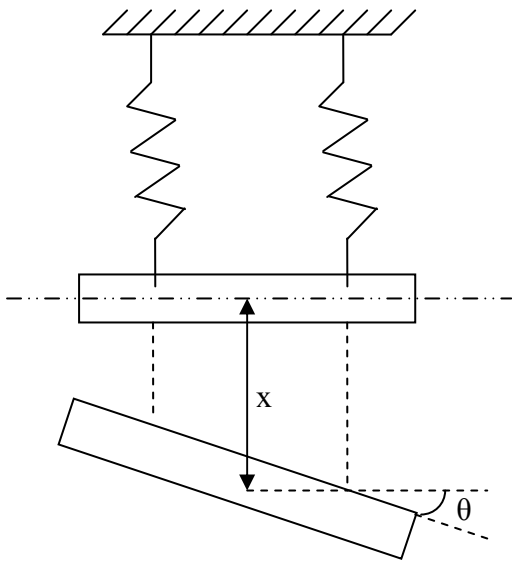
Sisteme periyodu bozucu dış kuvvetler tesir ettiği zaman **zorlanmış titreşimler** meydana gelir.

Sistemin tabii frekansı ile zorlanmış titreşimlerin frekansı üst üste düşer veya bu frekansla tabii frekans arasındaki fark çok küçük olacak şekilde yaklaşırsa **rezonans** olur.

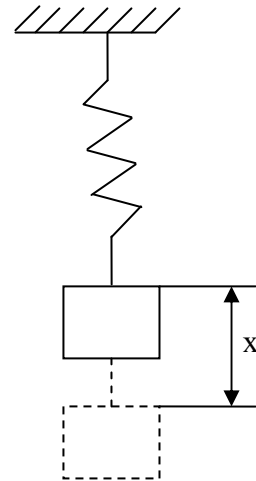
Zamanla yok olan titreşimlere **kaybolucu titreşimler** denir. Serbest titreşimler kaybolucu karakterdedirler.

Zamanla kendini tekrarlamaya devam eden titreşimlere **kalıcı titreşimler** denir. Zorlanmış titreşimler kalıcı titreşimlere örnektir.

Sistemin serbestlik derecesi hareketin belirtilmesi için lüzumlu değişken (koordinat) sayısına bağlıdır. Örnek olarak Şekil 1'deki yaya bağlanan kütlenin yalnız düşey doğrultuda düşünülen hareketi bir koordinatla belirtilebilir. Dolayısıyla sistem tek serbest derecelidir ($x; n_s = 1$).



Şekil 9.2



Şekil 9.1

Şekil 9.2’de görülen iki yaya bağlı çubuğun hareketini tarif etmek için iki değişkene ihtiyaç vardır ve bundan dolayı sistemin serbestlik derecesi ikidir (x ve θ ; $n_s = 2$).

Basit Harmonik Hareket : Basit Harmonik Hareket zamanın sinüs ve cosinüs fonksiyonları ile gösterilir. Bundan dolayı $x = X \cdot \sin \omega t$ (1) basit harmonik hareketin bir denklemdir. Bu hareket X cm uzunluğunda bir vektörün, dairesel yörünge üzerinde sabit ω rad/sn açısal hızı ile dönerken çap üzerinde vektörün izdüşümü ile temsil edilebilir. Bu tip harekette :

x : çap üzerinde (cm cinsinden) izdüşüm uzunluğu;

X : dönen vektörün (cm cinsinden) boyu;

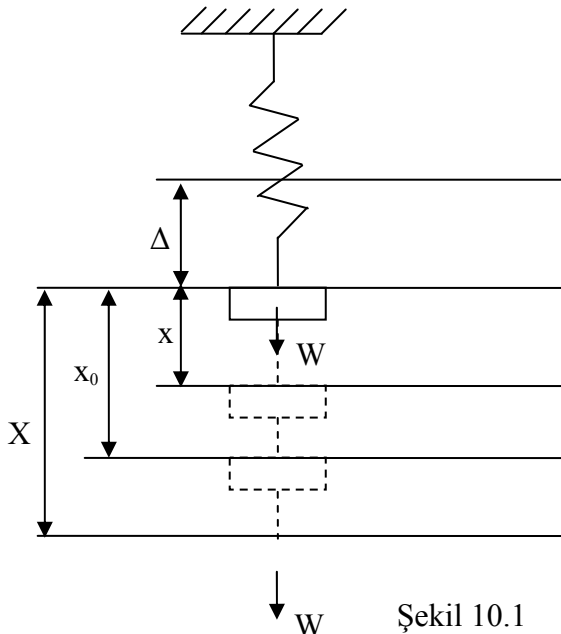
ω : (rad/sn cinsinden) dairesel frekans;

$T_p = \frac{2\pi}{\omega}$: sn cinsinden periyot ;

$f = \frac{\omega}{2\pi}$: frekans, salınım/sn veya sn^{-1} cinsinden .

10. SERBEST (LİNEER) TİTREŞİMLER

W ağırlığı yay katsayısı veya modülü k (kN/cm) olan düşey bir yaya asılmıştır. Ağırlık denge konumundan x_0 kadar aşağıda ve v_0 ilk hızı ile harekete başlatılıyor (Şekil 10.1).

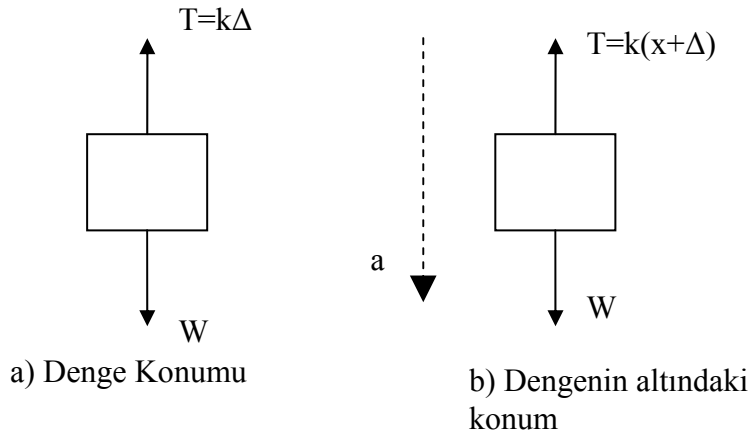


Şekil 10.1 de **W** ağırlığının çeşitli konumları gösterilmiştir. **X** değerine hareketin genliği denir. Ağırlığın denge konumundan **X** kadar yukarı çıkabileceği tabiidir.

Yaydaki gerilme kuvveti yayın uzamış veya kısalmış konumu ile ilk konumu (**W** ağırlığı olmadan) arasındaki uzaklığın yay katsayısı ile çarpımına eşittir.

$$T = \Delta.k \quad (10.1)$$

Ağırlığın denge konumunda ve denge konumundan **X** kadar aşağıdaki konumunda serbest cisim diyagramını çizelim (Şekil 10.2 a, b).



Şekil 10.2

Cismin herhangi bir andaki **x** konumunun denge konumundan itibaren ölçüldüğüne dikkat edelim.

Şekil 10.2.a 'da görüldüğü gibi ivme yoktur, dolayısıyla sistem dengededir.

Burada
$$\left. \begin{aligned} T &= k.\Delta = W \\ \Delta &= W/k \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$
 yazılabilir.

Şekil 10.2.b'de denge konumundan aşağı doğru yer değiştirmeleri pozitif kabul edelim. İvmenin yönü bilinmemektedir, o da pozitif kabul edilirse negatif işaret yukarı doğru olduğunu gösterecek serbest cisim diyagramına Newton kanunu tatbik edilirse

$$\sum F_y = m.a \quad \text{veya} \quad W - T = \frac{W}{g}.a$$

elde edilir.

$$T = k.(x + \Delta) \quad \text{ve} \quad W = k.\Delta \quad \text{yerlerine konursa}$$

$$-k.x = \frac{W}{g}.a$$

bulunur.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ den hareket denklemi } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kg}{W}.x = 0 \quad (10.3) \text{ şekline gelir.}$$

x pozitif olduğu zaman (denge konumunun altında) ivmenin yukarı doğru olduğu görülmektedir. Buna, ağırlık aşağıya en alt konumuna doğru hareket ederken ivmenin yukarıya veya hızının azalacağı şeklinde mana verilebilir.

(10.3) diferansiyel denklemin çözümünü

$$x = A.\sin \omega t + B.\cos \omega t \quad (10.4)$$

şeklinde kabul edebiliriz. Burada ω dairesel frekans ve rad/sn dir.

Bunun çözüm olup olmadığını anlamak için zamana göre ikinci türev alınırsa :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{dx}{dt} = \omega (A.\cos \omega t - B.\sin \omega t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -A.\omega^2.\sin \omega t - B.\omega^2.\cos \omega t = -\omega^2 (A.\sin \omega t + B.\cos \omega t) = -\omega^2.x \end{aligned} \right\} (10.5)$$

elde edilir.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2.x \quad (10.5')$$

(10.5') değeri (10.3) hareket denkleminde yerine konursa

$$-\omega^2.x + \frac{kg}{W}.x = 0 \quad \text{bulunur.}$$

X çözüm kabul edildiği için ω değeri

$$\omega = \sqrt{\frac{kg}{W}} \quad (10.6)$$

olur.

Bundan dolayı çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$X = A.\sin (\sqrt{kg/\omega}) t + B.\cos (\sqrt{kg/\omega}) t \quad (10.7)$$

Hareketin, devrinin 2π radyan aralığında tamamlanacağına dikkat edelim.

$$\text{Yani } \sqrt{kg/\omega}.T = 2\pi \quad ; \quad T = 2\pi.\sqrt{\omega/kg} \quad (10.8)$$

Burada T periyot veya bir devrin tamamlanması için geçen zaman.

Frekans periyodun tersi veya

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{W}} \quad \text{dir.} \quad (10.9)$$

Daha önce izah edildiği gibi $\Delta = \frac{W}{k}$; $W = k \cdot \Delta$ dir. Bu değeri kullanarak (10.8) ve (10.9) formülleri aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{g}} \quad \text{ve} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad (10.10)$$

A ve **B** sabitleri problemin verilen sınır şartlarından tayin edilecektir. Burada

$t = 0$ da $x = x_0$, $v = v_0$ kabul edilip x in ve v nin bu değerleri $t = 0$ ile birlikte (10.4) ve (10.5) denklemlerinde yerine konursa

$$B = x_0, \quad A = \frac{v_0}{\omega} \quad \text{alırız.}$$

Dolayısıyla çözüm

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \quad \text{dir.} \quad (10.11)$$

Çözüm başka bir formül şeklinde de yazılabilir:

$$x = X \cos(\omega t - \phi) \quad (10.12)$$

Burada **X** –genlik, ϕ – faz açısıdır.

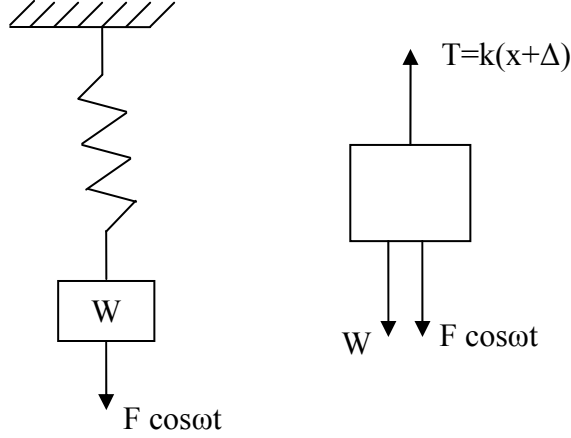
$$X = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} \quad (10.13)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{v_0}{x_0 \omega} \quad (10.14)$$

Böylece, genellikle harekette bulunan bir ağırlığın teorik olarak sonsuza kadar devam eden serbest titreşimi inceleniyor.

11. ZORLANMIŞ TİTREŞİMLER (SÖNÜMSÜZ)

W ağırlığı yaya sabiti **k (N/cm)** olan bir yaya asılmıştır. Ağırlığın üzerine periyodu bozucu **$F \cdot \cos \omega \cdot t$** kuvveti tesir etmektedir. Hareketi inceleyelim (Şekil 1).



Şekil 11.1

Hareketin diferansiyel denkleminde serbest titreşimin denklemine nazaran şimdi ilave bir terim olacaktır, yani

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = F \cdot \cos \omega \cdot t$$

veya

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k \cdot g}{W} \cdot x = \frac{F \cdot g}{W} \cdot \cos \omega \cdot t \quad (11.1)$$

Diferansiyel denklemler teorisine göre bu denklemin çözümü iki parçanın toplamından ibarettir :

- 1) Yukarıda belirtildiği gibi sağ tarafı sıfır olan (kaybolucu kısım) denklemin çözümü
- 2) (11.1) denkleminin herhangi bir özel çözümü.

Kalıcı kısım olarak isimlendirilen ikinci çözüm

$$x = X \cdot \cos \omega \cdot t \quad (11.2)$$

şeklinde kabul edelim.

Buradan

$$\frac{dx}{dt} = -X \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -X \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega \cdot t \quad (11.3)$$

elde edilir.

(11.2) ve (11.3) denklemleri (11.1)'de yerlerine konursa;

$$-X.\omega^2.\cos\omega.t + \frac{k.g}{W}.X.\cos\omega.t = \frac{F.g}{W}.\cos\omega.t$$

Dolayısıyla

$$X = \frac{F.g}{k.g - \omega^2.W} \quad \text{veya} \quad X = \frac{F/k}{1 - \omega^2 \cdot \frac{W}{g.k}} \quad (11.4)$$

oluyor.

F kuvvetinin yay üzerine statik olarak tesir ettiği zaman ona verdiği çökmeyi Δ_F ile gösterelim, yani

$$\Delta_F = \frac{F}{k} \quad (11.5)$$

Aynı zamanda $\omega_n^2 = \frac{k.g}{W}$ (11.6)

olduğuna dikkat edelim. Burada ω_n bozucu kuvvet olmadığı zamanki tabii frekanstır.

Dolayısıyla

$$X = \frac{\Delta_F}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (11.7)$$

şeklinde yazılabilir.

İncelemeyi kolaylaştırmak için $\frac{\omega}{\omega_n} = r$ tanımı yapılırsa kalıcı kısmın çözümü

$$X = \frac{\Delta_F}{1 - r^2}.\cos\omega.t \quad (11.8)$$

olur.

Frekansın, bozucu kuvvet frekansı ile aynı olduğuna dikkat edelim.

Genel çözüm ise

$$x = A.\sin(\sqrt{\frac{k.g}{W}}.t) + B.\cos(\sqrt{\frac{k.g}{W}}.t) + \frac{1}{1 - r^2}.\Delta_F.\cos\omega.t \quad (11.9)$$

olur.

(11.9) da ilk iki terim serbest titreşimi temsil eder. Titreşimi kademeli olarak, yok edecek şekilde sönümler mevcut olduğundan bunlar kaybolucu karakterdedirler. Dolayısıyla yalnız

$$x = \Delta_F \cdot \frac{1}{1-r^2} \cdot \cos \omega.t \quad (11.10)$$

çözümü ile çalışır.

Bu çözümün maksimum değeri $\cos \omega.t = 1$ olduğu zaman meydana gelir, yani

$$X_{\text{maks}} = \frac{\Delta_F}{1-r^2} \quad (11.11)$$

Bu değer genlik olarak isimlendirilir.

Kalıcı kısım genliğinin F kuvvetinin sebep olduğu Δ_F statik çökme oranına büyütme faktörü denir :

$$b_f = \frac{1}{1-r^2} \quad (11.12)$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n} \quad \text{olduğundan büyütm faktörü}$$

$$b_f = \frac{1}{1-(f/f_n)^2} \quad (11.13)$$

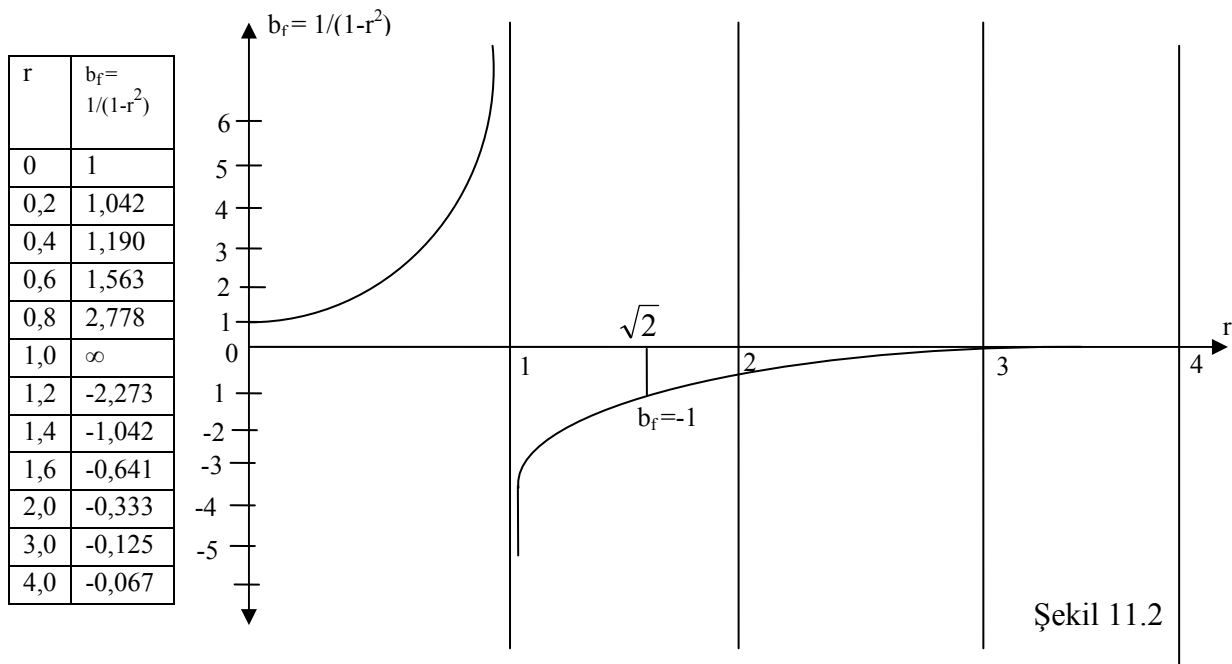
şeklinde yazılabilir.

r ' ye frekanslar oranı denir.

(11.13) değeri f in f_n den küçük olup olmamasına bağlı olarak pozitif ve negatif olabilir.

$f = f_n$ olduğu zaman rezonans meydana gelir ve teorik olarak genlik (X_{maks}) sonsuz oluyor.

Büyütme faktörünün, frekanslar oranı r ye bağlı olarak diyagram aşağıda çizilmiştir (Şekil 11.2).



$r > 1$ olduğu zamanki negatif değer F kuvvetinin x yer değiştirmesinin ters yönünde olduğunu gösterir.

$r = \sqrt{2}$ olduğu zaman $b_f = -1$ dir. Bunun manası: r oranı $\sqrt{2}$ den büyük olduğu zaman büyütme faktörü 1 den küçük olacaktır. Bu şartlar altında tatbik edilen bozucu kuvvet, statik olarak tatbik edildiği zaman yaptıracığı hareketten daha küçük hareket yaptıracaktır.

11. ÖRNEKLER

Örnek 11.1: Ağırlığı 250 kN olan bir motor her birinin sabiti $k = 20 \text{ kN /cm}$ olan dört yay üzerine oturtulmuştur. Motor titreşirken frekansını ve peryodunu bulunuz.

Cözüm : Her yay $W = \frac{250}{4} = 62,5 \text{ kN}$ ağırlık taşıyor.

Frekans :

$$f = \frac{1}{2.\pi} \cdot \sqrt{\frac{k.g}{W}} = \frac{1}{2.3,14} \cdot \sqrt{\frac{20.981}{62,5}} = 2,82 \text{salıhalı / sn} = 2,82 \text{ 1 / sn}$$

Peryot : $T = \frac{1}{f} = 0,355 \text{sn}$ bulunur.

Örnek 11.2: 10 cm çapında ve 2,5 cm kalınlığında çelik bir disk 1/6 cm çapında ve 60 cm uzunluğunda bir çelik tele rijit olarak bağlanmışır. Sistemin tabii frekansını bulunuz?

Cözüm : Cisimlerin mukavemeti teorisine göre telin dönme açısı $\theta = \frac{M_b.L}{G.I_o}$ dir.

Burada M_b - burulma momenti (N.cm); G – kayma modülü, çelik için $G = 8.10^3 \text{ kN/cm}^2$;

$$I_o \rightarrow \text{diskin atalet momenti, } I_o = \frac{\pi.d^4}{32}$$

Dolayısıyla burulma yay katsayısı

$$k = \frac{M_b}{\theta} = \frac{\pi.d^4.G}{32.L} = \frac{3,14.(\frac{1}{6})^4.8.10^3}{32.60} = 0,0101 \text{ kN.cm / rad}$$

Silindirin kütleli atalet momenti

$$I_o = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2; \quad m = \frac{W}{g}; \quad W = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \cdot \gamma \Rightarrow I_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h \cdot \gamma}{4 \cdot g}$$

$$\gamma = 78 \cdot 10^{-6} \text{ kN/cm}^3; \quad g = 981 \text{ cm/sn}^2 \quad I_o = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3,14 \cdot 10^2 \cdot 2,5 \cdot 78 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 981} \right) \cdot 5^2 = 0,000195 \text{ kN.sn}^2 \text{ cm}$$

$$\text{Frekans } f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{I_o}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{0,0101}{0,000195}} = 1,14 \text{ salıhalı /sn} \quad f = 1,14 \text{ sn}^{-1}.$$

Örnek 11.3: Bir maddesel nokta basit bir harmonik hareket yapmaktadır. Maksimum ivme 16 m/sn^2 ve maksimum hız 2 m/sn dir. Hareketin genliğini ve frekansını belirtiniz.

Cözüm : Verilenler: $a_{\text{mak}} = 16 \text{ m/sn}^2$; $V_{\text{mak}} = 2 \text{ m/sn}$

$$V_{\text{mak}} = X \cdot \omega \quad (\text{I}) ; \quad a_{\text{mak}} = X \cdot \omega^2 \quad (\text{II})$$

(II) nolu ifadeyi (I) e bölersek:

$$\omega = \frac{16}{2} = 8 \text{ rad/sn} \text{ alırız.}$$

$$(I) \text{ den } X = \frac{v_{\text{mak}}}{\omega} = \frac{2}{8} = 0,25 \text{ m}; \quad \text{frekans } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8}{2\pi}; \quad f = 1,27 \text{ sn}^{-1}.$$

Örnek 11.4: Maddesel bir nokta genliği 10 cm ve periyodu $0,75 \text{ sn}$ olan basit bir harmonik hareket yapıyor. Maksimum hız ve maksimum ivmeyi hesaplayınız.

Cözüm : Verilenler: $X = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$; $T = 0,75 \text{ sn}$.

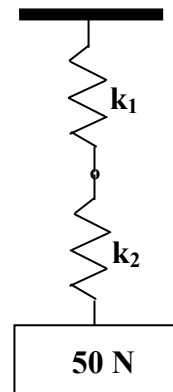
$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad V_{\text{mak}} = X \cdot \omega; \quad a_{\text{mak}} = X \cdot \omega^2; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2 \cdot (3,14)}{0,75} = 8,38 \text{ rad/sn} . \quad V_{\text{mak}} = 0,1 \cdot 8,38 = 0,84 \text{ m/sn};$$

$$a_{\text{mak}} = (0,1) \cdot (8,38)^2 = 7,02 \text{ m/sn}^2 .$$

Örnek 11.5: Ağırlığı 50 N olan bir blok, şekilde görülen bir yay düzlemi ile asılmıştır. Blok düşey olarak aşağı doğru çekildikten sonra serbest bırakılıyor. a) Meydana gelen hareketin periyot ve frekansını, b) hareketin genliği $7,5 \text{ cm}$ ise bloğun maksimum hız ve ivmesini hesaplayınız.

Cözüm : Verilenler: $W = 50 \text{ N}$; $k_1 = 5 \text{ N/cm}$; $k_2 = 6 \text{ N/cm}$.



a) Yaylar seri bağı olduğu için

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{k_2}$$

$$k = \frac{\omega}{\delta} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{k_1} + \frac{\omega}{k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{30}{11} = 2,727 \text{ N/cm}$$

$$k = 2,727 \text{ N/cm} = 272,7 \text{ N/m}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{272,7}{\frac{50}{g}} = \frac{(272,7) \cdot (9,81)}{50} = 53,5 \Rightarrow \omega = 7,32 \text{ rad/sn.}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot (3,14)}{7,32} = 0,858, \quad T = 0,858 \text{ sn.}$$

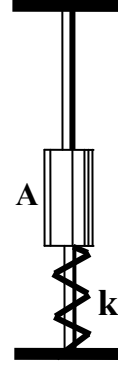
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7,32}{2 \cdot (3,14)} = 1,165 \text{ çevirim/sn veya } f = 1,165 \text{ sn}^{-1}.$$

b) $X = 7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m}$; $V_{\text{mak}} = X \cdot \omega = (0,075) \cdot (7,32) = 0,55$; $V_{\text{mak}} = 0,55 \text{ m/sn}$.

$$a_{\text{mak}} = X \cdot \omega^2 = (0,075) \cdot (7,32)^2 = 4,01 ; \quad a_{\text{mak}} = 4,01 \text{ m/sn}^2 .$$

11. PROBLEMLER

Problem 11.1: Ağırlığı 40 N olan bir A bileziği, katsayısı $k = 4 \text{ n/cm}$ olan bir yay üzerinde şekil 1 de görüldüğü gibi hareketsiz durmaktadır. Yay 5 cm sıkıştırıldıktan sonra serbest bırakılırsa meydana gelen hareketin periyodunu, maksimum hızını ve maksimum ivmesini hesaplayınız.



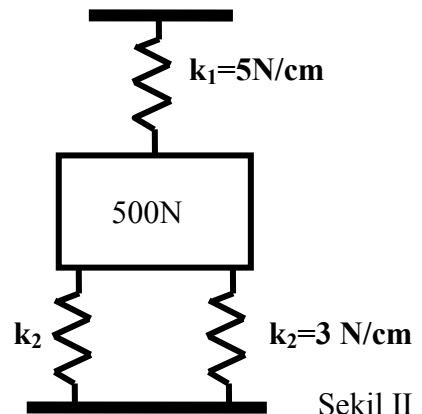
Şekil I

Problem 11.2 : Ağırlığı 40 N olan A bileziği bir yayın üzerinde şekil 1 de görüldüğü gibi hareketsiz durmaktadır. Bilezik yaya bağlanmıştır ve genliği 5 cm şiddetinde basit bir harmonik hareket yapmaktadır.

- k yay katsayısının mümkün olan en büyük değerini ,
- hareketin buna karşı gelen frekansını hesaplayınız.

Problem 3: Ağırlığı 500 N olan bir blok, Şekil II de görülen bir yay düzlemi ile asılmıştır. Blok düşey olarak aşağı doğru çekildikten sonra serbest bırakılıyor.

- Meydana gelen hareketin periyot ve frekansını,
- hareketin genliği 7,5 cm ise blokun maksimum hız ve ivmesini hesaplayınız.



Şekil II

12. VİRTÜEL İŞ

Virtüel Yer değiştirme ve Virtüel İş: Bir parçacığın virtüel yer değiştirmesi, parçacığın konumunun bağları ile uyuşan herhangi sonsuz küçük değişimdir.

Virtüel iş, parçacık üzerine tesir eden bütün kuvvetlerin virtüel yer değiştirme esnasında yaptıkları iştir.

Denge : Bir parçacığın dengesi için gerek ve yeter şart, parçacığın herhangi bir virtüel yer değiştirmesinde parçacığa tesir eden bütün kuvvetler tarafından yapılan virtüel iş sıfır olmalıdır.

Bir rijit cismin dengesi için gerek ve yeter şart, rijit cismin bağları ile uyuşan herhangi bir virtüel yer değiştirmesinde cisme tesir eden bütün dış kuvvetler tarafından yapılan virtüel iş sıfır olmalıdır.

Bağlı rijit cisim sistemlerinin dengesi yukarıda rijit cisimler için verilen tarifi aynıdır. Bağlarla uyuşan bir virtüel yer değiştirmede iç kuvvetlerin sürtünmesine mafsallardaki bağ kuvvetlerinin (hareketin doğrultusuna dik kuvvetlerin) iş yapmadığı kabul ediliyor. İş yapan dış kuvvetler aktif veya uygulanan kuvvet olarak isimlendirilirler.

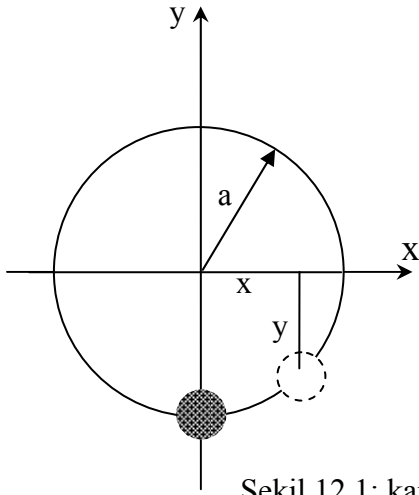
Bir sistemin potansiyel enerjisinin (**V**) stasyoner değeri varsa dengesi vardır. Dolayısıyla **V**, **x** gibi bir bağımsız değişkenin fonksiyonu ise, $dV/ds = 0$ denge için **x**'in değerini verecektir.

Kararlı Denge :Kararlı denge potansiyel enerjinin minimum olduğu zaman meydana gelir.

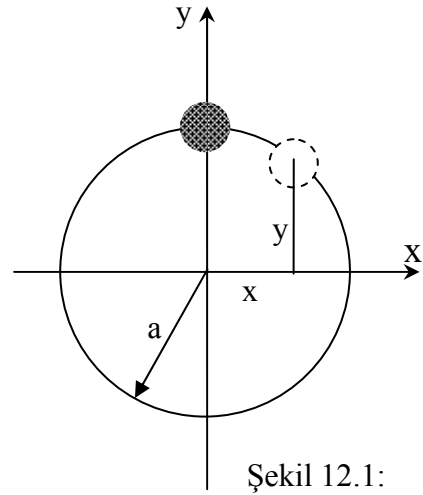
Aşağıda şekil 1'deki daire şeklinde bükülmüş sürtünmesiz telin en alt noktasına bir halka yerleştirilmesi halkanın potansiyel enerjisinin minimum olması ile bu denge konumunun kararlı olacağını gösterir. Çünkü herhangi bir bozucu tesirden sonra halka en alt konumuna dönecektir. **x** eksenini bir karşılaştırma eksenini olarak kullanılırsa **x** eksenini altındaki herhangi bir noktada halkanın potansiyel enerjisi **V**

$$V = -W.y = -W.\sqrt{a^2 - x^2} \quad (12.1)$$

dir.



Şekil 12.1: kararlı
denge



Şekil 12.1:
kararsız denge

Denge konumunu bulmak için dV/dx sıfıra eşit yazılır :

$$\frac{dV}{dx} = + \frac{W \cdot x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \quad (12.2)$$

Dolayısıyla burada çözüm için $x = 0$ olmalıdır (halka en alt noktada). Dengenin tipini belirtmek için denge konumunda d^2V/dx^2 yi incelemek gereklidir. Böylece

$$\frac{d^2V}{dx^2} = + \frac{W}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{W \cdot x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}} \quad (12.3)$$

(12.3) den $x = 0$ ' da $d^2V/dx^2 = + W/a$ (pozitif) elde edilir. Bu dengenin karalı olduğunu gösterir.

Kararsız Denge : Kararsız denge potansiyel enerji V maksimum olduğu zaman meydana gelir. Şekil 2'de halka telin en üst noktasına konursa, halkanın potansiyel enerjisinin maksimum olması ile bu denge konumunun kararsız olacağı seziliyor.

x eksenindeki herhangi bir noktada halkanın potansiyel enerjisi

$$V = +W \cdot y = +W \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad (12.4)$$

dir.

Denge konumunu bulmak için dV/dx sıfıra eşit yazılırsa

$$\frac{dV}{dx} = - \frac{W \cdot x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \quad (12.5)$$

alırız.

Dolayısıyla burada çözüm için $x = 0$ olmalıdır (halka en üst noktada). Aynı zamanda

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{W}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{W.x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}} \quad (12.6)$$

ve buradan $x = 0$ 'da $d^2V/dx^2 = -\frac{W}{a}$ (negatif) bulunur. Bu dengeyin kararsız olduğunu gösterir.

Farksız Denge : Farksız denge sistem bırakıldığı konumda kaldığı zaman vardır. Örneğin, küre yatay bir düzlem üzerine konabilir ve orada kalır (Şekil 3).



Şekil 12.3

ÖZET :

Sistemi denge haline getiren değişkenin değerini belirtmek için sistemin potansiyel enerjisi V değişken cinsinden ifade edilir. Yukarıdaki açıklamalarda x değişken idi. Denge hali için $dV/dx=0$ x 'in değerini belirtir.

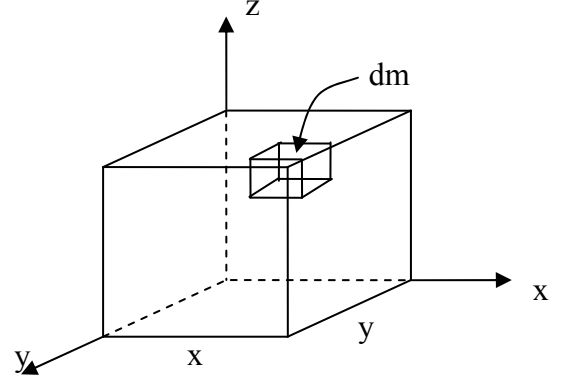
Dengenin tipini öğrenmek için $\frac{d^2V}{dx^2}$ incelenir :

- 1) $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$ ise denge kararlıdır ;
- 2) $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ ise denge kararsızdır ;
- 3) $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ ise denge farksızdır.

13. KÜTLESEL ATALET MOMENTLERİ

Eksenel atalet momentleri (Şekil 13.1):

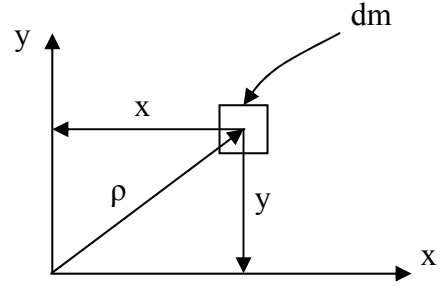
$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$



Şekil 13.1

Düzlemsel atalet momentleri (Şekil 13.1):

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= \int z^2 dm \\ I_{yz} &= \int x^2 dm \\ I_{zx} &= \int y^2 dm \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$



Şekil 13.2

xy düzlemindeki ince plaklar için (Şekil 2) aşağıdaki bağıntılar vardır:

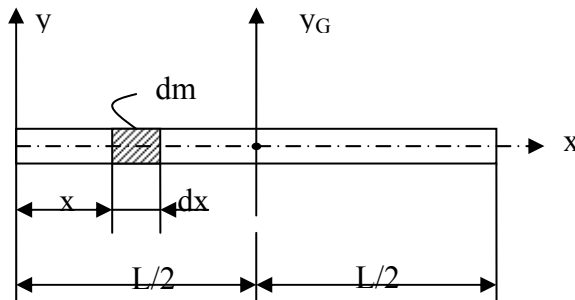
$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int y^2 dm , \\ I_y &= \int x^2 dm , \\ I_o &= \int \rho^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = I_x + I_y \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

$I_o \rightarrow$ polar atalet momentidir.

Çok kullanılan bazı cisimlerin kütleli atalet momentlerini bulalım:

13.1. Boyu L , Kütleli m Olan Küçük Kesitli Çubuk (Şekil 13.3) :

Y ve Y_G eksenlerine göre kütleli atalet momentinin ifadesini çıkaralım.



Şekil 13.3

Uzunluğu **dx** olan çubuk parçasının kütlesi **dm** olsun **dm** toplam **m** kütleinin **(dx/L).m** kadarıdır. Yani **dm =(dx/L).m**;
O halde

$$I_{yG} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{1}{12} mL^2; \quad I_{yG} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$I_y = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L \frac{m}{L} \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} mL^2 \quad ; \quad I_y = \frac{1}{3} mL^2$$

Paralel eksen teoremi kullanarak da **I_y** bulabiliriz:

$$I_y = I_{yG} + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 = \frac{1}{3} mL^2$$

Atalet (Jirasyon) yarıçapı ise

$$k = \sqrt{\frac{I_{yG}}{m}} = \frac{L}{\sqrt{12}} \quad \text{olur.}$$

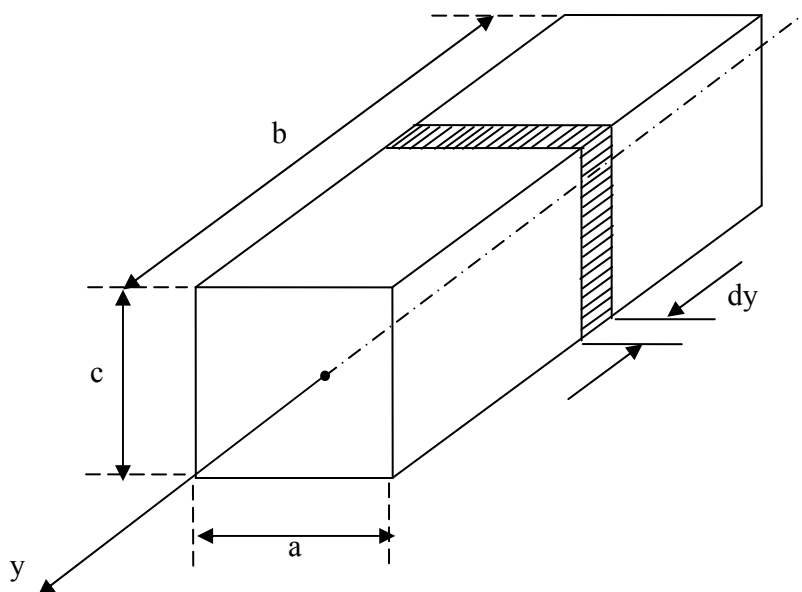
13.2. Dikdörtgen Prizma (blok) (Şekil 13.4a):

Disk in bir yüzüne dik (y eksen i) eksene göre kütle sel atalet moment in i bulalım

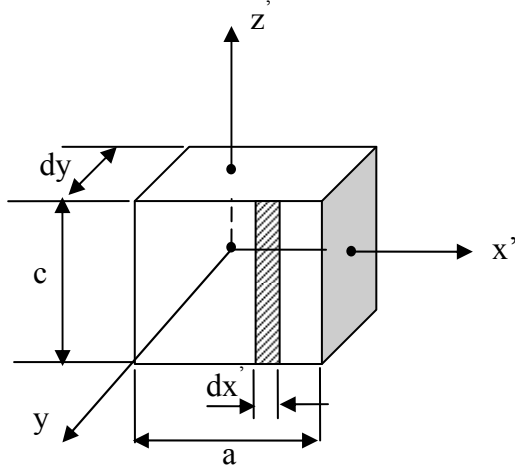
Şekilden de görüldüğü gibi y eksenine göre blok un kütle sel atalet moment i **dy** kalınlıklı

a x c kesitli ve **dm** kütle li dilimlerin atalet momentleri toplamına eşittir. Önce **a x c** kesitli

dy kalınlıklı ve **dm** kütle li bir ince plağın **I_y** sini tayin edelim (Şekil 13.4b).



Şekil 13.4a



Şekil 13.4b.

$$I_y^p = I_{x'} + I_{z'}$$

$$I_{x'}^p = \int \frac{1}{12} \cdot c^2 \cdot dm' = \frac{1}{12} \cdot c^2 \int dm' = \frac{1}{12} \cdot c^2 dm$$

Benzer düşünce ile

$$I_{z'} = \frac{1}{12} a^2 \cdot dm \quad \text{olur.}$$

dm kütleli ince plak için $I_y^p = I_{x'}^p + I_{z'}^p$ göz önüne alınırsa

$$I_y^p = \frac{1}{12} dm(a^2 + c^2) \quad \text{bulunur.}$$

Tüm blok için $dm = \frac{dy}{b} \cdot m$ olduğundan

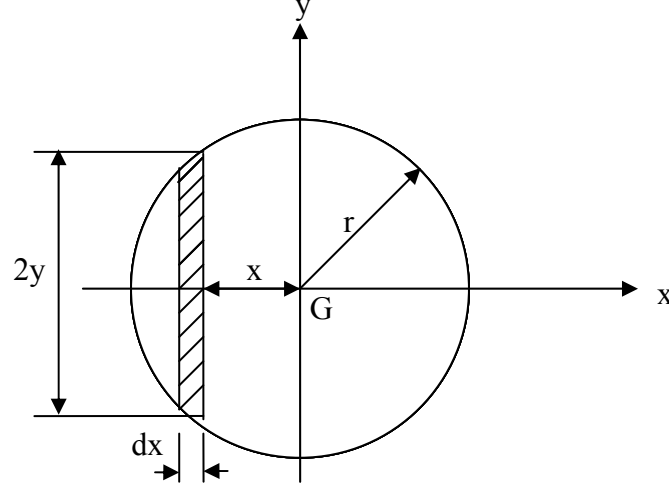
$$I_y = \int_0^b \frac{1}{12} dm \cdot (c^2 + a^2) = \int_0^b \frac{1}{12} \cdot (a^2 + c^2) \cdot \frac{dy}{b} \cdot m$$

$$I_y = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2) \quad \text{bulunur.}$$

13.3. Kütlesi m ve Kalınlığı t Olan Homojen Kalınlıklı Dairesel Disk (Şekil 135):

.Diskin çapı boyunca seçilen **x** eksenine göre atalet momentini bulalım. Diskin, kalınlığı **t** , genişliği **dx** ve değişen yüksekliği **y** olan küçük parçalardan meydana gelmiş olarak düşünelim

Böyle bir şeridin kütlesi şeklin geometrisinden $\frac{2ydx}{\pi r^2} dm$ dir. x eksenine göre bu şeridin kütleli atalet momenti $I_x^s = \frac{1}{12} \cdot \frac{2ydx \cdot m}{\pi r^2} (2y)^2$ dir



Şekil 13.5

Toplam I_x bütün bu şekildeki şeritlerin atalet momentleri toplamıdır. İntegrasyon aşağıda gösterilmiştir. Yalnız y yerine $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ nin konmasının daire denkleminde elde edildiğine dikkat edilmelidir.

$$I_x = \int_{-r}^r \frac{1}{12} \frac{2ydx \cdot m}{\pi r^2} \cdot (2y)^2 = \frac{2m}{3\pi r^2} \int_{-r}^r y^3 dx = \frac{2m}{3\pi r^2} \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^3 dx =$$

$$= \frac{2m}{3\pi r^2} \left(\frac{x}{4} (\sqrt{r^2 - x^2})^3 + \frac{3r^2 x}{8} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{3r^4}{8} \sin^{-1} \frac{x}{r} \right)_{-r}^r = \frac{mr^2}{4}$$

$$I_x = \frac{mr^2}{4}$$

Disk'in polar kütleli atalet momentini bulalım

$$I_y = I_x = \frac{1}{4} mr^2$$

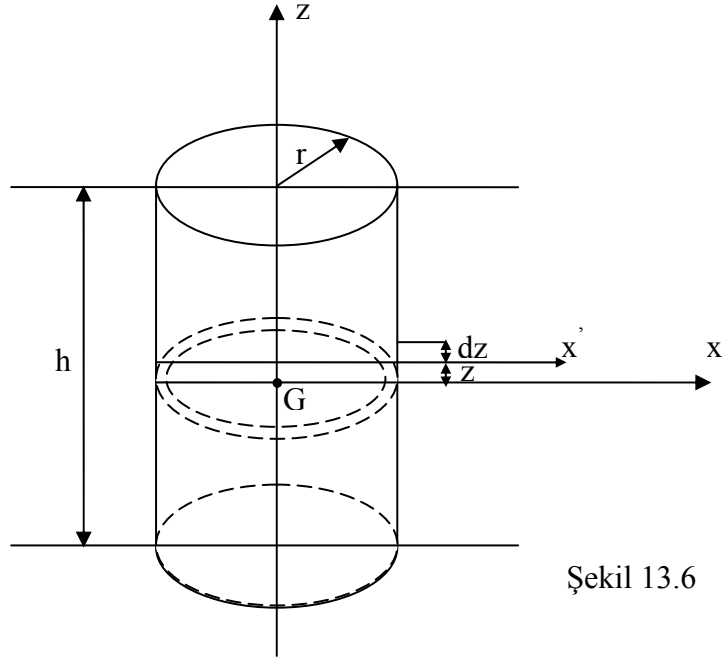
$$I_o = I_x + I_y = \frac{mr^2}{2}$$

Atalet (jirasyon) yarıçapı

$$k = \sqrt{\frac{I_o}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{mr^2}{2}}{m}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ dir.}$$

13.4. Yarıçapı r ve Kütlesi m Olan Dik Dairesel Silindir (Şekil 13.6):

a) Silindirin geometrik eksenine göre kütle atalet momentini bulalım.



Silindir, yüksekliği dz olan ince disklerden meydana gelmiş düşünülürse, bu ince disk için

$$I_z^s = \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{h} m \right) r^2 \text{ olur.}$$

Toplam silindir için

$$I_z = \int_0^h \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{h} m \right) r^2 = \frac{1}{2} m r^2 \text{ dir.}$$

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2$$

b) Silindirin ağırlık merkezinden geçen x eksenine göre kütle atalet momentini bulalım. Bu ince diskin x eksenine paralel x^1 eksenine göre kütle atalet momentini

$$I_{x^1}^s = \frac{1}{4} \left(\frac{dz}{h} m \right) r^2 \text{ dir.}$$

Paralel eksen teoremine göre:

$$I_x^s = I_{x^1}^s + \left(\frac{dz}{h} m \right) z^2 = \frac{1}{4} \frac{dz}{h} m r^2 + \frac{dz \cdot m}{h} z^2 \text{ bulunur.}$$

Silindirin I_x i bütün disklerin I_x^s lerin toplamı ile bulunur:

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{4} \frac{dz}{h} m r^2 + \frac{m z^2 dz}{h} \right) = \frac{m r^2}{4h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \frac{m}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz =$$

$$= \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m h^2 = \frac{m}{12} (3r^2 + h^2)$$

$$I_x = \frac{m}{12} (3r^2 + h^2)$$

13.5. İçi Boş Homojen Dik Dairesel Silindir (Şekil 13.7) :

Silindirin geometrik eksenine göre kütle atalet momentini bulalım.

Dış silindir için

$$I_z^d = \frac{1}{2} m_d r_d^2 = \frac{1}{2} (\pi r_d^2 h \delta) r_d^2$$

İç silindir için

$$I_z^i = \frac{1}{2} m_i r_i^2 = (\pi r_i^2 h \delta) r_i^2$$

İçi boş silindir için

$$I_z = I_z^d - I_z^i = \frac{1}{2} \pi h \delta r_d^4 - \frac{1}{2} \pi h \delta r_i^4 = \frac{1}{2} \pi h \delta (r_d^4 - r_i^4)$$

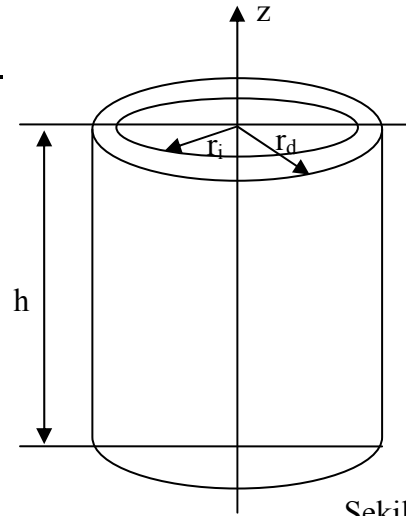
$$I_z = \frac{1}{2} \pi h \delta (r_d^4 - r_i^4) = \frac{1}{2} \pi h \delta (r_d^2 - r_i^2) \cdot (r_d^2 + r_i^2)$$

Parantezler açılırsa

$$I_z = \left(\frac{1}{2} \pi \delta h r_d^2 - \frac{1}{2} \pi \delta h r_i^2 \right) (r_d^2 + r_i^2) = \frac{1}{2} (m_d - m_i) (r_d^2 + r_i^2) = \frac{1}{2} m (r_d^2 + r_i^2)$$

$$I_z = \frac{1}{2} m (r_d^2 + r_i^2) \quad \text{elde edilir.}$$

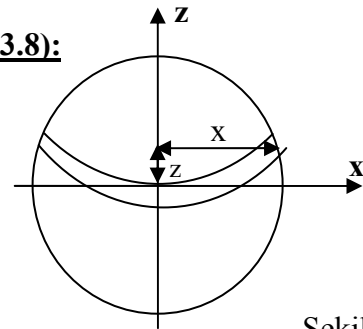
Burada m içi boş silindirin kütlesine karşılık gelmektedir.



Şekil 13.7

13.6. Kütlesi m ve Yarıçapı r Olan Küre (Şekil 13.8):

Kürenin çapına göre kütle atalet momentini bulalım. xy düzleminde paralel bir ince disk seçelim. Yoğunluk δ kabul



Şekil 13.8

ediliyor. Yarıçapı x olan ince diskin z eksenine göre kütleli atalet momenti $\frac{1}{2} m x^2$

dir. Bütün kürenin I_z sini bulmak için her bir atalet momenti toplanır.

Burada $dm = \delta dv = \delta(\pi x^2 dz)$

$$I_z = \int_{-r}^r \frac{1}{2} (\delta \pi x^2 dz) \cdot x^2 = \frac{1}{2} \pi \delta \int_{-r}^r x^4 dz$$

Kürenin xz düzleminde bir kesiti (bir daire)

$$x^2 + z^2 = r^2 \text{ olduğundan}$$

$$I_z = \frac{1}{2} \pi \delta \int_{-r}^r (r^2 - z^2) dz = \frac{8}{15} \pi \delta r^5 \text{ bulunur.}$$

$$I_z = \frac{8}{15} \pi \delta r^5$$

burada $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta$ dır. O halde $I_z = \frac{2}{5} m r^2$ bulunur.

Atalet yarıçapı $k = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot r$ dir.

KAYNAKLAR

1. W. G. Mchelan , E. W. Nelson “Statik ve Dinamik”; Çevirenler M. Bakioğlu, M. Atlan; Çağlayan Basımevi , İst. 1973.
2. Z . Celep , N . Kumbasar “Yapı Dinamiği ve Deprem Müh. Giriş”, İst. 1996.
3. Z . Celep , N . Kumbasar “Örneklerle Yapı Dinamiği ve Deprem Müh. Giriş”,İst.1992.
4. A.A. Kasumov “Yapı Dinamiği,Stabilitesi, Plastik Analizi “,Beta İst.1997.
5. F. P. Beer , E. R. Johnston “Mühendisler İçin Dinamik”; Çevirenler S. S. Tameroğlu, T. Özbek ; İstanbul 1995.