LİNEER CEBİR

DERS NOTLARI

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

Ağustos 2015

e-posta: h_bilgic@hotmail.com

ÖNSÖZ

Bu ders notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde, 1999–2002 yılları arasında verdiğim ve daha sonra da 2011 yılından beri vermekte olduğum Lineer Cebir I ve Lineer Cebir II derslerine ait ders notlarıdır. Bu ders notları Bernard Kolman'ın "Elementary Linear Algebra" isimli kitabının 4. baskısı temel alınarak hazırlanmıştır. Bazı alt bölümler atlanmış ve bazı ispat ve örnekler daha açıklayıcı şekilde genişletilmiştir.

Ders notlarının bilgisayar ortamına aktarılmasındaki amaç, öğrencilerin ders sırasında not tutarken yapılan hataların en aza indirgenmesidir. Diğer bir amaç ise; ders notu tutma sırasında dersi anlamakla ilgili kayıpların azaltılmasıdır.

Bu ders notları 6 bölümden oluşmaktadır. İlk 2 bölüm güz döneminde 4 saatlik; daha sonraki 4 bölüm ise bahar döneminde 4 saatlik bir ders için uygundur.

Bu ders notlarının tamamı LaTeX programı ile hazırlanmıştır. Bu yüzden LaTeX programı yazarlarına teşekkür ederim. Notların hazırlanmasında emeği geçen ve genelde bölümümüz 2010 girişli öğrencilerinden oluşan gruba teşekkür ederim. Notlardaki şekillerin (grafiklerin) hazırlanmasında kullandığım MFPIC programının yazarı Daniel H. Luecking'e de teşekkür ederim.

Notların öğrencilere faydalı olması dileğiyle,

Yrd.Doç.Dr. Hüseyin Bilgiç.

Kahramanmaraş, Eylül 2014.

İçindekiler

1

Lineer Denklemler ve Matrisler

1.1 Lineer Denklem Sistemleri

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b$ sabitler ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$'ler de değişkenler olmak üzere;

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.1}$$

şeklindeki bir denkleme lineer denklem denir. Eğer $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayıları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yerine yazıldığında (1.1) denklemi sağlanıyorsa bu sayılara (1.1) denkleminin bir çözümü denir. Örneğin $x_1 = 2, x_2 = 3$ ve $x_3 = -4$ sayıları $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$ denkleminin bir çözümüdür. Çünkü $6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -13$ dür.

Genel olarak n bilinmeyenli m denklemli bir lineer denklem sistemi (kısaca lineer sistem) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.2}$$

Burada a_{ij} ler sabittir. $b_1, b_2 \ldots, b_n$ verildiğinde (1.2) yi sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerlerini bulmaya çalışacağız. $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayılarının bu sistemin bir çözümü olması demek, bu sayıların her bir denklemin çözümü olması demektir. Eğer bir lineer sistemin hiç çözümü yoksa bu sisteme tutarsız, eğer en az bir çözümü varsa tutarlı denir. Eğer $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ ise bu sisteme homojen sistem denir. Bir homojen sistemdeki $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ çözümüne trival (aşikar) çözüm denir. Aksi halde trival olmayan çözüm denir.

Eğer n bilinmeyenli r denklemden oluşan:

$$\begin{array}{ccl} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r \end{array} \tag{1.3}$$

sistemi ile (1.2) sisteminin çözümleri aynı ise bu sistemlere eş sistemler denir.

Örnek 1.1 $\left\{ \begin{array}{c} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{array} \right\}$ Çözüm: $x_1 = 2, x_2 = 3$

$\left\{ \begin{array}{c} 8x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 10x_1 - 2x_2 = 14 \end{array} \right\}$ Çözüm: $x_1 = 2, x_2 = 3$

Bu sistemler eş sistemlerdir.

Örnek 1.2 $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & -3x_2 = -3 \\ 2x_1 & +x_2 = 8 \end{array} \right\}$ sistemini çözelim. Yok etme metodu kullanacağız. 1. denklemin 2 katını 2. denklemden çıkarırsak: $7x_2 = 14 \implies x_2 = 2$ bulunur. Bunu 1. denklemde yazarsak $x_1 = 3$ bulunur.

Örnek 1.3 $\left\{ \begin{array}{c} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{array} \right\}$ denklem sistemini göz önüne alalım. x_1'i yok edelim. 1. denklemin 2 katını 2. denklemden çıkartırsak $0 = 21$ gibi bir sonuç elde ederiz. Bunun anlamı sistemin çözümünün olmaması; yani tutarsız olması demektir.

Örnek 1.4 $\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{array} \right\}$ denklem sistemini çözünüz.

1. denklemin 2 katını 2. denklemden, 1. denklemin 3 katını 3. denklemden çıkartırsak

$\left\{ \begin{array}{c} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ -5x_2 - 10x_3 = -20 \end{array} \right\}$ bulunur. Buradan $x_3 = 3$, $x_2 = -2$ bulunur.

Bunlar 1. denklemde yazılırsa $x_1 = 1$ elde edilir.

Örnek 1.5 $\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{array} \right\}$ denklem sistemine bakalım.

x_1'i yok edersek: $-3x_2 + 3x_3 = 12 \Longrightarrow x_2 = x_3 - 4$. Bunu 1. denklemde yazarsak $x_1 = x_3 + 4$ bulunur. Bu sistemin çözümü:

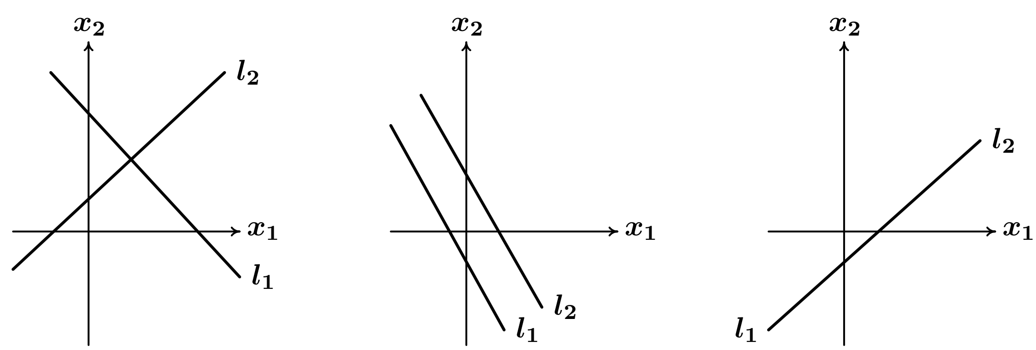
$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 - 4 \\ x_3 = \text{herhangi bir reel sayı} \end{array}\right\}$ Yani sonsuz tane çözüm var. Mesela $x_3 = 1, x_1 = 5, x_2 = -3$ gibi.

Sonuç:

Bu örnekler göstermektedir ki; bir lineer sistemin tek çözümü de olabilir, hiç çözümü olmayabilir veya sonsuz tane çözümü olabilir.

Şimdi $\left\{\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{array}\right\}$ lineer denklem sistemini düşünelim.

Bu iki denklemin belirttiği doğruları l_1 ve l_2 ile gösterelim. Eğer $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$ bu sistemin çözümü ise (s_1, s_2) noktası hem l_1 hem de l_2 üzerindedir. Tersine eğer bir (s_1, s_2) noktası hem l_1 hem de l_2 üzerinde ise $x_1 = s_1, x_2 = s_2$ bu sistemin bir çözümüdür. Geometrik olarak da üç ihtimalin olduğunu Şekil 1.1 de görebiliriz.



(a) Tek çözüm **(b)** Çözüm yok **(c)** Sonsuz çözüm

Şekil 1.1:

Not: Yok etme metodunda aşağıdakilerden birisi yapılabilir:

1. i. ve j. denklemler yer değiştirebilir.
2. Denklemlerden herhangi biri sıfır olmayan bir sabitle çarpılabilir.
3. i. denklem yerine $[c \times (j.\text{denklem})] + i.\text{denklem}$ yazılabilir. $(i \neq j)$

Bu değişiklerle elde edilen sistem orjinal sistemin bir eşidir. (İspatlayınız)

1.2 Matrisler ve Matris İşlemleri

Tanım 1.6 Sayıların bir dikdörtgensel dizisine bir matris denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin $i.$ satırı $[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ dir .$(1 \leqslant i \leqslant m)$.

A nın $j.$ sütunu $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ dir. $(1 \leqslant j \leqslant n)$

Eğer bir A matrisinin m satırı ve n sütunu varsa bu matrise $m \times n$ tipinde matris denir. $m = n$ ise kare matris denir. (veya $n.$ dereceden kare matris denir). $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanları A nın diyagonali (esas köşegeni) üzerindedir denir. a_{ij} elemanına (i, j)–inci eleman denir. A matrisi $A = [a_{ij}]$ şeklinde de yazılabilir. Eğer A , $m \times n$ tipinde bir matris ise ${}_mA_n$ yazarız ; eğer $n \times n$ tipinde ise A_n yazılır.

Örnek 1.7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B = [1 \;\; 3 \;\; -7], C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ise $a_{32} = -3, c_{21} = -1, b_{12} = 3, d_{22} = -2 \ldots$ gibi.

Tanım 1.8 Eğer $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin karşılıklı elemanları eşitse bu iki matrise eşit matrisler denir ve $A = B$ yazılır . Yani her $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ dir.

Tanım 1.9 Eğer $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde matrislerse A ve B nin toplamı olan $C = [c_{ij}] = A + B$ matrisi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.10 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Tanım 1.11 $A = [a_{ij}], m \times n$ tipinde bir matris olsun ve $c \in \mathbb{R}$ bir reel sayı olsun. A nın c sabiti ile çarpımı olan cA matrisi $C = [c_{ij}]$ ise $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $c_{ij} = c \cdot a_{ij}$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.12 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Tanım 1.13 Eğer A ve B $m \times n$ matris iseler $A + (-1)B$ matrisine A ve B nin farkı denir ve kısaca $A - B$ yazılır.

Toplam (Sigma) Sembolü

$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n$ yazılır. Buradaki i harfine indeks denir. $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = \sum_{j=1}^{n} r_j a_j$ olduğu açıktır.

Sigma sembolü aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.) $\sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{s=1}^{n} s_i a_i$

2.) $\sum_{i=1}^{n} c(r_i a_i) = c \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$

3.) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Tanım 1.14 Eğer $A = [a_{ij}], m \times n$ tipinde, $B = [b_{ij}], n \times p$ tipinde iki matris ise A ve B nin çarpımı olan $A \cdot B = C = [c_{ij}]$ matrisi $m \times p$ tipindedir ve şöyle tanımlanır:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} \quad \left\{ \begin{array}{c} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, p \end{array} \right\}$$

Not.1: A nın kolon sayısı ile B nin satır sayısı aynı olmalıdır.

Not.2: $C = AB$'nin (i, j)–inci elemanı; A nın $i.$ satırı ile B nin $j.$ kolonundaki elemanların karşılıklı çarpımlarının toplamıdır.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Örnek 1.15 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ matrisleri verilsin.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1(-2)+2\cdot 4+(-1)2 & 1\cdot 5+2(-3)+(-1)1 \\ 3(-2)+1\cdot 4+4\cdot 2 & 3\cdot 5+1(-3)+4\cdot 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Burada $B \cdot A$ matrisi de tanımlıdır. (Her zaman tanımlı olmayabilir.)

Şimdi Bölüm 1.1 deki (1.2) nolu lineer sisteme dönelim ve aşağıdaki matrisleri tanımlayalım:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Böylece (1.2) lineer sistemi $A \cdot X = B$ şeklinde yazılabilir. Burada A' ya katsayılar matrisi denir. Aşağıdaki matrise de ek matris (eklenmiş matris) denir. (Yani denklem sisteminin ek matrisi denir)

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

Örnek 1.16 $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1+3x_2-4x_3+x_4 & = & 5 \\ -2x_1+x_3 & = & 7 \\ 3x_1+2x_2-4x_4 & = & 3 \end{array} \right\}$ denklem sistemini düşünelim. Bu lineer sistemi matris formunda şöyle yazılabilir: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

Katsayılar matrisi $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, ek matris $\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right]$

Tanım 1.17 Eğer $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris ise A nın transpozu (devriği) olan ve A' (veya A^T) ile gösterilen matris, $a'_{ij} = a_{ji}$ olarak tanımlanır. Yani A' matrisi, A nın satırlarının sütun ve sütunların satır yapılmasıyla elde edilen matristir.

Örnek 1.18 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ise $A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

Örnek 1.19 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ve $E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. (Eğer mümkünse) aşağıdaki işlemleri yapınız:

(a) $C + E$	**(b)** AB ve BA
(c) $2C - 3E$	**(d)** $CB + D$
(e) $AB + D^2$, $D^2 = DD$ dir.	**(f)** $(3)(2A)$ ve $6A$
(g) $A(BD)$	**(h)** $(AB)D$
(i) $A(C + E)$	**(j)** $AC + AE$
(k) $3A + 2A$ ve $5A$	**(l)** A'
(m) $(A')'$	**(n)** $(AB)'$
(o) $B'A'$	**(p)** $(C + E)'$
(r) $C' + E'$	**(s)** $A(2B)$ ve $2(AB)$

Çözüm: Ödev (kolay)

Örnek 1.20 Eğer $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde bir matris ise A nın izi (trace) diyagonaldeki elemanların toplamı olarak tanımlanır:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Buna göre, aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $\mathrm{Tr}(c \cdot A) = c\,\mathrm{Tr}(A)$ (c : reel sayı)

(b) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

(c) $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$

İspat:

(a) $A = [a_{ij}] \Longrightarrow c \cdot A = [c \cdot a_{ij}]$ dir.

$$\mathrm{Tr}(c \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} c a_{ii} = c \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = c \cdot \mathrm{Tr}(A)$$

(b) $B = [b_{ij}]$ olsun. ($n \times n$ tipinde)

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

(c) $C = AB$ ve $D = BA$ olsun $C = [c_{ij}]$, $D = [d_{ij}]$ olsun.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ ve } d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Şimdi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \quad (i \text{ harfi ile } k \text{ harfi yer değiştirdi}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \mathrm{Tr}(D)
\end{aligned}$$

olup $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ olduğu ispatlanır. □

Örnek 1.21 $AX = B$ denkleminin birden fazla çözümü varsa, sonsuz tane çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: X_1 ve X_2 iki çözüm olsun. $r + s = 1$ olmak üzere $X_3 = rX_1 + sX_2$ matrisini düşünelim. $AX_3 = B$ olduğunu gösterelim:

$$AX_3 = A(rX_1 + sX_2) = ArX_1 + As \cdot X_2 = r(AX_1) + s(AX_2) = rB + sB = (r + s)B = B$$

olup sonsuz tane çözüm vardır. (Çünkü bu şekilde sonsuz miktarda r ve s seçilebilir.)

Örnek 1.22 $AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ şartını sağlayan 2×2 tipinde A ve B matrisleri bulunamayacağını ispatlayınız.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ olsun. $AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$$AB - BA = \begin{bmatrix} ae + bg - ea - fc & af + bh - eb - fd \\ ce + dg - ga - hc & cf + dh - gb - hd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup $bg - fc = 1$ ve $cf - gb = 1$ olur ve taraf tarafa toplanırsa $0 = 2$ çelişkisi elde edilir. O halde bu şekilde A ve B matrisleri olamaz.

1.3 Matris İşlemlerinin Cebirsel Özellikleri

Teorem 1.23 Matris işlemleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) A ve B $m \times n$ matrisler ise $A + B = B + A$ dır.

2) A, B ve C $m \times n$ matrisler ise $A + (B + C) = (A + B) + C$ dir.

3) Her $m \times n$ A matrisi için $A + {}_m0_n = {}_m0_n + A = A$ şartını sağlayan bir tek ${}_m0_n$ matrisi vardır. Bütün elemanları 0 olan bu matrise <u>$m \times n$ sıfır matrisi</u> denir. $m = n$ ise 0_n yazılır.

4) Verilen her $m \times n$ A matrisi için $A + B = {}_m0_n$ olacak şekilde bir ${}_mB_n$ matrisi vardır. $B = -A$ dır.

5) A $m \times n$ matris , B $n \times p$ ve C $p \times q$ matris ise $A(BC) = (AB)C$ dir.

6) **a)** A ve B $m \times n$ matris ve C $n \times q$ matris ise $(A + B)C = AC + BC$
b) C $m \times n$ matris ve A ile B $n \times q$ matris ise $C(A + B) = CA + CB$

7) r, s reel sayılar, A $m \times n$ matris ve B $n \times q$ matris ise

(a) $r(sA) = (rs)A = s(rA)$

(b) $A(rB) = r(AB)$

8) a ve b reel sayılar, A $m \times n$ matris ise $(a + b)A = aA + bA$

9) A ve B $m \times n$ matrisler, a bir reel sayı ise $a(A + B) = aA + aB$

10) A $m \times n$ matris ise $(A')' = A$

11) A ve B $m \times n$ matrisler ve c bir reel sayı ise

a) $(cA)' = cA'$

b) $(A+B)' = A' + B'$

12) A $m \times n$ matris ve B $n \times p$ matris ise $(AB)' = B'A'$

İspat 12) $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ve $AB = C = [c_{ij}]$ olsun. c'_{ij} nün $B'A'$ daki (i,j). eleman olduğunu ispatlayacağız.

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}$$

olup son ifade $B'A'$ deki (i,j). elemandır ve ispat biter. $\square$

Not 1.24 Eğer a ve b iki sayı ise $ab = 0$ olması için $a = 0$ veya $b = 0$ olmalıdır. Bu kural matrisler için geçerli değildir, örneğin:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Not 1.25 a, b, c üç tane reel sayı olsun. $ab = ac$ ve $a \neq 0$ ise $b = c$ dir. Bu sadeleştirme kuralı matrisler için geçerli değildir, örneğin:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, AB = AC \text{ olup } B \neq C \text{ dir.}$$

Örnek 1.26 Sıfırdan farklı bir A matrisi bulunuz ki (2×2 tipinde) $A^2 = AA = O_2$ olsun.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Örnek 1.27 Her 2×2 B matrisi için $AB = BA$ şartını sağlayan bütün 2×2 A matrislerini belirleyiniz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alalım. B yerine $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri alınırsa A matrisinde $a = d$,$b = c = 0$ elde edilir. $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ olsun.

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

her zaman doğru olduğu için, (yani $ax = xa$, $ay = ya$, $az = za$, $at = ta$) bu şekilde matrislerin kümesi $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ kümesidir.

1.4 Özel Tipteki Matrisler ve Parçalı Matrisler

$n \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisi için $i \neq j$ iken $a_{ij} = 0$ ise bu matrise diyagonal matris denir. (Yani ana diyagonal haricindeki elemanlar 0). Diyagonaldeki bütün elemanları aynı olan diyagonal matrise skaler matris denir. $I_n = [a_{ij}], a_{ii} = 1$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ olan skaler matrise $n \times n$ birim matris denir.

Örnek 1.28 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. A, B ve I_3 diyagonal matrisleridir. B ve I_3 skaler matrislerdir. I_3 de 3×3 birim matristir.

Not: A bir skaler matris ise bir r skaleri için $A = rI_n$ şeklindedir. Şimdi A bir kare matris olsun. Eğer p pozitif bir tamsayı ise $A^p = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{p-\text{tane}}$ şeklinde tanımlanır. Eğer A $n \times n$ matris ise $A^0 = I_n$ olarak tanımlanır.

Negatif olmayan p ve q tamsayıları için $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$ ve $(A^p)^q = A^{pq}$ kuralları geçerlidir. Ayrıca: $(AB)^p = A^p B^p$ kuralı $AB = BA$ değilse geçerli değildir.

Tanım 1.29 $n \times n$ tipinde bir $A = [a_{ij}]$ matrisinde $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise bu matrise üst üçgensel matris; $i < j$ iken $a_{ij} = 0$ ise alt üçgensel matris denir. Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ üst üçgensel, } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ alt üçgensel matrislerdir.}$$

Tanım 1.30 A bir matris olsun. $A' = A$ ise A'ya simetrik matris; $A' = -A$ ise çarpık–simetrik (anti–simetrik) matris denir. Örneğin:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ simetrik; } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ anti–simetrik matrislerdir.}$$

Buna göre aşağıdakiler doğrudur:

1) A simetrik veya anti–simetrik ise A bir kare matristir.

2) A simetrik ise A nın elemanları ana diyagonale göre simetriktir.

3) A simetrik $\iff$ $a_{ij} = a_{ji}$; A anti–simetrik $\iff$ $a_{ij} = -a_{ji}$

4) $\boldsymbol{A}$ anti–simetrik ise ana diyagonaldeki elemanların hepsi $\mathbf{0}$ dır.

Teorem 1.31 $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ matris ise; $\boldsymbol{S}$ bir simetrik matris ve $\boldsymbol{K}$ bir anti–simetrik matris olmak üzere $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{K}$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca bu yazılış tek türlüdür.

İspat: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{K}$ olduğunu bir an için kabul edip $\boldsymbol{S}$ ve $\boldsymbol{K}$ yı bulalım. $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{S}' + \boldsymbol{K}' = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{K}$ dır. Şimdi:

$$\left.\begin{array}{lcl} A & = & S+K \\ A' & = & S-K \end{array}\right\} \Longrightarrow A + A' = 2S \Longrightarrow S = \tfrac{1}{2}(A + A').$$

Yine buradan: $\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')$ bulunur.

Şimdi $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{K}$ olduğu; $\boldsymbol{S}$ nin simetrik ve $\boldsymbol{K}$ nın anti–simetrik olduğu görülebilir. $\square$

Örnek 1.32 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin.

$$S = \frac{1}{2}(A + A') = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & 6 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{2}(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{K}$ dır. (Kontrol ediniz.)

Tanım 1.33 Bir $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]$ matrisinin bazı (hepsi değil) satır ve/veya sütunları silinerek elde edilen bir matrise $\boldsymbol{A}$ nın bir <u>alt matrisi</u> denir

Örnek 1.34 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ ise $\boldsymbol{A}$ nın bir alt matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ dir.

Bu durumda alt matrislere parçalanan bir matristen söz edebiliriz. Tabii ki bu parçalanış tek türlü değildir.

Örnek 1.35 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \vdots & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$ matrisi $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ şeklinde veya,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} & \vdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} & \vdots & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} & \vdots & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \vdots & a_{43} & a_{44} & \vdots & a_{45} \end{bmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalanabilir. Bu şekildeki matrislere parçalı matrisler denir.

Örnek 1.36 Bir lineer sistemin ek matrisi (Bölüm 1.2) bir parçalı matristir. Yani $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ ise bu sistemin ek matrisi $[\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}]$ şeklinde yazılabilir.

Eğer $\boldsymbol{A}$ matrisi son yazılan şekliyle parçalanmışsa ve

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{23} & b_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{31} & b_{32} & \vdots & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & \vdots & b_{43} & b_{44} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{51} & b_{52} & \vdots & b_{53} & b_{54} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} (\hat{A}_{11}B_{11} + \hat{A}_{12}B_{21} + \hat{A}_{13}B_{31}) & \vdots & \hat{A}_{11}B_{12} + \hat{A}_{12}B_{22} + \hat{A}_{13}B_{32}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\hat{A}_{21}B_{11} + \hat{A}_{22}B_{21} + \hat{A}_{33}B_{31}) & \vdots & (\hat{A}_{21}B_{12} + \hat{A}_{22}B_{22} + \hat{A}_{23}B_{32}) \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir.

Singüler ve Singüler Olmayan (Non–singular) Matrisler

Tanım 1.37 $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{n \times n}$ tipinde bir matris olsun. Eğer $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I_n}$ şartını sağlayan bir $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{n \times n}$ tipinde matris varsa $\boldsymbol{A}$'ya singüler olmayan (tersinir=tersi alınabilir) matris denir. Aksi halde $\boldsymbol{A}$'ya singüler (tersi alınamaz) matris denir. B matrisine de A'nın tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir.

Örnek 1.38 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. $AB = BA = I_2$ olduğundan B, A'nın tersidir.

Teorem 1.39 Eğer bir matrisin tersi varsa tektir.
İspat: B ve C, A'nın tersi olsunlar. O zaman $AB = BA = I_n$ ve $AC = CA = I_n$'dir. Şimdi,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

olup A' nın tersi (varsa) tektir. □

Örnek 1.40 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. A^{-1} matrisini (varsa) bulalım. $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Buradan ; $\left\{ \begin{array}{rcl} a+2c & = & 1 \\ 3a+4c & = & 0 \end{array} \right\}$ ve $\left\{ \begin{array}{rcl} b+2d & = & 0 \\ 3b+4d & = & 1 \end{array} \right\}$ denklem sistemleri elde edilir. Bunun çözümü $a = -2, c = \frac{3}{2}, b = 1$ ve $d = -\frac{1}{2}$ dir. (Kontrol ediniz). Ayrıca

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan A singüler değildir ve $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ dir.

Örnek 1.41 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ diyelim.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Buradan şu lineer sistemler elde edilir:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+2c & = & 1 \\ 2a+4c & = & 0 \end{array} \right\} \quad \text{ve} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b+2d & = & 0 \\ 2b+4d & = & 1 \end{array} \right\}.$$

Birinci denklem 2 ile çarpılırsa $2 = 0$ çelişkisi elde edilir. Bu lineer sistemin çözümü yoktur. Yani A'nın tersi yoktur (singülerdir).

Teorem 1.42 A ve B singüler olmayan $n \times n$ matrisler ise AB matrisi de singüler değildir ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.
İspat:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BI_nB^{-1} = BB^{-1} = I_n$$

olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olduğu görülür. □

Sonuç 1.43 $A_1, A_2, \ldots, A_r$ $n \times n$ singüler olmayan matrisler ise $A_1A_2 \cdots A_r$ matrisi de singüler değildir ve $(A_1A_2 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}A_{r-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$ dir.
İspat: Benzer şekilde yapılır.

Teorem 1.44 A singüler olmayan bir matris ise, A^{-1} matrisi de singüler olmayan bir matristir ve $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.
İspat: $(A^{-1})A = I_n$ ve $A(A^{-1}) = I_n$ olup bu eşitliklerdeki birinci matrisin tersi ikinciye eşittir. O halde $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

Teorem 1.45 A singüler değilse A' de singüler değildir ve $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ dır.
İspat: $AA^{-1} = I_n$ dir. Bu eşitliğin iki tarafının transpozunu alırsak:

$$(A^{-1})'A' = I_n' = I_n$$

dir. Şimdi de $A^{-1}A = I_n$ eşitliğinin her iki tarafının transpozunu alırsak:

$$A'(A^{-1})' = I_n' = I_n.$$

Bu iki eşitlikten $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ elde edilir. □

Örnek 1.46 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ dir. $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ olup

$$(A')^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = (A^{-1})'$$

olduğu görülür.

Örnek 1.47 A simetrikse ve singüler değilse, A^{-1} 'in de simetrik olduğunu gösteriniz.
Çözüm: A simetrik olduğundan $A = A'$ dür. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ olduğunu biliyoruz (Teorem 1.45). Burada $A = A'$ olduğu için $A^{-1} = (A^{-1})'$ olup A^{-1} simetriktir.

Örnek 1.48 A singüler olmasın. $AB = AC \implies B = C$ olduğunu gösteriniz. Ayrıca $AB = 0_n \implies B = 0_n$ dir. Gösteriniz.
Çözüm:

$$AB = AC \implies A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \implies (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \implies B = C,$$
$$AB = 0_n \implies A^{-1}(AB) = A^{-1}0_n \implies (A^{-1}A)B = 0_n \implies B = 0_n$$

Lineer Sistemler ve Matrisin Tersi

A matrisi $n \times n$ tipinde ise $AX = B$ sistemi n bilinmeyenli n denklemli bir sistemdir. A singüler olmasın. Bu durumda A^{-1} mevcuttur ve $AX = B$ eşitliğinin her iki tarafını (soldan) A^{-1} ile çarpalım.

$$AX = B \implies A^{-1}(AX) = A^{-1}B \implies (A^{-1}A)X = A^{-1}B \implies X = A^{-1}B.$$

Yani $X = A^{-1}B$ bu sistemin bir çözümüdür. O halde A singüler değilse sistemin tek çözümü vardır.

1.5 Bir Matrisin Eşelon Formu

Tanım 1.49 Bir A $m \times n$ matrisi aşağıdaki 4 özelliği sağlıyorsa bu matrise indirgenmiş satır eşelon formdadır denir.

(a) Bütün elemanları sıfır olan satırlar (varsa) matrisin en alt kısmındadır.

(b) Tamamı sıfır olmayan bir satırdaki, sıfır olmayan ilk sayı (ki buna baş eleman denir) 1 dir.

(c) Eğer $i.$ ve $(i+1).$ satırlar ardarda ve tamamı sıfır olmayan iki satır ise $(i+1).$ satırın baş elemanı $i.$ satırın baş elemanının sağındadır.

(d) Eğer bir kolon herhangi bir satırın baş elemanını ihtiva ediyorsa, o kolondaki diğer bütün elemanlar sıfırdır.

Eğer A matrisi **(a)**, **(b)** ve **(c)** şartlarını sağlıyorsa bu matrise satır eşelon formundadır denir. Benzer bir tanım "indirgenmiş sütun eşelon form" ve "sütun eşelon form" için yapılabilir.

Örnek 1.50

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satır eşelon form — indirgenmiş satır eşelon form — satır eşelon form

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

indirgenmiş satır eşelon form — indirgenmiş satır eşelon form — hiçbiri (a)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hiçbiri (b) — hiçbiri (c) — satır eşelon form

Şimdi her matrisin (indirgenmiş) satır eşelon forma getirilebileceğini göreceğiz.

Tanım 1.51 Aşağıdaki işlemlerin her birine bir elementer satır (sütun) işlemi denir.

I.TİP: A nın $i.$ ve $j.$ satırlarını (sütunlarını) yer değiştirmek.

II.TİP: A nın $i.$ satırını (sütununu) bir $c \neq 0$ sayısı ile çarpmak.

III.TİP: A nın $i.$ satırının (sütununun) c katını $j.$ satıra (sütuna) eklemek. $(i \neq j)$

Bu satır işlemleri matrisler üzerinde aşağıdaki şekilde gösterilir: (Kolon işlemi için K kullanılır)

I.TİP: $S_i \longleftrightarrow S_j$ **II.TİP**: $S_i \longleftarrow cS_i$ **III.TİP**: $S_j \longleftarrow cS_i + S_j$

Örnek 1.52

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\2&3&0&-2\\3&3&6&-9\end{bmatrix}\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_3}B=\begin{bmatrix}3&3&6&-9\\2&3&0&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{S_1\leftarrow\frac{1}{3}S_1}C=\begin{bmatrix}1&1&2&-3\\2&3&0&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$C\xrightarrow{S_2\leftarrow(-2)S_1+S_2}D=\begin{bmatrix}1&1&2&-3\\0&1&-4&4\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

Tanım 1.53 Eğer bir B $m\times n$ matrisi A matrisine sonlu sayıda elementer satır (sütun) işlemlerinin uygulanması ile elde edilebiliyorsa A matrisi B matrisinin satır (sütun) eşdeğeridir denir.

Örnek 1.54 $A=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\2&1&3&2\\1&-1&2&3\end{bmatrix}$ ve $D=\begin{bmatrix}2&4&8&6\\1&-1&2&3\\4&-1&7&8\end{bmatrix}$ matrisleri satır eşdeğerdir. Çünkü

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\2&1&3&2\\1&-1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{S_2\leftarrow 2S_3+S_2}B=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\4&-1&7&8\\1&-1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{S_2\leftrightarrow S_3}C=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\1&-1&2&3\\4&-1&7&8\end{bmatrix}$$

olup C nin $1.$ satırı 2 ile çarpılırsa D matrisi elde edilir.

Bu tanıma göre aşağıdakiler doğrudur.

(a) Her matris kendisinin satır eşdeğeridir.

(b) A, B nin satır eşdeğeri ise B de A nın satır eşdeğeridir.

(c) A, B nin; B de C nin satır eşdeğeri ise A, C nin satır eşdeğeridir.

Teorem 1.55 Her $A=[a_{ij}]$ $m\times n$ sıfır olmayan matrisi satır (sütun) eşelon formdaki bir matrise satır (sütun) eşdeğerdir.
İspat: Yani, bir A matrisi satır eşelon formdaki bir matrise satır eşdeğerdir. Yani, A üzerinde elementer satır işlemleri yapılarak bir satır eşelon formda matris elde edilebilir. (Örnek üzerinde açıklanacak)

Örnek 1.56 Aşağıdaki A matrisini satır eşelon forma getireceğiz. Önce $1.$ kolonun en üst kısmında; yani $(1,1).$ pozisyonda bir baş eleman (yani 1) oluşturalım. ($1.$ kolon tamamen 0 ise $2.$ kolona geçeriz). Eğer $a_{11}\neq 0$ ise bütün satırı a_{11}'e böleriz; aksi halde aşağıdaki satırlardan birisi ile $1.$ satırı yer değiştirir ve $\mathbf{1.}$ satırı yeni elde edilen $(\mathbf{1},\mathbf{1})$–inci elemana böleriz:

$$A=\begin{bmatrix}0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\2&2&-5&2&4\\2&0&-6&9&7\end{bmatrix}\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_3}B=\begin{bmatrix}2&2&-5&2&4\\0&0&2&3&4\\0&2&3&-4&1\\2&0&-6&9&7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1\leftarrow\frac{S_1}{2}}C=\begin{bmatrix}1&1&-\frac{5}{2}&1&2\\0&0&2&3&4\\0&2&3&-4&1\\2&0&-6&9&7\end{bmatrix}$$

Baş eleman $\mathbf{1}$ elde edildikten sonra bunun altındaki sayıların $\mathbf{0}$ yapılması gerekir. Bu amaçla bu satırın (baş elemanının bulunduğu satırın) uygun katları aşağıdaki satırlara eklenir:

$$\xrightarrow{S_4\leftarrow(-2)S_1+S_4}D=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{5}{2}&1&2\\0&0&2&3&4\\0&2&3&-4&1\\0&-2&-1&7&3\end{bmatrix}$$

Bu aşamada $\mathbf{1.}$ kolon ile işimiz bitmiştir. Şimdi $(\mathbf{2},\mathbf{2})$-inci pozisyondaki sayıyı $\mathbf{1}$ yapmalıyız. (Eğer bu eleman ve altındakilerin tamamı $\mathbf{0}$ ise $\mathbf{3.}$ sütuna geçilir). Bunun için ya $\mathbf{2.}$ satırın tamamı bu sayıya bölünür veya alt satırlardan (üst satırlardan değil) biri ile yer değiştirilip sonra bölme işlemi yapılır:

$$\xrightarrow{S_2\leftrightarrow S_3}\begin{bmatrix}1&1&-\frac{5}{2}&1&2\\0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\0&-2&-1&7&3\end{bmatrix}\xrightarrow{S_2\leftarrow\frac{S_2}{2}}\begin{bmatrix}1&1&-\frac{5}{2}&1&2\\0&1&\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{2}\\0&0&2&3&4\\0&-2&-1&7&3\end{bmatrix}$$

Şimdi $\mathbf{2.}$ sütunda da baş eleman oluştuğuna göre bunun altındaki sayılar $\mathbf{0}$ yapılır. (Bu satırın uygun katları aşağıdaki satırlara eklenir):

$$\xrightarrow{S_4\leftarrow(2)S_2+S_4}\begin{bmatrix}1&1&-\frac{5}{2}&1&2\\0&1&\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{2}\\0&0&2&3&4\\0&0&2&3&4\end{bmatrix}$$

Daha sonra $\mathbf{3.}$ sütunda baş eleman oluşturulur ve bunun altındaki sayılar $\mathbf{0}$ yapılır: (**Dikkat:** Baş elemanlar sağa doğru gidildikçe aşağıya doğru en az bir basamak kaymalıdır)

$$\xrightarrow{S_3\leftarrow\frac{1}{2}S_3}\begin{bmatrix}1&1&-\frac{5}{2}&1&2\\0&1&\frac{3}{2}&-2&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&2&3&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_4 \leftarrow (-2)S_3 + S_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \text{ diyelim.}$$

$\boldsymbol{H}$ matrisi satır eşelon formdadır ve $\boldsymbol{A}$ matrisinin satır–eşdeğeridir.

Teorem 1.57 $m \times n$ tipinde her $A = [a_{ij}]$ sıfır olmayan matris, indirgenmiş satır (sütun) eşelon formdaki bir matrise satır (sütun) eşdeğerdir.

İspat: Bir önceki teoremin ispatındaki yöntem uygulanır. Ancak bu sefer bir baş elemanın bulunduğu kolondaki diğer elemanlar (yani hem altındaki hem de üstündekiler) $\mathbf{0}$ yapılacak şekilde gerekli elementer satır işlemleri yapılır. □

Örnek 1.58 Bir önceki $\boldsymbol{H}$ matrisinden devam edelim:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftarrow (-1)S_2 + S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_1 \leftarrow (4)S_3 + S_1]{S_2 \leftarrow (-\frac{3}{2}S_3) + S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}$$

$\boldsymbol{K}$ matrisi indirgenmiş satır–eşelon formdadır ve $\boldsymbol{A}$'ya satır–eşdeğerdir.

Not: Bir matrise satır eşdeğer olan indirgenmiş satır eşelon formda bir tek matris mevcuttur. (İspatı atlıyoruz)

Teorem 1.59 $AX = B$ ve $CX = D$, m denklemli ve n bilinmeyenli iki lineer sistem olsun. Eğer $[A \vdots B]$ ve $[C \vdots D]$ ek matrisleri satır–eşdeğer ise bu lineer sistemler eş sistemlerdir; yani çözümleri aynıdır.

İspat: Elementer satır işlemleri; lineer sistem düşünüldüğünde aşağıdakilere karşılık gelir:

- I.Tip: İki eşitliğin yer değiştirmesi
- II.Tip: Bir eşitliğin $c \neq 0$ ile çarpılması
- III.Tip: Bir eşitliğin bir katının başka bir eşitliğe eklenmesi

İspat; "satır eşdeğerlik" tanımından kolayca ortaya çıkar. Ayrıca bir lineer sistemin çözümü yoksa diğerinin de yoktur. □

Sonuç: Eğer A ve B iki satır eşdeğer $m \times n$ matris ise $AX = 0$ ve $BX = 0$ homojen sistemleri eş sistemlerdir.

Gauss ve Gauss–Jordan İndirgeme Metodları

Tanım 1.60 Yukarıdaki teoremlerde izah edilen; bir lineer sistemin ek matrisi $[A \vdots B]$ yi satır eşelon forma getirme yöntemine Gauss indirgeme metodu; indirgenmiş satır eşelon forma getirme yöntemine de Gauss-Jordan indirgeme metodu denir.

Gauss indirgeme metodu iki adımdan oluşur:

Adım.1. $[A \vdots B]$ ek matrisinin satır eşelon formdaki $[C \vdots D]$ matrisine indirgenmesi (dönüştürülmesi).

Adım.2. $[C \vdots D]$ den yararlanarak çözümün bulunması.

Örnek 1.61 : ($n \times n$ tipi için)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 8 \\ 3x_1 - x_3 & = & 3 \end{array}\right\} \text{ ek matris } [A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 3 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi satır–eşelon forma çevirirsek:

$$[C \vdots D] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. (Kontrol ediniz). Daha sonra denklemi çözeriz:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_2 = 2 - x_3 = -1, x_1 = 9 - 3x_3 - 2x_2 = 9 - 9 + 2 = 2$$

Çözüm: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$.

Genel durumda A matrisi $m \times n$ matris ise aşağıdaki örneklerdeki durumlar ortaya çıkabilir:

Örnek 1.62

$$[C\vdots D]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \text{ olsun. O zaman:}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 9-2x_5 \\ x_3 &= 7-2x_4-3x_5 = 7-2(9-2x_5)-3x_5 = -11+x_5 \\ x_2 &= 7-2x_3-3x_4+x_5 = 7-2(-11+x_5)-3(9-2x_5)+x_5 = 2+5x_5 \\ x_1 &= 6-2x_2-3x_3-4x_5-5x_5 = -1-10x_5 \\ x_5 &= \text{ herhangi bir reel sayı} \end{aligned}$$

Buradan, bütün çözümler şu şekilde yazılır: (Sonsuz çözüm vardır)

$$\begin{aligned} x_1 &= -1-10r \\ x_2 &= 2+5r \\ x_3 &= -11+r \\ x_4 &= 9-2r \\ x_5 &= r \text{ (herhangi bir sayı)} \end{aligned}$$

Örnek 1.63

$$[C\vdots D]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. $CX = D$ nin çözümü yoktur. Çünkü, son satırdan: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$ çelişkisi vardır.

Örnek 1.64

$$[C\vdots D]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \text{ olsun. Çözüm: } x_1=5, x_2=6, x_3=7, x_4=8.$$

Örnek 1.65

$$[C\vdots D]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{2} & \vdots & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan $x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5, x_1 = \frac{3}{2} - x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_5$ elde edilir. x_2, x_3, x_5 herhangi reel sayılardır. O halde genel çözüm: (r, s, t : reel sayılar)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - r - 2s + \frac{5}{2}t \\ x_2 &= r \\ x_3 &= s \\ x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

Örnek 1.66 Aşağıdaki lineer sistemi hem Gauss hem de Gauss–Jordan yöntemi ile çözelim.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &=& 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &=& -2 \end{array}\right\} \text{Ek matris: } [A \vdots B] = \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Ek matrisi satır–eşelon forma getirelim:

$$\xrightarrow[S_3 \leftarrow (-3)S_1 + S_3]{S_2 \leftarrow (-2)S_1 + S_2} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Sonra: } S_2 \leftarrow -\frac{S_2}{5}]{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \leftarrow (7)S_2 + S_3} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3 \leftarrow \frac{S_3}{10}} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Buradan; $x_3 = 3, x_2 = 4 - 2x_3 = -2, x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 = 1$ bulunur.

Gauss–Jordan metodu için matrisi indirgenmiş satır eşelon forma getirelim:

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \longleftarrow (-2)S_2 + S_1} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[S_2 \leftarrow (-2)S_3 + S_2]{S_1 \leftarrow S_3 + S_1} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Buradan $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$ bulunur.

Homojen Sistemler

m denklem ve n bilinmeyenden oluşan $AX = 0$ homojen sistemini düşünelim.

Örnek 1.67 Ek matrisi aşağıda verilen homojen sistemi düşünelim.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Bu matris indirgenmiş satır eşelon formda olduğu için, bütün çözümler:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -2r \\ x_2 = s \\ x_3 = -3r \\ x_4 = -4r \\ x_5 = r \end{array}\right\} (r \text{ ve } s \text{ herhangi iki sayı})$$

Genel olarak $m < n$ ise ve A indirgenmiş satır eşelon formda ise sonsuz çözüm vardır. ($AX = 0$'ın sonsuz çözümü vardır.)

Aşağıdaki teoreme göre A matrisi genel bir matris olabilir.

Teorem 1.68 m denklemli, n bilinmeyenli bir homojen sistemde eğer $m < n$ ise bu sistemin her zaman bir trivial olmayan çözümü vardır.
İspat: (Atlıyoruz.)

Sonuç 1.69 A $m \times n$ matris ve $AX = 0$'ın sadece trivial çözümü varsa $m \geqslant n$ dir.

Örnek 1.70 $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$ ek matrisi: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Bu matrisin satır eşdeğeri:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{ olup çözümler: } \left\{\begin{array}{l} x_1 = -r, \\ x_2 = r \\ x_3 = -r, \\ x_4 = r \text{ (reel sayı)} \end{array}\right\}$$

Örnek 1.71 Eğer $n \times n$ A matrisi indirgenmiş satır eşelon formda ise ve $A \neq I_n$ ise A'nın tamamı sıfır olan bir satırı vardır.

Çözüm: Aşikar. $n = 3$ alalım. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$ tamamı sıfır olmayan satırı yok ve indirgenmiş satır eşelon formda. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olabilir ama tamamı sıfır olan satırı var.

Örnek 1.72 Aşağıdaki lineer denklem sisteminde a'nın hangi değerleri için **(a)** Hiç çözüm yoktur. **(b)** Tek çözüm vardır. **(c)** Sonsuz sayıda çözüm vardır.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2 - 5)x_3 &= a \end{aligned}$$

Çözüm: Gauss indirgeme metodunu kullanalım:

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & \vdots & a \end{array}\right] \xrightarrow[S_3 \leftarrow (-1)S_1 + S_3]{S_2 \leftarrow (-1)S_1 + S_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & \vdots & a-2 \end{array}\right]$$

Şimdi $a = 2$ ise $\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right]$ elde edilir ki sonsuz çözüm vardır. $a = -2$ ise

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -4 \end{array}\right]$$

elde edilir ki çözüm yoktur. $a \neq \mp 2$ ise tek çözüm vardır.

Ödev: Bir önceki soruyu aşağıdaki sistemler için çözünüz.

(a) $\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a^2 - 1)x_3 &= a + 1 \end{aligned}\right\}$ **(b)** $\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + (a^2 - 8)x_2 &= a \end{aligned}\right\}$

(c) $\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2 - 5)x_3 &= a \end{aligned}\right\}$

1.6 Elementer Matrisler ve A^{-1} in Bulunması

Tanım 1.73 I_n matrisine I.tip, II.tip ve III.tip bir elementer satır veya sütun işleminin sadece bir defa uygulanması ile edilen bir $n \times n$ A matrisine, sırasıyla I.tipte, II.tipte, III.tipte elementer matris denir.

Örneğin;

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ I.tipte elementer matris. Çünkü } I_3 \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} E_1$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ II.tipte elementer matris. Çünkü } I_3 \xrightarrow{S_2 \leftarrow (-2) S_2} E_2$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ III.tipte elementer matris. Çünkü } I_3 \xrightarrow{S_1 \leftarrow (2) S_2 + S_1} E_3$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ III.tipte elementer matris. Çünkü } I_3 \xrightarrow{K_3 \leftarrow (3) K_1 + K_3} E_3$$

Teorem 1.74 A $m \times n$ bir matris olsun A üzerinde I.tip, II.tip veya III.tip bir elementer satır (sütun) işlemi yapılarak B matrisi elde edilmiş olsun. E matrisi de I_m'ye (I_n'ye) aynı elementer satır (sütun) işlemi uygulayarak elde edilen matris olsun. O zaman $B = EA$ dır. ($B = AE$ dir).

Örnek 1.75 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftarrow (-2) S_3 + S_1} B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Aynı elementer satır işlemini birim matrise uygulayalım:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftarrow (-2) S_3 + S_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \text{ diyelim.}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = B$$

olduğu görülür.

Teorem 1.76 A ve B $m \times n$ matrisler olsun. A nın B ye satır(sütun) eşdeğer olması için gerek ve yeter şart $E_1, E_2 \cdots, E_k$ elementer matrisler olmak üzere $B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$ şeklinde olmasıdır ($B = AE_1E_2 \cdots E_k$ şeklinde olmasıdır.)
İspat: A'ya bir tane elementer satır işlemi uygulamak demek A'yı soldan bir E_1 elementer matrisi ile çarpmak demektir. Benzer şekilde iki tane uygulamak demek A'yı soldan E_2E_1 ile çarpmak demektir. Bu şekilde devam edilirse ispat açıktır. (Benzer bir ispat "sütun eşdeğerlik") için yazılabilir. □

Teorem 1.77 Elementer matris olan bir E matrisi singüler değildir ve tersi de aynı tipte bir elementer matristir.

Lemma 1.78 A $n \times n$ bir matris olsun. $AX = 0$ homojen sisteminin tek çözümü $X = 0$ olsun (trivial çözüm). O zaman A matrisi I_n'nin satır eşdeğeridir.

Teorem 1.79 A singüler değildir $\Longleftrightarrow$ A elementer matrislerin bir çarpımıdır.
İspat: ($\Longleftarrow$) $A = E_1E_2 \cdots E_k$ olsun. E_i ler singüler olmayıp bunların çarpımı da singüler değildir. Yani A singüler değil.

İspat: ($\Longrightarrow$) A singüler olmasın.

$$AX = 0 \Longrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0 \Longrightarrow I_nX = 0 \Longrightarrow X = 0$$

olup $AX = 0$ homojen sisteminin sadece trivial çözüm vardır. Lemma 1.78 den dolayı A, I_n'nin satır eşdeğeridir. Bu demektir ki; öyle $E_1, E_2, \cdots, E_k$ elementer matrisleri vardır ki $I_n = E_k \cdots E_1 A$ dır. Şimdi

$$I_n = E_k \cdots E_1 A \Longrightarrow A = (E_k \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

Şimdi E_i^{-1}'ler de elementer matris olup (Teorem 1.77) ispat biter. □

Sonuç 1.80 A singüler değildir $\Longrightarrow$ A, I_n'in satır eşdeğeridir.

Buradan şu teorem söylenebilir:

Teorem 1.81 n denklemli n bilinmeyenli $AX = 0$ homojen sisteminin trivial olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart A nın singüler olmasıdır.

Örnek 1.82 $\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{array} \right\}$ homojen sistemi verilsin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ Ek matris: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 4 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ek matris indirgenmiş satır eşelon forma getirilirse:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ Çözümler: } \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -2r \\ x_2 &= r \end{aligned} \right\} (r : \text{reel sayı})$$

Not 1.83 A $n \times n$ matris ise aşağıdakiler birbirine denktir:

1.) A singüler değildir.

2.) $AX = 0$'ın sadece trivial çözümü vardır.

3.) A, I_n'in satır(sütun) eşdeğeridir.

4.) $AX = B$ lineer sistemi her $n \times 1$ B matrisi için tek çözüme sahiptir.

5.) A, elementer matrislerin bir çarpımıdır.

A^{-1} in Bulunması İçin Bir Yöntem

Teorem (1.79) un ispatının sonunda A singüler değil ise $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$ elde ettik. Buradan:

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$$

olur. Bu eşitlik bize A^{-1}'in bulunması için bir algoritma (yöntem) sağlar. A üzerinde I_n'i elde edene kadar elementer satır işlemleri yaparız. Bu elementer matrislerin çarpımı; yani $E_k \cdots E_1$; bize A^{-1}'i verir. Bunun için $[A \vdots I_n]$ parçalı matrisi yazılır ve sonra:

$$(E_k E_{k-1} \cdots E_1)[A \vdots I_n] = [E_k E_{k-1} \cdots E_1 A \vdots E_k E_{k-1} \cdots E_1 E_n] = [I_n \vdots A^{-1}]$$

işlemlerinde sonra $[A \vdots I_n]$ matrisi $[I_n \vdots A^{-1}]$ matrisine dönüşür. Şimdi bir örnek verelim:

Örnek 1.84 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım:

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3 \longleftarrow (-5)S_1 + S_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_2 \longleftarrow \frac{S_2}{2}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \longleftarrow (-1)S_2 + S_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \longleftarrow \frac{S_3}{-4}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_2 \longleftarrow \frac{-3}{2} S_3 + S_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_1 \longleftarrow \frac{1}{2} S_3 + S_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right]$$

Buradan $A^{-1} = \begin{bmatrix} 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 5/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$ bulunur. Yani $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$ olmalıdır. (Kontrol ediniz.)

Bu yöntemde A singüler ise bu durum nasıl anlaşılır?

Teorem 1.85 $n \times n$ A matrisi singüler $\Longleftrightarrow$ A matrisi bir satırı tamamen sıfır olan bir B matrisine satır eşdeğerdir.

Örnek 1.86 Aynı yöntemle $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulmaya çalışalım.

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3 \longleftarrow (-5)S_1 + S_3]{S_2 \longleftarrow -S_1 + S_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_2 \longleftarrow \frac{S_2}{-4}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[S_3 \longleftarrow 12S_2 + S_3]{S_1 \longleftarrow -2S_2 + S_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Burada işlemi durduralım. Çünkü $\boldsymbol{A}$ matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine satır eşdeğerdir. Yani $\boldsymbol{A}$ nın tersi yoktur.

Not 1.87 Bölüm 1.4'de $\boldsymbol{A}$ nın tersini, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I_n}$ olacak şekildeki $\boldsymbol{B}$ matrisi olarak tanımladık. Şimdi, bu eşitliklerden sadece $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I_n}$'in yeterli olduğunu ispatlayalım.

Teorem 1.88 $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ matrisler ve $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I_n}$ olsun. O zaman $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I_n}$ dir. Yani $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ dir.

İspat: Önce $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I_n} \Longrightarrow \boldsymbol{A}$'nın singüler olmadığını göstereceğiz. Farzedelim ki $\boldsymbol{A}$ singüler olsun. O zaman $\boldsymbol{A}$, bir satırı tamamen sıfır olan bir $\boldsymbol{C}$ matrisine satır eşdeğerdir. Yani $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E_k E_{k-1} \cdots E_1 A}$ şeklindedir ($\boldsymbol{E_i}$ ler elementer matris). O halde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{CB} = \boldsymbol{E_k E_{k-1} \cdots E_1 AB} &\Longrightarrow \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{CB}'\text{ye satır eşdeğer} \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{CB}'\text{nin bir satır tamamen sıfır olup} \boldsymbol{AB} \text{ singülerdir} \end{aligned}$$

Şimdi $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I_n}$ olduğundan $\boldsymbol{I_n}$'in singüler olduğu çelişkisi bulunur. Yani $\boldsymbol{A}$ singüler değildir. O zaman $\boldsymbol{A}^{-1}$ mevcuttur. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I_n}$ eşitliğinden $(\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I_n} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ elde edilir. □

1.7 Eşdeğer Matrisler

Daha önce bir $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir $\boldsymbol{B}$ matrisine "satır–eşdeğer" ve "sütun–eşdeğer" olmasının tanımını verdik. Bu tanımın bir genellemesini şöyle verebiliriz:

Tanım 1.89 $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ matris olsun. Eğer $\boldsymbol{B}$ yi $\boldsymbol{A}$ ya sonlu sayıda elementer satır ve/veya sütun işlemi uygulayarak elde edebilirsek $\boldsymbol{A}$ matrisine $\boldsymbol{B}$ nin eşdeğer matrisi denir (veya $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$'ye eşdeğerdir denir.)

Teorem 1.90 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{A}$ matrisi singüler değil $\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I_n}$'e eşdeğerdir.

2

Reel Vektör Uzayları

Düzlemde Vektörler (Genel Tekrar)

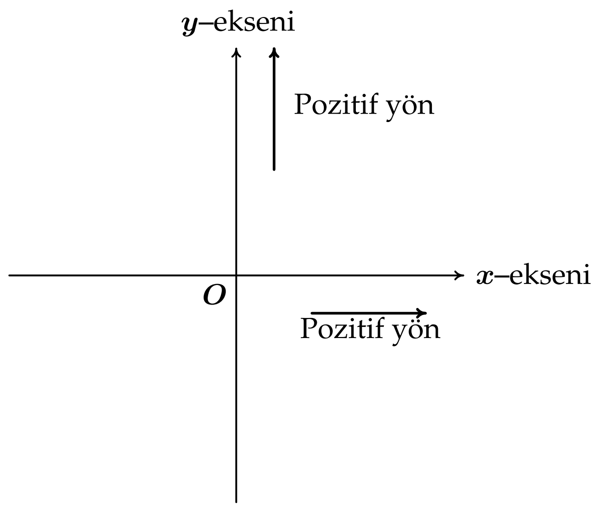
Pek çok uygulamalarda "kütle", "basınç" ve "uzunluk" gibi ölçülebilir büyüklüklerle karşılaşırız. Bunlar sadece bir tek sayı (yani büyüklük) ile ifade edilebilirler. Bu tür büyüklüklere skaler denir. Bir de hız, güç ve ivme gibi büyüklükler vardır ki bunlar ayrıca bir "yöne" sahiptirler. Bunlar "vektörler" ile ifade edilebilir. Bu yüzden bu büyüklüklere vektör denir. Burada skalerleri küçük harfler ile; vektörleri de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gibi Yunanca harfler ile göstereceğiz.

Dik Koordinat (Kartezyen Koordinat) Sistemi

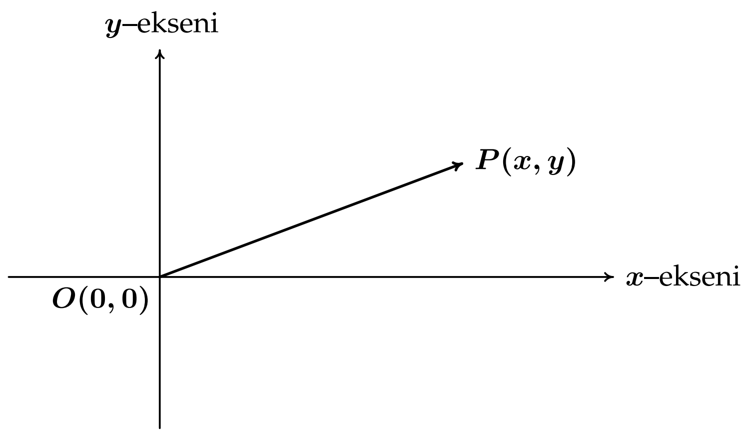
Birbirine dik ve bir O noktasında kesişen iki doğru çizelim. Bu O noktasına orjin denir. Yatay olan doğruya x–ekseni ve düşey olan doğruya y–ekseni denir. x–ekseninde ve O noktasının sağında bir nokta seçelim. Bu noktanın orjine uzunluğuna bir "birim" diyelim. Benzer şekilde y–ekseninde ve O noktasının yukarısında bir nokta seçelim öyle ki bu noktanın orjine uzaklığı bir birim olsun. Böylece x–eksenini sağa doğru ve y–ekseni de yukarı doğru pozitif yönlendirelim. Bu eksenlere koordinat eksenleri denir. Bu eksenler bir dik koordinat sistemi veya kartezyen koordinat sistemi oluştururlar. (Şekil 2.1)

Düzlemdeki her bir P noktasına bir (x, y) reel sayı ikilisi karşılık getiririz. Bu sıralı ikiliye P noktasının koordinatları denir. Bu noktayı $P(x, y)$ sembolü ile de gösterebiliriz. Tersine, her bir (x, y) reel sayı ikilisine düzlemde bir nokta karşılık getirebiliriz. Bu yapılan eşleme 1–1 ve örtendir:

$$\boxed{\text{Düzlemde bir } P \text{ noktası} \xleftrightarrow{\mathbf{1-1} \text{ eşleme}} (x, y) \text{ ikilisi } (x, y \in \mathbb{R})}$$



Şekil 2.1: Dik koordinat (kartezyen koordinat) sistemi



Şekil 2.2: Düzlemde yönlendirilmiş bir doğru parçası.

Bu düzleme $\mathbb{R}^2$ veya <u>2–boyutlu uzay</u> denir.

Şimdi $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ matrisini düşünelim. $(x, y \in \mathbb{R})$. X matrisine, başlangıç noktası orjinde, bitiş (uç) noktası $P(x, y)$ de olan yönlü doğru parçasını karşılık getirelim. Bu yönlendirilmiş doğru parçasını da $\overrightarrow{OP}$ ile gösterelim. Başlangıç noktası ve bitiş noktasını ayırt etmek için OP'nin üzerindeki okun yönünü bitiş noktasına doğru yazalım. (Bkz. Şekil 2.2) Bu yönlü doğru parçasının uzunluğuna $\overrightarrow{OP}$ nin <u>normu</u> denir. Böylece yönlü doğru parçaları hız, ivme, kuvvet gibi şeyleri açıklamak için kullanılabilir.

Tersine başlangıç ve bitiş noktaları $O(0, 0)$ ve $P(x, y)$ olan $\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçasını $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ matrisi ile temsil edelim.

Düzlemde bir "vektör" bir $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ matrisine denir. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R})$ $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$'ye $\boldsymbol{\alpha}$ nın bileşenleri denir. Bundan sonra kısaca vektör diyeceğiz.

$\boldsymbol{\alpha_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_1} \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{\alpha_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \end{bmatrix}$ olsun. $\boldsymbol{\alpha_1} = \boldsymbol{\alpha_2} \iff \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$ ve $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_2}$ olur.

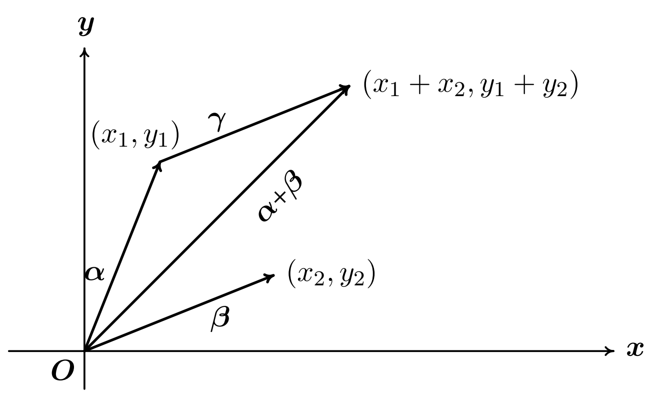
Her matrise bir $\boldsymbol{P(x, y)}$ noktası; her noktaya da bir yönlendirilmiş doğru parçası karşılık gelir:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\mathbf{1-1} \text{ eşleme}} \boldsymbol{P(x, y)} \xleftrightarrow{\mathbf{1-1} \text{ eşleme}} \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}, (\boldsymbol{O}(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \boldsymbol{P(x, y)})}$$

İki vektörün toplamı:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_1} \end{bmatrix} \text{ ve } \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \end{bmatrix} \text{ ise } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. İki vektörün toplamı Şekil 2.3 de gösterilmiştir.

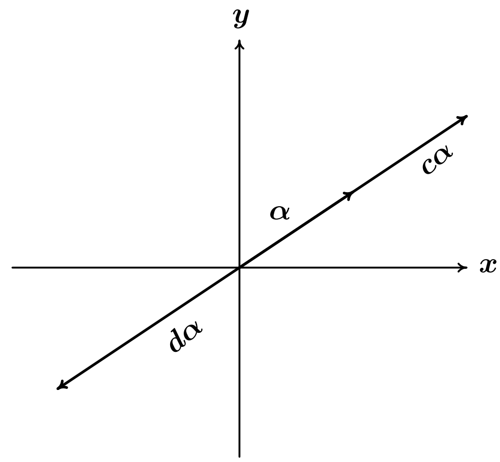


Şekil 2.3: İki vektörün toplamı.

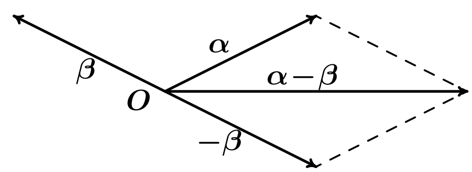
Şekil 2.3 de: γ: başlangıç noktası $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, $\boldsymbol{\beta}$ yönünde ve $\boldsymbol{\beta}$ nın normuna sahiptir. O zaman $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ nın başlangıç noktası $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ uç noktası $(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1}+\boldsymbol{y_2})$ dir. Veya $\boldsymbol{\alpha}$ ve $\boldsymbol{\beta}$ üzerine kurulan paralelkenarın köşegeni $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ dır.

$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{c}$ bir skaler (reel sayı) ise $\boldsymbol{c\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{cx} \\ \boldsymbol{cy} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nın skalerle çarpımıdır.

$\boldsymbol{c} > \mathbf{0}$ ise $\boldsymbol{c\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ ile aynı yönde $\boldsymbol{d} < \mathbf{0}$ ise $\boldsymbol{d\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ ile ters yöndedir (Şekil 2.4). Ayrıca $\boldsymbol{\alpha} + (-\mathbf{1})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ vektörüne $\boldsymbol{\alpha}$ ile $\boldsymbol{\beta}$ nın farkı denir (Şekil 2.5).



Şekil 2.4: Bir vektörün skalerle çarpımı.



Şekil 2.5: İki vektörün farkı.

2.1 Vektör Uzayları ve Altuzaylar

Tanım 2.1 Üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri tanımlı olan bir $\boldsymbol{V}$ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\boldsymbol{V}$'ye bir gerçel (reel) vektör uzayı denir.

(a) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$ iken $\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$ dir. (Yani $\boldsymbol{V}$, $\oplus$ işlemine göre kapalıdır.)

(1) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$ için $\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \oplus \boldsymbol{\alpha}$

(2) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma \in \boldsymbol{V}$ için $\boldsymbol{\alpha} \oplus (\boldsymbol{\beta} \oplus \gamma) = (\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta}) \oplus \gamma$

(3) $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ için $\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \oplus \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$ şartını sağlayan bir tek $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{V}$ vardır.

(4) $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ için $\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \oplus \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ şartını sağlayan bir tek $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$ vardır. Bu elemana $\boldsymbol{\alpha}$'nın negatifi denir ve $-\boldsymbol{\alpha}$ ile gösterilir.

(b) Her $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ ve $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ için $\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ dir.

(5) $\boldsymbol{c} \odot (\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{\alpha}) \oplus (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{\beta}) \quad (\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$ ve $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ için)

(6) $(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) \odot \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{\alpha}) \oplus (\boldsymbol{d} \odot \boldsymbol{\alpha}) \quad (\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ ve $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}$ için)

(7) $\boldsymbol{c} \odot (\boldsymbol{d} \odot \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{cd}) \odot \boldsymbol{\alpha} \quad (\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ ve $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}$ için)

(8) $1 \odot \alpha = \alpha \quad (\forall \alpha \in V$ için)

Burada V nin elemanlarına vektörler; $\mathbb{R}$ nin elemanlarına skalerler denir. $\oplus$ işlemine vektör toplaması; $\odot$ işlemine skaler çarpması denir. θ vektörüne de sıfır vektörü denir ve genelde, hangi uzayın sıfır vektörü olduğunu belirtmek için, θ_V ile gösterilir. Gerçel vektör uzayına kısaca "vektör uzayı" diyeceğiz.

Örnek 2.2 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ şeklindeki $n \times 1$ gerçel değerli matrislerin kümesine $\mathbb{R}^n$ diyelim. $\oplus$ ile matris toplamasını, $\odot$ ile de skaler çarpımı gösterelim. Bölüm 1.3 de gösterildiği gibi, $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır. $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ matrisine bir "vektör" denilebilir.

Örnek 2.3 $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi ${}_m\mathbb{R}_n$ bir vektör uzayıdır. ($\oplus$ ile matris toplamasını ve $\odot$ ile de matrisin reel sayı ile çarpımını gösterelim.)

Örnek 2.4 Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, bilinen toplama ve çarpma işlemi ile bir vektör uzayıdır:

$$x \oplus y = x + y, \quad c \odot x = cx$$

Örnek 2.5 $\mathbb{R}_n$ ile $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $1 \times n$ tipindeki matrislerin kümesini gösterelim. $\oplus$ ile matris toplamını ve $\odot$ ile de matris skalerle çarpımını gösterelim. $\mathbb{R}_n$ kümesi bu işlemlerle bir vektör uzayıdır.

Örnek 2.6 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ fonksiyonuna (t cinsinden) bir polinom denir. $a_n \neq 0$ ise $p(t)$ nin derecesi n dir denir. Mesela $p(t) = 2t + 1$ in derecesi 1; $p(t) = 3$ ün derecesi 0 dır. $p(t) = 0$ fonksiyonuna sıfır polinomu denir.

$$P_n = \{ \text{ derecesi } \leqslant n \text{ olan polinomlar } \}$$

olsun. $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$, $q(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ polinomları ve $c \in \mathbb{R}$ için toplama ve skaler çarpma şöyle tanımlansın:

$$\begin{aligned} \textbf{Toplama:} \quad & p(t) \oplus q(t) = (a_n + b_n)t^n + \cdots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0) \\ \textbf{Skalerle çarpma:} \quad & c \odot p(t) = (ca_n)t^n + \cdots + (ca_1)t + ca_0 \end{aligned}$$

Şimdi P_n'in bir vektör uzayı olduğunu gösterelim:

(a) $p(t) \oplus q(t)$ derecesi $\leqslant n$ olan bir polinomdur.

(1) Her i için $a_i + b_i = b_i + a_i$ olduğundan $p(t) \oplus q(t) = q(t) \oplus p(t)$ dir

(2) Benzer şekilde; $r(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_0$ alınırsa, her i için $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$ olduğundan $(p(t) \oplus q(t)) \oplus r(t) = p(t) \oplus (q(t) \oplus r(t))$ dir.

(3) θ elemanı sıfır polinomdur.

(4) $p(t)$ nin negatifi $-a_n t^n - a_{n-1} t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0$ polinomudur.

(b) $c \odot p(t)$ derecesi $\leqslant n$ olan bir polinomdur.

(5) $c \odot (p(t) \oplus q(t)) = c \odot p(t) \oplus c \odot q(t)$, çünkü $c(a_i + b_i) = ca_i + cb_i$

(6) $(c + d) \odot (p(t)) = c \odot p(t) \oplus d \odot p(t)$, çünkü $(c + d)a_i = ca_i + da_i$

(7) $c \odot (d \odot p(t)) = (cd) \odot p(t)$, çünkü $c(da_i) = (cd)a_i$

(8) $1 \odot p(t) = p(t)$, çünkü $1a_i = a_i$.

Benzer şekilde P ile bütün polinomların (derecesi ne olursa olsun) kümesini gösterirsek; P bilinen polinom toplaması ve skaler çarpımı ile bir vektör uzayıdır.

Örnek 2.7 V ile $\mathbb{R}$ de tanımlı ve reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini gösterelim. $f, g \in V$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f \oplus g$ ve $c \odot f$ fonksiyonlarını şöyle tanımlayalım:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \quad (c \odot f)(x) = c \cdot f(x)$$

Bu durumda V bir vektör uzayıdır. (Kontrol edin). Bu uzay $C(-\infty, \infty)$ ile gösterilir.

Örnek 2.8 $V = \mathbb{R}$ olsun. $\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$ ve $c \odot \alpha = c\alpha$ olsun. V bir vektör uzayı mıdır?
Çözüm: **(a)** ve **(b)** sağlanır: $\alpha \oplus \beta$ ve $c \odot \alpha$, V nin elemanlarıdır. $\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$ ve $\beta \oplus \alpha = \beta - \alpha$ olup genelde $\alpha \oplus \beta \neq \beta \oplus \alpha$ dır. (1) sağlanmadığı için V bir vektör uzayı değildir. (Ayrıca **(2)**,**(3)**,**(4)** ve **(6)** sağlanmaz.)

Örnek 2.9 V kümesi (x, y, z) sıralı üçlülerinden oluşan küme olsun. $(x, y, z \in \mathbb{R})$.

$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x', y + y', z + z') \quad \text{ve} \quad c \odot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$$

olarak tanımlansın. **(1)**, **(3)**, **(4)**, **(6)** sağlanmadığı için V bir vektör uzayı değildir.

Örnek 2.10 $V = \mathbb{Z}$ olsun. $\oplus$ ve $\odot$ bilinen toplama ve çarpma olsun. V vektör uzayı değildir. Çünkü $c = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ alınırsa, genelde, $0 \neq \alpha \in V$ için $c\alpha \notin V$ dir.

Teorem 2.11 V bir vektör uzayı olsun.

(a) Her $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ için $\mathbf{0} \odot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$

(b) Her $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ için $\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$

(c) $\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ ise o zaman ya $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ dır ya da $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ dır.

(d) Her $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ için $(-\mathbf{1}) \odot \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$

İspat (a) $\mathbf{0} \odot \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \odot \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{0} \odot \boldsymbol{\alpha}) \oplus (\mathbf{0} \odot \boldsymbol{\alpha})$ olup her iki tarafa $-(\mathbf{0} \odot \boldsymbol{\alpha})$ eklersek $(\mathbf{2}), (\mathbf{3})$ ve (4) den $\mathbf{0} \odot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ elde ederiz.

İspat (b) Ödev.

İspat (c) Ödev.

İspat (d) $(-\mathbf{1}) \odot \boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\alpha} = (-\mathbf{1}) \odot \boldsymbol{\alpha} \oplus \mathbf{1} \odot \boldsymbol{\alpha} = (-\mathbf{1} + \mathbf{1}) \odot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \odot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ olur ve $(-\mathbf{1}) \odot \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$ elde edilir.

Altuzaylar

Tanım 2.12 $\boldsymbol{V}$ bir vektör uzayı ve $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}$ deki işlemlerle birlikte bir vektör uzayı oluyorsa $\boldsymbol{W}$ ya $\boldsymbol{V}$ nin bir alt uzayı denir.

Örnek 2.13 Her vektör uzayının en az iki alt uzayı vardır: kendisi ve $\{\boldsymbol{\theta}\}$ (yani toplamanın birim elemanı). Bu uzaylara trivial (aşikâr) alt uzaylar denir.

Örnek 2.14 $\boldsymbol{P_2} = \{$ derecesi $\leqslant \mathbf{2}$ olan polinomlar $\}$ olsun. $\boldsymbol{P_2} \subseteq \boldsymbol{P}$ dir. Ayrıca $\boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P}$ nin alt uzayıdır. Genelde $\boldsymbol{P_n} = \{$ derecesi $\leqslant \boldsymbol{n}$ olan polinomlar $\}$ kümesi $\boldsymbol{P}$ nin alt uzayıdır.

Örnek 2.15 $\boldsymbol{V} = \{$ derecesi $\mathbf{2}$ olan polinomlar $\}$ olsun. $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{P}$ dir. Fakat $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{P}$ nin alt uzayı değildir. Çünkü $\mathbf{2}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}\boldsymbol{t} + \mathbf{1} \in \boldsymbol{V}$ ve $-\mathbf{2}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{t} + \mathbf{2} \in \boldsymbol{V}$ polinomlarının toplamı $\mathbf{4}\boldsymbol{t} + \mathbf{3} \notin \boldsymbol{V}$ dir.

Teorem 2.16 $\boldsymbol{V}, \oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq \boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}$ olsun. $\boldsymbol{W}$ nun $\boldsymbol{V}$ nin alt uzayı olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin sağlanmasıdır: (Her $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}; \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ için)

(a) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W} \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}$

(b) $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ ve $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{W} \Longrightarrow \boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{W}$

İspat: $(\Longrightarrow)$ $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}$ bir alt vektör uzayı olsun. $\boldsymbol{W}$ bir vektör uzayı olduğu için $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}$ ise $\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}$ ve $\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{W}$ olduğu açıktır.

İspat: ($\Longleftarrow$) **(a)** ve **(b)** sağlansın. **(b)**'den dolayı $(-1) \odot \alpha \in W$ dır (her $\alpha \in W$ için). **(a)**'dan dolayı $\alpha \oplus (-1) \odot \alpha \in W$ dir; fakat $\alpha \oplus (-1) \odot \alpha = \alpha \oplus (-\alpha) = \theta$ olduğundan $\theta \in W$ olur. O zaman $\alpha \oplus \theta = \alpha$ dır. Her $\alpha \in V$ için $(-1) \odot \alpha = -\alpha \in V$ olur (**(b)**den dolayı). $W \subseteq V$ olduğundan $1, 2, 5, 6, 7$ ve 8 özellikleri sağlanır. O halde W, V nin bir alt uzayıdır. □

Örnek 2.17

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{olsun.}$$

$W, \mathbb{R}^3$ ün alt uzayı mıdır?

$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1 + b_1 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha \oplus \beta = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \end{bmatrix} \in W$ dur; çünkü $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$.

$c \in \mathbb{R}$ ise $c \odot \alpha = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ c(a_1 + b_1) \end{bmatrix} \in W$ dur; çünkü $ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1)$. Teorem (2.16) dan $W, \mathbb{R}^3$ ün alt uzayıdır.

Not 2.18 Bundan sonra $c \in \mathbb{R}$ ve α, β bir V vektör uzayının elemanı ise $\alpha \oplus \beta$ yerine $\alpha + \beta$ ve $c \odot \alpha$ yerine $c\alpha$ yazacağız.

Örnek 2.19 V bir vektör uzayı ve α_1 ve α_2, V nin iki sabit elemanı olsun. $W = \{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ kümesi V nin bir altuzayıdır. Çünkü, Teorem (2.16) dan, $\beta_1 = a_1\alpha_1 + a_2\beta_2$, $\beta_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$ ise:

$$\beta_1 + \beta_2 = (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 \in W \quad \text{ve} \quad c\beta_1 = (ca_1)\alpha_1 + (ca_2)\alpha_2 \in W$$

dir. ($c \in \mathbb{R}$). Çünkü $a_1 + b_1, a_2 + b_2, ca_1, ca_2 \in \mathbb{R}$

Not: Bu son örneği genelleştirebiliriz; yani **2** yerine daha fazla vektör alabiliriz:

Tanım 2.20 V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ ise

$$\mathrm{Span}(S) = \{a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k : a_i \in \mathbb{R}\}$$

kümesi V nin bir alt uzayıdır. Bu uzaya S nin gerdiği (doğurduğu, ürettiği) uzay denir.

Örnek 2.21 $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ kümesi ${}_2\mathbb{R}_3$ ün alt uzayıdır. (Gösterin)

Örnek 2.22 A, $m \times n$ matris olsun. $AX = 0$ homojen sistemini düşünelim. Bütün çözümler

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir; yani $\mathbb{R}^n$ de bir vektördür. O halde bütün çözümlerin kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir alt kümesidir. X_1 ve X_2 iki çözüm olsun.

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0 \text{ olup } X_1 + X_2 \text{ bir çözümdür.}$$
$$A(cX_1) = c(AX_1) = c0 = 0 \text{ olup } cX_1 \text{ bir çözümdür}$$

Yani, Teorem (2.16) dan, çözümler kümesi bir alt uzaydır. Bu uzaya homojen sistemin çözüm uzayı denir.

Ödev: $AX = B, B \neq 0$, sisteminin çözümleri $\mathbb{R}^n$ in bir alt uzayı değildir. Gösteriniz.

ÖDEVLER

(1) Aşağıdaki V kümelerinin verilen $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile birer vektör uzayı olup olmadıklarını bulunuz. Değil ise özelliklerden hangilerini sağlamadığını söyleyiniz.

(a) $V = \mathbb{R}^+$, $\oplus$ ve $\odot$ bilinen $+$ ve $\cdot$ işlemleri

(b) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y'), r \odot (x, y) = (x, ry)$

(c) $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}, (x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'); r \odot (x, y, z) = (x, 1, z)$

(d) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant 0 \right\}$ bilinen matris toplaması ve skaler çarpımı

(e) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y'); r \odot (x, y) = (0, 0)$

(f) $V = \mathbb{R}^+, \alpha \oplus \beta = \alpha\beta, c \odot \alpha = \alpha^c$

(g) $V = \mathbb{R}^+, \alpha \oplus \beta = \alpha\beta - 1, c \odot \alpha = \alpha$

(h) $V = \mathbb{R}, \alpha \oplus \beta = \alpha\beta, c \odot \alpha = c + \alpha$

(i) $V = \mathbb{R}, \alpha \oplus \beta = 2\alpha - \beta, c \odot \alpha = c\alpha$

(2) Aşağıdaki tipteki matrislerden oluşan kümelerin hangisi ${}_2\mathbb{R}_3$ ün alt uzayıdır?

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = a + c$ **(b)** $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}, c > 0$ **(c)** $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, a = -2c, f = 2e + d$

(3) Aşağıdaki tipteki matrislerden oluşan kümelerin hangisi $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayıdır?

(a) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+2b \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, a > 0$ **(e)** $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} a \\ a \\ c \end{bmatrix}$

(4) Aşağıdaki kümelerin hangisi ${}_2\mathbb{R}_2$ nin alt uzayıdır?

(a) Simetrik matrisler

(b) Singüler matrisler

(c) Singüler olmayan matrisler

(5) Aşağıdaki fonksiyonlardan oluşan kümelerin hangisi reel-değerli sürekli fonksiyonların (Bkz. Örnek (2.7)) bir alt uzayıdır?

(a) Negatif olmayan fonksiyonlar

(b) Sabit fonksiyonlar

(c) $f(0) = 0$ şartını sağlayanlar

(d) $f(0) = 5$ şartını sağlayanlar

(e) Türevlenebilir fonksiyonlar.

2.2 Lineer Bağımsızlık

Eleman sayısı sonlu olan tek vektör uzayı $\{\theta\}$ uzayıdır. Çünkü V bir vektör uzayı $\theta \neq \alpha \in V$ ise her $c \in \mathbb{R}$ için $c\alpha \in V$ olacağından V sonsuz elemanlı olur.

Tanım 2.23 V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer bir $\alpha \in V$ vektörü $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k$$

şeklinde yazılabiliyorsa α ya S deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu (doğrusal birleşimi) denir.

Örnek 2.24 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörü $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. Gösterelim.

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \Longrightarrow a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Buradan $\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & 2 \\ 2a_1 + a_3 & = & 1 \\ a_1 + 2a_2 & = & 5 \end{array} \right\}$ denklem sistemi çözülürse $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -1$ bulunur.
Yani $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ olur.

Örnek 2.25 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$
vektörünün $\mathbf{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesinde olup olmadığını inceleyiniz.
Çözüm: $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4$ olacak şekilde a_1, a_2, a_3, a_4 sayıları bulunursa $\alpha \in \mathbf{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olur.

$$a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 & = & 0 \\ a_1 + a_3 & = & -2 \\ 2a_1 + a_2 - a_4 & = & 4 \end{array} \right\}$$

Ek matrisi satır eşelon forma getirirsek:

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]$, buradan $a_1 = a_4$, $a_2 = 4 - a_4$, $a_3 = -2 - a_4$, $a_4 =$ bir reel sayı.

Yani $\alpha \in \mathbf{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olur. (Sonsuz miktarda a_1, a_2, a_3, a_4 bulunur.)

Tanım 2.26 V bir vektör uzayı $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer V deki her vektör S deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu ise S, V yi doğurur (gerer, üretir) veya V, S tarafından doğurulur (gerilir, üretilir) denir.

Örnek 2.27 $V = \mathbb{R}^3$ olsun. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$
kümesi V'yi gerer mi?

Çözüm: $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in V$ olsun. (a, b, c herhangi 3 reel sayı) $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$ denkleminin çözümüne bakalım. (yani her a, b, c için a_1, a_2, a_3 bulunabileceğini göstermeye çalışalım.)

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & a \\ 2a_1 + a_3 & = & b \\ a_1 + 2a_2 & = & c \end{array}\right\} \text{çözülürse } a_1 = \tfrac{-2a+2b+c}{3};\ a_2 = \tfrac{a-b+c}{3};\ a_3 = \tfrac{4a-b-2c}{3} \text{ bulunur.}$$

Görüldüğü gibi, her a, b, c için a_1, a_2, a_3 vardır. O halde $\mathbf{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = V$ dir.

Örnek 2.28 $V = P_2$ olsun. $\alpha_1 = t^2 + 2t + 1$ ve $\alpha_2 = t^2 + 2$ ise $\mathbf{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = V$ midir?
Çözüm: a, b, c reel sayılar olmak üzere $\alpha = at^2 + bt + c \in V$ alalım. $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ olacak şekilde a_1, a_2 sabitleri bulmalıyız.

$$at^2 + bt + c = a_1(t^2 + 2t + 1) + a_2(t^2 + 2) = (a_1 + a_2)t^2 + (2a_1)t + (a_1 + 2a_2)$$

$$\text{eşitliğinden} \left\{\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 & = & a \\ 2a_1 & = & b \\ a_1 + 2a_2 & = & c \end{array}\right\} \text{sistemi elde edilir. Ek matrisi yazıp indirgenmiş forma getirirsek:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2a - c \\ 0 & 1 & \vdots & c - a \\ 0 & 0 & \vdots & b - 4a + 2c \end{bmatrix}$$

bulunur. Eğer $b - 4a + 2c \neq 0$ ise çözüm yoktur (bu eşitsizliği sağlayan a, b, c vardır.) Yani $\{\alpha_1, \alpha_2\}, V$ yi doğurmaz.

Tanım 2.29 V bir vektör uzayı $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k = \theta_V$$

olacak şekilde, hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sabitleri varsa S kümesine lineer bağımlıdır denir. Aksi halde (yani a_i lerin hepsinin 0 olması zorunlu ise) S ye lineer bağımsızdır denir.

Örnek 2.30 $V = \mathbb{R}_4$ olsun. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olsun. $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = \theta$ diyelim. a_1, a_2 ve a_3'ü bulalım

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 + a_3 & = & 0 \\ a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 & = & 0 \end{array}\right\} \text{çözülürse } a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ bulunur. Yani } S \text{ lineer bağımsızdır.}$$

Örnek 2.31 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesi lineer bağımlı mıdır?

Çözüm: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 = \theta$ eşitliğinden

$$\left.\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 & = & 0 \\ 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 & = & 0 \\ -a_1 + a_2 - a_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. $m < n$ olduğundan Teorem (1.68)'den dolayı bir trivial olmayan çözüm vardır. Örneğin $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 0$ bir çözümdür. Yani S lineer bağımlıdır.

Örnek 2.32 $\mathbb{R}_3$ de $\alpha_1 = [1\ \ 0\ \ 0], \alpha_2 = [0\ \ 1\ \ 0], \alpha_3 = [0\ \ 0\ \ 1]$ vektörleri lineer bağımsızdır. (Ödev)

Örnek 2.33 P_2 de $\alpha_1 = t^2 + t + 2, \alpha_2 = 2t^2 + t, \alpha_3 = 3t^2 + 2t + 2$ verilsin. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ lineer bağımlıdır. Çünkü $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = \theta$ dır.

Teorem 2.34 S_1 ve S_2 bir vektör uzayının sonlu alt kümeleri ve $S_1 \subseteq S_2$ olsun.

(a) S_1 lineer bağımlı ise S_2 de lineer bağımlıdır.

(b) S_2 lineer bağımsız ise S_1 de lineer bağımsızdır.

İspat: (a) $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ ve $S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_m\}$ olsun. S_1 lineer bağımlı olduğundan hepsi birden sıfır olmayan $a_1, \ldots, a_k$ sayıları için $a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k = \theta$ dır. O zaman

$$a_1\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k + 0\alpha_{k+1} + 0\alpha_{k+2} + \cdots + 0\alpha_m = \theta$$

olur. Yukardaki toplamın sol tarafındaki katsayıların hepsi birden sıfır olmadığından S_2 lineer bağımlıdır.

İspat: (b) S_2 lineer bağımsız olsun. Bir an için S_1'in lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. O zaman, **(a)** dan dolayı S_2 lineer bağımlı olur. Bu da bir çelişkidir. O halde S_1 lineer bağımsızdır. □

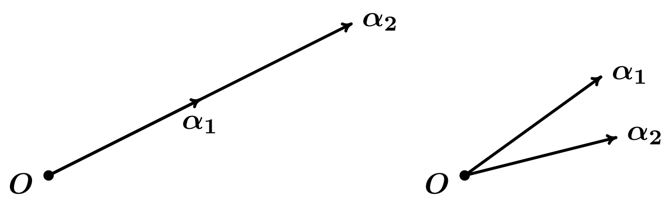
Not 2.35 Bir vektör uzayında $S = \{\theta\}$ kümesi lineer bağımlıdır, çünkü $5 \cdot \theta = \theta$ ve $5 \neq 0$ dır. Buradan; θ yı içeren bir S kümesinin lineer bağımlı olduğu söylenebilir. (Neden?)

Not 2.36 $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımlı olmanın anlamı nedir? $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\mathbb{R}^2$ de lineer bağımlı olsun. Yani a_1, a_2 ikisi birden sıfır olmayan sayılar olmak üzere $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ dır.

$$a_1 \neq 0 \Longrightarrow \alpha_1 = -\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_2, \text{ veya}$$
$$a_2 \neq 0 \Longrightarrow \alpha_2 = -\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\alpha_1$$

dir. Yani biri diğerinin bir katıdır. Tersine, vektörlerden biri diğerinin bir katı olsun. Mesela $\alpha_1 = a\alpha_2 \Longrightarrow 1\alpha_1 - a\alpha_2 = 0$ olup $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi lineer bağımlıdır. (Bkz. Şekil 2.6) Özetleyecek olursak

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ lineer bağımlı $\iff$ Biri diğerinin katı $\iff$ Merkezden geçen aynı doğru üzerindeler.



(a) Lineer bağımlı **(b)** Lineer bağımsız

Şekil 2.6: $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımlı ve lineer bağımsız vektörler.

Benzer bir sonuç $\mathbb{R}^3$ için şöyledir: (Gösteriniz)

$\mathbb{R}^3$'de üç vektör lineer bağımlıdır $\iff$ Bu üç vektör merkezden geçen aynı düzlem içindedir.

Teorem 2.37 V bir vektör uzayı, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq V$ sıfır olmayan vektörlerin bir kümesi olsun. S nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart bir α_j vektörünün kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer kombinasyonu olmasıdır.

İspat: ($\Longleftarrow$) $\alpha_j = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_{j-1}\alpha_{j-1}$ olsun. O zaman

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_{j-1}\alpha_{j-1} + (-1)\alpha_j + 0\alpha_{j+1} + \cdots + 0\alpha_n = \theta$$

olup (katsayıların hepsi birden 0 olmadığından) S nin lineer bağımlı olduğu görülür.

($\Longrightarrow$) S lineer bağımlı olsun. O zaman hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayıları için

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = \theta$$

dır. j sayısı $a_j \neq 0$ olacak şekildeki en büyük j olsun. Yani $j = \max\{j : a_j \neq 0\}$ olsun. Eğer $j = 1$ ise $a_1\alpha_1 = \theta \Longrightarrow \alpha_1 = \theta$ olur, ki bu da S deki vektörlerin sıfırdan farklı olması ile çelişir. O halde $j > 1$ dir. Bu durumda

$$\alpha_j = -\left(\frac{a_1}{a_j}\right)\alpha_1 - \left(\frac{a_2}{a_j}\right)\alpha_2 - \cdots - \left(\frac{a_{j-1}}{a_j}\right)\alpha_{j-1}.$$

Yani S deki vektörlerin biri kendinden öncekilerin bir lineer kombinasyonudur.

Örnek 2.38 $V = \mathbb{R}_3$ ve $\alpha_1 = [1\ 2\ \ -1], \alpha_2 = [1\ 2\ \ -1], \alpha_3 = [-3\ 2\ \ -1], \alpha_4 = [2\ 0\ \ 0]$ olsun. $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = \theta$ olup $\alpha_3 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$ olur. Ayrıca $\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 - \alpha_4 = \theta$ olup $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3$. Yani, bütün vektörlerin diğerlerinin lineer kombinasyonu olması gerekmez.

Sonuç 2.39 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ bir V vektör uzayının alt kümesi olsun. S lineer bağımlı $\Longleftrightarrow$ S deki bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonudur.

Sonuç 2.40 V bir vektör uzayı olsun ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ V yi doğursun. α_j kendinden önceki vektörlerin lineer kombinasyonu olsun. O zaman

$$S_1 = S \setminus \{\alpha_j\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n\}$$

kümesi de V yi doğurur.
İspat: $\alpha \in V$ olsun. $\mathbf{Span}(S) = V$ olduğundan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalerleri vardır öyle ki

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_{j-1}\alpha_{j-1} + a_j\alpha_j + a_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + a_n\alpha_n.$$

Eğer $\alpha_j = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_{j-1}\alpha_{j-1}$ ise o zaman

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1\alpha_1 + \cdots + a_{j-1}\alpha_{j-1} + a_j(b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_{j-1}\alpha_{j-1}) + a_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + a_n\alpha_n \\ &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{j-1}\alpha_{j-1} + c_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + c_n\alpha_n\end{aligned}$$

olur. (Burada c_i ifadeleri hesaplanabilir). Son toplamda α_j olmadığından $\mathbf{Span}(S_1) = V$ olduğu görülür. (Her $\alpha \in V$ için bu yapılabildiğinden) □

Örnek 2.41 $\mathbb{R}^4$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olsun. $W = \mathbf{Span}(S)$ olsun. $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ olduğundan $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olmak üzere $W = \mathbf{Span}(S_1)$ diyebiliriz. Yani W uzayını doğurmak için α_4 elemanına ihtiyaç yoktur.

ALIŞTIRMALAR

1. P_2 de $p_1(t) = t^2 + 2t + 1$, $p_2(t) = t^2 + 3$, $p_3(t) = t - 1$ olsun. Aşağıdaki $p(t)$ vektörlerinden hangileri $\mathbf{Span}\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ kümesine aittir.

(a) $p(t) = t^2 + t + 2$ **(b)** $p(t) = 2t^2 + 2t + 3$ **(c)** $p(t) = -t^2 + t - 4$ **(d)** $p(t) = -2t^2 + 3t + 1$

2. $\mathbb{R}_3$ de aşağıdaki kümelerden hangisi lineer bağımlıdır. Lineer bağımlı olanlarda bir vektörü diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazınız.

(a) $\{[1,1,0],[0,2,3],[1,2,3],[3,6,6]\}$

(b) $\{[1,1,0],[3,4,2]\}$

(c) $\{[1,1,0],[0,2,3],[1,2,3],[0,0,0]\}$

3. c nin hangi değerleri için, P_1'de, $\{t+3, 2t+c^2+2\}$ lineer bağımlıdır.

2.3 Baz ve Boyut

Tanım 2.42 V bir vektör uzayı, $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}\subseteq V$ olsun. Eğer S lineer bağımsız ise ve $\text{Span}(S)=V$ ise S ye V nin bir bazı (tabanı) denir.

Örnek 2.43 $V=\mathbb{R}^3$ olsun. $S=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ olsun. S, $\mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır. Bu baza $\mathbb{R}^3$ ün doğal bazı denir. Benzer şekilde $\mathbb{R}_3$ ün doğal bazı $S=\{[1\ \ 0\ \ 0],[0\ \ 1\ \ 0],[0\ \ 0\ \ 1]\}$ kümesidir. $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal bazının elemanları $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ ile gösterilir. Burada ε_i elemanı i–inci satırı 1 diğer elemanları 0 olan vektördür.

$$\varepsilon_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow i.\text{satır.}$$

$\mathbb{R}^3$ ün doğal bazının elemanları, ayrıca, $i=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, j=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, k=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ile gösterilir.

$\mathbb{R}^3$ deki herhangi bir $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ vektörü $a_1i+a_2j+a_3k$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.44 $S=\{t^2+1, t-1, 2t+2\}$ kümesinin P_2 nin bir bazı olduğunu gösteriniz.
Çözüm: $\text{Span}(S)=P_2$ ve S nin lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. $at^2+bt+c\in P_2$ alalım. $at^2+bt+c=a_1(t^2)+a_2(t-1)+a_3(2t+2)$ olacak şekilde $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ bulmalıyız. Buradan:

$$\left.\begin{aligned}a_1&=a\\ a_2+2a_3&=b\\ a_1-a_2+2a_3&=c\end{aligned}\right\}\Longrightarrow a_1=a, a_2=\frac{a+b-c}{2}, a_3=\frac{c+b-a}{4}$$

bulunur. Her a, b, c için a_1, a_2, a_3 bulunabildiğinden $\mathbf{Span}(S) = P_2$ dir.

Şimdi de S nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) + a_3(2t + 2) = 0$ dersek buradan $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olması gerektiği görülür. (Ödev). **Sonuç:** S, P_2 için bir bazdır.

Örnek 2.45 $\alpha_1 = [1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0], \alpha_2 = [0 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 2], \alpha_3 = [0 \ \ 2 \ \ 2 \ \ 1]$ ve $\alpha_4 = [1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1]$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesinin $\mathbb{R}_4$ için bir baz olduğunu gösterin. (Ödev)

Teorem 2.46 Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi bir V vektör uzayının bir bazı ise V deki her vektör S deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak tek türlü yazılabilir.

İspat: $\mathbf{Span}(S) = V$ olduğu için her $\alpha \in V$ vektörü S deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n, \text{ ve}$$
$$\alpha = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$$

iki farklı şekilde yazılmış olsun. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $a_i = b_i$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi

$$\begin{aligned} \theta = \alpha - \alpha &= (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n) - (b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n) \\ &= (a_1 - b_1)\alpha_1 + (a_2 - b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_n - b_n)\alpha_n \end{aligned}$$

olup S lineer bağımsız olduğundan $i = 1, 2, \ldots, n$ için $a_i - b_i = 0$ olmalıdır; yani $a_i = b_i$ olmalıdır. İspat biter. □

Teorem 2.47 Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi sıfır olmayan vektörlerin bir kümesi ve $\mathbf{Span}(S) = V$ ise S kümesi V için bir T bazı içerir.

İspat: Eğer S lineer bağımsız ise S, V için bir bazdır; yani $T = S$ alınabilir. S lineer bağımlı ise bir α_j vektörü kendinden öncekilerin lineer kombinasyonudur. $S_1 = S \setminus \{\alpha_j\}$ yazılır ve $\mathbf{Span}(S_1) = V$ dir. S_1 lineer bağımsız ise S_1 bazdır. S_1 lineer bağımlı ise benzer şekilde $S_2 = S_1 \setminus \{\alpha_j\}$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse $T \subseteq S$ lineer bağımsız olacak şekilde bir T bazı bulunur. □

V yi geren bir S kümesinden T bazı şöyle elde edilir:

Adım.1. $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = \theta$ eşitliği oluşturulur.

Adım.2. Buradan ek matris oluşturulur ve bu matris indirgenmiş satır eşelon forma getirilir. (**Not:** Satır eşelon forma getirmek de yeterlidir.)

Adım.3. Baş eleman olan 1 sayısını bulunduran kolona ait vektörler $V = \mathbf{Span}(S)$ uzayı için bir baz oluşturur.

Örnek 2.48 $V = \mathbb{R}_3$ olsun. $\alpha_1 = [1\ \ 0\ \ 1], \alpha_2 = [0\ \ 1\ \ 1], \alpha_3 = [1\ \ 1\ \ 2], \alpha_4 = [1\ \ 2\ \ 1], \alpha_5 = [-1\ \ 1\ \ -2]$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ kümesi V yi gerer. (Kontrol ediniz.) Şimdi S nin alt kümesi olan ve V nin bazı olan T kümesini bulalım.

Adım.1.

$$a_1[1\ \ 0\ \ 1] + a_2[0\ \ 1\ \ 1] + a_3[1\ \ 1\ \ 2] + a_4[1\ \ 2\ \ 1] + a_5[-1\ \ 1\ \ -2] = [0\ \ 0\ \ 0]$$

Adım.2.

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_4 - a_5 &= 0 \\ a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 - 2a_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{Ek matris:} \\ \text{(ind. satır eşelon formu)}\end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Adım.3. Baş elemanlar $1., 2.$ ve $4.$ kolonlardadır. Yani $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ kümesi $\mathbb{R}_3$ için bir bazdır.

Not: S nin yazılışında vektörlerin sırası değiştirilirse V nin başka bir bazı elde edilebilir. Örneğin $\beta_1 = \alpha_5, \beta_2 = \alpha_4, \beta_3 = \alpha_3, \beta_4 = \alpha_2, \beta_5 = \alpha_1$ yazılırsa $S = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$ kümesinden $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \{\alpha_5, \alpha_4, \alpha_3\}$ bazı elde edilir.

Teorem 2.49 Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi bir V vektör uzayının bazı ve $T = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$ lineer bağımsız vektörlerin bir kümesi ise $r \leqslant n$ dir.
İspat: (Uzun olduğu için atlıyoruz)

Sonuç 2.50 Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ve $T = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ bir V vektör uzayının bazları ise $n = m$ dir.
İspat: S bir baz ve T lineer bağımsız olduğundan $m \leqslant n$ dir. Ayrıca T bir baz ve S lineer bağımsız olduğundan $n \leqslant m$ dir. Yani $n = m$ dir. Sonuç olarak "bir vektör uzayının her bazında aynı sayıda eleman vardır" deriz. □

Tanım 2.51 Bir V vektör uzayının bir bazındaki eleman sayısına (sonlu ise) V nin boyutu denir ve $\mathbf{boy}(V)$ ile gösterilir. $V = \{\theta\}$ ise $\mathbf{boy}(V) = 0$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.52 $S = \{t^2, t, 1\}$ kümesi P_2 için bir baz olup $\mathbf{boy}(P_2) = 3$ dür.

Örnek 2.53 $\alpha_1 = [0\ \ 1\ \ 1], \alpha_2 = [1\ \ 0\ \ 1], \alpha_3 = [1\ \ 1\ \ 2]$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olsun. $V = \mathbf{Span}(S)$, $\mathbb{R}_3$ ün alt uzayı olsun. V deki her vektör $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$ şeklindedir. $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ olduğundan S lineer bağımlıdır. $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ dersek $\mathbf{Span}(S_1) = V$ olur. S_1 lineer bağımsız olduğundan (kontrol edin) S_1, V nin bir bazıdır. Yani $\mathbf{boy}(V) = 2$ dir.

Sonuç 2.54 V nin boyutu n ise, V deki lineer bağımsız en büyük küme (en fazla elemanlı küme) n elemanlıdır ve V nin bir bazıdır.

İspat: $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq V$ en büyük lineer bağımsız küme olsun. Eğer $\mathbf{Span}(S) = V$ ise S bir baz olup ispat biter. Eğer $\mathbf{Span}(S) \neq V$ ise V'de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ların lineer kombinasyonları olarak yazılamayan bir α vektörü vardır. O zaman $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ lineer bağımsızdır. Bu da S nin en büyük lineer bağımsız küme olması ile çelişir. Yani $V = \mathbf{Span}(S)$ dir. O halde S bir bazdır ve $k = n$ dir. □

Sonuç 2.55 Eğer $\mathbf{boy}(V) = n$ ise V'yi geren en küçük kümede n vektör vardır ve bu küme V nin bir bazıdır. Yani $\mathbf{boy}(V) = n$ ise $n + 1$ elemanlı küme lineer bağımlıdır. Ayrıca $n - 1$ elemanlı bir küme V'yi doğuramaz.

Sonuç 2.56 $\mathbf{boy}(V) = n$ ise $m > n$ elemanlı bir küme lineer bağımlı olmalıdır.

Sonuç 2.57 $\mathbf{boy}(V) = n$ ise $m < n$ elemanlı bir küme V'yi doğuramaz.

Örnek 2.58 $\mathbf{boy}(\mathbb{R}^3) = 3$, $\mathbf{boy}(\mathbb{R}_2) = 2$, $\mathbf{boy}(\mathbb{R}^n) = n$, $\mathbf{boy}(\mathbb{R}_n) = n$ dir. $\mathbf{boy}(P_3) = 4$ dür; çünkü $\{t^3, t^2, t, 1\}$ bir bazdır. Genelde $\mathbf{boy}(P_n) = n + 1$ dir.

Tanım 2.59 Sonlu elemanlı bir bazı olan vektör uzayına <u>sonlu–boyutlu vektör uzayı</u> denir. Sonsuz sayıda elemanlı bazı olan vektör uzayında <u>sonsuz–boyutlu vektör uzayı</u> denir. Örneğin; bütün polinomların vektör uzayı P sonsuz boyutludur.

Ödev: Eğer V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $\{\theta\} \neq W$, V'nin bir alt uzayı ise $\mathbf{boy}(W) \leqslant \mathbf{boy}(V)$ olduğunu gösterin.

Örnek 2.60 $\mathbb{R}^2$ nin bütün alt uzaylarını belirleyiniz?

Çözüm: Yani $xy-$ düzleminin alt uzaylarını belirleyelim. Öncelikle $\{\theta\}$ ve $\mathbb{R}^2$ trivial alt uzayları vardır. Bunlar 0 ve 2 boyutludur. Bir $\theta \neq \alpha$ vektörü tarafından gerilen uzay tek boyutludur ve orjinden geçen doğrulardan oluşur.

Teorem 2.61 Eğer S bir n–boyutlu V vektör uzayının bir lineer bağımsız kümesi ise V' nin S' yi içeren bir T bazı vardır.

İspat: $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ ve $m < n$ olsun. $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, V$ nin bir bazı olsun. $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ olsun. $\mathbf{Span}(S_1) = V$ olduğundan S_1 kümesi V için bir T bazı içerir. (Teorem (2.47) den dolayı). T bazı, S_1 den, kendinden öncekilerin lineer kombinasyonu olanlar atılarak elde edilirdi. S lineer bağımsız olduğundan α_i'lerin hiçbirisi atılamaz. Dolayısıyla $S \subseteq T$ olmalıdır. □

Örnek 2.62 $\mathbb{R}_3$ de $\alpha = [1\ \ 0\ \ 1]$ vektörünü içeren bir baz bulunuz.

Çözüm: $\varepsilon_1 = [1\ \ 0\ \ 0], \varepsilon_2 = [0\ \ 1\ \ 0], \varepsilon_3 = [0\ \ 0\ \ 1]$ olmak üzere $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, $\mathbb{R}_3$'ün doğal bazıdır. $S_1 = \{\ \alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ olsun. ε_1 α'nın lineer kombinasyonu olmadığından ε_1'i tutarız. ε_2 vektörü α ve ε_1 in lineer kombinasyonu mudur? Cevap hayır olduğu için ε_2'yi de tutarız. ε_3 vektörü α, ε_1 ve ε_2 nin lineer kombinasyonu olduğundan (kontrol edin) ε_3'ü sileriz. İstenen baz $\{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ dir.

Teorem 2.63 V, n–boyutlu bir vektör uzayı olsun.

(a) Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ lineer bağımsız ise S, V'nin bir bazıdır.

(b) Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ V yi doğurur ise S, V'nin bir bazıdır.

Örnek 2.64 Aşağıdaki homojen sistemin çözüm uzayı V için bir baz bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Çözüm: Gauss–Jordan yöntemiyle aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Genel çözüm: } X = \begin{bmatrix} 3s+t \\ -3s-t \\ -s-\frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R})$$

$$X = s \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ şeklinde yazılabilir. } \left\{ \begin{matrix} s = 1 \\ t = 0 \end{matrix} \right\} \text{ ve } \left\{ \begin{matrix} s = 0 \\ t = 1 \end{matrix} \right\} \text{ verilirse}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

çözümleri bulunur. $\mathbf{Span}(\{X_1, X_2\}) = V$ olduğu açıktır. Ayrıca $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız olduğu için (biri diğerinin katı olmadığından) çözüm uzayı için bir bazdır. Yani $\mathbf{boy}(V) = 2$ bulunur.

2.4 Koordinatlar ve İzomorfizmler

V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, V'nin sıralı bir bazı olsun. (Yani S'deki vektörlerin bir yazılış sırası olsun). $\alpha \in V$ vektörü $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$ şeklinde (tek türlü) yazılır. Bu durumda $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ vektörüne α nın S sıralı bazına göre koordinat vektörü denir. $[\alpha]_S$'nin elemanlarına da α nın S'ye göre koordinatları denir.

Örnek 2.65 : P_1 de $S = \{t, 1\}$ bir bazdır. $\alpha = p(t) = 5t - 2$ olsun.$[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ dir. $T = \{t+1, t-1\}$ de P_1 in bir bazıdır. $\alpha = 5t - 2 = \frac{3}{2}(t+1) + \frac{7}{2}(t-1)$ olup $[\alpha]_T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ dir. Bazdaki yazılış sırası değişirse koordinatlar da değişir.

Örnek 2.66 $\mathbb{R}^3$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi bir bazdır. $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha = 3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3$ olup $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dir.

Not 2.67 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bir V vektör uzayının sıralı bazı, $\alpha \in V$ ve $\beta \in V$ olsun. $[\alpha]_S = [\beta]_S$ olsun. $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ve $[\beta]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ olsun. Yani $a_i = b_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ dir.

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n = \beta$$

olup $\alpha = \beta$ dır. Yani aynı sıralı baza göre koordinatları aynı olan iki vektör eşittir.

İzomorfizmler

α ve β, n–boyutlu bir V vektör uzayının elemanları olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ V nin bir sıralı bazı olsun. $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$ ve $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$ olsun. α ve β

vektörlerine $\mathbb{R}^n$ de $[\alpha]_S$ ve $[\beta]_S$ vektörleri karşılık gelir.

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \longmapsto & [\alpha]_S \\ \beta & \longmapsto & [\beta]_S \end{array}$$

$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + \cdots + (a_n + b_n)\alpha_n$ olup $[\alpha + \beta]_S = [\alpha]_S + [\beta]_S$ dir. Yani

$$\alpha + \beta \longmapsto [\alpha]_S + [\beta]_S$$

Ayrıca $c\alpha = (ca_1)\alpha_1 + \cdots + (ca_n)\alpha_n$ olup $[c\alpha]_S = c[\alpha]_S$ dir.

$$c\alpha \longmapsto c[\alpha]_S$$

Yani cebirsel olarak V uzayı ile $\mathbb{R}^n$ uzayı "benzer" özellikler gösterir. Bu tür uzaylara bir isim vereceğiz:

Tanım 2.68 V, $\oplus$ ve $\odot$ işlemiyle bir vektör uzayı ve W da $\boxplus$ ve $\boxdot$ işlemleriyle bir vektör uzayı olsun. Eğer V den W ya 1–1 ve örten L fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa L ye V den W üzerine bir <u>izomorfizm</u> denir.

(a) $L(\alpha \oplus \beta) = L(\alpha) \boxplus L(\beta)$, (her $\alpha, \beta \in V$ için)

(b) $L(c \odot \alpha) = c \boxdot L(\alpha)$, (her $\alpha \in V, c \in \mathbb{R}$ için)

Bu durumda V, W ya <u>izomorfiktir</u> denir.

<u>**Not:**</u> V, W ya izomorfik ise W da V ye izomorfiktir. Bu durumda V ile W <u>izomorfiktirler</u> diyebiliriz.

<u>**Hatırlatma:**</u> Eğer $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ için $L(\alpha_1) = L(\alpha_2) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ oluyorsa L ye <u>1–1</u> dir denir. Eğer her $\beta \in W$ için $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in V$ varsa L ye <u>örtendir</u> denir. Örneğin,

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

dönüşümü örtendir; gösterelim. $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ verilsin. $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ arıyoruz. (a_1, a_2, a_3 lerin b_1, b_2 cinsinden her zaman bulunabilmesi gerekir.)

$$L(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow a_1 = b_2, a_2 = b_1 - b_2 \text{ ve } a_3 \in \mathbb{R}$$

elde ederiz. Yani $\boldsymbol{L}$ örtendir. Ama $\boldsymbol{L}$ 1–1 değildir. Çünkü

$$\boldsymbol{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ve } \boldsymbol{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ için } \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha_1}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha_2}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

İzomorfik uzayların elemanları farklıdır, ama cebirsel özellikleri aynıdır.

Teorem 2.69 Eğer $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{n}$–boyutlu bir vektör uzayı ise $\boldsymbol{V}, \mathbb{R}^n$ ye izomorfiktir.
İspat: $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}\}$ $\boldsymbol{V}$ nin bir sıralı bazı olsun. $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}) = [\boldsymbol{\alpha}]_{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. Burada $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha_1} + a_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha_n}$ olduğu açıktır. $\boldsymbol{L}$ nin bir izomorfizm olduğunu gösterelim.

<u>$\boldsymbol{L}$ 1–1 dir:</u> $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$ olsun. $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\beta})$ olsun. Yani $[\boldsymbol{\alpha}]_{\boldsymbol{S}} = [\boldsymbol{\beta}]_{\boldsymbol{S}}$ olsun. (Bu iki vektörün $\boldsymbol{S}'$ye göre koordinatları aynı olsun.) Not (2.67) de gösterildiği gibi "aynı baza göre koordinatları aynı olan iki vektör eşittir". O halde $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ dır.

<u>$\boldsymbol{L}$ örtendir:</u> $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ verilsin. $\boldsymbol{\alpha} = b_1\boldsymbol{\alpha_1} + b_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + b_n\boldsymbol{\alpha_n}$ seçilirse $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}$ olduğu açıktır. Yani $\boldsymbol{L}$ örtendir.

Şimdi de tanımda verilen iki şartın sağlandığını gösterelim: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$ verilsin. $[\boldsymbol{\alpha}]_{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ve $[\boldsymbol{\beta}]_{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ olsun. $[\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}]_{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $[c\boldsymbol{\alpha}]_{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix}$ olduğu açıktır. O halde

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = [\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}]_{\boldsymbol{S}} = [\boldsymbol{\alpha}]_{\boldsymbol{S}} + [\boldsymbol{\beta}]_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\beta})$$

ve

$$\boldsymbol{L}(c\boldsymbol{\alpha}) = [c\boldsymbol{\alpha}]_{\boldsymbol{S}} = c[\boldsymbol{\alpha}]_{\boldsymbol{S}} = c\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha})$$

olup L dönüşümü 4 şartı sağladığından V uzayı $\mathbb{R}^n$'e izomorfiktir. □

Lemma 2.70 $L : V \longrightarrow W$ bir izomorfizm olsun. O zaman

(a) $L(\theta_V) = \theta_W$

(b) $L(\alpha - \beta) = L(\alpha) - L(\beta)$ (her $\alpha, \beta \in V$ için)

İspat (a): L bir izomorfizm olduğundan:

$$\begin{aligned}\theta_V + \theta_V = \theta_V &\Longrightarrow L(\theta_V + \theta_V) = L(\theta_V) \\ &\Longrightarrow \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W} + \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W} = \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W} \\ &\Longrightarrow L(\theta_W) = \theta_W. \quad (L(\theta_V) \text{ sadeleşirse})\end{aligned}$$

İspat (b): Önce, Teorem (2.11.d) kullanılırsa:

$$L(-\beta) = L\big((-1)\beta\big) = (-1)L(\beta) = -L(\beta)$$

elde edilir. Daha sonra da ispat şöyle tamamlanır:

$$L(\alpha - \beta) = L(\alpha + (-1)\beta) = L(\alpha) + L((-1)\beta) = L(\alpha) + (-L(\beta)) = L(\alpha) - L(\beta).$$

Teorem 2.71 İzomorfik olma bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar:

(a) Her V vektör uzayı kendine izomorfiktir.

(b) V, W ya izomorfik ise W da V ye izomorfiktir.

(c) U, V ye; V de W ya izomorfik ise U, W ya izomorfiktir.

İspat (a) $L : V \longrightarrow V$, her $\alpha \in V$ için $L(\alpha) = \alpha$ birim (özdeşlik) dönüşümünün bir izomorfizm olduğu gösterilerek ispat yapılır.

İspat (b) $L : V \longrightarrow W$ bir izomorfizm ise $L^{-1} : W \longrightarrow V$ dönüşümünün bir izomorfizm olduğu gösterilerek ispat yapılır. (L 1–1 ve örten olduğundan L^{-1} mevcuttur.)

İspat (c) $L_1 : U \longrightarrow V$, $L_2 : V \longrightarrow W$ iki izomorfizm ise $L_2 \circ L_1 : U \longrightarrow W$ bileşke dönüşümünün bir izomorfizm olduğu gösterilerek ispat yapılır. □

Teorem 2.72 Sonlu boyutlu iki vektör uzayının izomorfik olmaları için gerek ve yeter şart boyutlarının eşit olmalarıdır.
İspat: ($\Longleftarrow$)V ve W n–boyutlu iki uzay olsun. V ile $\mathbb{R}^n$ izomorfiktir ve W ile $\mathbb{R}^n$ izomorfiktir (Teorem (2.69)). Şimdi; Teorem (2.71.c) den dolayı V ile W izomorfiktir.

İspat:($\Longrightarrow$)V ile W izomorfik olsunlar. $L : V \longrightarrow W$ bir izomorfizm olsun ve $\mathbf{boy}(V) = n$ olsun. (Biz $\mathbf{boy}(W) = n$ olduğunu göstereceğiz). $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, V$ nin bir sıralı bazı olsun. Şimdi $T = \{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \dots, L(\alpha_n)\}$ kümesinin W nun bir bazı olduğunu göstereceğiz. Baz olmanın iki şartının sağlandığını gösterelim.

<u>$\mathbf{Span}(T) = W$ dur:</u> $\beta \in W$ olsun. L örten olduğundan bir $\alpha \in V$ için $L(\alpha) = \beta$ dır. $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$ şeklinde yazılmış olsun. (a_i ler tek türlü belirlenir).

$$L(\alpha) = L(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n) \xlongequal[\text{izomorfizm}]{L} a_1L(\alpha_1) + a_2L(\alpha_2) + \ldots + a_nL(\alpha_n)$$

olup $\mathbf{Span}(T) = W$ dur.

<u>T lineer bağımsızdır:</u>

$a_1L(\alpha_1) + a_2L(\alpha_2) + \cdots + a_nL(\alpha_n) = \theta_W$ olsun. L bir izomorfizm olduğundan $L(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n) = \theta_W$ elde ederiz. Şimdi $L(\theta_V) = \theta_W$ olduğundan (Lemma (2.70)) ve L 1–1 olduğundan $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = \theta_V$ olmalıdır. Şimdi de, S lineer bağımsız olduğundan $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ elde edilir. Yani T lineer bağımsızdır.

Sonuç olarak; T, W için bir bazdır. T kümesi aslında S kümesinin görüntüsüdür. S kümesi n–elemanlı olduğundan ve L 1–1 olduğundan T kümesi de n–elemanlıdır. O halde $\mathbf{boy}(W) = n$ dir. □

Sonuç 2.73 V sonlu boyutlu ise ve $\mathbb{R}^n$'e izomorfik ise $\mathbf{boy}(V) = n$ dir. P_n ile $\mathbb{R}^{n+1}$ ve $\mathbb{R}_{n+1}$ izomorfiktirler; çünkü boyutları $(n+1)$ dir.

Dönüşüm Matrisleri

$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve $T = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ bir n–boyutlu V vektör uzayı için iki sıralı baz olsun. $\alpha \in V$ için

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n \text{ şeklinde ise } [\alpha]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

dir. O halde

$$[\alpha]_T = [c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n]_T = c_1[\alpha_1]_T + c_2[\alpha_2]_T + \ldots + c_n[\alpha_n]_T.$$

Şimdi $[\alpha_j]_T = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ olsun. O zaman

$$[\alpha]_T = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

veya $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ olmak üzere $[\alpha]_T = P \cdot [\alpha]_S$ dir. Buradaki P matrisine S–bazından T–bazına dönüşüm matrisi denir.

Acaba P singüler midir, singüler değil midir?

Bir α için $P[\alpha]_S = \theta_{\mathbb{R}^n}$ olsun. Yani $P[\alpha]_S = [\alpha]_T = \theta_{\mathbb{R}^n}$ dir. Şimdi

$$\alpha = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_n\beta_n \text{ ise } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\alpha]_T = \theta_{\mathbb{R}^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Yani $\alpha = 0\beta_1 + \cdots + 0\beta_n = \theta_V$ dir. O halde $[\theta]_S = \theta_{\mathbb{R}^n}$ olur. O zaman $PX = 0$ homojen sisteminin tek çözümü trivial çözümüdür. Buradan P nin singüler olmadığı görülür (Teorem (1.81)). Bu durumda $[\alpha]_S = P^{-1}[\alpha]_T$ olup P^{-1} de T–bazından S–bazına dönüşüm matrisi olur. P^{-1} in j–inci kolonu $[\beta_j]_S$ dir.

Örnek 2.74 $V = \mathbb{R}^3$ olsun. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ve $T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

kümeleri $\boldsymbol{V}$ nin sıralı bazları olsun. $\boldsymbol{S}$ bazından $\boldsymbol{T}$ bazına dönüşüm matrisini bulalım:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\alpha_1]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\alpha_2]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\alpha_3]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ istenen dönüşüm matrisidir. Şimdi $\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ verilsin. $[\alpha]_T$ yi bulmak için α yı $\boldsymbol{S}$ deki vektörler cinsinden yazalım.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ olup } [\alpha]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Bu durumda $[\alpha]_T = \boldsymbol{P} \cdot [\alpha]_S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ olmalıdır. Gerçekten de:

$$4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \text{ elde edilir.}$$

Yani $[\alpha]_T = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{T}$ bazından $\boldsymbol{S}$ bazına dönüşüm matrisi ($\boldsymbol{Q}$ diyelim):

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dir. Kontrol edelim:

$$\frac{3}{2}\begin{bmatrix}6\\3\\3\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}5\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\3\\3\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}5\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$-\frac{5}{2}\begin{bmatrix}6\\3\\3\end{bmatrix}+\frac{3}{2}\begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}5\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Yani $Q = P^{-1}$ dir.

Örnek 2.75 $V = P_1$ uzayının iki sıralı bazı $S = \{t-1, t+1\}$ ve $T = \{t, t-2\}$ olsun.

$$\alpha_1 = t-1 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(t-2) \Longrightarrow [\alpha_1]_T = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = t+1 = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}(t-2) \Longrightarrow [\alpha_2]_T = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

olur. S den T ye dönüşüm matrisi $P = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ bulunur.

Mesela; $\alpha = 5t+1$ in S bazına göre koordinatları: $[\alpha]_S = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ tür. α nın T bazına göre koordinatları:

$$[\alpha]_T = P\cdot[\alpha]_S = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{11}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

olmalıdır. Kontrol edelim. Gerçekten de $\alpha = 5t+1 = 11t - \frac{1}{2}(t-2)$ olduğu görülür. Bu örnekte T bazından S bazına dönüşüm matrisi:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek 2.76 $\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ olsun. $T = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $\mathbb{R}^3$ için bir bazdır.

(Kontrol edin.) $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ diyelim. S den T ye dönüşüm matrisi $P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ise

$\boldsymbol{S}$ yi bulunuz. (Ödev)

2.5 Bir Matrisin Rankı

Tanım 2.77 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ bir $\boldsymbol{m \times n}$ matris olsun. $\boldsymbol{A}$ nın satırları ($\mathbb{R}_n$ nin vektörleri olarak düşünülürse) $\mathbb{R}_n$ nin bir alt uzayını doğururlar. Bu uzaya $\boldsymbol{A}$ nın <u>satır uzayı</u> denir. $\boldsymbol{A}$ nın sütunları da $\mathbb{R}^m$ nin vektörleridir ve $\mathbb{R}^m$ de bir alt uzay doğururlar. Bu uzaya da A nın <u>sütun uzayı</u> denir.

Teorem 2.78 Eğer $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ iki tane $\boldsymbol{m \times n}$ satır (sütun) eşdeğer matrisler ise $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ nin satır (sütun) uzayları aynıdır.

İspat: (İspatı "satır" için yapıyoruz) $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ satır eşdeğer ise $\boldsymbol{B}$ nin satırları $\boldsymbol{A}$ nın satırlarından sonlu sayıda elementer satır işlemleri ile elde edilmiştir. Yani $\boldsymbol{B}$ nin her satırı $\boldsymbol{A}$ nın satırlarının bir lineer kombinasyonudur. O halde $\boldsymbol{B}$ nin satır uzayı $\boldsymbol{A}$ nın satır uzayı içindedir. Benzer şekilde, $\boldsymbol{A}$ nın satır uzayı $\boldsymbol{B}$ nin satır uzayı içindedir. Yani bunlar eşittir. □

Not: Bu teoremi verilen bir küme tarafından doğurulan uzayın bir bazını bulmak için kullanabiliriz:

Örnek 2.79 $\boldsymbol{\alpha_1 = [1\ \ -2\ \ 1], \alpha_2 = [-1\ \ 1\ \ 1], \alpha_3 = [1\ \ -3\ \ 3], \alpha_4 = [3\ \ -5\ \ 1]}$ ve $\boldsymbol{\alpha_5 = [1\ \ -4\ \ 5]}$ olsun. $\mathbb{R}_3$'de $\boldsymbol{S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}}$ kümesi tarafından doğurulan $\boldsymbol{V}$ alt uzayı için bir baz bulalım.

Çözüm: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi olsun. $\boldsymbol{V}$ uzayı $\boldsymbol{A}$ matrisinin satır uzayıdır. Elementer satır işlemleri uygulanırsa $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. Bu matris indirgenmiş satır eşelon formdadır. $\boldsymbol{A}$ nın satır uzayı ile $\boldsymbol{B}$ nin satır uzayı aynıdır. $\boldsymbol{B}$ nin satır uzayı için bir baz $\boldsymbol{\beta_1 = [1\ \ 0\ \ -3]}$ ve $\boldsymbol{\beta_2 = [0\ \ 1\ \ -2]}$ olmak üzere $\boldsymbol{\{\beta_1, \beta_2\}}$ kümesidir. Dolayısıyla $\boldsymbol{\{\beta_1, \beta_2\}}$, $\boldsymbol{V}$ için bir bazdır.

Not 2.80 A'yı indirgenmiş satır eşelon forma getirmek zorunda değiliz. Fakat (kolaylık açısından) eğer B matrisi indirgenmiş formda ise B nin sıfır olmayan satırları V için bir bazdır.

Not 2.81 Dikkat edilirse bu metodla elde edilen bazda S nin elemanları olmayabilir.

Örnek 2.82 V uzayı P_4 de

$$S = \{\underbrace{t^4+t^2+2t+1}_{\alpha_1}, \underbrace{t^4+t^2+2t+2}_{\alpha_2}, \underbrace{2t^4+t^3+t+2}_{\alpha_3}, \underbrace{t^4+t^3-t^2-t}_{\alpha_4}\}$$

kümesi tarafından doğurulan uzay olsun. V için bir baz bulalım.
Çözüm: P_4 ile $\mathbb{R}_5$ izomorfiktirler; çünkü

$$L : P_4 \longrightarrow \mathbb{R}_5, \quad L(at^4+bt^3+ct^2+dt+e) = [a \ b \ c \ d \ e]$$

şeklinde verilen fonksiyon bir izomorfizmdir. V uzayı $\mathbb{R}_5$ deki bir W alt uzayına izomorfiktir. Bu W uzayı $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), L(\alpha_3), L(\alpha_4)\}$ tarafından doğurulmuştur. Şimdi W için bir bazı Örnek 2.79′ daki yöntemle bulalım. W uzayı aşağıdaki matrisin satır uzayıdır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Bunun satır eşdeğeri } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisidir.}$$

Bu durumda W için bir baz, $\beta_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0]$, $\beta_2 = [0 \ 1 \ -2 \ -3 \ 0]$ ve $\beta_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ olmak üzere olmak üzere $T = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ kümesidir. V için bir baz da $\{L^{-1}(\beta_1), L^{-1}(\beta_2), L^{-1}(\beta_3)\} = \{t^4+t^2+2t, t^3-2t^2-3t, 1\}$ kümesidir.

Tanım 2.83 Bir A matrisinin satır(sütun) uzayının boyutuna A nın <u>satır (sütun) rankı</u> denir. Verilen bir A matrisinin satır rankını bulmanın kolay yolu:

$$A \xrightarrow[\text{satır eşelon form}]{\text{indirgenmiş}} B, \qquad \text{"}B \text{ nin sıfır olmayan satırlarının sayısı"} = \textbf{satır–rank}(A)$$

Örnek 2.84 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine satır eşdeğerdir. Yani **satır–rank**(A) = **satır–rank**$(B) = 2$.

Not 2.85 A matrisi $m \times n$ matris olsun. $\mathbf{boy}(\mathbb{R}_n) = n$ olduğu için **satır–rank**$(A) \leqslant n$ dir. Ayrıca A nın satır uzayı m vektör tarafından doğurulduğu için **satır–rank**$(A) \leqslant m$ dir. O halde **satır–rank**$(A) \leqslant \min\{m, n\}$ diyebiliriz.

Teorem 2.86 Bir $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ matrisinin satır rankı sütun rankına eşittir.
İspat: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vektörleri A nın satır vektörleri olsun. Yani

$$\alpha_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}], i = 1, 2, \ldots, m.$$

satır–rank$(A) = s$ olsun. $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}$ kümesi A nın satır uzayı için bir baz olsun.

$$\beta_i = [b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}], i = 1, 2, \ldots, s$$

olsun. Satır vektörlerin her biri $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s'$ lerin bir lineer kombinasyonudur.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= c_{11}\beta_1 + c_{12}\beta_2 + \cdots + c_{1s}\beta_s \\
\alpha_2 &= c_{21}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + \cdots + c_{2s}\beta_s \\
&\vdots \\
\alpha_m &= c_{m1}\beta_1 + c_{m2}\beta_2 + \cdots + c_{ms}\beta_s
\end{aligned}$$

diyelim (burada c_{ij} ler tek türlü belirlenmiştir.) İki matrisin eşitliğinden

$$\begin{aligned}
a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \cdots + c_{1s}b_{sj} \\
a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \cdots + c_{2s}b_{sj} \\
&\vdots \\
a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \cdots + c_{ms}b_{sj}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{sj} \begin{bmatrix} c_{1s} \\ c_{2s} \\ \vdots \\ c_{ms} \end{bmatrix} \; (j = 1, 2, \ldots, n)$$

A nın her kolonu, s–tane vektörün lineer kombinasyonudur, bu yüzden **sütun–rank**$(A) \leqslant s =$ **satır–rank**(A). Benzer şekilde **satır–rank**$(A) \leqslant$ **sütun–rank**(A) elde edilir. Yani bunlar eşittir. □

Örnek 2.87 A matrisi Örnek 2.84'deki matris olsun. A'nın kolon uzayı A'nın kolonları tarafından doğurulan uzaydır. ($\mathbb{R}^4$ ün alt uzayıdır)

$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. A nın kolonlarını satır olarak yazarsak:

$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & +1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{A}'$ nü indirgenmiş satır eşelon forma getirirsek: $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
elde edilir. Bu durumda $\{[1\ \ 0\ \ 1\ \ -1], [0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]\}$ kümesi $\boldsymbol{A}'$ nün satır uzayı için bir bazdır ve
$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi de $\boldsymbol{A}$ nın sütun uzayı için bir bazdır. Yani **sütun–rank**$(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{2}$ dir.

Not: $\boldsymbol{A}$ nın satır–rankı, $\boldsymbol{A}$ nın sütun–rankına eşit olduğundan bundan sonra kısaca "$\boldsymbol{A}$ nın rankı" diyeceğiz. O halde $\mathbf{rank}(\boldsymbol{I_n}) = \boldsymbol{n}$ dir.

Teorem 2.88 $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ eşdeğerdir $\iff$ $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{B})$

Teorem 2.89 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ matris olsun. $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n} \iff \boldsymbol{A}, \boldsymbol{I_n}'$ in satır eşdeğeridir.

Sonuç 2.90 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ matris olsun. $\boldsymbol{A}$ singüler değil $\iff$ $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}$

Sonuç 2.91 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ matris olsun. $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ homojen sisteminin trivial olmayan çözümü var $\iff$ $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) < \boldsymbol{n}$.

Örnek 2.92 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ olsun. $\boldsymbol{A}'$yı indirgenmiş satır eşelon forma getirirsek $\boldsymbol{I_3}$ elde edilir.
Yani $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3} \implies \boldsymbol{A}$ singüler değil. $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ sisteminin tek çözümü trivial çözümdür.

Örnek 2.93 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ olsun. $\boldsymbol{A}$ matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine satır eşdeğerdir. (Bu matris indirgenmiş satır eşelon formdadır.) Yani $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) < \mathbf{3}$ ve $\boldsymbol{A}$ singülerdir. $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}'$ın trivial olmayan çözümü vardır.

Rankın Son Uygulaması

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{m}$ denklemli ve $\boldsymbol{n}$ bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi ve $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ olsun. Bu sistemi aşağıdaki şekilde de yazabiliriz:

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

Bu durumda "$AX = B$ sistemi tutarlıdır (en az bir çözüm vardır)" $\iff$ "B, A'nın kolonlarının bir lineer kombinasyonudur. (Yani B, A'nın kolon uzayına aittir)" diyebiliriz. Yani; $AX = B$'nin çözümü var ise $\mathbf{rank}(A) = \mathbf{rank}[A\vdots B]$ dir. Tersine, $\mathbf{rank}[A\vdots B] = \mathbf{rank}(A)$ olsun. O zaman B, A'nın kolon uzayındadır. Yani sistemin bir çözümü vardır.

Sonuç 2.94 $AX = B$ sistemi tutarlıdır $\iff$ $\mathbf{rank}[A\vdots B] = \mathbf{rank}(A)$.

Örnek 2.95 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ sistemi verilsin. $\mathbf{rank}(A) = \mathbf{rank}[A\vdots B] = 3$ olduğu için sistemin çözümü vardır.

Örnek 2.96 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & 4\\ 2 & -1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\ 5\\ 6\end{bmatrix}$ sisteminin çözümü yoktur, çünkü $\mathbf{rank}(A) = 2$ fakat $\mathbf{rank}[A\vdots B] = 3$ dür.

Not: $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}_n$ olsun ve A matrisi de j–inci satırı α_j olan matris olsun. Gösterilebilir ki:

$$S \text{ lineer bağımsızdır} \iff \mathbf{rank}(A) = n.$$

Not: $A, n \times n$ matris olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

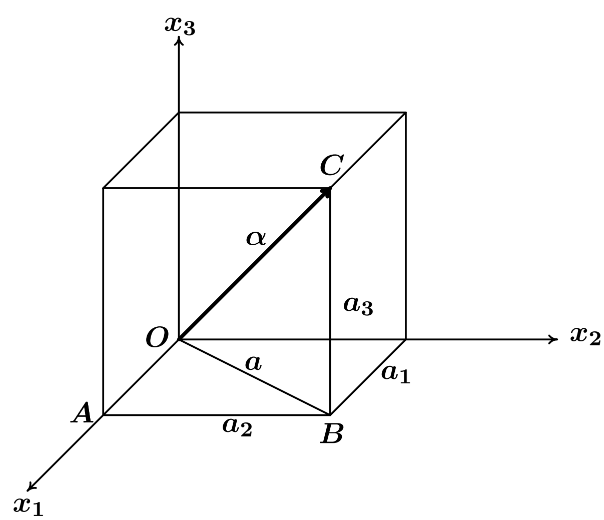
1. A singüler değildir.
2. $AX = 0$'ın tek çözümü trivialdir.
3. A matrisi I_n'ye satır (sütun) eşdeğerdir.
4. Her $B \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $AX = B$ nin tek çözümü vardır.
5. A, elementer matrislerin bir çarpımıdır.
6. $\mathbf{rank}(A) = n$ dir.
7. A nın satırları (sütunları), $\mathbb{R}_n$ de ($\mathbb{R}^n$ de) lineer bağımsızdır.

3

İç Çarpım Uzayları

3.1 $\mathbb{R}^3$ ün Standart İç Çarpımı

$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ olsun. Burada $\mathbb{R}^3$ uzayını bildiğimiz 3–boyutlu kartezyen düzlem olarak düşünüyoruz ve aşağıda inceleyeceğimiz kavramları $\mathbb{R}^n$ uzayına ve genel olarak vektör uzaylarına genelleştireceğiz. Şimdi, $\mathbb{R}^3$ de α nın, $|\alpha|$ ile gösterilen, uzunluğunu (veya büyüklüğünü) hesaplayalım.



Şekil 3.1: $\mathbb{R}^3$'de bir vektörün uzunluğu.

Şekil 3.1'de a uzunluğunu bulmak için OAB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 \Longrightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

elde edilir. Daha sonra OCB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|\alpha|^2 = a^2 + a_3^2 \Longrightarrow |\alpha| = \sqrt{a^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

elde edilir. Eğer $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ise $\alpha - \beta = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$ olup

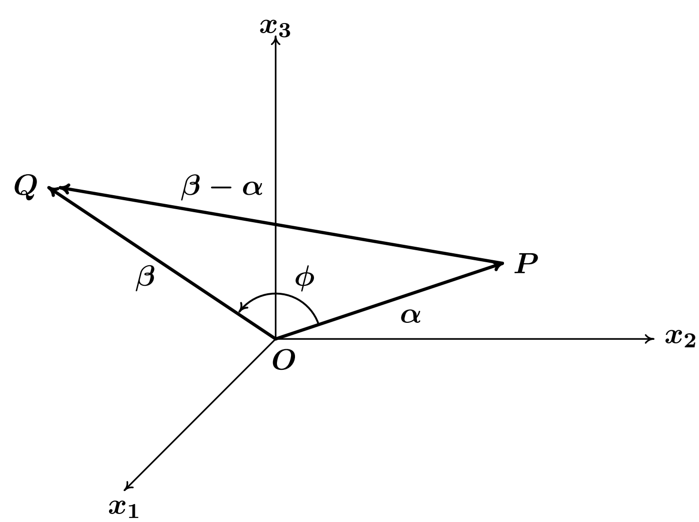
$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Bu α ile β arasındaki uzaklıktır. Aynı zamanda $\mathbb{R}^3$ de $P(a_1, a_2, a_3)$ ile $Q(b_1, b_2, b_3)$ noktaları arasındaki uzaklıktır.

Örnek 3.1 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ise $|\alpha| = \sqrt{14}$ ve $|\alpha - \beta| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{30}$ dur.

$\mathbb{R}^3$ de bir vektörün yönü bu vektörün x_1-,x_2- ve x_3- eksenleri ile yaptığı açıların kosinüsleri verilerek belirtilebilir. Bunlara yön (doğrultman) kosinüsleri denir.

Şimdi iki vektör arasındaki açıyı bulalım. $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ kabul edelim.



Şekil 3.2: $\mathbb{R}^3$'de iki vektör arasındaki açı

Şekil 3.2'de gösterildiği gibi; OPQ üçgeninde kosinüs kuralı uygulanırsa:

$$|PQ|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| \cdot \cos\phi$$

eşitliği geçerlidir. $|PQ| = |\beta - \alpha|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\beta - \alpha|^2}{2|\alpha||\beta|}\\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2}{2|\alpha||\beta|}\\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\alpha||\beta|}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.2 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ arasındaki açı ϕ nedir?

Çözüm:

$$\cos\phi = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \text{ olup } \phi = 60^{\text{o}} \text{ dir.}$$

Tanım 3.3 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ iki vektör olsun. $\mathbb{R}^3$'de α ile β'nın standart iç çarpımı $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ sayısı olarak tanımlanır ve $\langle \alpha, \beta \rangle$ (veya $\alpha \cdot \beta$) şeklinde gösterilir. Bu durumda

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad \text{ve} \quad \cos\phi = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|}, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\alpha \text{ ve } \beta \text{ diktir (ortogonaldir)} \iff \langle \alpha, \beta \rangle = 0.$$

Teorem 3.4 $\mathbb{R}^3$'deki standart iç çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(a) $\alpha \neq \theta$ ise $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ dir.

(b) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$

(c) $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$

(d) $\langle c\alpha, \beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$

İspat: Alıştırma olarak bırakıyoruz.

Not 3.5 $\mathbb{R}^3$' deki $\langle \alpha, \beta \rangle$ standart iç çarpımına aynı zamanda skaler çarpım (veya nokta çarpım) denir.

3.2 İç Çarpım Uzayları

Şimdi "skaler çarpım", "dik olmak", "uzunluk" ve "açı" gibi kavramları vektör uzaylarına genelleştirelim.

Tanım 3.6 V bir vektör uzayı olsun. Her $\alpha, \beta \in V$ çiftini bir $\langle \alpha, \beta \rangle$ reel sayısına eşleyen ve aşağıdaki şartları sağlayan kurala V nin bir iç çarpımı denir.

(a) $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ (her $\alpha \neq \theta_V$ için)

(b) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ (her $\alpha, \beta \in V$ için)

(c) $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$ (her $\alpha, \beta, \gamma \in V$ için)

(d) $\langle c\alpha, \beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$ (her $\alpha, \beta \in V$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için)

Bu özellikleri kullanarak aşağıdaki özelliği de kolayca elde edebiliriz:

$$\langle \alpha, c\beta \rangle = \langle c\beta, \alpha \rangle = c \langle \beta, \alpha \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Örnek 3.7 $\mathbb{R}^{3\prime}$ de daha önce tanımlanan standart iç çarpım bir iç çarpımdır.

Örnek 3.8 $\mathbb{R}^{n\prime}$de standart iç çarpımı şöyle tanımlayabiliriz:

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ olsun. } \langle \alpha, \beta \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Örneğin $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise $\langle \alpha, \beta \rangle = 3 - 4 - 6 + 4 = -3$

Örnek 3.9 V sonlu boyutlu vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, V'$nin sıralı bir bazı olsun. $\alpha, \beta \in V$ için $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle [\alpha]_S, [\beta]_S \rangle$ olarak tanımlansın. $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$ ve $\beta = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$ ise $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ olur. Bu tanıma göre $\langle \alpha, \beta \rangle$ bir iç çarpımdır. (Gösterin)

Sonuç 3.10 Her sonlu boyutlu vektör uzayında bir iç çarpım tanımlanabilir.

Not: $\mathbb{R}^n$ deki aşağıdaki özelliği ispatlayalım: $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris ve $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^n$ ise

$$\langle A\gamma, \delta \rangle = \langle \gamma, A'\delta \rangle .$$

Bunu ispatlamak için $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ ise $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha'\beta$ eşitliğini kullanacağız. Buradan

$$\langle A\gamma, \delta \rangle = (A\gamma)'\delta = (\gamma' A')\delta = \gamma'(A'\delta) = \langle \gamma, A'\delta \rangle$$

elde edilir.

Örnek 3.11 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ olsun. $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 3a_2b_2$ olarak tanımlayalım. Bu kural $\mathbb{R}^2$ nin bir iç çarpımıdır.

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = a_1^2 - 2a_1a_2 + 3a_2^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 2a_2^2 = (a_1 - a_2)^2 + 2a_2^2$$

elde edilir. Şimdi, eğer $\alpha \neq \theta$ ise (yani $a_1 \neq 0$ veya $a_2 \neq 0$ ise) $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ olduğu görülür. Diğer üç özellik de sağlanır. (Gösteriniz)

Örnek 3.12 V, $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve gerçel fonksiyonların uzayı olsun. $f, g \in V$ için

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

olarak tanımlayalım. Bu, V nin bir iç çarpımıdır. Analiz derslerindeki bilgilerimizi kullanarak bunun bir iç çarpım olduğunu gösterelim. Eğer $f \neq 0$ ise; yani f sıfır fonksiyonu değilse:

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)^2\, dt > 0$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt = \int_0^1 g(t)f(t)\, dt = \langle g, f \rangle .$$

$$\langle f + g, h \rangle = \int_0^1 [f(t) + g(t)]h(t)\, dt = \int_0^1 f(t)h(t)\, dt + \int_0^1 g(t)h(t)\, dt = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle .$$

$$\langle cf, g \rangle = \int_0^1 cf(t)g(t)\, dt = c \int_0^1 f(t)g(t)\, dt = c \langle f, g \rangle .$$

Sonuç olarak 4 özellik de sağlanmıştır. Örneğin; $f(t) = t + 1$ ve $g(t) = 2t + 3$ fonksiyonları için:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (t + 1)(2t + 3)dt = \int_0^1 (2t^2 + 5t + 3)dt = \frac{37}{6}.$$

Örnek 3.13 $V = \mathbb{R}_2$ olsun. $\alpha = [a_1, a_2]$ ve $\beta = [b_1, b_2]$ için $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 5a_2b_2$ kuralı bir iç çarpımdır.

Örnek 3.14 $V = P$ olsun. $p(t), q(t) \in P$ polinomları için $\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$ bir iç çarpımdır.

Tanım 3.15 Üzerinde bir iç çarpım tanımlı olan uzaya bir iç çarpım uzayı denir. Eğer bu uzay sonlu–boyutlu ise Öklidyen uzay denir. Bir iç çarpım uzayında α vektörünün uzunluğu (veya vektör normu)

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

olarak tanımlanır. (Yani bir vektörün normu, kendisi ile çarpımının kareköküdür.)

Soru: $\|\theta\| = 0$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: $\theta + \theta = \theta$)

Çözüm:

$$\langle \theta, \theta \rangle = \langle \theta + \theta, \theta \rangle = \langle \theta, \theta \rangle + \langle \theta, \theta \rangle$$

olup eşitliğin her iki tarafından $\langle \theta, \theta \rangle$ sayısı sadeleşirse $\langle \theta, \theta \rangle = 0$ elde edilir. Uzunluk (norm) tanımından: $\|\theta\| = \sqrt{\langle \theta, \theta \rangle} = 0$ elde edilir.

Soru: V bir iç çarpım uzayı ise her $\alpha \in V$ için $\langle \alpha, \theta \rangle = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\alpha \in V$ için

$$\langle \alpha, \theta \rangle = \langle \alpha, \theta + \theta \rangle = \langle \alpha, \theta \rangle + \langle \alpha, \theta \rangle$$

olup eşitliğin her iki tarafından $\langle \alpha, \theta \rangle$ sayısı sadeleşirse $\langle \alpha, \theta \rangle = 0$ elde edilir.

Teorem 3.16 (Cauchy–Schwarz Eşitsizliği) α ve β bir V iç çarpım uzayının elemanları iseler

$$\boxed{\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2}$$

İspat: Eğer $\alpha = \theta$ ise $\|\alpha\| = 0$ ve $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ olup eşitsizlik doğrudur. O halde $\alpha \neq \theta$ olsun. r bir skaler olsun. $r\alpha + \beta$ vektörüne bakalım. Bu vektörün kendisi ile çarpımı $\geqslant 0$ olduğundan,

$$0 \leqslant \langle r\alpha + \beta, r\alpha + \beta \rangle = r^2 \langle \alpha, \alpha \rangle + 2r \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle = ar^2 + 2br + c$$

diyelim. $(a = \langle \alpha, \alpha \rangle, b = \langle \alpha, \beta \rangle, c = \langle \beta, \beta \rangle$ olsun.)

Eğer α ve β sabit kabul edilirse $ar^2 + 2br + c = p(r)$ polinomu $\geqslant 0$ olan bir polinomdur ve en fazla bir kökü vardır. O halde diskriminantı $\leqslant 0$ dir. Başka bir deyişle

$$4b^2 - 4ac \leqslant 0 \Longrightarrow b^2 - ac \leqslant 0 \Longrightarrow b^2 \leqslant ac$$

olur. Buradan $\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2$ elde edilir. □

Örnek 3.17 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^3$ de iki vektör olsun.

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 1(-3) + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -5, \quad \|\alpha\| = \sqrt{14}, \quad \|\beta\| = \sqrt{17}$$

olup $\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2$ olduğu görülür.

Tanım 3.18 α ve β bir V iç çarpım uzayında iki vektör olsun. Cauchy–Schwarz eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2} \leqslant 1 \quad \text{veya } -1 \leqslant \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \leqslant 1$$

Bu durumda

$$\cos \phi = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

olacak şekilde bir tek ϕ açısı vardır. Bu açıya α ile β vektörleri arasındaki açı denir.

Sonuç 3.19 (Üçgen Eşitsizliği) Eğer α ve β bir iç çarpım uzayında iki vektör ise

$$\boxed{\|\alpha + \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|} \quad \text{dır.}$$

İspat:

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 = \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle &= \langle \alpha, \alpha \rangle + 2 \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \|\alpha\|^2 + 2 \langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2 \end{aligned}$$

Cauchy–Schwarz eşitsizliği der ki: $\langle \alpha, \beta \rangle \leqslant | \langle \alpha, \beta \rangle | \leqslant \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$. O zaman

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2 \langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2 \leqslant \|\alpha\|^2 + 2 \|\alpha\| \cdot \|\beta\| + \|\beta\|^2 = \Big(\|\alpha\| + \|\beta\|\Big)^2$$

Her iki tarafın karekökü alınırsa:

$$\|\alpha + \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|$$

elde edilir. □

Not: Buna göre Örnek 3.8 deki Cauchy–Schwarz eşitsizliği şöyledir:

$$\langle \alpha, \beta \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$$

Örnek 3.12 deki Cauchy–Schwarz eşitsizliği şöyledir:

$$\langle f, g \rangle^2 = \left(\int_0^1 f(t) g(t)\, dt \right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^1 g^2(t) dt \right).$$

Örnek 3.20 $V = P_2$ olsun. İç çarpım Örnek 3.14 deki iç çarpım olsun. $p(t) = t + 2$ ise $p(t)$ nin uzunluğu:

$$\|p(t)\| = \sqrt{\langle p(t), p(t)\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (t+2)^2 dt} = \sqrt{\frac{19}{3}}$$

$q(t) = 2t - 3$ ise $p(t)$ ile $q(t)$ arasındaki açının kosinüsünü bulalım:

$$\|q(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (2t-3)^2 dt} = \sqrt{\frac{13}{3}}, \qquad \langle p(t), q(t)\rangle = \int_0^1 (t+2)(2t-3)dt = -\frac{29}{6}$$

olup

$$\cos\phi = \frac{\langle p(t), q(t)\rangle}{\|p(t)\| \cdot \|q(t)\|} = \frac{-29}{2\sqrt{19 \cdot 13}}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 3.21 V bir iç çarpım uzayı olsun. $\alpha, \beta \in V$ vektörleri arasındaki uzaklık

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.22 V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\langle \alpha, \beta\rangle = 0$ ise α ile β vektörlerine ortogonaldirler (diktirler) denir.

Örnek 3.23 $\mathbb{R}^4$ de standart iç çarpıma göre $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörleri ortogonaldir, çünkü $\langle \alpha, \beta\rangle = 0$ dır.

Örnek 3.24 $V = P_2$ olsun. İç çarpım, Örnek 3.14 deki iç çarpım olsun. t ve $t - \frac{2}{3}$ vektörleri ortogonaldir; çünkü

$$\left\langle t, t - \frac{2}{3}\right\rangle = \int_0^1 t\left(t - \frac{2}{3}\right) dt = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{2t}{3}\right) dt = 0.$$

Not 3.25 Bir V iç çarpım uzayındaki θ_V vektörü her vektöre ortogonaldir. Ayrıca iki vektör arasındaki açı $\dfrac{\pi}{2}$ ise bu vektörler ortogonaldir.

Not 3.26 Bir V iç çarpım uzayındaki bir sabit vektöre ortogonal olan bütün vektörlerin kümesi, V nin bir alt uzayıdır. (Gösteriniz, ödev)

Tanım 3.27 V bir iç çarpım uzayı olsun. $S \subseteq V$ olsun. Eğer S deki her iki vektör çifti ortogonal ise S kümesine ortogonaldir denir. Buna ilaveten S deki her vektörün uzunluğu 1 ise (uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir) S kümesine ortonormaldir denir.

Not 3.28 Eğer $\alpha \neq \theta$ ise α ile aynı yönde (yani aralarındaki açı sıfır olacak şekilde) bir birim vektör her zaman vardır. $\beta = \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ olsun. Şimdi

$$\|\beta\| = \sqrt{\langle\beta,\beta\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right\rangle} = \sqrt{\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{\|\alpha\|\cdot\|\alpha\|}} = \sqrt{\frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|^2}} = 1$$

olur. Yani β bir birim vektördür. Ayrıca α ile β arasındaki açının kosinüsü 1 dir. Çünkü

$$\cos\phi = \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|} = \frac{\left\langle \alpha, \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right\rangle}{\|\alpha\|} = \frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{\|\alpha\|^2} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|^2} = 1 \Longrightarrow \phi = 0^{\circ}$$

Yani α ile β aynı yöndedir.

Örnek 3.29 $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}_n$ in standart bazları ortonormal kümelerdir. (Standart iç çarpıma göre)

Teorem 3.30 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi bir V iç çarpım uzayında ortogonal olsun ve her k için $\alpha_k \neq \theta$ olsun. O zaman S lineer bağımsızdır.

İspat: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = \theta$ olsun. Bir $\alpha_i \in S$ alalım ve bu eşitliğin her iki tarafının α_i ile iç çarpımını hesaplayalım.

$$\langle a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_i\alpha_i + \cdots + a_n\alpha_n, \alpha_i\rangle = \langle\theta,\alpha_i\rangle = 0$$

elde ederiz. Son eşitliğin sol tarafını düzenlersek:

$$a_1 \underbrace{\langle\alpha_1,\alpha_i\rangle}_{0} + a_2 \underbrace{\langle\alpha_2,\alpha_i\rangle}_{0} + \cdots + a_i \underbrace{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}_{>0} + \cdots + a_n \underbrace{\langle\alpha_n,\alpha_i\rangle}_{0}$$

elde ederiz. S ortogonal olduğu için bu ifade $a_i\,\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle$'ye eşittir. Yani $a_i\,\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle = 0$ olup $\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle \neq 0$ olduğundan $a_i = 0$ elde edilir. Bu işlemi $i = 1, 2, \ldots, n$ için yaparsak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ bulunur. Yani S lineer bağımsızdır. □

Örnek 3.31 $[-\pi, \pi]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı V olsun. $f, g \in V$ için

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

kuralı tanımlansın. Bu kural V nin bir iç çarpımıdır. (Göstermesi kolay). Şimdi aşağıdaki fonksiyonları düşünelim.

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos(nt), \sin(nt), \cdots \tag{3.1}$$

Bu fonksiyonların hepsi V nin elemanlarıdır. Aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\cos(nt)\,dt = 0 \qquad \text{her } m, n \text{ için.}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,dt = 0 \qquad \text{her } m \neq n \text{ için.}$$

Yani $f \neq g$ ise $\langle f, g\rangle = 0$ dır. Yani (3.1) deki fonksiyonlardan seçilen sonlu bir küme ortogonaldir. O halde Teorem 3.30'dan dolayı, (3.1) deki fonksiyonlardan seçilen sonlu bir küme lineer bağımsızdır.

ALIŞTIRMALAR

1.) V, $n \times n$ matrislerin reel vektör uzayı olsun. $\langle A, B\rangle = \mathbf{Tr}(B'A)$ olarak tanımlanan fonksiyon bir iç çarpımdır, gösterin. ($\mathbf{Tr}$ iz fonksiyonudur; bkz. Örnek 1.19)

2.) $V = \mathbb{R}^3$ olsun. Standart iç çarpım verilsin.

(a) a ′ nın hangi değerleri için $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörleri ortogonaldir.

(b) $\alpha = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ -b \end{bmatrix}$ olsun. a ve b nin hangi değerleri için $\{\alpha, \beta\}$ kümesi ortonormaldir.

3.) V, Örnek 3.14 deki uzay olsun.

(a) a′nın hangi değerleri için $p(t) = 3t + 1$ ve $q(t) = at$ vektörleri ortogonaldir.

(b) a ve b′nin hangi değerleri için $p(t) = 3t + 1$ ve $q(t) = at + b$ vektörleri ortogonaldir.

3.3 Gram–Schmidt Yöntemi

Bu kısımda her Öklidyen V uzayı için aynı zamanda ortonormal bir küme olan bir S bazı elde edilebileceğini göstereceğiz. Böyle bir baza ortonormal baz denir. Böyle bir baz bulmak için kullandığımız yönteme de Gram–Schmidt Yöntemi denir.

Teorem 3.32 (Gram–Schmidt Yöntemi) V bir iç çarpım uzayı ve $\{\theta\} \neq W$ alt uzayı da bazı $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ olan bir alt uzay olsun. O zaman W nun bir $T = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ ortonormal bazı vardır.

İspat: İspatı adım–adım yapacağız. Önce $T^* = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ ortogonal bazını bulacağız. $\beta_1 = \alpha_1$ diyelim (Başka bir α_i de seçilebilir.) Şimdi W nun $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ tarafından gerilen W_1 uzayında bir β_2 vektörü arıyoruz öyle ki β_2, β_1′e ortogonal olmalı. $\beta_1 = \alpha_1$ olduğundan $W_1 = \mathbf{Span}\{\beta_1, \alpha_2\}$ dir. $\beta_2 = a_1\beta_1 + a_2\alpha_2$ şeklindedir. a_1 ve a_2 yi öyle seçeriz ki $\langle \beta_1, \beta_2\rangle = 0$ olur.

$$0 = \langle \beta_2, \beta_1\rangle = \langle a_1\beta_1 + a_2\alpha_2, \beta_1\rangle = a_1 \langle \beta_1, \beta_1\rangle + a_2 \langle \alpha_2, \beta_1\rangle .$$

Şimdi $\beta_1 \neq \theta$ olduğundan $\langle \beta_1, \beta_1\rangle \neq 0$ dır. O zaman

$$a_1 = -a_2 \frac{\langle \alpha_2, \beta_1\rangle}{\langle \beta_1, \beta_1\rangle}.$$

Burada a_2'ye sıfırdan farklı değerler verilebilir. $a_2 = 1$ alalım.

$$a_1 = -\frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \Longrightarrow \boxed{\beta_2 = a_1\beta_1 + \alpha_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1}$$

Şimdi, $\{\beta_1, \beta_2\}$, W nun ortogonal bir kümesidir. Şimdi de hem β_1'e hem de β_2'ye ortogonal olan ve $\mathbf{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = W_2$ uzayında bir β_3 elemanı arıyoruz. $W_2 = \mathbf{Span}\{\beta_1, \beta_2, \alpha_3\}$ olduğundan

$$\beta_3 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\alpha_3 \quad \text{dür. } b_3 = 1 \text{ alalım.}$$

$$0 = \langle \beta_3, \beta_1 \rangle = \langle b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \alpha_3, \beta_1 \rangle = b_1 \langle \beta_1, \beta_1 \rangle + \langle \alpha_3, \beta_1 \rangle$$
$$0 = \langle \beta_3, \beta_2 \rangle = \langle b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \alpha_3, \beta_2 \rangle = b_2 \langle \beta_2, \beta_2 \rangle + \langle \alpha_3, \beta_2 \rangle .$$

Buradan: $b_1 = -\frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}$, $b_2 = -\frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}$ bulunur.

$$\boxed{\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2.}$$

Bu durumda $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} \subseteq W$ ortogonaldir. Benzer şekilde

$$\boxed{\beta_4 = \alpha_4 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_3 \rangle}{\langle \beta_3, \beta_3 \rangle}\beta_3.}$$

Bu şekilde $T^* = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ortogonal kümesi bulunur.

Teorem 3.30'dan, T^* kümesi, W uzayı için bir bazdır. Şimdi $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$$

dersek, $T = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ kümesi, W uzayı için ortonormal bir baz olur. □

Örnek 3.33 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ olsun. $\mathbb{R}^3$ uzayı için $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ bazını düşünelim. Şimdi S'yi $T = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ ortonormal bazına dönüştürelim.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2/3}{6/9}\begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Şimdi, $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ ortogonal bir bazdır. Her bir β_i'yi bir sabitle çarparsak yine bir ortogonal baz elde ederiz. Yani $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi de $\mathbb{R}^3$ için bir ortogonal bazdır. Ortonormal baz için her bir β_i kendi uzunluğuna bölünür:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

kümesi de $\mathbb{R}^3$'ün bir ortonormal bazıdır.

Örnek 3.34 $V = P_3$ olsun. (Daha önce tanımlanan iç çarpımla birlikte.) W da $S = \{t^2, t\}$ tarafından doğurulan alt uzay olsun. W için bir ortonormal baz bulalım. $\alpha_1 = t^2$ ve $\alpha_2 = t$ diyelim. $\beta_1 = \alpha_1 = t^2$ olsun.

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 \quad \text{dir.}$$

$$\langle \beta_1, \beta_1 \rangle = \int_0^1 t^2 t^2 \, dt = \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{1}{5} \quad \text{ve } \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle = \int_0^1 t t^2 \, dt = \frac{1}{4} \quad \text{bulunur.}$$

Buradan

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{1/4}{1/5}t^2 = t - \frac{5}{4}t^2 \quad \text{ve} \quad \langle \beta_2, \beta_2 \rangle = \int_0^1 \left(t - \frac{5}{4}t^2\right)^2 dt = \frac{1}{48} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak:

$$\left\{ \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \right\} = \left\{ \sqrt{5}t^2, \sqrt{48}\left(t - \frac{5}{4}t^2\right) \right\}$$

istenen ortonormal bazdır. Eğer $\alpha_1 = t$ ve $\alpha_2 = t^2$ seçilseydi $\left\{ \sqrt{3}t, \sqrt{30}\left(t^2 - \frac{t}{2}\right) \right\}$ ortonormal bazı bulunurdu. (Kontrol ediniz.)

Not 3.35 Gram–Schmidt yönteminde vektörleri bulduktan sonra normalleştirmek (uzunluklarını 1 yapmak) yerine vektörü bulur bulmaz normalleştirilip bir sonraki vektör bulunabilir. (Başka bir yöntem)

Teorem 3.36 V, n–boyutlu bir Öklidyen uzay, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ de V nin bir ortonormal bazı olsun. Eğer

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n \quad \text{ve} \quad \beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$$

ise $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ dir.

İspat: S ortonormal olduğundan $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$ dır. O halde

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) &= \langle a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n, b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n \rangle \\
&= a_1b_1 \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + a_1b_2 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + \cdots + a_1b_n \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle \\
&+ a_2b_1 \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle + a_2b_2 \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle + \cdots + a_2b_n \langle \alpha_2, \alpha_n \rangle \\
&\quad \vdots \\
&+ a_nb_1 \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle + a_nb_2 \langle \alpha_n, \alpha_2 \rangle + \cdots + a_nb_n \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n
\end{aligned}$$

□

Sonuç 3.37 T, bir V vektör uzayının ortonormal bazı ve $\alpha \in V$ için

$$[\alpha]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad \|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \quad \text{dır.}$$

Örnek 3.38 $V = \mathbb{R}_3$ olsun. W da $S = \{[2\ \ 1\ \ 1], [1\ \ 1\ \ 2]\}$ tarafından doğurulan alt uzay olsun. $\alpha = [5\ \ 3\ \ 4] \in W$ olsun.

$$[5\ \ 3\ \ 4] = 2[2\ \ 1\ \ 1] + 1[1\ \ 1\ \ 2] \Longrightarrow [5\ \ 3\ \ 4]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. α'nın uzunluğu $\|\alpha\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{50}$ dir. S'ye göre koordinat vektörünü kullanırsak $\|\alpha\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ bulunur ki bu yanlıştır; çünkü S, ortonormal olmalıydı. S'yi ortogonal yaparsak (Gram–Schmidt yöntemini kullanarak):

$$\left\{ [2\ \ 1\ \ 1], \left[-\frac{4}{6}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{7}{6}\right] \right\} \text{ veya } \{\, [2\ \ 1\ \ 1], [-4\ \ 1\ \ 7] \,\}$$

bazını buluruz. Bu bazı ortonormal hale getirirsek:

$$T = \left\{ \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\frac{-4}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right] \right\}$$

bulunur. Şimdi, $[\alpha]_T = \begin{bmatrix} \frac{17\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{66}}{6} \end{bmatrix}$ olup (kontrol edin) $\|\alpha\|$'yı bu koordinat vektörüne göre hesaplarsak:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\left(\frac{17\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{66}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1800}{36}} = \sqrt{50}$$

bulunur; ki bu da doğru cevaptır.

Teorem 3.39 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi bir V vektör uzayı için ortonormal bir baz ve $\alpha \in V$ olsun. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $c_i = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$ olmak üzere

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n \text{ dir.}$$

(Bu teorem bir elemanın bir ortonormal baza göre koordinatlarını kolayca bulmamıza yarar.)

Örnek 3.40 $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\}$ $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal bazdır. Bu baza göre $\alpha = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörünün koordinatlarını bulalım. (S nin elemanlarına, sırasıyla, α_1, α_2 ve α_3 diyelim.) Teorem 3.39 kullanılırsa; $i = 1, 2, 3$ için $c_i = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$ hesaplanır:

$$c_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9,$$
$$c_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9,$$
$$c_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9$$

Kontrol edelim:

$$9\alpha_1 + 9\alpha_2 + 9\alpha_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha.$$

ALIŞTIRMALAR

1.) Gram–Schmidt yöntemini kullanarak $\mathbb{R}^3$ de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ bazını ortonormal baza çeviriniz.

2.) P_2 uzayı için $\{1, t, t^2\}$ bazını ortonormal baza çeviriniz.

3.) $V = P_2$ olsun. $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ olarak tanımlansın. $\{1, t, t^2\}$ standart bazını ortonormal baza çeviriniz. (Böyle elde edilen polinomlara Legendre polinomları denir.)

4.) $\mathbb{R}^3$ de $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ tarafından doğurulan uzay W olsun. $\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) α nın uzunluğunu direkt olarak bulunuz.

(b) S'yi bir T ortonormal bazına dönüştürünüz.

(c) α nın uzunluğunu T ye göre koordinat vektörünü kullanarak bulunuz.

4

Lineer Dönüşümler ve Matrisler

4.1 Tanım ve Örnekler

Tanım 4.1 V ve W iki vektör uzayı olsun. $L : V \to W$ bir fonksiyon olsun. Eğer

a) Her $\alpha, \beta \in V$ için $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$ ve

b) Her $c \in \mathbb{R}$ ve her $\alpha \in V$ için $L(c \cdot \alpha) = c \cdot L(\alpha)$ ise

L'ye V'den W'ya bir lineer dönüşüm denir. Eğer $V = W$ ise L'ye V üzerinde bir lineer operatör denir.

Dikkat:

$$\begin{array}{ccccccc} L(\alpha+\beta) & = & L(\alpha)+L(\beta), & & L(c\cdot\alpha) & = & c\cdot L(\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V \text{ deki} & & W \text{ daki} & & V \text{ deki} & & W \text{ daki} \\ \text{toplama} & & \text{toplama} & & \text{skaler çarma} & & \text{skaler çarpma} \end{array}$$

Eğer Tanım 2.68 gözönüne alınırsa şunu yazabiliriz:

$$\boxed{L : V \longrightarrow W \text{ lineer dönüşüm + 1–1 + Örten} \iff \text{İzomorfizm}}$$

Lemma 4.2 $L : V \longrightarrow W$ fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\alpha, \beta \in V$ için $L(a\alpha + b\beta) = aL(\alpha) + bL(\beta)$ olmasıdır.
İspat: ($\Longrightarrow$) L bir lineer dönüşüm olsun.

$$L(a\alpha + b\beta) = L(a\alpha) + L(b\beta) = aL(\alpha) + bL(\beta)$$

olup ispat tamamlanır.

İspat: ($\Longleftarrow$) Şimdi de her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\alpha, \beta \in V$ için $L(a\alpha + b\beta) = aL(\alpha) + bL(\beta)$ olsun. $a = 1$, $b = 1$ alınırsa $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$ elde edilir. Ayrıca $b = 0, a = c$ dersek $L(c \cdot \alpha) = c \cdot L(\alpha)$ bulunur. □

Örnek 4.3 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ olsun.

$$L(\alpha + \beta) = L\left(\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = L(\alpha) + L(\beta).$$

Ayrıca

$$L(c\alpha) = L\left(\begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = cL(\alpha).$$

Yani L bir lineer dönüşümdür. L'ye bir projeksiyon (izdüşüm) denir. Çünkü $P(a_1, a_2, a_3)$ noktasının L altındaki görüntüsü; ucu bu nokta olan 3–boyutlu doğrunun $\mathbb{R}^2$deki gölgesidir.

Örnek 4.4 $L : P_2 \longrightarrow P_1, L(at^2 + bt + c) = 2at + b$ olsun. L bir lineer dönüşümdür.

Örnek 4.5 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $r \in \mathbb{R}$ bir skaler olmak üzere

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

olsun. $L, \mathbb{R}^3$ de bir lineer operatördür. (Kontrol ediniz) $r > 1$ ise L'ye uzama, $0 < r < 1$ ise büzülme denir. Çünkü; $r > 1$ ise vektör uzar, $0 < r < 1$ ise büzülür.

Örnek 4.6 $L : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$L(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)dt$$

olarak tanımlanan L, bir lineer dönüşümdür. (Gösteriniz.)

Örnek 4.7 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

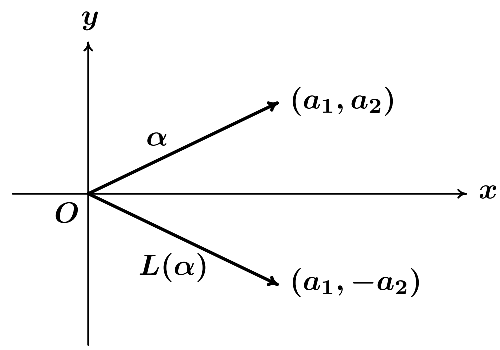
şeklinde tanımlanan L bir lineer dönüşümdür. Gösteriniz.

Örnek 4.8 A bir $m \times n$ matris ise $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $L(\alpha) = A \cdot \alpha$ fonksiyonu her zaman bir lineer dönüşümdür. Gösteriniz.

Örnek 4.9 $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ de bir lineer operatördür. L'ye x-eksenine göre refleksiyon (yansıma) denir. (Şekil 4.1)

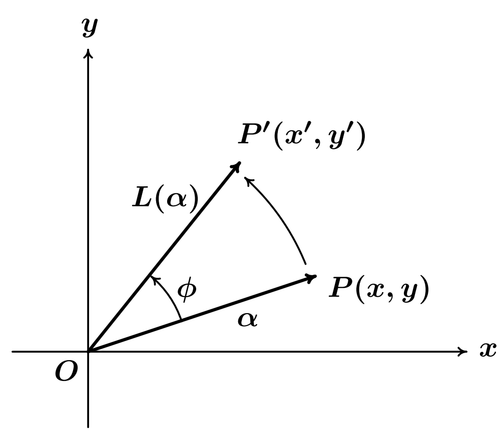


Şekil 4.1:

Örnek 4.10 $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dönüşümü bir α vektörünü ϕ açısı kadar döndürmekle elde edilen dönüşümdür. Bu dönüşüme bir rotasyon (dönme) denir. (Şekil 4.2) Bu dönüşüm başlangıç noktası orjin ve uç noktası $P(x, y)$ olan vektörü, uzunluğunu değiştirmeden, saatin ters yönünde ϕ açısı kadar döndürüp, başlangıç noktası orjin ve uç noktası $P'(x', y')$ olan vektöre dönüştürür.



Şekil 4.2:

Örnek 4.11 $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + 1 \\ 2a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$L(\alpha + \beta) = L\left(\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + 1 \\ 2(a_2 + b_2) \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

fakat

$$L(\alpha) + L(\beta) = \begin{bmatrix} a_1 + 1 \\ 2a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + 1 \\ 2b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + 2 \\ 2(a_2 + b_2) \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} \neq L(\alpha + \beta)$$

olup bir L bir lineer dönüşüm değildir.

Örnek 4.12 $L : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2, L\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & 2a_2 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen L bir lineer dönüşüm müdür? Neden?
Çözüm: Ödev

Teorem 4.13 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ve V de n–boyutlu bir vektör uzayı olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, V nin bir bazı olsun. $\alpha \in V$ ise $L(\alpha)$ elemanı $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \ldots, L(\alpha_n)\}$ elemanları tarafından tamamem belirlenir.
İspat: $\alpha \in V$ ve S bir baz olduğundan $a_1, a_2 \ldots, a_n$ belirli sayılar olmak üzere $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$ şeklinde yazabiliriz. Şimdi; L lineer dönüşüm olduğundan:

$$L(\alpha) = L(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n) = a_1L(\alpha_1) + a_2L(\alpha_2) + \cdots + a_nL(\alpha_n)$$

olup $L(\alpha)$ elemanı $L(\alpha_1), L(\alpha_2), \ldots, L(\alpha_n)$ tarafından tamamen belirlir. □

Not: Bu teoremi şöyle ifade edebiliriz: $L : V \longrightarrow W$ ve $T : V \longrightarrow W$ iki lineer dönüşüm olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, V nin bir bazı olsun. Eğer her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $L(\alpha_i) = T(\alpha_i)$ ise o zaman her $\alpha \in V$ için $L(\alpha) = T(\alpha)$ dır; yani $L = T$ dir.

Örnek 4.14 $L : \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ bir lineer dönüşüm olsun. $\alpha_1 = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$, $\alpha_2 = [0\ \ 1\ \ -1\ \ 2]$, $\alpha_3 = [0\ \ 2\ \ 2\ \ 1]$, $\alpha_4 = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $\mathbb{R}_4$ ün bir bazı olsun. Şimdi

$$L(\alpha_1) = [1\ \ 2], \quad L(\alpha_2) = [0\ \ 3], \quad L(\alpha_3) = [0\ \ 0], \quad L(\alpha_4) = [2\ \ 0]$$

verilsin. $\alpha = [3 \ \ -5 \ \ -5 \ \ 0]$ ise $L(\alpha)$ nasıl hesaplanır? Bunun için önce α elemanı S'deki vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılır. Bir takım hesaplamalardan sonra $\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4$ elde edilir ve daha sonra:

$$L(\alpha) = L(2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4) = 2L(\alpha_1) + L(\alpha_2) - 3L(\alpha_3) + L(\alpha_4) = [4 \ \ 7]$$

bulunur.

Teorem 4.15 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

(a) $L(\theta_V) = \theta_W$

(b) $L(\alpha - \beta) = L(\alpha) - L(\beta)$ dır. (Her $\alpha, \beta \in V$ için.)

İspat: Lemma 2.70'in ispatının aynısıdır.

4.2 Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntüsü

Tanım 4.16 Eğer bir lineer dönüşüm, fonksiyon olarak 1–1 ise, bu dönüşüme 1–1 lineer dönüşüm denir. $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Longrightarrow L(\alpha_1) \neq L(\alpha_2) \quad \text{veya} \quad L(\alpha_1) = L(\alpha_2) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

önermesi doğru ise (her $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ için) L 1–1 dir deriz.

Örnek 4.17 $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ olsun. $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$ olduğunu kabul edelim: Buradan

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 = &\ \ b_1 + b_2 \\ a_1 - a_2 = &\ \ b_1 - b_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2a_1 = 2b_1 \Longrightarrow a_1 = b_1 \Longrightarrow a_2 = b_2$$

olup $\alpha_1 = \alpha_2$ dir. Yani L, 1–1 dir.

Örnek 4.18 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ olsun. $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$ olup L, 1–1 değildir.

Tanım 4.19 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun L nin çekirdeği

$$\textbf{Çek}(L) = \{\alpha \in V : L(\alpha) = \theta_W\}$$

kümesi olarak tanımlanır. $L(\theta_V) = \theta_W$ olduğundan (Teorem 4.15) $\theta_V \in \textbf{Çek}(L)$ olup, çekirdek en az bir elemanlıdır; yani $\textbf{Çek}(L) \neq \emptyset$.

Örnek 4.20 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, Örnek 4.18′deki dönüşüm olsun.

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olup } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \textbf{Çek}(L)\textbf{.} \text{ Fakat } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \notin \textbf{Çek}(L)\textbf{.}$$

Acaba $\textbf{Çek}(L)$ kümesini nasıl bulabiliriz?

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

bulunur. $a_3 \in \mathbb{R}$ keyfi seçilebilir. O halde

$$\textbf{Çek}(L)\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{(Yani } \textbf{Çek}(L), z\text{–ekseninin kendisidir.)}$$

Teorem 4.21 $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun

(a) $\textbf{Çek}(L), V$ nin bir alt uzayıdır.

(b) L 1–1 dir $\iff$ $\textbf{Çek}(L) = \{\, \theta_V \,\}$

İspat (a) $\alpha, \beta \in \textbf{Çek}(L)$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha + \beta \in \textbf{Çek}(L)$ ve $c\alpha \in \textbf{Çek}(L)$ olduğunu gösterelim. (Teorem 2.16 kullanılacaktır.) $\alpha, \beta \in \textbf{Çek}(L)$ olduğundan $L(\alpha) = L(\beta) = \theta_W$ dur. Şimdi:

$$L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta) = \theta_W + \theta_W = \theta_W \Longrightarrow \alpha + \beta \in \textbf{Çek}(L)$$
$$L(c\alpha) = cL(\alpha) = c\theta_W = \theta_W \text{ (bkz. Teorem 2.11.b)} \Longrightarrow c\alpha \in \textbf{Çek}(L)$$

olup Teorem 2.16′dan dolayı $\textbf{Çek}(L), V$ nin bir alt uzayıdır.

İspat (b) ($\Longrightarrow$) L 1–1 olsun. $\textbf{Çek}(L) = \{\, \theta_V \,\}$ olduğunu göstereceğiz. $\alpha \in \textbf{Çek}(L)$ alalım. $L(\alpha) = \theta_W$ dur. $L(\theta_V) = \theta_W$ olduğundan ve L 1–1 olduğundan $\alpha = \theta_V$ olmalıdır. O halde $\textbf{Çek}(L) = \{\, \theta_V \,\}$.

İspat (b) ($\Longleftarrow$) $\textbf{Çek}(L) = \{\, \theta_V \,\}$ olsun. L nin 1–1 olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} L(\alpha_1) = L(\alpha_2) &\Longrightarrow L(\alpha_1) - L(\alpha_2) = \theta_W \\ &\Longrightarrow L(\alpha_1 - \alpha_2) = \theta_W \\ &\Longrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \in \textbf{Çek}(L) \quad \text{(Teorem 4.15.b)} \\ &\Longrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \theta_V \\ &\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \end{aligned}$$

olup L 1–1 dir. □

Örnek 4.22 $L : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}, L(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)dt$ lineer dönüşümü verilsin. $\text{Çek}(L)$ uzayını (ve boyutunu) bulalım.

Çözüm: $\alpha \in P_2$ alalım. $\alpha = at^2 + bt + c$ olsun. Eğer $\alpha \in \text{Çek}(L)$ ise $L(\alpha) = \theta_{\mathbb{R}} = 0$ olmalı.

$$L(\alpha) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)dt = \left.\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct\right|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$$

bulunur. Yani $c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$ dir. O halde

$$\text{Çek}(L) = \left\{ at^2 + bt + \left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesidir. $\text{Çek}(L)$'nin boyutunu bulalım. Şimdi

$$at^2 + bt + \left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) = a\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

olup $\text{Çek}(L)$'deki her vektör $\alpha_1 = t^2 - \frac{1}{3}$ ve $\alpha_2 = t - \frac{1}{2}$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. Yani $\text{Çek}(L) = \text{Span}(\{\alpha_1, \alpha_2\})$. Ayrıca bu vektörler lineer bağımsızdır (çünkü birisi diğerinin katı değil). O halde $\text{boy}(\text{Çek}(L)) = 2$ dir. Ayrıca, Teorem 4.21.b'den L 1–1 değildir.

Tanım 4.23 $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. L nin görüntüsü (veya V nin L altındaki görüntüsü)

$$G(L) = \{ w \in W : \text{ Bir } v \in V \text{ için } L(v) = w \}$$

kümesi olarak tanımlanır. Yani $\beta \in G(L)$ ise bir $\alpha \in V$ bulunabilir; öyle ki $L(\alpha) = \beta$ dır. Eğer $G(L) = W$ ise L'ye örten (üzerine) lineer dönüşüm denir.

Teorem 4.24 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $G(L), W$ nun alt uzayıdır.
İspat: $\beta_1, \beta_2 \in G(L)$ olsun. O zaman bir $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ için $L(\alpha_1) = \beta_1$ ve $L(\alpha_2) = \beta_2$ dir.

$$\beta_1 + \beta_2 = L(\alpha_1) + L(\alpha_2) \xlongequal[\text{dönüşüm}]{L \text{ lineer}} L(\alpha_1 + \alpha_2)$$

olup $\alpha_1 + \alpha_2 \in V$ olduğundan $\beta_1 + \beta_2 \in G(L)$ dir. Şimdi de $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$c\beta_1 = cL(\alpha_1) \xlongequal[\text{dönüşüm}]{L \text{ lineer}} L(c\alpha_1)$$

olup $c\alpha_1 \in V$ olduğundan $c\beta_1 \in G(L)$ dir. O halde, Teorem 2.16 dan dolayı $G(L), W$ nun bir alt uzayıdır. □

Örnek 4.25 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ olsun. L örten midir?

Çözüm: $\beta = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alalım. $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ve $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}^3$ arıyoruz (her c, d için).

$$L(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Longrightarrow a_1 = c, a_2 = d$$

seçilirse $L(\alpha) = \beta$ olur. (a_3 herhangi bir sayı seçilebilir). Yani L örtendir. Bu durumda $G(L) = \mathbb{R}^2$ olup $\text{boy}(G(L)) = 2$ dir.

Örnek 4.26 $L : P_2 \to \mathbb{R}, L(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)\, dt$ lineer dönüşümü verilsin. L örten midir? $\text{boy}(G(L)) =?$

Çözüm: $r \in \mathbb{R}$ verilsin. $L(\alpha) = r$ olacak şekilde $\alpha \in P_2$ bulunabilir mi? $\alpha = at^2 + bt + c$ olsun.

$$L(\alpha) = \int_0^1 (at^2 + bt + c) dt = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

bulunur. Eğer (mesela) $a = b = 0$ ve $c = r$ alınırsa $L(\alpha) = r$ olur. Yani L örtendir. $\text{boy}(G(L)) = 1$ dir.

Örnek 4.27 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ile tanımlanan dönüşüm örten midir? $\text{boy}(G(L) =?$

Çözüm: Verilen her $\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ için $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}^3$ bulunabilir mi? $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ olsun.

$$L(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Şimdi ek matrisi indirgenmiş satır eşelon forma getirelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & a \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & b \\ 2 & 1 & 3 & \vdots & c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & a \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & b - a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & c - b - a \end{bmatrix}$$

Yani sadece $c - b - a = 0$ olduğundan bir çözüm vardır. O zaman L örten değildir. Şimdi $G(L)$ için bir baz bulalım:

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olur. Yani

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesi $G(L)$'yi doğurur. Üçüncü vektör ilk iki vektörün toplamı ve ilk iki vektör lineer bağımsız olduğu için (biri diğerinin katı değil), ilk iki vektör bir baz oluşturur. O halde $\mathbf{boy}(G(L)) = 2$ olur.

Not 4.28 Son örnekte $\mathbf{boy}(\mathbf{Çek}(L)) = 1$ bulunur ve $\begin{bmatrix} -a \\ -a \\ a \end{bmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$ şeklindeki vektörlerden oluşur. (Kontrol edin.)

Örnek 4.29 $L : \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_3$, $L([a_1, a_2, a_3, a_4]) = [a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_1 + a_3]$ olarak tanımlansın. $G(L)$ için bir baz bulunuz.

Çözüm: $L([a_1, a_2, a_3, a_4]) = a_1[1, 0, 1] + a_2[1, 0, 0] + a_3[0, 1, 1] + a_4[0, 1, 0]$ olup

$$\{\, [1, 0, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 1], [0, 1, 0] \,\}$$

kümesi $G(L)$ yi doğurur. Bu kümedeki vektörlerden lineer bağımsız olanları bulalım:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini indirgenmiş satır eşelon forma getirirsek $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde ederiz. Yani

$$\{\, [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1] \,\}$$

kümesi $G(L)$ için bir bazdır. $\mathbf{boy}(G(L)) = 3$ olup L örtendir.

Not: Örnek 4.27'de gördük ki

$$\boxed{\mathbf{boy}(\mathbf{Çek}(L)) + \mathbf{boy}(G(L)) = \mathbf{boy}(L'\text{nin tanım kümesi})}$$

Teorem 4.30 $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm ve V, n–boyutlu bir uzay ise

$$\mathbf{boy}(\mathbf{Çek}(L)) + \mathbf{boy}(G(L)) = n.$$

İspat: $k = \mathbf{boy}(\mathbf{Çek}(L))$ diyelim.

<u>$k = n$ ise:</u> O zaman $\mathbf{Çek}(L) = V$ dir. $\Longrightarrow$ her $\alpha \in V$ için $L(\alpha) = \theta_W \Longrightarrow G(L) = \{\theta_W\} \Longrightarrow$ $\mathbf{boy}(G(L)) = 0$ olup eşitlik doğrudur. $(n + 0 = n)$

<u>$1 \leqslant k < n$ ise:</u> $\mathbf{boy}(G(L)) = n - k$ olduğu gösterilecek. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, $\mathbf{Çek}(L)$ için bir baz olsun. Bunu $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n\}$ bazına genişletebiliriz (V için). Bu durumda ispat $T = \{L(\alpha_{k+1}), L(\alpha_{k+2}), \ldots, L(\alpha_n)\}$ kümesinin $G(L)$ için bir baz olduğu gösterilerek tamamlanır. (Ayrıntıları atlıyoruz.) $\square$

Tanım 4.31 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm ise $\mathbf{boy}(\mathbf{Çek}(L))$ sayısına L'nin <u>sıfırlığı</u> denir.

Sonuç 4.32 $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm ve $\mathbf{boy}(V) = \mathbf{boy}(W)$ olsun.

(**a**) L 1–1 ise örtendir.

(**b**) L örten ise 1–1 dir.

Not: $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ matris ise $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $L(\alpha) = A\alpha$ şeklinde bir lineer dönüşüm tanımlanabilir. $AX = B$, m–denklemli, n–bilinmeyenli sistem ise $AX = B$ nin çözümünü bulmak demek, verilen $B \in \mathbb{R}^m$ için $L(X) = B$ olacak şekilde $X \in \mathbb{R}^n$ bulmak demektir. O zaman $\mathbf{Çek}(L) = \{X \in \mathbb{R}^n : L(X) = AX = 0\}$ olduğundan $\mathbf{Çek}(L)$, $AX = 0$ homojen sisteminin çözümlerinden oluşur. Ayrıca $G(L)$, A nın kolonları tarafından doğurulan, ($\mathbb{R}^n$ nin) alt uzayıdır. Yani

$$\boxed{G(L) = (A\text{'nın kolon uzayı})} \quad \text{olup} \quad \boxed{\mathbf{boy}\, G(L) = \mathbf{rank}(A)} \quad \text{olur.}$$

Teorem 4.30'dan:

$$\boxed{\mathbf{boy}(\mathbf{Çek}(L)) = n - \mathbf{rank}(A).}$$

Yani

$$\boxed{(AX = 0 \text{ homojen sistemin çözüm uzayının boyutu}) = n - r} \quad (r = \mathbf{rank}(A))$$

Teorem 4.33 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşümünün tersi vardır $\Longleftrightarrow$ L, 1–1 ve örtendir. Ayrıca L^{-1} de bir lineer dönüşümdür ve $(L^{-1})^{-1} = L$.

Örnek 4.34 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ olarak tanımlansın. $\mathbf{Çek}(L) = \{\theta\}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani L, 1–1 dir. Ayrıca örten olup (Sonuç 4.32) tersi vardır. L^{-1} fonksiyonunu bulalım.

$$L(\alpha) = L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Daha sonra,

$$\left.\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 &= b_1 \\ 2a_1 + 2a_2 + a_3 &= b_2 \\ a_2 + a_3 &= b_3 \end{cases}\right\} \text{ sistemini } a_1, a_2, a_3\text{'e göre çözeriz.}$$

Devamında şunu buluruz:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 - b_3 \\ -2b_1 + b_2 + b_3 \\ 2b_1 - b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teorem 4.35 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşümünün 1–1 olması için gerek ve yeter şart V deki lineer bağımsız her kümenin görüntüsünün W da lineer bağımsız olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) L 1–1 olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq V$ lineer bağımsız bir küme olsun. Biz $T = \{L(\alpha_1), \dots, L(\alpha_k)\} \subseteq W$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} a_1L(\alpha_1) + \cdots + a_kL(\alpha_k) = \theta_W &\Longrightarrow L(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k) = \theta_W \quad (L \text{ lineer dön.}) \\ &\Longrightarrow L \text{ 1–1 olduğundan } a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k = \theta_V \\ &\Longrightarrow S \text{ lineer bağımsız olduğundan } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0 \\ &\Longrightarrow T \text{ lineer bağımsız.} \end{aligned}$$

İspat: ($\Longleftarrow$) Lineer bağımsız her kümenin görüntüsü de lineer bağımsız olsun. $\alpha \neq \theta_V$ için $\{\alpha\} \subseteq V$ kümesi lineer bağımsızdır. O halde, kabulümüz gereği, $\{L(\alpha)\} \subseteq W$ lineer bağımsızdır. $\Longrightarrow$ $L(\alpha) \neq \theta_W$ dur. Yani sıfır olmayan her vektörün görüntüsü de sıfır değildir. O halde sadece sıfır vektörünün görüntüsü sıfır olup **Çek**$(L) = \{\theta_V\}$ olmak zorundadır. Teorem 4.21.b den dolayı L 1–1 dir. □

Sonuç 4.36 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm ve $\mathbf{boy}(V) = \mathbf{boy}(W)$ olsun.

$$L \text{ 1–1 dir (yani tersi vardır)} \iff V \text{ deki bir bazın görüntüsü, } W \text{ da bir bazdır.}$$

Not: A $n \times n$ matris olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

1. A singüler değildir.
2. $AX = 0$ 'ın sadece trivial çözümü vardır.
3. A, I_n 'in satır (sütun) eşdeğeridir.

4. $AX = B$ sistemi her $n \times 1$ $B \in \mathbb{R}^n$ matrisi için tek çözüme sahiptir.

5. A, elementer matrislerin bir çarpımıdır.

6. A'nın rankı n dir.

7. A'nın satırları (sütunları) $\mathbb{R}_n$ de ($\mathbb{R}^n$ de) lineer bağımsızdır.

8. $AX = O$ 'ın çözüm uzayının boyutu sıfırdır.

9. $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, L(X) = AX, (X \in \mathbb{R}^n)$ ile tanımlanan lineer dönüşüm 1–1 ve örtendir.

ALIŞTIRMALAR

1. $L : \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3, L([a_1, a_2]) = [a_1, a_1 + a_2, a_2]$ olsun.

(a) Çek(L) nedir? **(b)** L, 1–1 midir? **(c)** L, örten midir?

2. $L : P_2 \longrightarrow P_3$, $L(p(t)) = t^2 \cdot p'(t)$ olarak tanımlansın. **Çek**(L) ve $G(L)$'nin boyutlarını ve bunlar için bir baz bulunuz.

3. $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

şeklinde verilsin.

(a) L'nin tersinin olduğunu ispatlayınız. **(b)** $L^{-1}\left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right)$ nedir?

4.3 Bir Lineer Dönüşümün Matrisi

Teorem 4.37 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm, V n–boyutlu ve W m–boyutlu vektör uzayları ($n \neq 0, m \neq 0$) ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ve $T = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ de sırasıyla V'nin ve W'nun sıralı bazları olsun. j. kolonu $L(\alpha_j)$'nin T'ye göre koordinatları; yani $[L(\alpha_j)]_T$; olan $m \times n$ tipindeki A matrisinin şu özelliği vardır:

Eğer bir $\alpha \in V$ için $L(\alpha) = \beta$ ise o zaman $[\beta]_T = A \cdot [\alpha]_S$ dır. (Burada $[\alpha]_S$: α'nın S'ye göre koordinatları; $[\beta]_T$: β'nın T'ye göre koordinatları.) Ayrıca A matrisi bu özellikleri sağlayan tek matristir.
İspat: İspatı atlıyoruz.

Örnek 4.38 $L : P_2 \longrightarrow P_1, L(p(t)) = p'(t)$ olsun. $S = \{t^2, t, 1\}$ ve $T = \{t, 1\}$ de P_2 ve P_1 için sıralı bazlar olsunlar. Şimdi L için A matrisini bulalım.

$$\left.\begin{array}{lcr} L(t^2) = 2t = 2 \cdot t + 0 \cdot 1 & \Longrightarrow & [L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ L(t) = 1 = 0 \cdot t + 1 \cdot 1 & \Longrightarrow & [L(t)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L(1) = 0 = 0 \cdot t + 0 \cdot 1 & \Longrightarrow & [L(1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örneğin; $p(t) = 5t^2 - 3t + 2 \Longrightarrow L(p(t)) = 10t - 3$ dür. Ayrıca $L(p(t))$'yi A matrisini kullanarak bulabiliriz.

$$[p(t)]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olup

$$[L(p(t))]_T = A \cdot [p(t)]_S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow L(p(t)) = 10t - 3 \text{ bulunur.}$$

Örnek 4.39 $L : P_2 \longrightarrow P_1$ Örnek 4.38'deki dönüşüm olsun. $S = \{1, t, t^2\}$ ve $T = \{t, 1\}$ de P_2 ve P_1 için sıralı bazlar olsunlar. Bu durumda L için A matrisi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Örnek 4.40 $L : P_2 \longrightarrow P_1$ Örnek 4.38'deki dönüşüm olsun. $S = \{t^2, t, 1\}$ ve $T = \{t+1, t-1\}$'de P_2 ve P_1 için sıralı bazlar olsunlar.

$$\left.\begin{array}{lcr} L(t^2) = 2t = 1 \cdot (t+1) + 1 \cdot (t-1) & \Longrightarrow & [L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L(t) = 1 = \frac{1}{2}(t+1) - \frac{1}{2}(t-1) & \Longrightarrow & [L(t)]_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ L(1) = 0 = 0 \cdot (t+1) + 0 \cdot (t-1) & \Longrightarrow & [L(1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Şimdi $p(t) = 5t^2 - 3t + 2$ alalım. $L(p(t)) = 10t - 3$ tür.

$$[L(p(t))]_T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 13/2 \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Gerçekten: $L(p(t)) = \frac{7}{2}(t+1) + \frac{13}{2}(t-1) = 10t - 3$ bulunur.

Tanım 4.41 Teorem 4.37 de açıklanan A matrisine L'nin S ve T sıralı bazlarına göre <u>temsili</u> denir. Ayrıca; A matrisi "S ve T'ye göre L'yi temsil eder" deriz. Yani L yi A ile, α yı $[\alpha]_S$ ile, β yı $[\beta]_T$ ile yer değiştiririz. Böylece $L(\alpha) = \beta$ eşitliği $A[\alpha]_S = [\beta]_T$ olur. Yani lineer dönüşümler yerine matrisler ile çalışabiliriz.

Örnek 4.42 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ olsun.

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \overline{\varepsilon_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{\varepsilon_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

olsun. $S = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, $\mathbb{R}^3$ için ve $T = \{\overline{\varepsilon_1},\ \overline{\varepsilon_2}\}$, $\mathbb{R}^2$ için standart baz seçilirse,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matris L'nin tanımındaki matrisin aynısıdır. Bunun sebebi; S ve T'nin standart baz seçilmesidir.

Örnek 4.43 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bir önceki örnekteki dönüşüm olsun.

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{ve} \quad T = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$$

$\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ için sıralı baz seçilirse:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Not 4.44 $L : V \longrightarrow V$ olsun. S ve T sıralı bazları verilsin. Eğer $S = T$ seçilirse bu durumda elde edilen A matrisine <u>L'nin S'ye göre temsili</u> denir.

Not 4.45 Bu durumda birim lineer operatörün herhangi bir baza göre temsili I_n dir. (V n–boyutlu ise.)

Not 4.46 $L : V \longrightarrow V$ tersi olan lineer operatör ise ve A da L'nin bir S sıralı bazına göre temsili ise A^{-1} de L^{-1}'in S'ye göre temsilidir.

Not 4.47 $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm, A da L'nin iki sıralı baza göre temsili olsun. $\mathbf{Çek}(L)'$nin bulunma problemi ile $AX = 0'$ın çözüm uzayını bulma problemleri aynıdır. $G(L)$ uzayını bulmak da A'nın kolon uzayını bulmak demektir.

Not 4.48 **5.** $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm ve $\mathbf{boy}(V) = \mathbf{boy}(W)$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

1. L tersi alınabilirdir.
2. L 1–1 dir.
3. L örtendir.
4. L'nin, S ve T'ye göre temsil matrisi olan A singüler değildir.

ALIŞTIRMALAR

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ olsun ve $L : {}_2\mathbb{R}_2 \longrightarrow {}_2\mathbb{R}_2, L(X) = AX - XA$ dönüşümü verilsin.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{ve}$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

de sıralı bazlar olsunlar. L'nin;

(a) S'ye göre, **(b)** T'ye göre, **(c)** S ve T'ye göre, **(d)** T ve S'ye göre

temsilini bulunuz.

4.4 Matrislerin Vektör Uzayı ve Lineer Dönüşümlerin Vektör Uzayı

Tanım 4.49 V ve W boyutları n ve m olan iki vektör uzayı olsun. $L_1 : V \longrightarrow W$ ve $L_2 : V \longrightarrow W$ lineer dönüşümler olsun. $L : V \longrightarrow W$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$L(\alpha) = L_1(\alpha) + L_2(\alpha) \quad (\text{ her } \alpha \in V \text{ için})$$

Buradaki $+$, W daki toplamadır. L' yi $L_1 \boxplus L_2$ ile gösterelim ve L_1 ile L_2 nin toplamı diyelim. Ayrıca $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm ve $c \in \mathbb{R}$ ise

$$H : V \longrightarrow W, H(\alpha) = cL(\alpha)$$

şeklinde tanımlayalım. H ye L nin c ile skaler çarpımı diyelim ve $c \boxdot L$ ile gösterelim.

Örnek 4.50 $V = \mathbb{R}_3$, $W = \mathbb{R}_2$ olsun. $L_1 : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, $L_2 : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$

$$L_1(\alpha) = L_1\left([a_1 \;\; a_2 \;\; a_3]\right) = [a_1 + a_2 \;\; a_2 + a_3]$$

ve

$$L_2(\alpha) = L_2\left([a_1 \;\; a_2 \;\; a_3]\right) = [a_1 + a_3 \;\; a_2]$$

olsun. O zaman

$$(L_1 \boxplus L_2)(\alpha) = [2a_1 + a_2 + a_3 \quad 2a_2 + a_3]$$

ve

$$(3 \boxdot L_1)(\alpha) = [3a_1 + 3a_2 \quad 3a_2 + 3a_3]$$

olur.

Not 4.51 Eğer L_1 ve L_2, V' den W' ya iki lineer dönüşüm ve $c \in \mathbb{R}$ ise $L_1 \boxplus L_2$ ve $c \boxdot L$ de lineer dönüşümdür. Ayrıca V den W ya bütün lineer dönüşümlerin kümesi U, bu işlemlerle bir vektör uzayıdır. $O : V \longrightarrow W$, $O(\alpha) = \theta_W$ olarak tanımlanan O dönüşümünü U nun sıfır vektörüdür. Ayrıca $L \boxplus ((-1) \boxdot L) = O$ dır. $(-1) \boxdot L$ yerine $-L$ yazarız. Ayrıca $S = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ kümesinin lineer bağımlı olması demek, $c_1L_1 + c_2L_2 + \cdots + c_kL_k = O$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sayılarının var olması demektir. ($\boxplus$ yerine $+$; $\boxdot$ yerine $\cdot$ yazacağız)

Örnek 4.52 $L_1, L_2, L_3 : \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ dönüşümleri şöyle tanımlansın:

$$\begin{aligned} L_1\left([a_1 \;\; a_2]\right) &= [a_1 + a_2 \quad 2a_1 \quad a_2] \\ L_2\left([a_1 \;\; a_2]\right) &= [a_2 - a_1 \quad 2a_1 + a_2 \quad a_1] \\ L_3\left([a_1 \;\; a_2]\right) &= [3a_1 \quad -2a_2 \quad a_1 + 2a_2] \end{aligned}$$

$S = \{L_1, L_2, L_3\}$ kümesi lineer bağımsız mıdır?

Çözüm: $c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 = O$ olsun. $\varepsilon_1 = [1 \quad 0]$ için

$$(c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3)(\varepsilon_1) = O([1 \;\; 0]) = [0 \;\; 0 \;\; 0]$$

olmalıdır. Yani

$$c_1\,[1 \;\; 2 \;\; 0] + c_2\,[-1 \;\; 2 \;\; 1] + c_3\,[3 \;\; 0 \;\; 1] = [0 \;\; 0 \;\; 0]$$

olmalıdır. Buradan $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ bulunur. Yani S lineer bağımsızdır.

Teorem 4.53 U, V den W ya lineer dönüşümlerin uzayı olsun. ($\text{boy}(V) = n \neq 0$, $\text{boy}(W) = m \neq 0$ olsun). O zaman U ile ${}_m\mathbb{R}_n$ izomorfiktir.

İspat: $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ V nin ve $T = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ de W nun bazları olsun. $M : U \longrightarrow {}_m\mathbb{R}_n$

$$M(L) = \text{“}L\text{'nin } S \text{ ve } T \text{ bazlarına göre temsili”}$$

olarak tanımlanan dönüşümünün bir izomorfizm olduğu gösterilerek ispat yapılır. □

Sonuç 4.54 $\text{boy}(U) = mn$ dir; çünkü $\text{boy}({}_m\mathbb{R}_n) = mn$ dir.

Örnek 4.55 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $S = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ve $T = \{\overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ için doğal bazlar olsun. Şimdi S ve T ye göre temsili A olan $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümünü bulalım.

$$L(\varepsilon_1) = 1\overline{\varepsilon}_1 + 2\overline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(\varepsilon_2) = 2\overline{\varepsilon}_1 - 1\overline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L(\varepsilon_3) = -1\overline{\varepsilon}_1 + 3\overline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Şimdi $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= L(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) = a_1L(\varepsilon_1) + a_2L(\varepsilon_2) + a_3L(\varepsilon_3) \\ &= a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 - a_3 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 \end{bmatrix} \\ &= A\alpha \end{aligned}$$

Yani $L(\alpha) = A\alpha$ şeklinde tanımlanmalıdır. Eğer S ve T doğal bazlar ise bu yapılabilir. Şimdi

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{ve} \quad T' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

olsun. S' ve T' ye göre temsili A olan $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü ne olmalıdır?

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = 1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = -1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-6\end{bmatrix}$$

bulunur. $\alpha = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ ise α yı S' deki vektörler cinsinden yazalım.

$$\alpha = b_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Bu durumda $L(\alpha)$ yı şöyle hesaplarız:

$$\begin{aligned}L(\alpha) &= b_1 L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) + b_2 L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) + b_3 L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\\ &= b_1\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix} + b_3\begin{bmatrix}5\\-6\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}5b_1 + 5b_3\\ b_1 + 7b_2 - 6b_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi, $L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ nedir?

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

bulunur. (Yani $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = 2$ olmalıdır.) Buradan:

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}15\\-11\end{bmatrix}$$

bulunur. Genel olarak; L'nin formulü şöyledir:

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5a_3 \\ 7a_1 - 6a_3 \end{bmatrix}.$$

Tanım 4.56 V_1, V_2 ve V_3 boyutları sırasıyla m, n ve p olan üç uzay olsun. $L_1 : V_1 \longrightarrow V_2$, $L_2 : V_2 \longrightarrow V_3$ lineer dönüşümler olsun. Her $\alpha \in V_1$ için

$$L_{2\circ}L_1 : V_1 \longrightarrow V_3, \quad (L_{2\circ}L_1)(\alpha) = L_2(L_1(\alpha))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona L_1 ile L_2 nin bileşkesi denir. Bu durumda $L_{2\circ}L_1$ de bir lineer dönüşümdür (gösterin). Eğer $L : V \longrightarrow V$ ise $L_\circ L$ yerine kısaca L^2 yazılır.

Örnek 4.57 $L_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$L_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L_2\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda:

$$(L_{1\circ}L_2)\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = L_1\left(\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix},$$

$$(L_{2\circ}L_1)\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = L_2\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

olup $L_{1\circ}L_2 \neq L_{2o}L_1$ dir.

Teorem 4.58 V_1, V_2 ve V_3 sırasıyla m, n ve p boyutlu üç uzay; $L_1 : V_1 \longrightarrow V_2$, $L_2 : V_2 \longrightarrow V_3$ lineer dönüşümler olsun. Bu durumda

$$M(L_{2\circ}L_1) = M(L_2) \cdot M(L_1)$$

dir. (Buradaki M fonksiyonu Teorem 4.53'ün ispatında geçen fonksiyondur.)

Not: Bu teorem şöyle ifade edilir: "İki lineer dönüşümün bileşkesinin temsili olan matris bunların ayrı ayrı temsili olan matrislerin çarpımıdır".

5 Determinantlar

5.1 Determinantın Tanımı

Bu bölümdeki bütün matrisler kare matristir.

Tanım 5.1 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, 1 den n'e kadar tamsayıların artan bir sırada düzenlenmiş kümesi olsun. S deki elemanların $j_1\ j_2\ \ldots\ j_n$ şeklinde bir düzenlenişine S nin bir permütasyonu denir. Aslında; S nin bir permütasyonu S den S'ye 1–1 ve örten bir dönüşümdür. S nin kaç tane permütasyonu vardır?

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
n\text{-tane} & (n-1)\text{-tane} & (n-2)\text{-tane} & (n-3)\text{-tane} & & 2\text{-tane} & 1\text{-tane}
\end{array}$$

Toplam: $n!$ tane.

S deki bütün permütasyonların kümesini S_n ile gösterelim.

Örnek 5.2 $S = \{1, 2, 3\}$ olsun. S_3'ün $3! = 6$ tane elemanı (permütasyonu) vardır. Bunlar:

$$123, 132, 213, 231, 312 \text{ ve } 321$$

Tanım 5.3 Eğer bir $j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonunda büyük bir sayı küçük bir sayıdan önce geliyorsa (yazılmışsa) bu permütasyonda bir inversiyon vardır denir. Eğer bir permütasyonda toplam inversiyonların sayısı çift (tek) ise bu permütasyona çifttir (tektir) denir. Eğer $n \geqslant 2$ ise S_n de $n!/2$ tane çift; $n!/2$ tane tek permütasyon vardır.

Örnek 5.4 S_1'in $1! = 1$ tane permütasyonu vardır: 1 dir. Bu permütasyon çifttir; çünkü hiç inversiyon yoktur. (İnversiyonların sayısı 0 dır.)

Örnek 5.5 S_2'nin $2! = 2$ tane permütasyonu vardır: 12 ve 21. 12 permütasyonu çifttir (hiç inversiyon yok). 21 permütasyonu tektir (1 tane inversiyon vardır.)

Örnek 5.6 S_4′ deki 4312 permütasyonuna bakalım.

$$\left.\begin{array}{l} 4,3 \text{ den önce gelir.} \\ 4,1 \text{ den önce gelir.} \\ 4,2 \text{ den önce gelir.} \\ 3,1 \text{ den önce gelir.} \\ 3,2 \text{ den önce gelir.} \end{array}\right\} 5 \text{ inversiyon} \Longrightarrow 4321 \text{ tektir.}$$

Örnek 5.7 S_3 deki bütün permütasyonlara bakalım:

$$\text{Çift permütasyonlar: } 123, 231, 312$$

$$\text{Tek permütasyonlar: } 132, 213, 321$$

Tanım 5.8 $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun. $\det(A)$ (veya $|A|$) şeklinde gösterilen <u>determinant</u> fonksiyonu şöyle tanımlanır:

$$\det(A) = \sum (\mp) a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

Burada toplam, $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ kümesindeki bütün $j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonları üzerinden alınır. Bu permütasyon çift ise işaret $(+)$; tek ise $(-)$ yazılır. Bu toplamda, $n!$ tane terim vardır.

Örnek 5.9 $A = [a_{11}]$ ise $\det(A) = a_{11}$ dir.

Örnek 5.10 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ olsun. $\det(A)$ yı bulmak için $a_{1\_}a_{2\_}$ terimlerindeki boşluklara (tire işaretlerine) S_2'deki permütasyonları yazarız. Bunlar 12 (çift) ve 21 (tektir). O halde

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ayrıca bu determinant şöyle de bulunur: Ana diyagonaldeki elemanların çarpımından diğer diyagonaldeki elemanların çarpımı çıkarılır:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{array}$$

Yani:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A)$$

Mesela; $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Longrightarrow \det(A) = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 22$

Örnek 5.11 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 3×3 matrisi verilsin. $|A|$ yı bulmak için 6 tane terimi yazalım:

$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_} \quad a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$$

Daha sonra S_3 deki 6 permütasyon tire işaretlerinin yerine yazılır. Permütasyon çift ise $+$; tek ise $-$ işareti verilir.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Sarrus Kuralı

Sadece 3×3 determinant hesaplamak için bir yöntem de Sarrus Kuralı olarak bilinir ve şöyle açıklanabilir: Matrisin $1.$ ve $2.$ kolonu sağ tarafa ekleyelim.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Daha sonra sol–üst taraftan sağ–alt tarafa doğru sayıları çarpalım ve $(+)$ işareti verelim. Sağ–üst taraftan sol–alt tarafa doğru sayıları çarpalım ve $(-)$ işareti verelim.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Böylece bu 3–lü sayıların çarpımından oluşan 6 ifadeyi toplayalım ve determinanı elde edelim:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Örnek 5.12 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$ olarak bulunur.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \Longrightarrow |A| = 2 + 18 + 6 - 9 - 3 - 8 = 6$$

Not 5.13 Eğer $j_1 j_2 \dots j_n$ permütasyonunda iki sayıyı yer değiştirirsek o zaman bu permütasyondaki inversiyonların sayısı ya bir tek sayı kadar artar veya bir tek sayı kadar azalır. (Mesela $\mathbf{5}$ artar veya $\mathbf{3}$ azalır.) Bu durumda permütaston çift ise tek; tek ise çift olur. Mesela $\mathbf{21354}$ permütasyonunda $\mathbf{2}$ tane inversiyon vardır. $\mathbf{1}$ ile $\mathbf{4}$ ü yer değiştirip $\mathbf{24351}$ permütasyonunu elde edelim. Bu permütasyonda $\mathbf{5}$ tane inversiyon vardır. İlk permütasyon çift; ikinci permütasyon tektir.

ALIŞTIRMALAR

1.) $A = [a_{ij}]$ 4×4 matris olsun. $\det(A)$ nın formülünü yazınız.

2.) a) $\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ 0 & t-2 & 2 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = ?$ **b)** $\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -2 & t & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = ?$

3.) Alıştırma $\mathbf{2}'$deki determinantların sıfır olması için t ne olmalıdır?

5.2 Determinantın Özellikleri

Teorem 5.14 $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun. $\det(A) = \det(A')$ dır

İspat: $A' = B = [b_{ij}]$ diyelim. $b_{ij} = a_{ji}$ olduğunu biliyoruz. Aslında $\det(B)$ nin açılımındaki her bir terim ($+$ ve $-$ işareti hariç); $\det(A)$ nın açılımındaki bir terime eşittir. Mesela; $n = 5$ için

$$b_{13}b_{24}b_{35}b_{41}b_{52} = a_{31}a_{42}a_{53}a_{14}a_{25} = a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53} \quad \text{gibi.}$$

Şimdi ilk terime ait permütasyon $\mathbf{34512}$ dir ve $\mathbf{6}$ tane inversiyon vardır. Son terime ait permütasyon $\mathbf{45123}$ dür ve yine $\mathbf{6}$ tane inversiyon vardır. Bu bir tesadüf değildir; aslında bu permütasyonların biri diğerinin "tersidir" ve Soyut Cebir derslerinde gösterilecektir ki "bir permütasyon tek ise tersi de tektir; çift ise tersi de çifttir". Bu yüzden bu iki terimin işaretleri aynıdır. O halde $\det(A) = \det(A')$ dir. $\square$

Örnek 5.15 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{matrix} \Longrightarrow |A'| = 2 + 6 + 18 - 9 - 3 - 8 = 6 \text{ bulunur.}$$

Teorem 5.16 Eğer B matrisi A matrisinin iki satırının (veya sütununun) yer değişmesi ile elde edilen matris ise $\det(B) = -\det(A)$ dır.
İspat: Farzedelim ki $r.$ ve $s.$ satırlar yer değişsin. O halde $j_1 j_2 \ldots j_s \ldots j_r \ldots j_n$ permütasyonu $j_1 j_2 \ldots j_r \ldots j_s \ldots j_n$ permütasyonundan iki sayının değişimi ile elde edilmiştir. Yani $\det(B)$ deki her terim $\det(A)$ daki terimin negatifidir. (Çünkü inversiyonların sayısı bir tek sayı kadar artmıştır veya azalmıştır.) $\Longrightarrow \det(B) = -\det(A)$ dır.

Şimdi de iki sütunun yer değiştiğini farz edelim. $\Longrightarrow B', A'$ den iki satırın yer değişmesi ile bulunur. $\Longrightarrow \det(B') = -\det(A')$ dür. Fakat $\det(B') = \det(B)$ ve $\det(A') = \det(A)$ olduğundan $\det(B) = -\det(A)$ elde edilir. □

Örnek 5.17 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$ ve $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$

Teorem 5.18 Eğer A nın iki satırı (sütunu) eşit ise $\det(A) = 0$ dır.
İspat: $r.$ ve $s.$ satırlar eşit olsun. Bu satırları yer değiştirip B matrisini elde edelim. $\Longrightarrow \det(B) = -\det(A)$ dır. Fakat $B = A$ dır. $\Longrightarrow \det(A) = 0$ bulunur. □

Örnek 5.19 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ dır.

Teorem 5.20 Eğer A nın bir satırı (sütunu) tamamen sıfır ise $\det(A) = 0$ dır.
İspat: A nın $i.$ satırının tamamen sıfır olduğunu farz edelim. Determinantın tanımında (Tanım 5.8) toplamdaki her bir terim $i.$ satırdan (sadece) bir terim ile çarpılmıştır. O zaman her bir terim sıfıra eşit olup bunların toplamı da sıfırdır (toplam sonlu olduğu için). Yani $\det(A) = 0$ olur. □

Örnek 5.21 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ dır.

Teorem 5.22 A nın bir satırını (sütununu) bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpıp B matrisini elde edelim. O zaman $\det(B) = c \det(A)$ dır.
İspat: Farzedelim ki A nın $i.$ satırı c ile çarpılsın. Determinantın tanımındaki toplamdaki her bir terim $i.$ satırdan sadece bir terim içerdiği için $\det(B) = c \cdot \det(A)$ olur. □

Örnek 5.23 $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6(4-1) = 18$

Örnek 5.24 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0$ ($1.$ ve $3.$ kolonlar eşit)

Teorem 5.25 Eğer $B = [b_{ij}]$ matrisi, $A = [a_{ij}]$ matrisinin bir satırına (sütununa), bir başka satırın (sütunun) c katının eklenmesi ile elde edilmiş ise $\det(B) = \det(A)$ dır.

İspat: (İspatı "satır" için yapalım) A matrisinin $s.$ satırının c katını $r.$ satıra eklediğimizi farz edelim. $i \neq r$ için $a_{ij} = b_{ij}$ dir ve $b_{rj} = a_{rj} + ca_{sj}$ olur. ($r \neq s$ ve $r < s$ olsun.) O zaman

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum(\mp) b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{rj_r} \dots b_{nj_n} \\
&= \sum(\mp) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (a_{rj_r} + ca_{sj_r}) \dots a_{nj_n} \\
&= \sum(\mp) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{rj_r} \dots a_{sj_s} \dots a_{nj_n} \qquad (5.1) \\
&\quad + \sum(\mp) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (ca_{sj_r}) \dots a_{sj_s} \dots a_{nj_n} \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Burada (5.1) ifadesi $\det(A)$ ya eşittir. Şimdi (5.2) ifadesine bakalım:

$$\sum(\mp) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{sj_r} \dots a_{sj_s} \dots a_{nj_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ & & \vdots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow r\text{–inci satır} \\ \\ \leftarrow s\text{–inci satır} \\ \\ \\ \end{array}$$

Bu determinantın değeri 0 dır; çünkü $r.$ satır ile $s.$ satır aynıdır. O halde $\det(B) = \det(A) + 0 = \det(A)$. □

Örnek 5.26 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ çünkü $1.$ satıra $2.$ satırın iki katı eklenmiş.

Teorem 5.27 Eğer $A = [a_{ij}]$ matrisi üst (alt) üçgensel ise $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ dir.

İspat: $A = [a_{ij}]$ üst üçgensel olsun. (yani $i > j$ ise $a_{ij} = 0$ olsun). O zaman $|A|$ nın formülündeki $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ sayısı $1 \leqslant j_1, 2 \leqslant j_2, \dots, n \leqslant j_n$ ise sıfırdan farklıdır. Şimdi $j_1j_2\dots j_n$ permütasyonu $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bir permütasyonu olduğundan bu terimdeki sayıların sıfır olmaması için $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_n = n$ olmalıdır. O halde $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ dir. (Alt üçgensel matris için benzer bir ispat yazılabilir.) □

Not: Bu sonucu; verilen bir determinantı hesaplamak için, matrisi üst üçgensel hale getirip determinantı daha kolay hesaplamak için kullanabiliriz.

Örnek 5.28 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{S_3 \longleftarrow \frac{S_3}{2}} 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{S_1 \longleftrightarrow S_3} (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{S_2 \longleftarrow -3S_1 + S_2}$

$$(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{S_3 \leftarrow -4S_1 + S_3} (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix} \xlongequal{S_2 \leftarrow \frac{S_2}{4}} (-2)(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{S_3 \leftarrow \frac{S_3}{5}} (-2)(4)(5)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{S_3 \leftarrow -\frac{S_2}{2} + S_3} (-2)(4)(5)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

olup son matris üst üçgensel olduğundan determinant: $(-2)(4)(5)(1)(-2)(-\frac{3}{2}) = -120$ bulunur.

Sonuç 5.29 $\det(I_n) = 1$ dir.

Sonuç 5.30 E_1, E_2 ve E_3 sırasıyla I., II. ve III. tipte elementer matrisler olsun. (E_1 : birim matriste iki satırın yer değiştirmesi; E_2 : birim matrisin bir satırının $c \neq 0$ ile çarpılması; E_3 : birim matrisin bir satırının bir c katının başka satıra eklenmesi ile elde edilen matrisler olsun.) Buna göre

$$\begin{aligned} \det(E_1) &= -\det(I_n) = -1 && \text{(Teorem 5.16'dan)} \\ \det(E_2) &= c\det(I_n) = c && \text{(Teorem 5.22'den)} \\ \det(E_3) &= \det(I_n) = 1 && \text{(Teorem 5.25'den)} \end{aligned}$$

(Yani bir elementer matrisin determinantı 0 olamaz.)

Lemma 5.31 E bir elementer matris ise $\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)$ ve $\det(AE) = \det(A) \cdot \det(E)$ dir.

İspat:

<u>E,I.tip ise</u>: $\det(EA) = -\det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$

<u>E,II.tip ise</u>: $\det(EA) = c \cdot \det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$

<u>E,III. tip ise</u>: $\det(EA) = \det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$

Ayrıca $B = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A$ ise

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(E_r)\det(E_{r-1}E_{r-2}\dots E_1 A) \\ &= \det(E_r)\det(E_{r-1})\det(E_{r-2}\dots E_2 E_1 A) \\ &\;\;\vdots \\ &= \det(E_r)\det(E_{r-1})\dots\det(E_2)\det(E_1)\det(A) \qquad \square \end{aligned}$$

Şimdi bir matrisin singüler olup olmaması ile determinatının ilişkisini gösteren önemli bir teoremi verelim:

Teorem 5.32 $\boldsymbol{A, n \times n}$ bir matris olsun.

$$\boxed{\boldsymbol{A} \text{ singüler değildir } \iff \ \mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}.}$$

İspat:($\Longrightarrow$) $\boldsymbol{A}$ singüler olmasın. $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ elementer matrislerin bir çarpımıdır. O zaman

$$\boldsymbol{A = E_1 E_2 \dots E_n \Longrightarrow \mathbf{det}(A) = \mathbf{det}(E_1)\,\mathbf{det}(E_2)\dots\mathbf{det}(E_k) \neq 0}$$

çünkü elementer bir matrisin determinantı **0** değildir.

İspat:($\Longleftarrow$) Şimdi, $\boldsymbol{A}$ singüler olsun. $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ matrisi bir satırı tamamen sıfır olan bir $\boldsymbol{B}$ matrisine satır eşdeğerdir. $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A = E_1 E_2 \cdots E_r B}$ şeklindedir. O zaman

$$\boldsymbol{\mathbf{det}(A) = \mathbf{det}(E_1)\cdots\mathbf{det}(E_r)\underbrace{\mathbf{det}(B)}_{=0} = 0}$$

Çünkü, Teorem 5.20′den, $\boldsymbol{\mathbf{det}(B) = 0}$. □

Sonuç 5.33 $\boldsymbol{A\ n \times n}$ matris olsun. $\boldsymbol{\mathbf{rank}A = n \iff \mathbf{det}(A) \neq 0}$
İspat: Sonuç 2.90 dan biliyoruz ki; $\boldsymbol{A}$ singüler değildir $\iff$ $\boldsymbol{\mathbf{rank}(A) = n}$

Sonuç 5.34 $\boldsymbol{A\ n \times n}$ matris olsun. $\boldsymbol{AX = 0}$′ın trivial olmayan bir çözümü vardır $\iff$ $\boldsymbol{\mathbf{det}(A) = 0}$.

Teorem 5.35 $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B\ n \times n}$ matrisler ise

$$\boxed{\boldsymbol{\mathbf{det}(AB) = \mathbf{det}(A)\cdot\mathbf{det}(B)}}$$

İspat: İspatı iki durumda inceleyeceğiz:

<u>$\boldsymbol{A}$ **singüler değil ise:**</u> $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I_n}$ nin satır eşdeğeridir $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I_n = E_k E_{k-1} \dots E_1}$ şeklindedir. ($\boldsymbol{E_i}$ ´ler elementer matris). Bu durumda $\boldsymbol{\mathbf{det}(A) = \mathbf{det}(E_k)\cdots\mathbf{det}(E_1)}$ olup

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathbf{det}(AB)} &\boldsymbol{= \mathbf{det}(E_k E_{k-1}\cdots E_1 B)} \\ &\boldsymbol{= \mathbf{det}(E_k)\cdots\mathbf{det}(E_1)\,\mathbf{det}(B)} \\ &\boldsymbol{= \mathbf{det}(A)\cdot\mathbf{det}(B)}\end{aligned}$$

elde edilir.

<u>$\boldsymbol{A}$ **singüler ise:**</u> Teorem 5.32´den $\boldsymbol{\mathbf{det}(A) = 0}$ dır. Ayrıca $\boldsymbol{A}$ matrisi bir satırı tamamen sıfır olan bir $\boldsymbol{C}$ matrisine satır eşdeğerdir. O halde

$$\boldsymbol{C = E_k E_{k-1}\dots E_2 E_1 A \Longrightarrow CB = E_k \dots E_1 AB}$$

olup $\boldsymbol{AB}$ ile $\boldsymbol{CB}$ satır eşdeğerdir. Şimdi $\boldsymbol{CB}$ nin de bir satırı tamamen sıfır olduğundan $\boldsymbol{AB}$ singülerdir. Teorem 5.32´den $\boldsymbol{\mathbf{det}(AB) = 0}$ dır. Böylece $\boldsymbol{\mathbf{det}(AB) = \mathbf{det}(A)\cdot\mathbf{det}(B)}$ formülü elde edilir. □

Örnek 5.36 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. $|A| = -2$ ve $|B| = 5$ dir. $AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ olup $|AB| = -10$ dur.

Not 5.37 Teorem 5.35'den, A singüler değil ise,

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}}$$

formülü elde edilir. ($B = A^{-1}$ alınırsa).

Not 5.38 Genelde $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ dir. Fakat; eğer A, B ve C nin sadece bir satırı hariç (mesela $k.$ satırı hariç) diğer bütün satırlar eşitse ve

(C'nin k. satırı)= (A'nın k. satırı) + (B nin k. satırı)

şeklinde bir bağıntı var ise o zaman $\det(C) = \det(A) + \det(B)$ dir.

Örnek 5.39 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

$|A| = 8$, $|B| = -9$ ve $|C| = -1$ olup $|C| = |A| + |B|$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1.) Aşağıdaki determinantları hesaplayınız.

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **(c)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

2.) (a) $A = A^{-1}$ ise $\det(A) = \mp 1$ olduğunu gösterin.

(b) $A' = A^{-1}$ ise $\det(A)$ nedir?

3.) $A^2 = A$ olsun. A nın singüler olduğunu veya $\det(A) = 1$ olduğunu gösteriniz.

5.3 Kofaktör Açılımı

Tanım 5.40 $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun. M_{ij} de A nın $i.$ satırı ile $j.$ kolonunun çıkarılması ile elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki alt matris olsun . $\det(M_{ij})$ determinantına a_{ij}nin minörü denir.

Tanım 5.41 $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun. a_{ij} nin A_{ij} kofaktörü

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 5.42 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. Bazı minör ve kofaktörleri hesaplayalım:

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -34, |M_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 10, |M_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -16$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = 34, A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -10, A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = -16.$$

Şimdi, bir matrisin determinantını kofaktörler cinsinden veren teoremi verelim:

Teorem 5.43 $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun. O zaman

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i.\ \text{satıra göre kofaktör açılımı})$$
$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j.\ \text{sütuna göre kofaktör açılımı})$$

Örnek 5.44 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayalım.

Çözüm: $3.$ satıra veya $2.$ sütuna göre açmak daha kolaydır, çünkü bunlar 2 tane sıfır bulundururlar. Mesela; $3.$ satıra göre açalım.

$$|A| = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot (20) + 0 + 0 + 3 \cdot (-4) = 48$$

bulunur. (3×3 determinantlar Sarrus kuralı ile veya kofaktör açılımı ile hesaplanabilir.)

Örnek 5.45 Aşağıdaki determinantı kolay hesaplamak için $(3,4)$–üncü sayı 0 yapılmıştır. Bunun için 1. kolonun uygun bir katı son kolona eklenir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{K_4 \longleftarrow 3K_1 + K_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -4 & 2 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{S_1 \longleftarrow S_1 - S_2} \begin{vmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 2(-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 16 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = (-2)(-36+32) = 8 \text{ bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ise A_{12}=? , A_{23}=? , A_{33}=? , A_{41}=?

2.) $\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -2 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = 0$ denklemini çözünüz.

5.4 Bir Matrisin Tersi

Teorem 5.46 $A = [a_{ij}]$ $n \times$n bir matris ise

$$\begin{aligned} i \neq k \text{ için: } \quad & a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \\ j \neq k \text{ için: } \quad & a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \end{aligned}$$

dır. (Yani bir satıra göre elemanlar ile diğer satıra göre kofaktörlerin çarpımlarının toplamı sıfırdır. Ayrıca bir sütuna göre elemanlar ile diğer sütuna göre kofaktörlerin çarpımlarının toplamı da sıfırdır.)

Örnek 5.47 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. $\mathbf{2}$. satıra göre bütün kofaktörleri hesaplayalım:

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 19,\ A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14,\ A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

Şimdi bu kofaktörleri $\mathbf{1.}$ satırdan (ve sonra $\mathbf{3.}$ satırdan) karşılıklı sayılarla çarpıp toplayalım:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 19 + 2 \cdot (-14) + 3 \cdot 3 = 0$$
$$a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 4 \cdot 19 + 5 \cdot (-14) + (-2) \cdot 3 = 0$$

Özet olarak şunu yazabiliriz:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det(A), & i = k \text{ ise} \\ 0, & i \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} \det(A), & j = k \text{ ise} \\ 0, & j \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

Tanım 5.48 $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ matris olsun. (i, j). elemanı a_{ji} nin kofaktörü A_{ji} olan matrise A'nın ek matrisi (adjoint matrisi) denir ve $\text{ek}(A)$ veya $\text{adj}(A)$ şeklinde gösterilir. Yani:

$$\text{ek}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Örnek 5.49 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ olsun. A nın kofaktörleri:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -18, & A_{12} &= 17, & A_{13} &= -6, \\ A_{21} &= -6, & A_{22} &= -10, & A_{23} &= -2, \\ A_{31} &= -10, & A_{32} &= -1, & A_{33} &= 28 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ek matris:

$$\text{ek}(A) = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

Teorem 5.50 $A = [a_{ij}], n \times n$ matris ise $A \cdot \text{ek}(A) = \text{ek}(A) \cdot A = |A| I_n$ dir.

İspat: Matris çarpımının tanımından biliyoruz ki; A matrisinin $i.$ satırı ile $\text{ek}(A)$ matrisinin $j.$ sütunundaki elemanlar karşılıklı çarpılıp toplanırsa $A \cdot \text{ek}(A)$ matrisinin $(i, j).$ elemanı elde edilir. Aşağıda görüldüğü gibi,

$$A \cdot \text{ek}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

aslında bu sayı ya 0 dır; ya da $\det(A)$ dır. Çünkü

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det(A), & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

O halde

$$A \cdot \text{ek}(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = \det(A) I_n$$

elde edilir. Benzer şekilde $\text{ek}(A) \cdot A = \det(A) I_n$ bulunur. □

Örnek 5.51 Örnek 5.49'daki matrise bakalım.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{bmatrix} = -94 I_3$$

olup $|A| = -94$ olduğu görülür.

Sonuç 5.52 $A, n \times n$ matris ve $|A| \neq 0$ ise

$$A^{-1} = \frac{\text{ek}(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Örnek 5.53 Örnek 5.49′daki matrisi düşünelim. $|A| = -94$ olup

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{ek}(A) = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}.$$

ALIŞTIRMALAR

1.) Sonuç 5.52 deki yöntemi kullanarak $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

5.5 Determinantın Diğer Uygulamaları

Cramer Kuralı

$n \times n$ tipinde $AX = B$ lineer denklem sistemi verilsin.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

$\det(A) \neq 0$ ise bu sistemin tek çözümü vardır ve

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

dir. Burada A_i matrisi A matrisinin $i.$ kolonuna B matrisi yazılması ile elde edilen matristir.

Örnek 5.54 $\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{array} \right\}$ denklem sistemi verilsin. Öncelikle

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

bulunur. Daha sonra x_1, x_2 ve x_3 şöyle hesaplanır:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Teorem 5.55 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ $\mathbb{R}^n$ de (veya $\mathbb{R}_n$ de) n–tane vektör olsun. A matrisi de kolonları (veya satırları) S nin elemanları olan matris olsun.

$$\boxed{S \text{ lineer bağımsızdır} \iff \det(A) \neq 0}$$

Örnek 5.56 $S = \{ [1\ \ 2\ \ 3], [0\ \ 1\ \ 2], [3\ \ 0\ \ -1] \}$ olsun. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve $|A| = 2$ olup S lineer bağımsızdır.

Örnek 5.57 $S = \left\{ t^2 + t, t + 1, t - 1 \right\}$ kümesi P_2 için bir baz mıdır?

Çözüm: P_2 uzayı ile $\mathbb{R}^3$ izomorfiktir. $L : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, L(at^2 + bt + c) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ fonksiyonu bir izomorfizmadır. O zaman; S kümesinin P_2 için bir baz olması için gerek ve yeter şart $T = \left\{ L(t^2 + t), L(t + 1), L(t - 1) \right\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ için bir baz olmasıdır. Şimdi

$$L(t^2 + t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L(t + 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L(t - 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olup Teorem 5.55 kullanılırsa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } |A| = -2$$

olup T lineer bağımsızdır. $\Longrightarrow$ S lineer bağımsızdır. $\mathbf{boy}(P_2) = 3$ olduğundan S bir bazdır. (Çünkü 3 boyutlu bir uzayda 3 elemanlı lineer bağımsız bir küme aynı zamanda bazdır. Bkz. Sonuç 2.54)

ÖZET: $A, n \times n$ matris olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$

2. $\boldsymbol{A}$ singüler değildir.

3. $\boldsymbol{A}$ nın satırları (sütunları) lineer bağımsızdır.

4. $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ homojen sisteminin sadece trivial çözümü vardır.

5. $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}$

6

Özdeğerler ve Özvektörler

V, n–boyutlu bir vektör uzayı ve $L : V \longrightarrow V$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda L dönüşümü V'deki her α vektörünü yine V'deki bir $L(\alpha)$ vektörüne dönüştürür. Burada; $L(\alpha)$ nın, α'nın bir katı olup olamayacağı problemi ortaya çıkar. Yani $L(\alpha) = c\alpha$ olacak şekilde c sayıları ve α vektörleri var mıdır? Eğer $\alpha = \theta$ ise $L(\theta) = \theta = c\theta$ olup her c sayısı için eşitlik sağlanır; dolayısıyla böyle bir durumda problem ilginç değildir.

Tanım 6.1 V, n–boyutlu vektör uzayı ve $L : V \longrightarrow V$ bir lineer operatör olsun. Eğer $L(\alpha) = c\alpha$ olacak şekilde $\theta \neq \alpha \in V$ vektörü varsa c'ye L nin bir özdeğeri denir. Bu eşitliği sağlayan her $\theta \neq \alpha$ vektörüne L'nin c'ye karşılık gelen bir özvektörü denir. (özvektör ve özdeğer yerine bazen karakteristik vektör ve karakteristik değer de kullanılır.)

Not 6.2 $\alpha = \theta_V$ bu eşitliği her zaman sağlar fakat bir özvektör değildir. (Çünkü tanıma göre $\alpha \neq \theta_V$ olmalıdır).

Not 6.3 Burada c'nin reel sayı olması gerekir (Kompleks sayı olan özdeğerler de vardır.)

Örnek 6.4 $L : V \longrightarrow V, L(\alpha) = 2\alpha$ olsun. L'nin tek özdeğeri $c = 2$ dir. Ayrıca sıfır olmayan her α vektörü bu özdeğere karşılık gelen bir özvektördür.

Örnek 6.5 $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ olsun.

$L\left(\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ olup $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ $(a \neq 0)$ şeklinde vektörler $c_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerdir.

Ayrıca $L\left(\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$ olup $\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$ $(a \neq 0)$ şeklinde vektörler $c_2 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörledir.

Not 6.6 Bir c özdeğerine karşılık gelen çok sayıda özvektör olabilir. Aslında, α bir c özdeğerine karşılık gelen bir özvektör ise; yani $L(\alpha) = c\alpha$ ise; her $0 \neq r$ sayısı için $r\alpha$ da bir özvektördür. Çünkü

$$L(r\alpha) = r \cdot L(\alpha) = r \cdot (c\alpha) = c \cdot (r\alpha).$$

Örnek 6.7 $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ saatin ters yönünde 90°'lik rotasyon (döndürme) olsun. L'nin bir c katına dönüştürdüğü tek vektör sıfır vektörüdür. O halde L' nin özdeğeri ve özvektörü yoktur.

Örnek 6.8 $L : \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_2, L([a_1, a_2]) = [0, a_2]$ olsun. $L([a, 0]) = 0 \cdot [a, 0]$ olup $[a, 0]$ şeklindeki bir vektör $(a \neq 0)$, $c_1 = 0$ özdeğerine karşılık gelen bir vektördür. Ayrıca $L[(0, a)] = 1 \cdot [0, a]$ olup $[0, a]$ şeklindeki bir vektör $(a \neq 0)$, $c_2 = 1$ özdeğerine karşılık gelen bir vektördür.

Örnek 6.9 V, reel değerli türevlenebilir fonksiyonların uzayı olsun. $L : V \longrightarrow V, L(f) = f'$ olarak tanımlayalım. Özdeğer ve özvektör tanımına göre; $L(f) = cf$; yani $f' = cf$, $(f \neq 0)$ olacak şekilde c sayısı ve f fonksiyonu arıyoruz. (Yani türevi kendisinin c katı olan fonksiyonlar arıyoruz.) Aslında, $y = f(x)$ yazarsak, $\dfrac{dy}{dx} = c \cdot y$ diferansiyel denklemini çözeceğiz. Bunun çözümü $f(x) = Ke^{cx}$ (K : sabit) fonksiyonlar ailesidir.

Not: $L : V \longrightarrow V$ lineer dönüşüm ve $\text{boy}(V) = n$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ V' nin bir sıralı bazı ise L' yi S' ye göre temsil eden bir A, $n \times n$ matrisi vardır. Bir c özdeğerini ve bu özdeğere karşılık bir özvektörleri bulmak için $L(\alpha) = c\alpha$ eşitliğini çözeriz. Teorem 4.37'ye göre bu denklem $A[\alpha]_S = c[\alpha]_S$ denklemine denktir.

Örnek 6.10 $L : P_2 \longrightarrow P_2, L(at^2 + bt + c) = ct^2 + bt + a$ olsun. $S = \{1 - t, 1 + t, t^2\}$ ve $T = \{1, t, t^2\}$ bazlar verilsin. L'yi S'ye göre temsil eden A matrisini bulalım.

$$L(1 - t) = t^2 - t = \frac{1}{2}(1 - t) - \frac{1}{2}(1 + t) + t^2 \Longrightarrow [L(1 - t)]_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(1 + t) = t^2 + t = -\frac{1}{2}(1 - t) + \frac{1}{2}(1 + t) + t^2 \Longrightarrow [L(1 + t)]_S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(t^2) = 1 = \frac{1}{2}(1 - t) + \frac{1}{2}(1 + t) \Longrightarrow [L(t^2)]_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup istenen matris:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Böylece özdeğer bulma problemi $A\alpha = k\alpha$ $(k \in \mathbb{R})$ denklemi ile çözülür. L' nin T' ye göre temsili $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. (Kontrol ediniz.) Buna karşılık gelen özdeğer bulma problemi $B\alpha = k\alpha$ denklemiyle çözülür.

Tanım 6.11 $A, n \times n$ matris olsun. $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, L(\alpha) = A\alpha$ şeklinde verilsin. $\theta \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $A\alpha = c\alpha$ ise c'ye A matrisinin bir özdeğeri ve α'ya da bu özdeğere karşılık gelen bir özvektör denir. (**Dikkat:** Burada bir "matrisin özdeğeri" (bir lineer dönüşümün özdeğeri değil) tanımlanmaktadır.)

Örnek 6.12 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. A'nın özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen özvektörleri bulalım. $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$A\alpha = c\alpha \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_1 + a_2 = ca_1 \\ -2a_1 + 4a_2 = ca_2 \end{array} \right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan

$$\begin{array}{c} (c-1)a_1 - a_2 = 0 \\ 2a_1 + (c-4)a_2 = 0 \end{array}$$

homojen sistemi bulunur. Bu homojen sistemin trivial olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart katsayılar matrisinin determinantının 0 olmasıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} c-1 & -1 \\ 2 & c-4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (c-1)(c-4) + 2 = 0 \Longrightarrow c^2 - 5c + 6 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 2 \\ \text{veya} \\ c = 3 \end{array} \right\}$$

$c = 2$ için: Denklem sisteminde $c = 2$ yazalım:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_1 - a_2 & = & 0 \\ 2a_1 - 2a_2 & = & 0 \end{array} \right\} \text{çözümü} \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_2 \\ a_2 & = & r \end{array} \right\} (\, r \in \mathbb{R}).$$

$c = 2$ ye karşılık gelen özvektörler: $\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}, 0 \neq r \in \mathbb{R}$, örneğin $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$c = 3$ için: Denklem sisteminde $c = 3$ yazalım:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2a_1 - a_2 & = & 0 \\ 2a_1 - 2a_2 & = & 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & \frac{a_2}{2} \\ a_2 & = & r \end{array} \right\} (r : \text{reel sayı})$$

$c = 3$'e karşılık gelen özvektörler: $\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \\ r \end{bmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq 0)$, örneğin $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Tanım 6.13 $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ matris olsun. $|tI_n - A|$ determinantına A nın <u>karakteristik polinomu</u> denir. (t cinsindendir.) $\det(tI_n - A) = 0$ denklemine de A nın <u>karakteristik denklemi</u> denir.

Örnek 6.14 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ olsun. A nın karakteristik polinomu

$$f(t) = \det(t \cdot I_3 - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ -4 & 4 & t-5 \end{vmatrix} = t^3 - 6t^2 + 11t - 6. \text{ (Kontrol edin.)}$$

Teorem 6.15 A, $n \times n$ matris olsun. A nın özdeğerleri, A nın karakteristik polinomunun gerçel kökleridir.

İspat: Önce bir özdeğerin, karakteristik polinomun bir kökü olduğunu gösterelim. $\theta \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$ vektörü, bir $c \in \mathbb{R}$ özdeğerine karşılık gelen bir öz vektör olsun. O halde

$$A\alpha = c\alpha \Longrightarrow A\alpha = (cI_n)\alpha \Longrightarrow (cI_n - A)\alpha = \theta$$

Bu son denklem, n bilinmeyenli n denklemli bir homojen sistemdir. Trivial olmayan çözüm (yani α) olması için gerek ve yeter şart $\det(cI_n - A) = 0$ olmasıdır. O halde c sayısı karakteristik polinomun bir köküdür.

Karakteristik polinomunun bir kökünün, bir özdeğer olduğu kolayca gösterilebilir. □

Bir Matrisin Özdeğerlerinin Bulunması

Bir A, $n \times n$ kare matrisin özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen özvektörleri bulmak için aşağıdaki iki adım izlenir:

ADIM 1: $f(t) = |tI_n - A|$ karakteristik polinomunun (reel) kökleri bulunur.

ADIM 2: Her bir c özdeğeri için $(cI_n - A)\alpha = \theta$ homojen sisteminin trivial olmayan çözümleri bulunur. Bunlar A'nın c'ye karşılık gelen özvektörleridir.

<u>Karakteristik polinom $f(t)$ nin reel köklerini bulurken bazı ipuçları:</u>

İpucu 1.) $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ polinomunun bütün köklerinin çarpımı $(-1)^n a_0$ dır. (**Dikkat:** Polinomun baş katsayısı 1 olmalıdır.)

İpucu 2.) Eğer $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ birer tamsayı ise, $f(t)$'nin tamsayı olmayan bir rasyonel kökü yoktur.

Örnek 6.16 Örnek 6.14'deki matrisin karakteristik polinomu $f(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$ olarak bulunmuştu. $(-1)^n a_0 = 6$ olup köklerin çarpımı 6 dır. 6 nın bölenleri: $\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 6$. Buradan $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3$ bulunur. (Kontrol edin.) Yani $f(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$ dir. Özdeğerler de $1, 2$ ve 3 dür.

$c_1 = 1$ için

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ a \end{bmatrix} \text{ } (a \neq 0) \text{ özvektörlerdir.}$$

$c_2 = 2$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha_2 = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{4} \\ a \end{bmatrix} \text{ } (a \neq 0) \text{ özvektörlerdir.}$$

$c_3 = 3$ için

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha_3 = \begin{bmatrix} -\frac{a}{4} \\ \frac{a}{4} \\ a \end{bmatrix} \text{ } (a \neq 0) \text{ özvektörlerdir.}$$

Örnek 6.17 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

olup hiç reel kök yoktur. A nın hiç (reel) özdeğeri yoktur.

Teorem 6.18 (Cayley–Hamilton) Her matris kendi karakteristik polinomunun köküdür. Yani $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0)$ ise o zaman $f(A) = 0$ dır; yani

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n.$$

Örnek 6.19 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ olsun. Karakteristik polinom:

$$f(t) = |tI_2 - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -5 & t-7 \end{vmatrix} = (t-1)(t-7) - 15 \Longrightarrow f(t) = t^2 - 8t - 8$$

bulunur. Şimdi

$$\begin{aligned} f(A) = A^2 - 8A - 8I_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^2 - 8\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 40 & 64 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 40 & 56 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten A^{-1} şu şekilde hesaplanabilir:

$$A^2 - 8A - 8I_2 = 0 \Longrightarrow A(A - 8I_2) = 8I_2 \Longrightarrow A^{-1}A(A - 8I_2 = 8A^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 8I_2) \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Not: Genel olarak $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0$ polinomu bir A $n \times n$ matrisinin karakteristik polinomu ise

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I_n\right)}$$

formülü yazılabilir.

Örnek 6.20 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu, özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen özvektörleri bulunuz. Cayley–Hamilton teoremini kullanarak A^{-1} i hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \det(tI_n - A) = \det\left(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} t-3 & -5 \\ -2 & t-7 \end{bmatrix}\right) \\ = (t-3)(t-7) - 10 = t^2 - 10t + 11 = 0. \end{aligned}$$

Karakteristik denklemin kökleri:

$$t_{12} = \frac{10 \mp \sqrt{56}}{2} = 5 \mp \sqrt{14} \Longrightarrow c_1 = 5 + \sqrt{14}, \quad c_2 = 5 - \sqrt{14}$$

bulunur. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler:

<u>$c_1 = 5 + \sqrt{14}$ için:</u>

$$\begin{bmatrix} 5 + \sqrt{14} - 3 & -5 \\ -2 & 5 + \sqrt{14} - 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} (2 + \sqrt{14})a_1 - 5a_2 &= 0 \\ -2a_1 + (-2 + \sqrt{14})a_2 &= 0 \end{array}\right\}$$

denklem sistemi çözülür. Burada 1. denklemin $-2/(2+\sqrt{14})$ katının 2.denkleme eşit olduğu görülür. O halde; c_1'e karşılık gelen özvektörler:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \left(\frac{2+\sqrt{14}}{5}\right) a_1 \end{bmatrix} \quad (a_1 \neq 0)$$

$c_2 = 5 - \sqrt{14}$ için

$$\begin{bmatrix} 5-\sqrt{14}-3 & -5 \\ -2 & 5-\sqrt{14}-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} (2-\sqrt{14})a_1 - 5a_2 & = & 0 \\ -2a_1 + (-2-\sqrt{14})a_2 & = & 0 \end{array} \right\}$$

denklem sistemi çözülür. Burada 1. denklemin $-2/(2-\sqrt{14})$ katının 2.denkleme eşit olduğu görülür. O halde; c_2'ye karşılık gelen özvektörler:

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{2-\sqrt{14}}\right) a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (a_2 \neq 0)$$

bulunur. (Tabii ki; özvektörleri a_1 veya a_2 cinsinden yazabiliriz.)

Şimdi A matrisinin tersini Cayley–Hamilton yöntemi ile bulalım:

$$\begin{aligned} f(t) = t^2 - 10t + 11 &\Longrightarrow A^2 - 10A + 11I_2 = 0_2 \text{ olmalıdır.} \\ &\Longrightarrow A^2 - 10A = -11I_2 \\ &\Longrightarrow A(A - 10I_2) = -11I_2 \\ &\Longrightarrow \text{ soldan } A^{-1} \text{ ile çarparsak: } A - 10I_2 = -11A^{-1} \\ &\Longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{11}(A - 10I_2) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3-10 & 5 \\ 2 & 7-10 \end{bmatrix} \\ &\Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Kaynakça

[1] **Elementary Linear Algebra**, Bernard Kolman, MacMillan Publishing Company, Fourth Edition, 1986.

[2] **Uygulamalı Lineer Cebir (7. Baskıdan Çeviri)**, Bernard Kolman, David R. Hill, (Çeviri editörü: Prof.Dr. Ömer Akın), Palme Yayıncılık, 2002.