Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

ÜNİTE 5

Yazar
Prof.Dr. Vakıf CAFEROV

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- üstel ve logaritmik fonksiyonları tanıyacak,
- üstel ve logaritmik fonksiyonların grafiklerini çizebilecek,
- üstel ve logaritmik fonksiyonlar yardımıyla çözülebilen problemleri öğreneceksiniz.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

- Ünite 1 de ele aldığımız üslü sayılar ve logaritma ve ünite 3 de açıklanan fonksiyon kavramlarını öğrendikten sonra bu üniteyi çalışınız
- Yanınızda mutlaka hesap makinesi bulundurunuz

- Farklı tabanlı üstel ve logaritmik fonksiyonlar yazıp, bu fonksiyonların grafiklerini çizmeye çalışınız.

1. Giriş

Üstel ve logaritmik fonksiyonlar cebirsel olmayan fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlarda bağımsız değişken bir sayının kuvvetinde veya bir tabana göre logaritma işareti altında olur. Bu ünitede bu fonksiyonların genel tanımları, grafikleri ve bazı özellikleri verilmiştir.

2. Üstel Fonksiyonlar

Birinci ünitede herhangi pozitif gerçel a sayısının rasyonel veya irrasyonel kuvvetlerini tanımlamıştık. Buna göre a pozitif gerçel sayı ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = a^x$$

fonksiyonundan sözetmek mümkündür. Bu tür fonksiyonlara (genel) **üstel fonksiyonlar** denir. Burada $a \neq 1$ alıyoruz, çünkü $a = 1$ ise her x için $1^x = 1$ olduğundan üstel fonksiyon sabit fonksiyona dönüşür.

$f(x) = a^x$ fonksiyonunun tanım kümesi gerçel sayılar kümesidir. a yı değiştirerek farklı üstel fonksiyonlar elde ederiz. Örneğin,

$$f(x) = 2^x\ ,\quad g(x) = 3^x\ ,\quad h(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x\ ,$$

$$k(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x\ ,\quad l(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x\ ,\quad p(x) = \left(\frac{1}{50}\right)^x\ ,\quad q(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

fonksiyonları birer üstel fonksiyonlardır.

Örnek: $f(x) = 2^x$ fonksiyonu için $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(-\sqrt{3}\right)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f(0) = 2^0 = 1\ ,\quad f(1) = 2^1 = 2\ ,\quad f(3) = 2^3 = 8\ ,\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cong 1{,}414\ ,$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cong \frac{1}{1{,}26} \cong 0{,}79\ ,\quad f\left(\sqrt{2}\right) = 2^{\sqrt{2}} \cong 2{,}665\ ,$$

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = 2^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{2^{\sqrt{3}}} \cong \frac{1}{2^{1{,}73}} \cong \frac{1}{3{,}317} \cong 0{,}301\ .$$

Bileşik faiz, nüfus artması, radioaktiv maddenin kütlesinin zamana bağımlılığı vb. problemler üstel fonksiyonlarla ifade edilir.

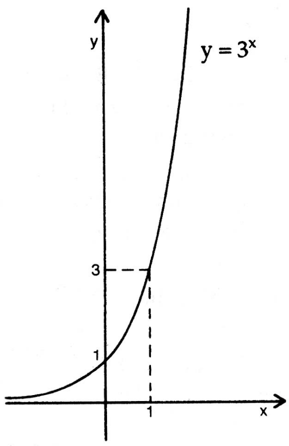
Üstel fonksiyonların grafikleri hakkında bir fikir sahibi olmak için $f(x) = 3^x$ ve $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ üstel fonksiyonlarının grafiklerini değerler tablosu oluşturarak çizelim.

$3^{-2} = \frac{1}{9} \cong 0{,}11$; $3^{-1} = \frac{1}{3} \cong 0{,}33$; $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}58$; $3^0 = 1$; $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$;

$3^1 = 3$; $3^2 = 9$

olduğundan tablo ve grafik aşağıdaki gibidir:

x	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
$y = f(x) = 3^x$	0,11	0,33	0,58	1	1,73	3	9



Şekil 5.1

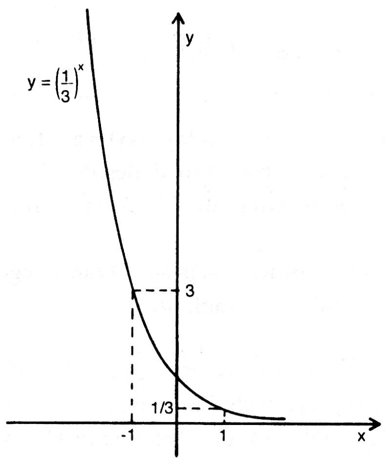
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ için,

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$; $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}58$;

$\left(\frac{1}{3}\right)^1 \cong 0{,}33$; $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cong 0{,}11$

olduğundan tablo ve grafik aşağıdaki gibi olur:

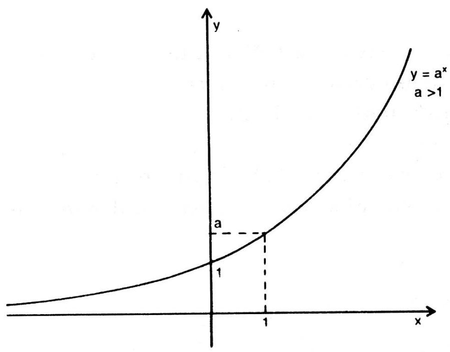
x	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
$y=f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1,73	1	0,58	0,33	0,11



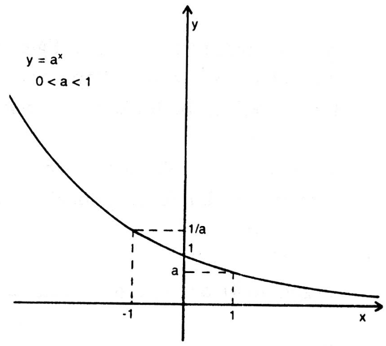
Şekil 5.2

Şekillerden de görüldüğü gibi bu grafiklerin birisi, diğerinin y-eksenine göre simetriğidir. Bunun sebebini, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ gibi yazdığımızda daha iyi anlayabiliriz.

$a > 1$ için $f(x) = a^x$ in grafiği $f(x) = 3^x$ fonksiyonunun grafiğine,
$0 < a < 1$ için $f(x) = a^x$ in grafiği ise, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğine benzerdir.



Şekil 5.3



Şekil 5.4

Görüldüğü gibi hem $a > 1$ ve hem de $0 < a < 1$ için $y = a^x$ fonksiyonun grafiğinin asimptotu vardır. Bu asimptot x-eksenidir.

Şimdi üstel fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

1). $a > 0$ olduğundan, her x için $a^x > 0$ olur. Dolayısıyla üstel fonksiyon daima pozitif değerler alır. Geometrik olarak bu, üstel fonksiyonun grafiğinin her zaman x-ekseni üzerinde olduğunu ifade eder.

2). $a^0 = 1$ olduğundan üstel fonksiyon grafiği y-eksenini daima (0, 1) noktasında keser.

3). $a^{x_1} = a^{x_2}$ ise $x_1 = x_2$ olduğundan dolayı $f(x) = a^x$ fonksiyonu bire-bir fonksiyondur. Geometrik olarak bu onun ifadesidir ki x-eksenine paralel her bir doğru, $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğini en fazla bir noktada keser.

4). x_1 ve x_2 sayıları $x_1 < x_2$ koşulunu sağlasın. O zaman eğer $a > 1$ ise $a^{x_1} < a^{x_2}$ sağlanır, eğer $0 < a < 1$ ise $a^{x_1} > a^{x_2}$ sağlanır.

İspat: $a > 1$ olsun. Kuvvetlerin özelliklerine göre $a^{x_2} = a^{(x_2 - x_1 + x_1)} = a^{x_2 - x_1} . a^{x_1}$ yazarız. $x_1 < x_2$ olduğundan $x_2 - x_1 > 0$ olur. Birden büyük sayının pozitif kuvveti de birden büyük olduğundan $a^{x_2 - x_1} > 1$ olur ve dolayısıyla $a^{x_2} = a^{x_2 - x_1} . a^{x_1} > 1.a^{x_1} = a^{x_1}$ ve $a^{x_2} > a^{x_1}$ elde edilir.

Benzer yolla $0 < a < 1$ iken $a^{x_1} > a^{x_2}$ olduğu ispatlanır.

5). $a > 1$ olsun. Eğer $x < 0$ ise $0 < a^x < 1$, eğer $x > 0$ ise $a^x > 1$ olur.
Bu özellik 4). özellikten çıkar. $x < 0$ ise $a^x < a^0$ ve $a^0 = 1$ olduğundan $a^x < 1$ elde edilir. Eğer $x > 0$ ise bu eşitliği $0 < x$ gibi yazarak yine 4). özelliğe göre $a^0 < a^x$ veya $1 < a^x$ elde edilir.

6). $0 < a < 1$ olsun. Bu durumda eğer $x < 0$ ise $a^x > 1$, eğer $x > 0$ ise $0 < a^x < 1$ sağlanır.

$y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan tüm x_1 ve x_2 için $f(x_1) \le f(x_2)$ eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyona **monoton artan fonksiyon**, eğer $f(x_1) < f(x_2)$ ise bu fonksiyona **kesin artan fonksiyon** denir.

Eğer $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan tüm x_1 ve x_2 ler için $f(x_1) \ge f(x_2)$ ise bu fonksiyona **monoton azalan fonksiyon**, eğer $f(x_1) > f(x_2)$ ise bu fonksiyona **kesin azalan fonksiyon** denir.

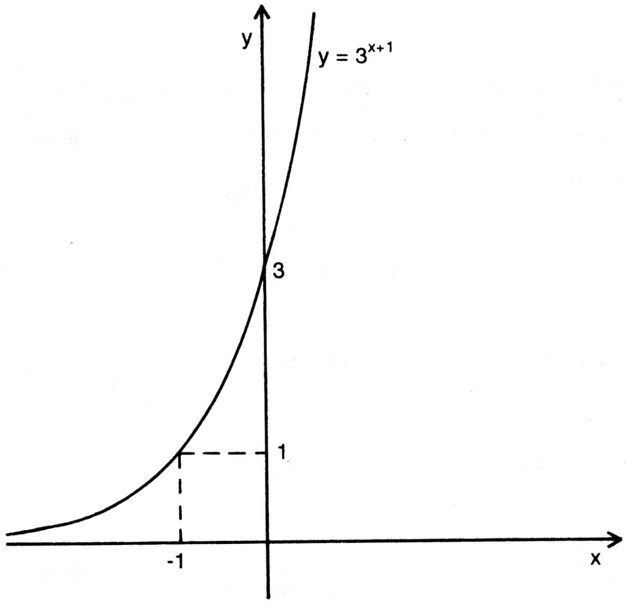
O zaman 4). özelliğe göre aşağıdakileri söyleyebiliriz:

Eğer $a > 1$ ise $f(x) = a^x$ fonksiyonu kesin artandır.

Eğer $0 < a < 1$ ise $f(x) = a^x$ fonksiyonu kesin azalandır.

Örnek: $f(x) = 3^{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

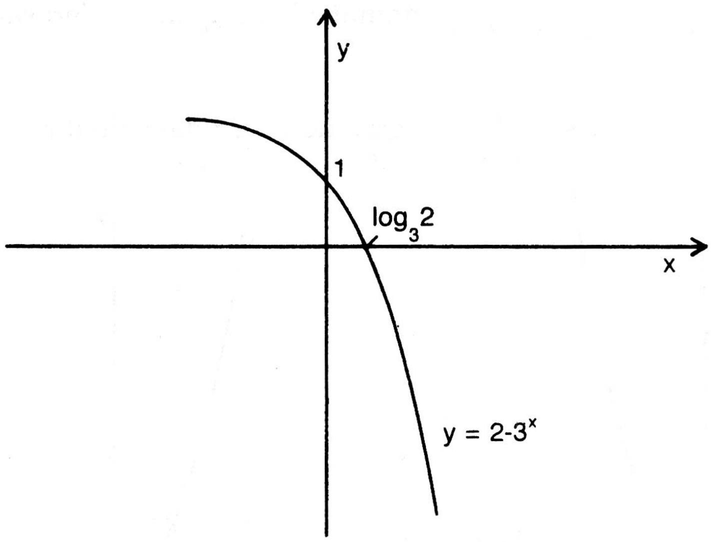
Çözüm: Bu grafik bir kaç yolla çizilebilir. Örneğin, $y=3^x$ in grafiğini 1 birim sola kaydırmakla $y = 3^{x+1}$ in grafiği elde edilebilir. Üstlerin özelliklerinden yararlanarak bu grafiği başka yolla da elde edebiliriz. $3^{x+1} = 3^x . 3^1 = 3 . 3^x$ olduğundan $y = 3^x$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki tüm noktaların ordinatlarını 3 ile çarparsak $y = 3^{x+1}$ in grafiğini elde ederiz.



Şekil 5.5

Örnek: $y = 2 - 3^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $y = 3^x$ in grafiğinin x-eksenine göre simetriğini alırsak, $y = - 3^x$ fonksiyonunun grafiğini elde ederiz, sonra bu grafiği 2 birim yukarı kaydırırsak $y = 2 - 3^x$ fonksiyonunun grafiğini elde ederiz.



Şekil 5.6

3. e^x Fonksiyonu

Hesap makinesi yardımı ile n doğal sayı olmak üzere, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sayısını gittikçe büyüyen n ler için hesaplarsak bu değerlerin n arttıkça belli bir değere "istenildiği kadar yakın olabileceğini" görebiliriz. Örneğin,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25\ ,\quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}370...\ ,\quad \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2{,}488...\ ,\quad \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}594...\ ,$$

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}613...\ ,\quad \left(1+\frac{1}{20}\right)^{20} = 2{,}653...\ ,\quad \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}705...\ ,$$

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}714...\ ,\quad \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}717...\ ,\quad \left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2{,}718126...\ ,$$

$$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2{,}718145...\ ,\quad \left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2{,}718268...$$

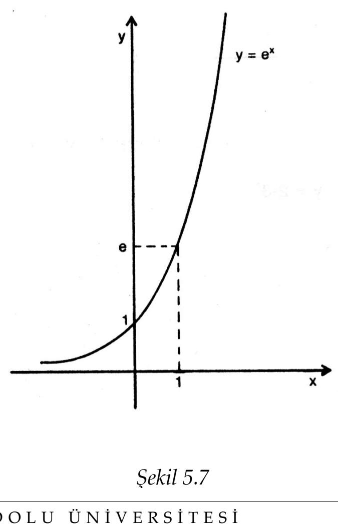
n yi artırdıkça bu değerlerin istenildiği kadar yakın olduğu sayıya **e sayısı** denilmektedir. e sayısı irrasyonel sayı olup, yaklaşık değeri e = 2,71828182845904... dir.

e nin daha kesin tanımı limit kavramı ile verilir ve bu sayının irrasyonel olduğu ispatlanır. e sayısının matematikte çok önemli yeri vardır.

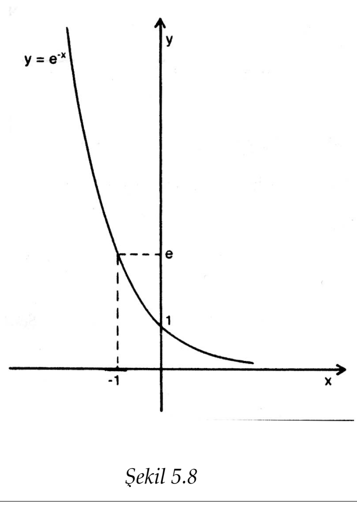
Eğer üstel fonksiyonun tanımında a = e alırsak $f(x) = e^x$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyona **eksponansiyel fonksiyon** da denir. Genellikle üstel fonksiyon denilip taban belirtilmezse e^x fonksiyonu anlaşılır.

Herhangi bir $x \in IR$ için e^x değeri günümüzde hesap makineleri yardımı ile bulunabilir.

$y = e^x$ ve $y = e^{-x}$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.7



Şekil 5.8

Örnek: Bir şehrin nüfusu yaklaşık olarak $N(t) = 350\,000 . e^{0,04\,(t-1980)}$ formulü ile verilmiştir. Burada t değişkeni yılı göstermektedir. 2000 ve 2010 yıllarında nüfusun yaklaşık olarak ne kadar olacağını hesaplayınız.

Çözüm: $t = 2000$ yazarsak

$$N(2000) = 350\,000 . e^{0,04\,.\,(2000-1980)} = 350\,000 . e^{0,04.20} = 350\,000 . e^{0,8} = 350\,000 . 2,225...$$
$$\cong 778939\ ,$$

$t = 2010$ yazarsak

$$N(2010) = 350\,000 . e^{0,04\,.\,(2010-1980)} = 350\,000 . e^{1,2} = 350\,000 . 3,320... \cong 1162041$$

buluruz.

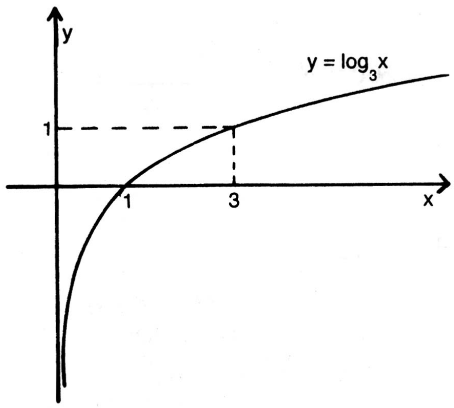
4. Logaritmik Fonksiyonlar

1. ünitede **a ve b pozitif gerçel sayılar ve a ≠ 1 olmak üzere** $\log_a b$ ("a tabanına göre b nin logaritması") sayısını tanımlamıştık. Hatırlayalım ki $\log_a b$ öyle bir c sayısına eşittir ki a^c kuvveti b ye eşit olsun. Buradan $a^{\log_a b} = b$ eşitliği elde edilmişti. $\log_a b$ nin tanımında b yerine x koyarsak $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunu elde ederiz. Bu fonksiyona **a tabanlı logaritmik fonksiyon** denir. Logaritmik fonksiyonun tanım kümesi tüm pozitif gerçel sayılardır. Logaritmik fonksiyon $y = a^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu olarak da tanımlanabilir. Biz üstel fonksiyonun bire-bir olduğunu yukarıda söylemiştik. Buna göre $y = a^x$ eşitliğinden x i bulursak $x = \log_a y$ elde ederiz. Ters fonksiyonun tanımında açıkladığımız gibi burada x yerine y, y yerine x yazarsak $y = a^x$ in ters fonksiyonu olan $y = \log_a x$ logaritmik fonksiyonunu elde ederiz.

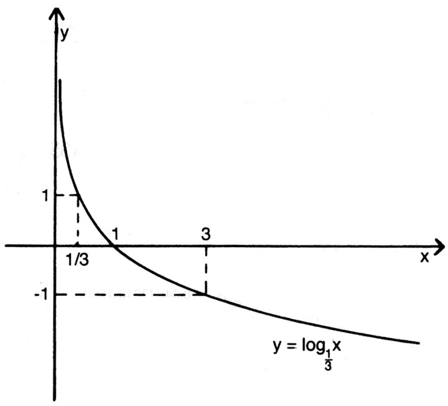
Verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonu ile onun ters fonksiyonu $y = f^{-1}(x)$ in grafikleri, $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan $y = \log_a x$ fonksiyonun grafiğini elde etmek için, $y = a^x$ in grafiğinin bu doğruya göre simetriğini almak gerekmektedir.

Örnek : $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm : Bu grafikler $y = 3^x$ ve $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonlarının grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidirler.



Şekil 5.9



Şekil 5.10

Şekillerinden de görüldüğü gibi eğer $a > 1$ ise $\log_a x$ fonksiyonu kesin artan, eğer $0 < a < 1$ ise $\log_a x$ fonksiyonu kesin azalandır. Her iki durumda da y-ekseni asimptottur.

Örnek: $f(x) = \log_2 x$ ise $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{32}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt[3]{16})$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f(2) = \log_2 2 = 1$, $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1\log_2 2 = -1$,

$$f\left(\frac{1}{32}\right) = \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5\,, \quad f(\sqrt{2}) = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,,$$

$$f(\sqrt[3]{16}) = \log_2 \sqrt[3]{16} = \log_2 \sqrt[3]{2^4} = \log_2 2^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\,.$$

Logaritmik fonksiyonun aşağıdaki özellikleri vardır.

1). $y = a^x$ fonksiyonu bire-bir olduğundan $y = \log_a x$ logaritmik fonksiyonu da birebirdir. Başka deyişle eğer $\log_a x_1 = \log_a x_2$ ise o zaman $x_1 = x_2$ dir.

2). $\log_a 1 = 0$, $\quad \log_a a = 1$.

3). $\log_a (x_1 . x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $\quad (x_1 > 0,\ x_2 > 0)$.

4). $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$, $\quad (x_1 > 0,\ x_2 > 0)$.

5. $\log_a x^r = r\log_a x$ **, burada** $x > 0$ **ve** r **keyfi gerçel sayılardır. Özel olarak,**

$r = \frac{1}{n}$ **ve** $r = -1$ **alırsak,** $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$ **olduklarından** $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$,

$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ **elde edilebilir**.

6) **$a > 1$ için $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu kesin artan,**
$0 < a < 1$ için ise kesin azalan fonksiyondur.

İspat

$a > 1$ olduğunu varsayalım ve $x_1 < x_2$ olsun. $\log_a x_1 < \log_a x_2$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Olmayana ergi yöntemini uygulayalım. Yani $\log_a x_1 < \log_a x_2$ eşitsizliğinin sağlanmadığını varsayalım. O zaman iki durum sözkonusu olabilir: $\log_a x_1 = \log_a x_2$ veya $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Birinci durum için $\log_a x_1 = \log_a x_2$ eşitliğinden $x_1 = x_2$ çıkar, bu ise $x_1 < x_2$ ile çelişir. Eğer ikinci durum sözkonusu ise $a > 1$ için $y = a^x$ fonksiyonu kesin artan olduğundan $\log_a x_1 > \log_a x_2$ ise $a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2}$ olmalıdır. Öte yandan $a^{\log_a x_1} = x_1$, $a^{\log_a x_2} = x_2$ olduğundan buradan $x_1 > x_2$ elde ediyoruz. Bu ise yine $x_1 < x_2$ ile çelişiyor. Buna göre varsayımımız yanlıştır ve $x_1 < x_2$ ise $\log_a x_1 < \log_a x_2$ olmalıdır.

Benzer yolla $0 < a < 1$ için $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun kesin azalan olduğu gösterilebilir.

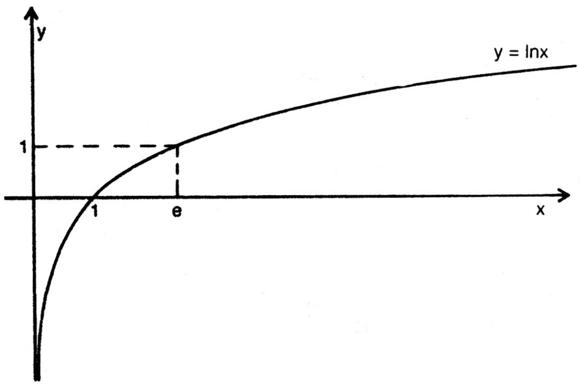
7) **$a > 1$ olsun. Bu durumda $0 < x < 1$ değerleri için $f(x) = \log_a x < 0$ ve $x > 1$ değerleri için $f(x) = \log_a x > 0$ olur. Eğer $0 < a < 1$ ise, bu durumda $0 < x < 1$ değerleri için $f(x) = \log_a x > 0$, ve $x > 1$ değerleri için $f(x) = \log_a x < 0$ olur.**

Bu özelliğin ispatı 6). özellikten çıkar. Örneğin $0 < a < 1$ olsun. $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu kesin azalan olduğundan $x < 1$ ise $f(x) > f(1)$ veya $\log_a x > \log_a 1$ olmalıdır. Buradan, $\log_a 1 = 0$ olduğundan $\log_a x > 0$ elde edilir. Eğer $x > 1$ ise yine kesin azalanlıktan $\log_a x < \log_a 1$ olup buradan da $\log_a x < 0$ elde edilir.

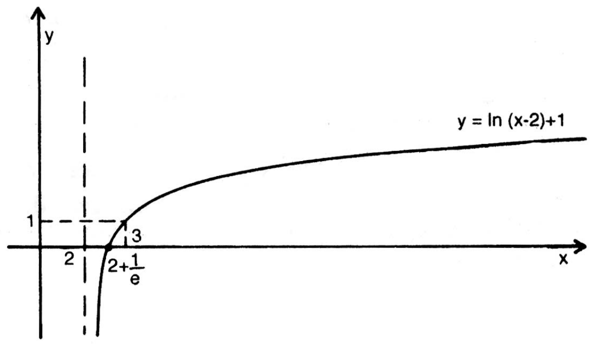
$\log_a x$ ifadesinde $a = e$ olursa $\log_e x$ yerine $\ln x$ yazıldığını ve bu logaritmaya doğal logaritma denildiğini biliyoruz. Buna göre $y = \log_e x$ fonksiyonu $y = \ln x$ gibi yazılır. Bu fonksiyon kesin artan olup, $0 < x < 1$ için negatif, $x > 1$ için ise pozitif değerler alır.

Örnek : 1. $y = \ln x$
2. $y = \ln(x - 2) + 1$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm : 1. $y = \ln x$ fonksiyonunun grafiği, $y = e^x$ in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.



Şekil 5.11



Şekil 5.12

2. Fonksiyonun tanım kümesi $x > 2$ değerleridir. Eğer $y = \ln x$ in grafiğini 2 birim kadar sağa ve 1 birim kadar yukarı kaydırırsak $y = \ln(x-2)+1$ in grafiğini elde ederiz.

Örnek: $\ln 3 \cong 1{,}0986$ olduğuna göre $\ln(3e^4)$, $\ln\left(\frac{9}{e^2}\right)$, $\ln(e^4)$ kaçtır?

Çözüm : $\ln(3e^4) = \ln 3 + \ln(e^4) = \ln 3 + 4 \ln e \cong 1{,}0986 + 4.1 = 5,\ 0986$,

$$\ln\left(\frac{9}{e^2}\right) = \ln 9 - \ln(e^2) = \ln(3^2) - \ln e^2 = 2 \ln 3 - 2 \ln e \cong 2.\ 1{,}0986 - 2.1 = 0{,}1972,$$

$$\ln(e^4) = 4 \ln e = 4 \ .\ 1 = 4 \ .$$

Örnek : $4^x = 5$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Logaritmanın tanımına göre, $x = \log_4 5$ dir. Burada taban değiştirme formülünden ve hesap makinesinden yararlanırsak

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 4} \cong \frac{1{,}60943}{1{,}38629} \cong 1{,}161$$

elde ederiz.

Örnek : $3^x = 5^{x+2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $5^{x+2} = 5^x \ .\ 5^2 = 25 \ .\ 5^x$ gibi yazılabildiğinden denklemi $3^x = 25 \ .\ 5^x$ gibi yazarız. Buradan

$$\frac{3^x}{5^x} = 25, \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = 25, \quad x = \log_{\frac{3}{5}} 25$$

bulunur. Taban değiştirme formülünden

$$x = \frac{\ln 25}{\ln \frac{3}{5}} = \frac{\ln\left(5^2\right)}{\ln 3 - \ln 5} = \frac{2 \ln 5}{\ln 3 - \ln 5} \cong \frac{2 \,.\, 1{,}60943}{1{,}0986 - 1{,}60943} = \frac{3{,}21886}{-0{,}51083} \cong -6{,}301$$

bulunur.

Örnek: 1. $\log_2 \frac{x-3}{2x+1} = 1$

2. $\log x + \log (x-3) = 1$ denklemlerini çözünü

Çözüm: 1. $\frac{x-3}{2x+1} = 2^1$

$$x - 3 = 2\,(2x + 1)$$

$$x - 3 = 4x + 2$$

$$4x - x = -3 - 2$$

$$3x = -5$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

bulunur. Bulunan değerin denklemi sağladığını görmek zor değil. Denklemin çözümü $x = -5/3$ dür.

2. Logaritmanın özelliklerinden

$\log x(x-3) = 1$ veya $x(x-3) = 10^1$, $x^2 - 3x - 10 = 0$,

sonuncu denklemi çözersek, $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ bulunur. $x = -2$ değeri çözüm olamaz, çünkü bu değerde denklemin sol tarafındaki fonksiyonlar tanımsızdır. Buna göre tek çözüm $x = 5$ dir.

1. $2^x = 5$
2. $3^x = 4^{x-2}$
3. $\log_4 x + \log_4 (x-6) = 2$ denklemlerini çözünüz.

?

Cevaplarınız 1) $\log_2 5$ 2) $\frac{2 \log 4}{\log 4 - \log 3}$ 3) 8 olmalıdır

Örnek: (Bileşik faiz). A ana parası yıllık yüzde p faizi üzerinden bankaya yatırılırsa, n yıl sonra bu paranın ulaştığı miktar

$$M = A\,(1+p)^n$$

formülü ile hesaplanır (Bu formülü sizler de zorlanmadan çıkarabilirsiniz). A = 50 milyon TL, yıllık yüzde 70 faizle bankaya yatırılıyor.

1. $n = 4$ yıl sonra bu para hangi miktara ulaşır?
2. Kaç yıl sonra bu para 1 milyar TL yi geçer?

Çözüm: 1. $A = 50.10^6$, $n = 4$, $p = 0{,}7$ olduğundan

$$M = 50.10^6 \,.\, (1+0{,}7)^4 = 50.10^6 \,.\, (1{,}7)^4 = 417.605.000 \text{ TL}$$

bulunur.

2. Bankadaki paranın 1 milyar TL yi aşması için kaç yılın geçmesini bulmamız gerekmektedir. Yani n en az kaç olmalıdır ki $50.10^6\,(1{,}7)^n$ sayısı 10^9 sayısından büyük olsun. Buna göre

$$50.10^6 \,.\, (1{,}7)^n = 10^9$$

denklemini n ye göre çözelim.

$$(1{,}7)^n = \frac{10^3}{50} \qquad (1{,}7)^n = 20 \;,$$

$$n = \log_{1,7} 20 = \frac{\log 20}{\log (1{,}7)} = \frac{\log 2 + \log 10}{\log 17 - \log 10} \cong \frac{0{,}301 + 1}{1{,}23 - 1} = \frac{1{,}301}{0{,}23} \cong 5{,}56$$

olduğundan cevap olarak $n = 6$ almamız gerekiyor.

Değerlendirme Soruları

1. $f(x) = 3^x$ için $f(x+2) - 6\,f(x+1) + 9\,f(x) = ?$
   A. 3^x
   B. -3^x
   C. 1
   D. 0
   E. 1/3

2. $f: IR \to IR\,,\; f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?
   A. IR
   B. [0, 1]
   C. (- ∞, 1]
   D. [-1, 1]
   E. (- ∞, 0]

3. $f(x) = (\sqrt{2})^{6x} \, . \, 2^{3x}$ fonksiyonunun $f(x) = a^x$ biçiminde yazılımı aşağıdakilerden hangisidir?
   A. 2^x
   B. 8^x
   C. 64^x
   D. 16^x
   E. 4^x

4. $f(x) = \log(1 - 6x) + \log(2x + 5)$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?
   A. $(-\infty, 1/6)$
   B. $(-5/2, 1/6)$
   C. $(-5/2, \infty)$
   D. IR
   E. $(0, \infty)$

5. $f(x) = \sqrt{-1 - \log x}$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir
   A. $(0, 1/10]$
   B. $(-\infty, 1/10)$
   C. $(0, \infty)$
   D. $[0, 1/10)$
   E. IR

6. Yıllık %80 bileşik faiz oranıyla bankaya yatırılan 50 milyon TL, 6 yıl sonra kaç TL olur?
   A. 0,5 milyar
   B. 1 milyar
   C. 1,5 milyar
   D. 1 700 611 200
   E. 2 100 610 300

7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3 - x} = (\sqrt{2})^{-6x}$ denkleminin çözüm kümesi nedir?
   A. {0}
   B. {1}
   C. {0, 2}
   D. {0, -2}
   E. {0, 2, -2}

8. $3^x = 7^{-x+4}$ denkleminin çözümü yaklaşık olarak aşağıdakilerden hangisidir?
   A. 1,58
   B. 1,92
   C. 2,55
   D. 2,62
   E. 2,93

9. $\log_2 (x^2 + 2) = \log_2 (-6x) - 1$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   A. {-1}
   B. {-3}
   C. {-1, 1}
   D. {-2, 1}
   E. {-1, -2}

10. Bir şehrin nüfusu yaklaşık olarak $N(t) = 450\,000\ e^{0{,}025\ (t - 1990)}$ formülü ile verilmiştir (burada t yılı göstermektedir). Kaç yıl sonra şehrin nüfusu 1990 daki nüfusunun üç katını geçer?
    A. 25
    B. 30
    C. 34
    D. 38
    E. 44

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. E 3. C 4. B 5. A 6. D 7. E 8. C 9. E 10. E