УДК 517
ББК 22.161.1
К88

Кудрявцев Л. Д. **Краткий курс математического анализа. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ**: Учебник. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 424 с. — ISBN 5-9221-0185-4.

Излагаются традиционные разделы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных, гармонический анализ. В конце тома помещен краткий исторический очерк развития понятий математического анализа. Нумерация параграфов и рисунков продолжает нумерацию первого тома.

Второе издание — 1998 г.

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей.

Ил. 88.

Рецензенты:
заведующий кафедрой общей математики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, академик *В.А. Ильин*;
профессор МФТИ, академик *С.М. Никольский*.

Учебное издание

КУДРЯВЦЕВ Лев Дмитриевич

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Корректор *Л.Т. Варьяш*
Иллюстрации *А.А. Логунова*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*
Оригинал-макет *Н.Л. Ивановой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 15.12.04.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 29,7. Заказ №

Издательская фирма “Физико-математическая литература”
МАИК “Наука/Интерпериодика”
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru; http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

ISBN 5-9221-0185-4

9 785922 101851

ISBN 5-9221-0185-4 (Т. 2)
ISBN 5-9221-0183-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА 5

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 33. Многомерные пространства.

33.1. Определение n-мерного пространства. Если на плоскости R^2 фиксирована прямоугольная система координат, то между точками плоскости и всевозможными парами чисел (x, y) (x и y — координаты точек) существует взаимно однозначное соответствие. Если в пространстве задана аналогичная система координат, то между точками пространства и их координатами — всевозможными тройками (x, y, z) — также существует взаимно однозначное соответствие. С помощью координат точек на плоскости, используя теорему Пифагора, можно выразить расстояние ρ между двумя точками $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ формулой

$$\rho = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (33.1)$$

В пространстве R^3 формула для расстояния ρ между точками $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ имеет аналогичный вид:

$$\rho = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \qquad (33.2)$$

Пары (x, y) и тройки (x, y, z) чисел можно рассматривать также и как координаты векторов на плоскости и в пространстве. Как известно, различные операции над векторами можно описывать в терминах их координат. Например, координаты линейной комбинации $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, x_2)$ являются соответствующими линейными комбинациями координат данных векторов:

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = (\lambda x_1 + \mu x_2,\ \lambda y_1 + \mu y_2,\ \lambda z_1 + \mu z_2), \qquad (33.3)$$

в частности,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2), \qquad (33.4)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2). \qquad (33.5)$$

Скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается через их координаты следующим образом:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2), \qquad (33.6)$$

а для длины $|\mathbf{a}|$ вектора $\mathbf{a}$ имеет место формула

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \qquad (33.7)$$

Из (33.7) видно, что расстояние (33.2) между точками $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ есть не что иное, как длина вектор **a** с началом в одной из этих точек и концом в другой, т. е. длина разности (33.5) векторов $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|. \tag{33.8}$$

Нам понадобится понятие n-мерного пространства (n — натуральное число), элементами x которого являются упорядоченные множества n действительных чисел

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_k \in R, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Эти элементы по аналогии с обычным пространством можно рассматривать и как точки, и как векторы (n-мерного пространства). В первом случае для них определяется понятие расстояния, во втором — соответствующие векторные операции.

Линейная комбинация с коэффициентами λ и μ двух элементов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ по аналогии с формулой (33.3) определяется равенством

$$\lambda x + \mu y \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1 + \mu y_1,\ \lambda x_2 + \mu y_2,\ ...,\ \lambda x_n + \mu y_n). \tag{33.9}$$

В частности,

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...,\ x_n + y_n), \tag{33.10}$$

$$x - y = (x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ ...,\ x_n - y_n), \tag{33.11}$$

$$\lambda x = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ ...,\ \lambda x_n). \tag{33.12}$$

Скалярное произведение элементов x и y определяется равенством

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n. \tag{33.13}$$

Подчеркнем, что в случае $n = 1, 2, 3$ формулы (33.9) и (33.13) доказываются с помощью свойств геометрии трехмерного пространства, а в случае $n > 3$ они принимаются за определение.

Определение 1. Множество всех упорядоченных систем $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n действительных чисел, для которых определены линейные комбинации (33.9) и скалярное произведение (33.13), называется *n-мерным арифметическим евклидовым векторным пространством* и обозначается R^n. Его элементы $x = (x_1, ..., x_n)$ называются *векторами*, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — их *координатами*.

Отметим, что для простоты записи векторы в n-мерном пространстве при произвольном n обычно обозначаются светлым шрифтом.

Вектор $0 = (0, 0, ..., 0)$ называется *нулевым вектором.*

Для любого вектора x вектор $-x \stackrel{\text{def}}{=} (-1)x$ называется *противоположным* вектору x. Очевидно, что $x + (-x) = 0$.

Скалярное произведение (33.13) векторов пространства R^n имеет следующие свойства.

1°. *Симметричность*: $(x, y) = (y, x)$.
2°. *Линейность*: $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.
3°. $(x, x) \geqslant 0$.
4°. *Если* $(x, x) = 0$, *то* $x = 0$.

Все это верно для любых $x \in R^n$, $y \in R^n$, $z \in R^n$ и $\lambda \in R$, $\mu \in R$. Свойства 1°–4° непосредственно следуют из определения (33.13).

Длина $|x|$ вектора x пространства R^n по аналогии с формулой (33.7) определяется равенством

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)}, \tag{33.14}$$

следовательно,

$$|x| \underset{(33.13)}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{33.15}$$

Очевидно, что длина $|x|$ вектора x равна нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Длина вектора обладает тем свойством, что для любого числа λ имеет место равенство

$$|\lambda x| = |\lambda||x|. \tag{33.16}$$

В частности, $|-x| = |x|$

Лемма 1. *Для скалярного произведения векторов* $x \in R^n$ *и* $y \in R^n$ *справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|. \tag{33.17}$$

Это неравенство называется *неравенством Коши–Шварца**).

$\triangleright$ Если $x = 0$, то неравенство (33.17) очевидно, так как обе части обращаются в нуль.

Пусть $x \neq 0$. Для любого $t \in R$ согласно свойству 3° скалярного произведения выполняется неравенство

$$(tx + y,\ tx + y) \geqslant 0. \tag{33.18}$$

С другой стороны, в силу 1° и 2°

$$(tx + y,\ tx + y) = (x, x)t^2 + 2t(x, y) + (y, y), \tag{33.19}$$

поэтому

$$(x, x)t^2 + 2t(x, y) + (y, y) \underset{(33.18),(33.19)}{\geqslant} 0,$$

где из условия $x \neq 0$ согласно свойству 4° имеем $(x, x) \neq 0$. Но если квадратный трехчлен неотрицателен, то его дискриминант неположителен:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

а это неравенство равносильно неравенству (33.17). $\triangleleft$

*) Г. Шварц (1843–1921) — немецкий математик.

С л е д с т в и е 1. *Для любых векторов $x \in R^n$ и $y \in R^n$ выполняется неравенство*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{33.20}$$

$\rhd$ Действительно,

$$|x+y| \underset{(33.14)}{=} \sqrt{(x+y, x+y)} \underset{1^\circ, 2^\circ}{=} \sqrt{(x,x) + 2(x,y) + (y,y)} \underset{(33.14),(33.17)}{\leqslant}$$

$$\underset{(33.14),(33.17)}{\leqslant} \sqrt{|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2} \leqslant \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x| + |y|. \lhd$$

В координатной записи неравенства (33.17) и (33.20) имеют вид

$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

С л е д с т в и е 2. *Для любых векторов $x \in R^n$ и $y \in R^n$ выполняется неравенство*

$$||x| - |y|| \leqslant |x-y|. \tag{33.21}$$

$\rhd$ Это неравенство является непосредственным следствием неравенства (33.20). В самом деле,

$$|x| = |x-y+y| \underset{(33.20)}{\leqslant} |x-y| + |y|,$$

поэтому $|x| - |y| \leqslant |x-y|$. Аналогично, $|y| - |x| \leqslant |y-x| = |x-y|$. Из двух последних неравенств и следует неравенство (33.21). $\lhd$

Два вектора, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*. Ненулевые ортогональные векторы называются *перпендикулярными*.

Если вектор e_i имеет все координаты равными нулю, кроме i-й, которая равна единице, то множество векторов $x = e_i t$, $-\infty < t < +\infty$, называется *i-й координатной осью арифметического векторного пространства*, $i = 1, 2, ..., n$, а упорядоченное множество векторов $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — *каноническим базисом* этого пространства.

Векторы канонического базиса ортогональны друг другу, и длины их равны единице.

Всякое упорядоченное множество n единичных векторов e'_i, $i = 1, 2, ..., n$ (т. е. длины которых равны единице), попарно ортогональны друг другу:

$$|e_i| = 1, \quad (e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

называется *базисом пространства* или, более полно, *ортонормированным базисом*.

Из линейной алгебры известно, что каждый вектор раскладывается, и при этом единственным образом, в линейную комбинацию векторов базиса. Коэффициенты этого разложения называются *координатами вектора относительно данного базиса.* Поэтому переход от одного базиса к другому называется *переходом от одной системы координат к другой.*

Из линейной алгебры известно также, что векторы любого ортонормированного базиса $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ выражаются через векторы другого такого базиса $\{e''_1, e''_2, ..., e''_n\}$ (в частности, через векторы канонического базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$):

$$e'_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e''_j, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

с помощью матрицы $C = (c_{ij})$, $i,j = 1, 2, ..., n$, у которой обратная матрица C^{-1} совпадает с транспонированной C^*:

$$C^{-1} = C^*.$$

Такие матрицы называются *ортогональными.*

Верно и обратное утверждение: если упорядоченная система векторов выражается через некоторый ортонормированный базис с помощью ортогональной матрицы, то эта система также является ортонормированным базисом.

Если $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ — базис, то множество векторов $x = e'_i t$, $-\infty < t < +\infty$, называется i-й координатной осью для рассматриваемого базиса, $i = 1, 2, ..., n$.

Для элементов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ можно ввести по аналогии с формулой (33.8) понятие расстояния $\rho(x, y)$ между ними:

$$\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x - y|. \tag{33.22}$$

Используя формулы (33.11) и (33.15), расстояние $\rho(x, y)$ можно записать в виде

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}, \tag{33.23}$$

откуда следует, что расстояние, определенное посредством формулы (33.22), в случае $n = 1, 2, 3$ (см. формулы (33.1) и (33.2)) совпадает с обычным расстоянием между точками.

Определение 2. Множество всех упорядоченных систем $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n действительных чисел, для которых определено по формуле (33.23) расстояние, называется *n-мерным арифметическим евклидовым точечным пространством* и также обозначается через R^n. Элементы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называются его *точками*, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — их *координатами.* Точка $O = (0, 0, ..., 0)$ называется *началом координат* этого пространства, а по аналогии с векторным пространством множество точек, все координаты которых равны нулю, кроме стоящей на i-м месте, которая принимает все действительные значения: $-\infty < x_i < +\infty$, называется его *i-й координатной осью*, $i = 1, 2..., n$.

В дальнейшем слова "арифметическое" и "евклидово" будут для краткости опускаться и будет просто говориться о векторных и точечных n-мерных пространствах (в § 52 будет дано дальнейшее развитие понятия пространства).

Как в случае векторного, так и в случае точечного n-мерного пространства число n называется *размерностью* этого пространства.

Расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и y n-мерного пространства R^n имеет следующие свойства.

1°. $\rho(x, y) \geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$.

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3°. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$. (33.24)

(*Здесь* x, y, z — *произвольные точки* R^n.)

Неравенство (33.24) называется *неравенством треугольника.*

Свойство 1° расстояния следует из формулы (33.22), свойства 3° скалярного произведения и того, что длина $|x - y|$ вектора $x - y$ равна нулю в том и только том случае, когда $x = y$.

Свойство 2° расстояния следует из (33.16):

$$\rho(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |y - x| = \rho(y, x),$$

а свойство 3° — из следствия леммы 1. В самом деле,

$$\rho(x, y) \underset{(33.22)}{=} |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \underset{(33.20)}{\leqslant} |x - z| + |z - y| \underset{(33.22)}{=} \\ \underset{(33.22)}{=} \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

В ближайших параграфах в основном будет встречаться точечное n-мерное пространство R^n. Векторная структура, которой его можно наделить, будет мало использоваться (однако именно она позволила нам компактно доказать свойства расстояния в n-мерном пространстве).

33.2. Сходимость последовательностей точек в n-мерном пространстве. Прежде всего определим понятие окрестности в n-мерном пространстве.

Определение 3. Пусть $x \in R^n$ и $\varepsilon > 0$. Совокупность всех таких точек $y \in R^n$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, называется *n-мерным открытым шаром радиуса ε с центром в точке x* или *ε-окрестностью* (а иногда *сферической* или, правильнее, *шаровой окрестностью*) *точки x в пространстве* R^n и обозначается $U(x; \varepsilon)$.

Таким образом,

$$U(x;\varepsilon)\overset{\mathrm{def}}{=}\{y\colon y\in R^n,\ \rho(x,y)<\varepsilon\}. \tag{33.25}$$

В координатной записи это определение выглядит следующим образом:

$$U(x;\varepsilon)=\left\{y=(y_1,...,y_n)\colon \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2<\varepsilon^2\right\},\quad x=(x_1,...,x_n),\quad \varepsilon>0.$$

Если $n=1$, то $U(x;\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ — интервал длины 2ε с центром в точке x. Если $n=2$, то $U(x;\varepsilon)$ — круг радиуса ε с центром в точке (x_1,x_2). Если же $n=3$, то $U(x;\varepsilon)$ — обычный трехмерный шар радиуса ε с центром в точке (x_1,x_2,x_3).

Иногда бывает полезным также и понятие прямоугольной окрестности.

Определение 4. Множество

$$P(x;\delta_1,...,\delta_n)=\{y=(y_1,...,y_n)\colon |y_i-x_i|<\delta_i,\ i=1,2,...,n\} \tag{33.26}$$

называется *прямоугольной* (или, при $n\geqslant 3$, *параллелепипедальной*) *окрестностью точки* x.

В частном случае $\delta_1=\delta_2=...=\delta_n=\delta$ множество

$$P(x;\delta)\overset{\mathrm{def}}{=}P(x;\delta,...,\delta) \tag{33.27}$$

называется *кубической окрестностью точки* x.

Очевидно, что если для чисел $\delta_1,...,\delta_n$ положить

$$\delta_0=\min\{\delta_1,...,\delta_n\},\qquad \delta=\max\{\delta_1,...,\delta_n\},$$

то

$$P(x;\delta_0)\subset P(x;\delta_1,...,\delta_n)\subset P(x;\delta). \tag{33.28}$$

Прямоугольную окрестность $P(x;\delta_1,...,\delta_n)$ называют также *n-мерным открытым параллелепипедом* или, более полно, n-мерным открытым параллелепипедом, ребра которого параллельны координатным осям и имеют длины $2\delta_1,2\delta_2,...,2\delta_n$, а $P(x;\delta)$ — *n-мерным открытым кубом* с ребрами длины 2δ и параллельными координатными осям.

Если $n=1$, то $P(x;\delta)=(x-\delta,x+\delta)$ — снова интервал; если $n=2$, то $P(x;\delta_1,\delta_2)$ — прямоугольник, а $P(x;\delta)$ — квадрат, а если $n=3$, то $P(x;\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ — обычный трехмерный параллелепипед, а $P(x;\delta)$ — куб.

Лемма 2. *Любая сферическая окрестность точки пространства R^n содержит прямоугольную окрестность и содержится в прямоугольной окрестности этой точки.*

Любая прямоугольная окрестность точки содержит сферическую окрестность и содержится в сферической окрестности этой точки.

$\triangleright$ Прежде всего отметим, что для любых чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ справедливо неравенство

$$|a_i| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \leqslant |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{33.29}$$

которое доказывается возведением обеих частей в квадрат. В силу этого неравенства для координат любых двух точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ пространства R^n справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |y_i - x_i| \underset{(33.29)}{\leqslant} \rho(x, y) \underset{(33.23)}{=} \\ \underset{(33.23)}{=} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2} \underset{(33.29)}{\leqslant} \\ \underset{(33.29)}{\leqslant} |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + ... + |y_n - x_n|, \quad i = 1, 2, ..., n, \end{aligned} \tag{33.30}$$

из которого согласно определениям (33.25) и (33.26) сразу следуют оба утверждения леммы 2. $\triangleleft$

Упражнение 1. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x \in R^n$ справедливы включения

$$P\Big(x; \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\Big) \subset U(x; \varepsilon) \subset P(x; \varepsilon) \subset U(x; \varepsilon\sqrt{n}.)$$

Мы будем рассматривать последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства R^n, т. е. отображения $f\colon N \to R^n$ множества натуральных чисел N в пространство R^n (см. п. 4.6*), где

$$x^{(m)} = f(m), \quad m \in N.$$

По аналогии со случаем числовых последовательностей определяется понятие подпоследовательности. Если из некоторых членов последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек n-мерного пространства составлена новая последовательность $\{x^{(m_k)}\}$, в которой порядок следования ее членов совпадает с порядком их следования в исходной последовательности (из $k_1 > k_2$ следует $m_{k_1} > m_{k_2}$), то последовательность $\{x^{(m_k)}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x^{(m)}\}$.

Определение 5. Точка $x \in R^n$ называется *пределом последовательности* $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, ...$, если

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0. \tag{33.31}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$$

и говорят, что последовательность $\{x^{(m)}\}$ *сходится к точке* x.

Последовательность, которая сходится к некоторой точке пространства R^n, называется *сходящейся*.

Условие (33.31) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ (и, следовательно, для любой ε-окрестности $U(x;\varepsilon)$ точки x) существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}; x) < \varepsilon, \tag{33.33}$$

т. е. включение

$$x^{(m)} \in U(x;\varepsilon). \tag{33.34}$$

Согласно лемме 2 отсюда вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ в том и только том случае, когда для любой кубической окрестности $P(x;\delta)$ существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется включение $x^{(m)} \in P(x;\delta)$.

В случае $n = 1$ определение 5 превращается в обычное определение предела числовой последовательности. При $n = 2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости R^2 к точке x этой плоскости означает, что, каков бы ни был круг с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности находятся внутри указанного круга (рис. 129). Аналогичная ситуация имеет место и при $n = 3$, только там роль круга играет шар. Как и в случае числовых последовательностей, определение 5 означает, что точка x является пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$, если вне любой ε-окрестности точки x имеется лишь конечное множество (быть может, пустое) членов этой последовательности.

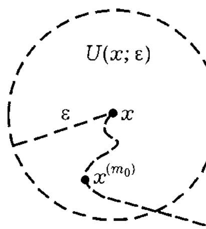

Рис. 129

Определение (33.31) предела последовательности точек в пространстве R^n дано с помощью предела числовой последовательности $\{\rho(x^{(m)}, x)\}$. Оно может быть сведено и к понятию предела числовых последовательностей их координат.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы последовательность*

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)}) \in R^n, \quad m = 1, 2, ...,$$

имела своим пределом точку $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{33.35}$$

$\triangleright$ Это утверждение сразу следует из неравенства (33.30) при $y = x^{(m)}$, т. е. из неравенства

$$|x_i^{(m)} - x_i| \leqslant \rho(x^{(m)}, x) \leqslant |x_1^{(m)} - x_1| + |x_2^{(m)} - x_2| + ... + |x_n^{(m)} - x_n|,$$
$$i = 1, 2, ..., n. \quad \triangleleft$$

Напомним, что теорема 1 при $n = 2$, т. е. для плоскости, была уже доказана в п. 5.11, когда точки плоскости интерпретировались как комплексные числа.

Из теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единствен, и что всякая подпоследовательность сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

Последовательность $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, называется *фундаментальной* или *последовательностью, удовлетворяющей условию Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ и всех натуральных p выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}, x^{(m+p)}) < \varepsilon.$$

Из неравенства (33.30) следует, что для того чтобы последовательность $\{x^{(m)}\}$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы все n числовых последовательностей координат ее точек были фундаментальными. Отсюда согласно теореме 1 и критерию Коши сходимости числовых последовательностей следует, что *для того чтобы последовательность $x^{(m)} \in R^n$, $n = 1, 2, \ldots$, была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Это утверждение называется *критерием Коши сходимости последовательности точек n-мерного пространства.*

Определение 6. Множество в n-мерном пространстве называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором n-мерном кубе.

Согласно лемме 2 множество ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором n-мерном шаре.

Иногда бывает удобным при рассмотрении ограниченных множеств использовать понятие диаметра множества, определяемое следующим образом.

Определение 7. *Диаметром* $\operatorname{diam} X$ множества X называется верхняя грань попарных расстоянии между его точками:

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in X} \rho(x, y).$$

Из определения диаметра множества, очевидно, следует, что для любых двух его точек $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство $\rho(x, y) \leqslant \operatorname{diam} X$. Ясно также, что

$$0 \leqslant \operatorname{diam} X \leqslant +\infty.$$

Замечание 1. Множество X ограничено тогда и только тогда, когда его диаметр конечен.

$\triangleright$ В самом деле, если множество X ограничено, то существует такой n-мерный шар Q^n радиуса r с центром в точке $x^{(0)}$, что $X \subset Q^n$. Тогда для любых точек x, y множества X имеем

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x,\, x^{(0)}) + \rho(x^{(0)},\, y) \leqslant 2r.$$

Поэтому

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in X} \rho(x, y) \leqslant 2r,$$

т. е. диаметр множества X конечен.

Наоборот, если диаметр множества X конечен: $\operatorname{diam} X < +\infty$, то возьмем произвольную точку $x^{(0)}$ в этом множестве и рассмотрим n-мерный шар Q^n радиуса $r = \operatorname{diam} X$ с центром в точке $x^{(0)}$. Для любой точки $x \in X$ имеем

$$\rho(x, x^{(0)}) \leqslant \operatorname{diam} X = r.$$

Это означает, что любая точка множества X содержится в шаре Q^n, т. е. существует шар, в котором лежит все множество X. $\triangleleft$

Пример 1. Диаметр n-мерного шара $U(x^{(0)}; r)$ радиуса r равен $2r$.

Действительно, если $x, y \in U(x^{(0)}; r)$ и, следовательно, $\rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon$, $\rho(y, x^{(0)}) < \varepsilon$, то

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x^{(0)}) + \rho(x^{(0)}, y) \leqslant 2r. \tag{33.36}$$

С другой стороны, если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, $x^{(k)} = \left(x_1^{(0)} - r + \frac{1}{k}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, $y^{(k)} = \left(x_1^{(0)} + r - \frac{1}{k}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, то

$$\rho(x^{(k)}, x^{(0)}) = \rho(y^{(k)}, x^{(0)}) = r - \frac{1}{k} < r, \quad k = 1, 2, ...,$$

и потому $x^{(k)}, y^{(k)} \in U(x^{(0)}; r)$. Поскольку $\rho(x^{(k)}, y^{(k)}) = 2r - \frac{2}{k}$, то

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x^{(k)}, y^{(k)}) = 2r. \tag{33.37}$$

Из (33.36) и (33.37) следует, что

$$\operatorname{diam} U(x^{(0)}; r) = 2r.$$

Пример 2. Диаметр n-мерного куба с ребром длины h равен $h\sqrt{n}$.

Если $P^n = \{x\colon\ a_i < x_i < a_i + h;\ i = 1, 2, ..., n\}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in P^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in P^n$, то $|x_i - y_i| < h$, $i = 1, 2, ..., n$. Поэтому $\rho(x, y) < h\sqrt{n}$. Если $x^{(k)} = \left(a_1 + \frac{1}{k},\ a_2 + \frac{1}{k}, ..., a_n + \frac{1}{k}\right)$, $y^{(k)} = \left(a_1 + h - \frac{1}{k},\ a_2 + h - \frac{1}{k}, ..., a_n + h - \frac{1}{k}\right)$, то $x^{(k)}, y^{(k)} \in P^n$, а

$$\lim_{k \to \infty} (\rho(x^{(k)}, y^{(k)}) = \lim_{k \to \infty} \left(h - \frac{2}{k}\right)\sqrt{n} = h\sqrt{n}.$$

Поэтому

$$\operatorname{diam} P^n = h\sqrt{n}.$$

Пример 3. Примером неограниченного множества является все пространство R^n.

З а м е ч а н и е 2. Отметим (это нам пригодится в дальнейшем), что если диаметр мно жества X конечен, то оно содержится в замкнутом кубе P^n с ребром длины $h = 2\operatorname{diam} X$, центром которого является произвольно выбранная точка x множества X (рис. 130).

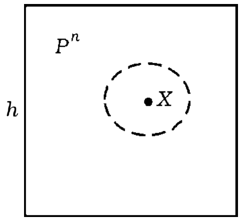

Рис. 130

Действительно, если $y \in X$, то $\rho(x, y) \leqslant \leqslant \operatorname{diam} X = \dfrac{h}{2}$. Поэтому точка y, находясь от центра x куба P^n на расстоянии, не превышающем половины h ребра этого куба, содержится в нем, т. е. $X \subset P^n$.

О п р е д е л е н и е 8. Последовательность точек пространства R^n называется *ограниченной*, если множество ее значений ограниченно.

Всякая сходящаяся последовательность ограниченна, так как последовательности ее координат согласно теореме 1 сходятся и, следовательно, ограниченны. 19

Т е о р е м а 2. *Из любой ограниченной последовательности точек n-мерного пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

$\triangleright$ Пусть $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, ...,$ — ограниченная последовательность точек в R^n. Следовательно, согласно определению 6 существует n-мерный куб $P(a; \delta)$, содержащий все члены этой последовательности: $x^{(m)} \in P(a; \delta)$, $m = 1, 2, ...,$ $a = (a_1, ..., a_n) \in R^n$. Это означает (см. определения (33.26) и (33.27)), что для всех $i = = 1, 2, ..., n$ выполняются неравенства $|x_i^{(m)} - a_i| < \delta$, т. е.

$$a_i - \delta < x_i^{(m)} < a_i + \delta, \quad m = 1, 2, ...,$$

и, таким образом, все n числовых последовательностей $\{x_i^{(m)}\}$, $i = = 1, 2, ..., n$, ограниченны.

Согласно теореме Больцано–Вейерштрасса из числовой последовательности $\{x_1^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$, $k_1 = 1, 2, ...$ Подпоследовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$ ограниченной последовательности $\{x_2^{(m)}\}$ также ограниченна и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее $\{x_2^{(m_{k_1,k_2})}\}$ и заметим, что подпоследовательность $\{x_1^{(m_{k_1,k_2})}\}$ сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$ также является сходящейся. Продолжая этот процесс, через n шагов получим n сходящихся числовых последовательностей $x_1^{(m_{k_1,k_2,\ldots,k_n})}, ..., x_n^{(m_{k_1,k_2,\ldots,k_n})}$. А тогда согласно теореме 1 подпоследовательность $x^{(m_{k_1,k_2,\ldots,k_n})} = (x_1^{(m_{k_1,k_2,\ldots,k_n})}, ..., x_n^{(m_{k_1,k_2,\ldots,k_n})})$,

$k_n = 1, 2, \ldots$, последовательности $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, также является сходящейся. $\triangleleft$

Аналогично случаю числовых последовательностей для последовательностей точек n-мерного пространства можно ввести понятие бесконечного предела. Для этой цели удобно дополнить пространство R^n бесконечно удаленной точкой, которая обозначается ∞. Она характеризуется заданием ее ε-окрестностей.

Определение 9. *ε-окрестностью $U(\infty, \varepsilon)$ бесконечно удаленной точки* ∞, $\varepsilon > 0$, называется множество, состоящее из всех таких точек x пространства R^n, что $\rho(x, O) > 1/\varepsilon$, и из бесконечно удаленной точки ∞, т. е.

$$U(\infty; \varepsilon) = \left\{x\colon\ \rho(x, O) > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\},$$

где $O = (0, 0, \ldots, 0)$ — начало координат пространства R^n.

Определение 10. Последовательность $\{x^{(m)}\}$ называется последовательностью, *стремящейся к бесконечности* (или к *бесконечно удаленной точке*), если

$$\lim \rho(x^{(m)}, O) = \infty. \tag{33.38}$$

Легко видеть, что условие (33.38) можно записать как $\lim\limits_{m\to\infty} |x^{(m)}| = +\infty$, ибо $|x^{(m)}| = \rho(x^{(m)}, O)$. В этом случае пишут

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty. \tag{33.39}$$

Отметим, что в случае $n > 1$ бесконечный предел определен только для бесконечностей без знака.

В силу определения ε-окрестности бесконечно удаленной точки *последовательность $x^{(m)}$ стремится к бесконечности тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер m_ε, что для всех $m > m_\varepsilon$ выполняется включение* $x^{(m)} \in U(\infty; \varepsilon)$. Справедливость этого утверждения сразу следует из равносильности сформулированного условия и условия (33.38).

Как и на прямой, в n-мерном пространстве *всякая неограниченная последовательность содержит подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.*

$\triangleright$ В самом деле, если $x^{(m)}$ — неограниченная последовательность точек пространства R^n, то существует такой ее член $x^{(m_1)}$, что $\rho(x^{(m_1)}, O) > 1$. Далее, существует член $x^{(m_2)}$ такой, что $m_2 > m_1$ и $\rho(x^{(m_2)}, O) > 2$. Вообще, существует член $x^{(m_k)}$ такой, что

$$m_k > m_{k-1}, \quad \rho(x^{(m_k)}, O) > k, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = \infty$. $\triangleleft$

Точки пространства R^n для их отличия от бесконечно удаленной точки будем называть также и *конечными точками.*

33.3. Различные типы множеств. В этом параграфе под множествами будем понимать множества, лежащие в n-мерном пространстве.

Определение 11. Точка множества называется его *внутренней точкой*, если у нее существует ε-окрестность, содержащаяся в этом множестве.

Совокупность всех внутренних точек данного множества называется его *внутренностью.*

Внутренность множества X обозначается X_{int} *).

Определение 12. Множество, у которого все точки являются внутренними, называется *открытым.*

Таким образом, открытые множества — это те множества, которые совпадают со своей внутренностью.

Пустое множество по определению считается открытым (впрочем, оно является таковым по законам логики).

Лемма 3. *Сферическая окрестность является открытым множеством.*

$\triangleright$ Если $U(x;\varepsilon)$ — сферическая окрестность точки $x \in R^n$ и $y \in U(x;\varepsilon)$ (рис. 131), то, положив $\delta = \varepsilon - \rho(x,y)$, покажем, что

$$U(y;\delta) \subset U(x;\varepsilon). \tag{33.40}$$

Действительно, если $z \in U(y;\delta)$, т. е.

$$\rho(z,y) < \delta = \varepsilon - \rho(x,y),$$

то

$$\rho(z,x) \leqslant \rho(z,y) + \rho(y,x) \underset{(33.39)}{<} \varepsilon$$

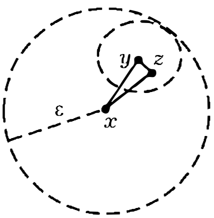

Рис. 131

и, следовательно, $z \in U(x;\varepsilon)$, т. е. включение (33.40) доказано. $\triangleleft$

Аналогично показывается, что и прямоугольная окрестность точки является открытым множеством.

Для любого множества X его внутренность X_{int} является, как в этом нетрудно убедиться, открытым множеством.

Упражнение 2. Доказать, что ε-окрестность бесконечно удаленной точки, из которой удалена сама эта точка, является открытым множеством.

Оказывается удобным следующее определение.

Определение 13. Всякое открытое множество пространства R^n, содержащее данную точку, называется ее *окрестностью.*

Окрестностью бесконечно удаленной точки ∞ называется всякое множество, которое является объединением открытого в R^n множества с ∞ и которое содержит ε-окрестность ∞.

*) int — начало латинского слова interior (внутренний).

Иначе говоря, множество $G \cup \{\infty\}$, где G — открытое множество, является окрестностью ∞, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $U(\infty; \varepsilon) \subset G \cup \{\infty\}$.

Окрестность точки обозначается

$$U = U(x)$$

(иногда и другими буквами, например, $V = V(x)$, $W = W(x)$).

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\{x^{(m)}\}$ — последовательность точек в R^n. Поскольку какова бы ни была точка $x \in R^n$, в любой ее окрестности содержится сферическая окрестность, то согласно определению 5

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$$

в том и только том случае, когда для л ю б о й окрестности $U(x)$ (не обязательно сферической или прямоугольной) существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in U(x).$$

Полезным в случае n-мерного пространства оказывается и понятие проколотой окрестности.

О п р е д е л е н и е 14. *Проколотой окрестностью* $\overset{\circ}{U}(x)$ *точки* x (конечно или бесконечно удаленной) называется всякое множество, получающееся удалением точки x из некоторой ее окрестности $U(x)$:

$$\overset{\circ}{U}(x) \overset{\text{def}}{=} U(x) \setminus \{x\}.$$

Л е м м а 4. *Объединение любой совокупности и пересечение конечной совокупности открытых множеств являются открытыми множествами.*

$\triangleright$ Действительно, если $\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов, G_α — открытые множества, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$, то для любой точки $x \in G$ существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $x \in G_\alpha$. Это множество G_α, например, и является окрестностью точки x, содержащейся в множестве G, так как $G_\alpha \subset G$. Это и означает открытость множества G. $\triangleleft$

Если $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$, где G_k — открытые множества и $x \in G$, то существуют $\varepsilon_k > 0$ такие, что $U(x; \varepsilon_k) \subset G_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, а тогда для $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m\}$ имеем $U(x; \varepsilon) \subset G_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$. Поэтому $U(x; \varepsilon) \subset G$, т. е. множество G открытое. $\triangleleft$

О п р е д е л е н и е 15. Объединение всех ε-окрестностей точек множества X называется *ε-окрестностью* этого множества и обозначается $U(X; \varepsilon)$, т. е

$$U(X; \varepsilon) = \bigcup_{x \in X} U(x; \varepsilon).$$

Согласно леммам 3 и 4 ε-окрестность любого множества является открытым множеством.

Как и для точки, окрестностью множества называется всякое содержащее его открытое множество.

Аналогично одномерному случаю для всякого множества $X \subset R^n$ вводятся понятия его точек прикосновения, предельных и изолированных точек (см. п. 6.1 и п. 6.9).

Определение 16. Точка пространства (конечная или бесконечно удаленная) называется *точкой прикосновения множества*, если любая ее окрестность содержит точки этого множества.

Точки самого множества являются, очевидно, его точками прикосновения, так как любая окрестность точки множества содержит саму эту точку. Точки прикосновения могут и не принадлежать самому множеству. Например, точки $x = 0$ и $x = 1$ являются точками прикосновения интервала $X = (0, 1)$ и не принадлежат ему.

Если точка $x^{(0)}$ является конечной точкой прикосновения множества $X \subset R^n$, то любая ее окрестность $\Big($в частности, сферическая окрестность $U\left(x^{(0)}; \dfrac{1}{m}\right)\Big)$ содержит точку этого множества, обозначим ее $x^{(m)}$:

$$x^{(m)} \in U\left(x^{(0)}; \frac{1}{m}\right) \cap X, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда $\rho(x^{(m)}, x^{(0)}) < \dfrac{1}{m}$ и, следовательно,

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)},$$

т. е. всякая конечная точка прикосновения множества является пределом последовательности его точек.

Ясно, что справедливо и обратное утверждение: если точка пространства является пределом последовательности точек множества, то она — его точка прикосновения, так как любая ее окрестность содержит все точки указанной последовательности, начиная с некоторого номера, т. е. содержит точки множества.

Аналогично, бесконечно удаленная точка ∞ является точкой прикосновения множества $X \subset R^n$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность точек $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \dots$, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$.

Действительно, если ∞ — точка прикосновения множества X, то в любой ее окрестности $U\left(\infty; \dfrac{1}{m}\right)$ содержится точка этого множества, обозначим ее $x^{(m)}$, т. е. $x^{(m)} \in U\left(\infty; \dfrac{1}{m}\right) \cap X$. Тогда $\rho(x^{(m)}, 0) > m$, где $m = 1, 2, \dots$ Отсюда следует, что $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty$, а это означает, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$.

Наоборот, если существует такая последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$, то в любой окрестности бесконечно удаленной точки содержатся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, т. е. содержатся точки множества X.

Отметим еще, что условие существования в множестве $X \subset R^n$ последовательности точек, стремящейся к бесконечности ∞, равносильно, как в этом легко убедиться, неограниченности этого множества. Поэтому бесконечно удаленная точка является точкой прикосновения множества в том и только том случае, когда оно неограниченно.

Определение 17. Точка x (конечная или бесконечно удаленная) называется *предельной точкой* некоторого множества, если в любой ее окрестности содержится точка этого множества, отличная от нее самой.

С помощью понятия проколотой окрестности это определение можно перефразировать следующим образом: точка x называется предельной точкой множества X, если любая ее проколотая окрестность содержит по крайней мере одну точку этого множества.

Очевидно, что *предельная точка некоторого множества является и его точкой прикосновения.*

Если точка x является предельной точкой множества X, то, выбрав в каждой окрестности $U(x; 1/m)$ точку из множества X, отличную от x, и обозначив ее $x^{(m)}$, получим такую последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ и $x^{(m)} \neq x$, $m = 1, 2, \ldots$, т. е. если x — предельная точка множества, то существует последовательность точек этого множества, сходящаяся к x, у которой ни одна из ее точек не совпадает с точкой x.

Определение 18. Если у точки множества существует окрестность, не содержащая никаких других его точек, кроме нее самой, то эта точка называется *изолированной точкой* этого множества.

Как и в одномерном случае (п. 6.9.), каждая точка прикосновения множества является либо его изолированной точкой, либо предельной.

Определение 19. Совокупность всех конечных точек прикосновения множества называется его *замыканием.* Замыкание множества X обозначается $\overline{X}$.

Определение 20. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои конечные точки прикосновения.

Поскольку каждая точка множества является и точкой его прикосновения, т. е. $X \subset \overline{X}$, то замкнутость множества X означает, что

$$X = \overline{X}. \tag{33.41}$$

Пустое множество считается по определению замкнутым.

Упражнение 3. Доказать, что $\operatorname{diam} \overline{X} = \operatorname{diam} X$.

Примерами замкнутых множеств являются множества вида

$$Q^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \colon a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + h, \quad i = 1, 2, ..., n\}, \quad (33.42)$$

где $h > 0$, $a_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$, называемые *замкнутыми n-мерными кубами* с ребрами длины h, параллельными координатным осям. Эти кубы являются замыканиями кубов

$$P^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \colon a_i < x_i < a_i + h, \quad i = 1, 2, ..., n\},$$

называемых также открытыми кубами (они являются открытыми множествами):

$$Q^n = \overline{P^n}.$$

Лемма 5. *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

$\triangleright$ Если X — некоторое множество, x — точка прикосновения его замыкания $\overline{X}$ и $U = U(x)$ — ее произвольная окрестность, то согласно определению точки прикосновения в этой окрестности имеется точка $y \in \overline{X}$. Поскольку U — открытое множество, то оно является и окрестностью точки y, а так как включение $y \in \overline{X}$ означает, что точка y является точкой прикосновения множества X, то в множестве U имеется точка множества X. Таким образом, в любой окрестности U точки x имеются точки множества X, а это означает, что $x \in \overline{X}$, т. е. $\overline{X}$ содержит все свои точки прикосновения. $\triangleleft$

Для всякого множества $X \in R^n$ множество $R^n \backslash X$ называется его *дополнением в пространстве* R^n. Оказывается, что открытые множества (будем их обозначать буквой G) и замкнутые множества (их будем обозначать F) являются дополнениями друг друга в пространстве R^n.

Лемма 6. *Дополнение открытого множества является замкнутым, а дополнение замкнутого множества — открытым множеством.*

$\triangleright$ Пусть F — замкнутое множество и $G = R^n \backslash F$. Если $x \in G$, то $x \notin F$, и, следовательно, точка x не является точкой прикосновения множества F. Поэтому существует окрестность $U(x)$ точки x, не содержащая точек множества F, т. е. содержащаяся в G. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, а это означает, что G — открытое множество.

Пусть G — открытое множество, $F = R^n \backslash G$ и $x \in G$. Поскольку G — открытое множество, то оно является окрестностью точки x, причем, являясь дополнением множества F, оно не содержит его точек. Следовательно, никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения множества F. Иначе говоря, все точки прикосновения множества F содержатся в нем самом, а это означает, что F — замкнутое множество. $\triangleleft$

Заметим, что все пространство и пустое множество являются одновременно открытыми и замкнутыми.

Определение 21. Точка пространства называется *граничной точкой* некоторого множества, если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие этому множеству, так и не принадлежащие ему.

Совокупность всех граничных точек множества X называется его *границей* и обозначается ∂X.

Очевидно, что граничная точка множества является и его точкой прикосновения.

Каждая точка множества является либо его внутренней точкой, либо граничной, при этом множество может не содержать все или некоторые граничные точки:

$$X \subset X_{\text{int}} \cup \partial X, \quad X_{\text{int}} \cap \partial X = \varnothing. \tag{33.43}$$

Каждая точка замыкания $\overline{X}$ множества X также является либо внутренней, либо граничной точкой самого множества X, но его замыкание $\overline{X}$ содержит в себе уже все граничные точки множества:

$$\partial X \subset \overline{X}.$$

Поэтому

$$\overline{X} = X_{\text{int}} \cup \partial X. \tag{33.44}$$

Справедливо, конечно и равенство $\overline{X} = X \cup \partial X$, но в нем слагаемые правой части равенства, вообще говоря, пересекаются. Они не пересекаются тогда и только тогда, когда множество X является открытым. В самом деле, если множество открыто, то каждая его точка является внутренней и, тем самым, не принадлежит его границе.

Отметим еще, что граница всякого множества является замкнутым множеством. Действительно, в окрестности точки прикосновения границы имеется точка границы, а поэтому в этой окрестности есть как точки, принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему.

Пример 1. Замыкание ε-окрестности $U(x;\varepsilon)$ точки x (33.25) называется *замкнутым шаром* с центром в точке x и радиуса ε; оно, согласно лемме 4, является замкнутым множеством:

$$\overline{U(x;\varepsilon)} = \{y\colon \rho(y,x) \leqslant \varepsilon\}. \tag{33.45}$$

Пример 2. В пространстве R^n замкнутое множество вида

$$S^{n-1} = \{x\colon \rho(x,a) = r\} \tag{33.46}$$

называется $(n-1)$-*мерной сферой* радиуса r с центром в точке a.

Оно является границей как открытого, так и замкнутого шара радиуса r с центром в точке a.

Всякое отображение $x(t)$ отрезка $[a,b]$ числовой прямой (или какого-либо другого множества) в пространство R^n можно описать при помощи n числовых функций $x_i(t)$, $i=1,2,...,n$, называемых *координатными* и являющихся координатами точки $x(t)$, т. е.

$$x(t)=(x_1(t),...,x_n(t)),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

Отображение называется *непрерывным* на отрезке, если на нем непрерывны все координатные функции этого отображения.

Определение 22. Непрерывное отображение отрезка в n-мерное пространство называется *кривой* в этом пространстве, а образ отрезка — *носителем кривой.*

Как и в трехмерном случае, будем обозначать кривую буквой Γ и писать

$$\Gamma=\{x(t);\ a\leqslant t\leqslant b\} \tag{33.47}$$

или

$$\Gamma=\{x_i(t);\ i=1,2,...,n;\ a\leqslant t\leqslant b\}.$$

Для кривой (33.47) всякая пара (x,t), $x\in R^n$, $t\in[a,b]$, у которой $x=x(t)$, называется *точкой кривой* и там, где это не может привести к недоразумениям, обозначается $x(t)$. Точка кривой $x(a)$ называется ее *началом*, а точка $x(b)$ — *концом.*

Определение 23. Множество точек $x=(x_1,...,x_n)$ пространства R^n, координаты которых представимы в виде

$$x_i=x_i^{(0)}+a_it,\quad i=1,2,...,n,...,\quad -\infty<t<+\infty,\quad \sum_{i=1}^n a_i^2>0, \tag{33.48}$$

называется *прямой в пространстве* R^n, проходящей через точку $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ в направлении вектора $a=(a_1,a_2,...,a_n)$.

Если $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ рассматривать как векторы, то уравнения (33.48) можно записать в векторном виде

$$x=x^{(0)}+at,\quad -\infty<t<+\infty. \tag{33.49}$$

Сужение этого отображения на множество $t>0$ или на $t\geqslant 0$ (соответственно на $t<0$ или $t\leqslant 0$) называется *открытым* или *замкнутым лучом* с началом в точке $x^{(0)}$ в направлении вектора a (соответственно $-a$).

Вектор a называется *направляющим вектором прямой* $x=x^{(0)}+at$. Две несовпадающие прямые, уравнения которых можно записать с одним и тем же направляющим вектором, называются *параллельными.*

Сужение отображения (33.48) на какой-либо отрезок $[a,b]$, т. е. кривую $\{x_i=a_i+b_it,\ i=1,2,...,n;\ a\leqslant t\leqslant b\}$, так же, как и носитель этой кривой, называется *отрезком прямой в пространстве* R^n.

Отрезок прямой, началом которого является $x(a)$, а концом — $x(b)$, обозначается $[x(a),x(b)]$.

Пример 3. Рассмотрим замкнутый n-мерный куб

$$Q^n = \{x\colon |x_i - x_i^{(0)}| \leqslant a,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Для всякого фиксированного i_0 (i_0 может принимать значения $1, 2, ...$ $..., n$) множество вида

$$\{x\colon |x_{i_0} - x_{i_0}^{(0)}| \leqslant a,\ x_i = x_i^{(0)} \pm a,\ i \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{i_0\}\},$$

где при каждом $i \neq i_0$ в равенстве $x_i = x_i^{(0)} \pm a$ выбран один из знаков, плюс или минус, является отрезком в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ (эти отрезки называются *ребрами куба* Q^n). В самом деле, координаты точек рассматриваемого множества могут быть заданы формулами

$$x_{i_0} = x_{i_0}^{(0)} + at, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad x_i = x_i^{(0)} \pm a, \quad i \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{i_0\}.$$

Будем говорить, что две точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$ можно соединить в этом множестве кривой, если существует такая кривая (33.47), что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и ее носитель лежит в множестве X.

Определение 24. Множество $X \in \boldsymbol{R}^n$, любые две точки которого можно соединить в нем кривой, называется *линейно связным множеством.*

Линейно связное открытое множество называется *областью.*

Замыкание области называется *замкнутой областью.*

Определение 25. Множество, любые две точки которого можно соединить отрезком, лежащим в этом множестве, называется *выпуклым.*

Очевидно, что всякое выпуклое множество является и линейно связным.

Пример 4. Открытый шар в $\boldsymbol{R}^n$ является выпуклой областью.

Пример 5. Объединение двух непересекающихся открытых шаров в $\boldsymbol{R}^n$ является открытым множеством, но не является областью.

Пример 6. Объединение двух пересекающихся, но не совпадающих прямых является примером линейно связного, но не выпуклого множества.

33.4. Компакты. Рассмотрим важный для дальнейшего класс множеств, называемых компактами.

Определение 26. Множество, у которого из каждой последовательности его точек можно выделить сходящуюся к точке этого множества подпоследовательность, называется *компактом.*

Теорема 3. *Для того чтобы множество было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

$\triangleright$ Необходимость. Если множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$ является неограниченным, то для любого $m \in \boldsymbol{N}$ найдется такая точка $x^{(m)} \in X$, что

$\rho(O, x^{(m)}) > m$, $O = (0, 0, ..., 0)$. Очевидно, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$, а поэтому и для любой подпоследовательности $\{x^{(m_k)}\}$ последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеем $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m_k)} = \infty$. Тем самым из полученной последовательности $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, ...$, нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке множества X. Это означает, что множество X не является компактом.

Если множество X не является замкнутым множеством, то существует не принадлежащая ему его точка прикосновения: $x \in \overline{X} \setminus X$. В силу определения точки прикосновения для любого $m \in N$ существует точка $x^{(m)} \in X \cap U\left(x^{(m)}; \dfrac{1}{m}\right)$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, и для любой подпоследовательности $\{x^{(m_k)}\}$ последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеем $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x \notin X$. Тем самым из последовательности $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, ...$, нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке множества X. Это означает, что множество X не является компактом.

Из доказанного следует, что если множество X является компактом, то оно ограниченное и замкнутое.

Достаточность. Пусть множество X является ограниченным и замкнутым, а $\{x^{(m)}\}$ — произвольная последовательность его точек. Из ограниченности множества X следует ограниченность последовательности $\{x^{(m)}\}$. Согласно теореме 2 п. 33.2 из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x$, то в любой окрестности точки x имеются точки последовательности $x^{(m_k)} \in X$, $m = 1, 2, ...$ Это означает, что точка x является точкой прикосновения множества X, а поэтому в силу замкнутости множества X она в нем содержится. Таким образом, из произвольной последовательности точек множества X можно выделить сходящуюся к его точке подпоследовательность, т. е. множество X является компактом. $\triangleleft$

Система множеств $X_\alpha \subset R^n$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) называется *покрытием множества* $X \subset R^n$, если

$$X \subset \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha. \tag{33.49}$$

Если все множества X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, являются открытыми, то покрытие $\{X_\alpha\}$ множества X называется *открытым покрытием.*

Теорема 4. *Для любого открытого покрытия компакта существует такое положительное число* (*называемое числом Лебега**) *данного покрытия*), *что любое подмножество компакта с диаметром,*

*) А. Лебег (1875–1941) — французский математик.

меньшим этого числа, содержится по крайней мере в одном элементе покрытия.

$\triangleright$ Допустим противное. Пусть существует такое открытое покрытие $\Omega = \{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, некоторого компакта X, что для любого $\delta > 0$ найдется множество $E \subset X$, $\operatorname{diam} E < \delta$, которое не содержится ни в одном элементе покрытия Ω. Возьмем $\delta = 1/m$, $m \in \boldsymbol{N}$, и пусть E_m — подмножество компакта X,

$$\operatorname{diam} E_m < \frac{1}{m}, \tag{33.50}$$

не содержащееся ни в одном элементе покрытия Ω.

Выберем произвольно точку

$$x^{(m)} \in E_m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{33.51}$$

Поскольку множество X является компактом, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$, причем

$$\lim_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)} \in X. \tag{33.52}$$

Система Ω является покрытием компакта X. Поэтому существует по крайней мере один элемент G_α этого покрытия, содержащий точку $x^{(0)}$. В силу открытости множества G_α найдется сферическая окрестность $U(x^{(0)};\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, точки $x^{(0)}$ содержащаяся в G_α:

$$U(x^{(0)};\varepsilon) \subset G_\alpha. \tag{33.53}$$

Выберем номер k_0 так, чтобы

$$\frac{1}{m_{k_0}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33.54}$$

В силу условия (33.52) существует такое

$$k > k_0, \tag{33.55}$$

что

$$\rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33.56}$$

Тогда для любой точки $x \in E_{m_k}$ будем иметь

$$\rho(x, x^{(0)}) \leqslant \rho(x, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) \underset{\substack{(33.50),(33.51)\\(33.56)}}{<}$$

$$\underset{\substack{(33.50),(33.51)\\(33.56)}}{<} \frac{1}{m_k} + \frac{\varepsilon}{2} \underset{\substack{(33.54)\\(33.55)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{33.57}$$

Таким образом,

$$E_{m_k} \underset{(33.57)}{\subset} U(x^{(0)};\varepsilon) \underset{(33.53)}{\subset} G_\alpha,$$

т. е. нашлось множество $G_\alpha \in \Omega$, содержащее множество E_{m_k} — противоречие. $\triangleleft$

Теорема 5 (теорема Гейне–Бореля*)). *Из всякого покрытия компакта открытыми множествами можно выделить конечное покрытие.*

▷ Пусть $\Omega = G_\alpha,\ \ \alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов), — покрытие компакта X открытыми множествами G_α и δ — число Лебега этого покрытия (см. теорему). Множество X, будучи компактом, ограничено, а поэтому содержится в некотором кубе Q^n:

$$X \subset Q^n. \tag{33.58}$$

Пусть

$$Q^n = \{x = (x_1, ..., x_n)\colon\ |x_i - x_i^{(0)}| \leqslant \frac{a}{2},\quad i = 1, 2, ..., n\}.$$

Длина ребера этого куба равна a. Разобьем куб Q^n на 2^n равных кубов "гиперплоскостями" $x_i = x_i^{(0)},\ \ i = 1, 2, ..., n$. Длины ребер получившихся кубов будут равны $a/2$.

Каждый из этих кубов снова разобьем аналогичным образом на 2^n равных кубов с ребрами длины $a/2^2$ и т. д. Через k шагов получим разбиение куба Q^n на 2^{kn} кубов $Q_i^n,\ \ i = 1, 2, ..., 2^{kn}$, с ребрами длины $\frac{a}{2^k}$.

Выберем число k так, чтобы

$$\operatorname{diam} Q_i^n = \frac{a\sqrt{n}}{2^k} < \delta. \tag{33.59}$$

Поскольку

$$Q^n = \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} Q_i^n,$$

то включение (33.58) можно записать в виде

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} Q_i^n. \tag{33.60}$$

Положим

$$X_i = X \cap Q_i^n, \quad i = 1, 2, ..., 2^{kn}. \tag{33.61}$$

Тогда в силу (33.60), (33.61) получим

$$X = \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} X_i, \tag{33.62}$$

а в силу неравенства (33.59) будем иметь

$$\operatorname{diam} X_i \underset{(33.61)}{\leqslant} \operatorname{diam} Q_i^n < \delta.$$

Из последнего неравенства, согласно свойству числа Лебега δ покрытия Ω, для каждого номера i существует такой индекс α_i, что

$$X_i \subset G_{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, ..., 2^{kn}.$$

*) Э. Борель (1871–1956) — французский математик.

Поэтому

$$X = \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} X_i \subset \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} G_{\alpha_i}.$$

Таким образом, система множеств $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^{i=2^{kn}}$ является конечным покрытием компакта X, выделенным из покрытия Ω. $\triangleleft$

Замечание 1. Отметим, что справедливо и утверждение, обратное теореме 4: если из всякого покрытия множества открытыми множествами можно выделить конечное покрытие, то множество является компактом (доказательство этого утверждения можно найти, например, в учебнике: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1988).

Для любых двух множеств $X \subset R^n$ и $Y \subset R^n$ определяется *расстояние* $\rho(X, Y)$ между ними по формуле

$$\rho(X, Y) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in X, y \in Y} \rho(x, y). \tag{33.63}$$

Если в формуле (33.63), например, множество Y состоит из одной точки: $Y = \{y\}$, то эта формула дает определение расстояния $\rho(X, y)$ точки y до множества X.

Очевидно, что в случае, когда множества X и Y пересекаются, расстояние между ними равно нулю.

В терминах окрестностей множеств (см. определение 14) условие того, что два множества X и Y находятся на положительном расстоянии: $\rho(X, Y) = d > 0$, равносильно тому, что у них имеются непересекающиеся ε-окрестности. Это имеет место при $2\varepsilon < d$.

Теорема 6. *Если X и Y — замкнутые непересекающиеся множества и одно из них — компакт, то расстояние между ними больше нуля и существуют такие точки $x \in X$, $y \in Y$, что*

$$\rho(X, Y) = \rho(x, y) > 0. \tag{33.64}$$

$\triangleright$ Из определения (33.63) следует, что существуют такие точки $x^{(m)} \in X$, $y^{(m)} \in Y$, $m = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, y^{(m)}) = \rho(X, Y).$$

Если, например, множество X — компакт, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся к некоторой его точке $x^{(0)}$ подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)} \in X.$$

Последовательность $\{y^{(m_k)}\}$ ограниченна, так как

$$\rho(y^{(m_k)}, x^{(0)}) \leqslant \rho(y^{(m_k)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}),$$

а числовые последовательности $\rho(y^{(m_k)}, x^{(m_k)})$ и $\rho(x^{(m_k)}, x^{(0)})$ имеют конечные пределы:

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) = \rho(X, Y), \quad \lim_{k\to\infty} \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) = 0$$

и поэтому ограниченны. Следовательно, ограниченна последовательность $\{\rho(y^{(m_k)}, x^{(0)})\}$, т. е. все точки $y^{(m_k)}$, $k = 1, 2, ...$, содержатся в некотором шаре с центром в точке $x^{(0)}$. По теореме 2 из ограниченной последовательности $\{y^{(m_k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_{k_j})}\}$:

$$\lim_{j\to\infty} y^{(m_{k_j})} = y^{(0)}.$$

В силу замкнутости множества Y точка $y^{(0)}$ содержится в нем: $y^{(0)} \in$ $\in Y$, а так как множества X и Y не пересекаются, то $x^{(0)} \neq y^{(0)}$ и, следовательно, $\rho(x^{(0)}, y^{(0)}) > 0$.

Из неравенства (см. (33.24))

$$\rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) \leqslant \rho(x^{(m_{k_j})}, x^{(0)}) + \rho(x^{(0)}, y^{(0)}) + \rho(y^{(0)}, y^{(m_{k_j})})$$

имеем

$$\rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) - \rho(x^{(0)}, y^{(0)}) \leqslant \rho(x^{(m_{k_j})}, x^{(0)}) + \rho(y^{(m_{k_j})}, y^{(0)}).$$

Аналогично из неравенства

$$\rho(x^{(0)}, y^{(0)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_{k_j})}) + \rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) + \rho(y^{(m_{k_j})}, y^{(0)})$$

получим

$$\rho(x^{(0)}, y^{(0)}) - \rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) \leqslant \rho(x^{(m_{k_j})}, x^{(0)}) + \rho(y^{(m_{k_j})}, y^{(0)}).$$

Следовательно,

$$|\rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) - \rho(x^{(0)}, y^{(0)})| \leqslant \rho(x^{(m_{k_j})}, x^{(0)}) + \rho(y^{(m_{k_j})}, y^{(0)}).$$

В силу условий $x^{(m_{k_j})} \to x^{(0)}$, $y^{(m_{k_j})} \to y^{(0)}$ при $j \to \infty$ правая часть полученного неравества стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{j\to\infty} \rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) = \rho(x^{(0)}, y^{(0)}).$$

Поскольку предел всякой подпоследовательности сходящейся последовательности совпадает с пределом самой последовательности, то

$$\rho(X, Y) = \lim_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, y^{(m)}) = \lim_{j\to\infty} \rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) = \rho(x^{(0)}, y^{(0)}).$$

Теорема доказана. $\lhd$

Отметим, что условие теоремы о том, что одно из множеств X или Y есть компакт, существенно: так, гипербола и ее асимптота —

замкнутые непересекающиеся множества, но расстояние между ними равно нулю, каждое из них неограничено и, следовательно, не является компактом.

Замечание 2. Если $X \subset R^n$, X — компакт и $X_d = \{x \in R^n: \rho(x, X) \leqslant d\}$, то при любом $d > 0$ множество X_d тоже является компактом.

$\triangleright$ Докажем сначала, что множество X_d ограничено. Для любых точек x, $y \in X_d$ существуют такие точки ξ, $\eta \in X$, что $\rho(x, \xi) = \rho(x, X) \leqslant d$, $\rho(y, \eta) = \rho(y, X) \leqslant d$ (см. теорему 6 для случая компакта и точки). Поскольку точки ξ и η принадлежат множеству X, то $\rho(\xi, \eta) \leqslant \operatorname{diam} X$.

В силу неравенства треугольника (33.24) имеем

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, \xi) + \rho(\xi, \eta) + \rho(\eta, y) \leqslant \leqslant \rho(x, X) + \operatorname{diam} X + \rho(y, X) \leqslant \operatorname{diam} X + 2d.$$

Поэтому

$$\operatorname{diam} X_d \leqslant \operatorname{diam} X + 2d.$$

Это и означает ограниченность множества X_d.

Докажем теперь, что множество X_d замкнуто. Пусть $x^{(m)} \in X_d$, $m = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$. Для каждого номера m существует такая точка $\xi^{(m)} \in X$, что

$$\rho(x^{(m)}, \xi^{(m)}) = \rho(x^{(m)}, X). \tag{33.65}$$

В силу компактности множества X существует сходящаяся к его точке подпоследовательность $\{\xi^{(m_k)}\}$ последовательности $\{\xi^{(m)}\}$: $\lim\limits_{k \to \infty} \xi^{(m_k)} = \xi^{(0)} \in X$.

Заметив, что

$$\rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) + \rho(x^{(0)}, \xi^{(0)}) + \rho(\xi^{(0)}, \xi^{(m_k)}),$$

а поэтому

$$\rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) - \rho(x^{(0)}, \xi^{(0)}) \leqslant \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) + \rho(\xi^{(m_k)}, \xi^{(0)}),$$

и аналогично

$$\rho(x^{(0)}, \xi^{(0)}) - \rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) + \rho(\xi^{(m_k)}, \xi^{(0)}),$$

получим

$$|\rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) - \rho(x^{(0)}, y^{(0)})| \leqslant \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) + \rho(\xi^{(m_k)}, \xi^{(0)}).$$

Поскольку правая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) = \rho(x^{(0)}, y^{(0)}).$$

Из условия $\rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) \underset{(33.65)}{=} \rho(x^{(m_k)}, X) = d$ следует, что

$$\rho(x^{(0)}, \xi^{(0)}) = \lim_{k \to \infty} \rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) \leqslant d,$$

а так как $\xi^{(0)} \in X$, то $\rho(x^{(0)}, X) \leqslant d$. Это означает, что $x^{(0)} \leqslant X_d$, т. е. множество X_d замкнуто.

Итак X_d — ограниченное замкнутое множество, т. е. компакт. ◁

§ 34. Предел и непрерывность отображений

34.1. Функции многих переменных. Перейдем к изучению функций $y = f(x)$, которые заданы на множествах X, лежащих в n-мерном пространстве и которые принимают числовые (вообще говоря, комплексные) значения. Поскольку точка x n-мерного пространства описывается n числами — своими координатами: $x = (x_1, ..., x_n)$, то вместо $f(x)$, $x \in X \subset R^n$, пишут также $f(x_1, ..., x_n)$, $(x_1, ..., x_n) \in X \subset R^n$, и называют функцию f *функцией n переменных* $x_1, ..., x_n$, каждая из которых принимает уже числовые значения. Если $n > 1$, то функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *функцией многих переменных*, а точка $(x_1, ..., x_n)$ и ее координаты $x_1, ..., x_n$ называются *агрументами* функции f.

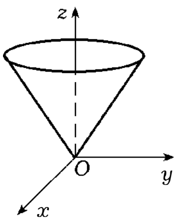

Рис. 132

Функции n переменных $f(x_1, ..., x_n)$, $(x_1, ..., x_n) \in X \subset R^n$, можно описывать при помощи их графиков. Если функция f принимает только действительные значения, то ее график

$$\{(x_1, ..., x_n, y)\colon\ (x_1, ..., x_n) \in X, \quad y = f(x_1, ..., x_n)\}$$

лежит в $(n + 1)$-мерном пространстве.

Функции $f(x, y)$ двух переменных можно достаточно наглядно изображать рисунком: их графики лежат в трехмерном пространстве. Графики функций, зависящих от более чем двух переменных, не обладают, конечно, такой интуитивно понятной геометрической интерпретацией. Эти функции приходится изучать более формальными методами, используя функции двух, а иногда и трех переменных лишь для геометрически наглядных аналогий.

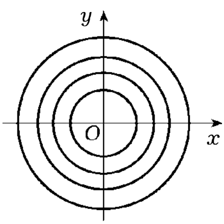

Рис. 133

На рис. 132 изображена часть графика функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{34.1}$$

О поведении функции $f(x, y)$ можно судить и по изображению ее *линий уровня* на плоскости переменных x, y, т. е.

множества точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнениям вида

$$f(x, y) = c,$$

где c — некоторое фиксированное число (часто бывает удобно брать числа, отличающиеся последовательно друг от друга на одно и то же значение). На рис. 133 изображены линии уровня функции (34.1): они являются окружностями

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Рассматриваются и множества уровней

$$f(x_1, ..., x_n) = c$$

функций f любого числа переменных.

В заключение заметим, что между множеством всех точек (x, y) плоскости и множеством всех комплексных чисел ξ существует взаимнооднозначное соответствие, задаваемое формулой

$$\xi = x + iy,$$

равносильной формулам (задающим обратное отображение)

$$x = \frac{\xi + \overline{\xi}}{2}, \quad y = \frac{\xi - \overline{\xi}}{2i}.$$

Поэтому каждую функцию двух действительных переменных можно рассматривать как функцию одного комплексного переменного.

Понятие числовой функции многих переменных является частным случаем понятия отображения множества из пространства R^n в пространство R^m. Чтобы в дальнейшем не повторять аналогичные рассуждения для числовых функций и отображений, перейдем сразу к изучению последних.

34.2 Предел отображений. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Тогда

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = |x - y|.$$

Здесь слева элементы x и y рассматриваются как точки, а справа — как векторы пространства R^n (см. п. 33.1). В силу этого равенства для обозначения расстояния между точками x и y правомерно наряду с обозначением $\rho(x, y)$ использовать и обозначение $|x - y|$. Так и будет делаться в дальнейшем для облегчения понимания аналогий в определениях ниже рассматриваемых понятий для отображений с соответствующими определениями для случая функций одной переменной.

Пусть R^n и R^m — соответственно n-мерное и m-мерное точечные пространства $X \subset R^n$, и отображение f отображает X в пространство R^m:

$$f\colon X \to R^m,$$

т. е. $y = f(x) \in R^m$, $x \in X \subset R^n$.

Если $m = 1$, а $n > 1$, то отображение f — числовая *функция многих переменных* $x_1, x_2, ..., x_n$: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если $m > 1$, то каждая координата y_i точки $y = f(x) \in R^m$ является числовой функцией точки x. Обозначим эти функции f_j, $j = 1, 2, ..., m$:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)).$$

Функции $f_j : X \to R$ называются *координатными функциями* отображения f. Они являются, вообще говоря (а точнее при $n > 1$), функциями многих переменных.

Опеределим понятие предела отображений, которое является обобщением понятия предела функций одной пременной.

Пусть $x^{(0)}$ и a — конечные или бесконечно удаленные точки соответственно пространств R^n и R^m. Для $n = 1$ или $m = 1$ в случае бесконечно удаленных точек $x^{(0)}$ и a они могут быть и бесконечностями со знаком: $+\infty$ или $-\infty$. Пусть еще точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества X.

Определение 1. Точка a называется *пределом отображения* $f : X \to R^m$, $X \subset R^n$, *при* $x \to x^{(0)}$ (или: *в точке* $x = x^{(0)}$), если для любой последовательности $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, ...$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, имеет место равенство

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x^{(k)}) = a.$$

Для предела отображения f в точке $x^{(0)}$ используется обозначение

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x).$$

В символической записи определение предела отображения выглядит так:

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x^{(k)} \in X, \quad k = 1, 2, ..., \quad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = a. \qquad (34.2)$$

По аналогии с пределом функции одной переменной определение предела отображения можно сформулировать в терминах окрестностей.

Определение 1′. Точка a называется *пределом отображения* $f : X \to R^m$, $X \subset R^n$, *при* $x \to x^{(0)}$ (или: *в точке* $x = x^{(0)}$), если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что

$$f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(a).$$

В символической записи:

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U(a)\ \exists U(x^{(0)}):\ f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(a). \qquad (34.3)$$

Иначе говоря,

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U(a)\ \exists U(x^{(0)})\ \forall x \in X \cap U(x^{(0)}) \ \Rightarrow\ f(x) \in U(a). \tag{34.4}$$

Определения 1 и 1′ предела отображения равносильны. Действительно, из сравнения записей определений предела функций одной переменной (6.4) в п. 6.1 и (6.10) в п. 6.3 с определениями (34.2) и (34.3) предела отображений видно, что они полностью совпадают по форме записи (только точка, в которой берется предел, обозначается теперь $x^{(0)}$, а не x_0, так как нижний индекс обозначает в пространственном случае номер координаты точки). Поэтому доказательство равносильности двух определений предела функций одной переменной (см. теорему 1 в п. 6.3) дословно переносится на случай пределов отображений, если только под точками и окрестностями понимать точки и окрестности в пространстве.

Наряду с записью $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x)$ для предела отображения f в точке $x^{(0)}$ употребляются как равноправные записи

$$\lim_{x-x^{(0)}\to 0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{|x-x^{(0)}|\to 0} f(x).$$

Если $x^{(0)}$ и a — конечные точки пространств R^n и R^m, то, рассматривая элементы этих пространств как векторы, определение (34.4) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X,\ |x - x^{(0)}| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - a| < \varepsilon. \tag{34.5}$$

На этом примере еще раз хорошо видно, как разумно выбраны обозначения в многомерных пространствах: формула (34.5) по записи ничем не отличается от случая числовых функций одной переменной. Но, конечно, в случае числовых функций одной переменной $|x - x^{(0)}|$ и $|f(x) - a|$ означают абсолютные величины чисел, а в формуле (34.5) — расстояния между точками в n-мерном и m-мерном пространствах.

Поскольку функции многих переменных являются частным случаем рассматриваемых отображений, то определение предела отображения содержит в себе, в частности, определение предела числовых функций.

С другой стороны, из определения (34.3) видно, что понятие предела отображения сводится к понятию предела числовой функции $|f(x) - a|$ при $a \in R^m$ и функции $|f(x)|$ при $a = \infty$:

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x^{(0)}} |f(x) - a| = 0, \quad a \in R^m,$$

и

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x^{(0)}} |f(x)| = \infty.$$

Укажем еще на одну связь понятий пределов числовых функций и пределов отображений из R^n в R^m.

Если $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$, т. е. является конечной точкой пространства R^m, а $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, $f\colon X \to R^m$, $X \subset R^n$, то из неравенства

$$|f_j(x) - a_j| \leqslant \sqrt{(f_1(x) - a_1)^2 + (f_2(x) - a_2)^2 + ... + (f_m(x) - a_m)^2} = \\ = |f(x) - a|, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

следует, очевидно, что равенство $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = a$ имеет место тогда и только тогда, когда для всех $j = 1, 2, ..., m$ имеют место равенства

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f_j(x) = a_j.$$

В символической записи:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a \Leftrightarrow \forall j = 1, 2, ..., m\colon \lim_{x \to x^{(0)}} f_j(x) = a_j. \tag{34.6}$$

В этом смысле понятие предела рассматриваемых отображений снова сводится к понятию предела числовых функций — предела его координатных функций.

Если отображение f задано на множестве $X \subset R^n$, $E \subset X$ и $x^{(0)}$ — точка прикосновения (конечная или бесконечно удаленная) множества E, то предел в точке $x^{(0)}$ сужения f_E отображения f на множество E называется *пределом* $\lim\limits_{x \to x^{(0)}, x \in E} f(x)$ *отображения* f *по множеству* E. Таким образом,

$$\lim_{x \to x^{(0)}, x \in E} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f_E(x). \tag{34.7}$$

Очевидно, что если в точке $x^{(0)}$ существует предел $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, то в этой точке существуют и пределы отображения f по любым множествам $E \subset X$, для которых точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения, и все эти пределы равны между собой.

В случае $n > 1$ в качестве множества E часто берутся кривые, прямые или лучи, проходящие через точку $x^{(0)}$ или их пересечения с отображаемым множеством X. Естественно, что при рассмотрении пределов отображения по разным подмножествам множества X в случае, когда предела по самому множеству X не существует, могут получаться разные результаты.

Если множество X содержит окрестность или проколотую окрестность точки $x^{(0)}$ и множество E является пересечением множества X с некоторой прямой (кривой) Γ, проходящей через точку $x^{(0)}$ ($E = X \cap \Gamma$), то предел отображения f в точке $x^{(0)}$ по множеству E называется *пределом отображения* f *в точке* $x^{(0)}$ *по прямой* (*кривой*) Γ.

Пределы же отображения f в точке $x^{(0)}$ по всей окрестности или по всей проколотой окрестности называются *всесторонними пределами.*

Если Γ — луч с вершиной в точке $x^{(0)}$, а l — вектор, сонаправленный этому лучу, то предел отображения f в точке $x^{(0)}$ по пересечению луча Γ с множеством, на котором задано отображение, называется также *пределом этого отображения в точке $x^{(0)}$ по направлению, противоположному вектору l.*

Пример. Пусть $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат $(0,\ 0)$. Исследуем существование пределов у этой функции в точке $(0,\ 0)$ по различным направлениям и по параболе $y = x^2$. Уравнение луча с вершиной в начале координат, параллельного вектору (a,b), $a^2+b^2>0$, имеет вид

$$x = at, \quad y = bt, \quad t > 0.$$

Поэтому вдоль этого луча имеем

$$f(at,bt) = \frac{a^2bt}{a^4t^2+b^2} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

т. е. у функции $f(x,y)$ в точке $(0,\ 0)$ существует предел по любому направлению, и он равен нулю.

Если же $y = x^2$, то $f(x,x^2) \equiv 1/2$, и, следовательно, предел в точке $(0,\ 0)$ вдоль параболы $y = x^2$ также существует, но равен $1/2$.

Из сказанного, очевидно, следует, что у функции f не существует всестороннего предела в точке $(0,\ 0)$.

34.3. Непрерывность отображений в точке. При рассмотрении предела отображения в данной точке эта точка может как принадлежать отображаемому множеству, так и не принадлежать ему.

Если $f\colon X \to R^m$, $X \subset R^n$, $x^{(0)} \in X$ и существует предел $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.

Действительно, выбрав стационарную последовательность

$$x^{(k)} = x^{(0)} \in X, \quad k = 1, 2, ..., \tag{34.8}$$

получим согласно определению (34.2)

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) \underset{(34.2)}{=} \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) \underset{(34.8)}{=} \lim_{k\to\infty} f(x^{(0)}) = f(x^{(0)}). \tag{34.9}$$

Определение 2. Если предел отображения в точке равен его значению в этой точке, то отображение называется *непрерывным в ней.*

Иначе говоря, равенство

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}) \tag{34.10}$$

является определением непрерывности отображения в точке.

В символической записи определение непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ выглядит в силу (34.5) следующим образом:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\,x\in X,\quad |x-x^{(0)}|<\delta\colon\ |f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon. \tag{34.11}$$

В терминах окрестностей определение указанной непрерывности выглядит следующим образом:

$$\forall\,U(f(x^{(0)}))\ \exists\,U(x^{(0)})\colon\ f(X\cap U(x^{(0)})\subset U(f(x^{(0)})). \tag{34.12}$$

Таким образом, понятие непрерывности отображения является частным случаем понятия предела отображения.

Если $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\Delta x_i=x_i-x_i^{(0)}$, $i=1,2,...,n$, $\Delta x=(\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n)$, $\Delta y=f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)})$, то, перенеся в равенстве (34.10) значение $f(x^{(0)})$ в левую его часть под знак предела, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0, \tag{34.13}$$

что, таким образом, является другой записью определения непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$.

Если $f(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_m(x))$, то из (34.6) при $a=f(x^{(0)})$ следует, что отображение непрерывно в некоторой точке в том и только том случае, когда все его координатные функции f_j непрерывны в этой точке.

Ясно, что если отображение непрерывно в какой-либо точке, то и его сужение по каждому множеству, содержащему эту точку, непрерывно в ней.

Отображение $f\colon X\to \mathbf{R}^m$ называется *непрерывным в точке* $x^{(0)}$ *по некоторому множеству* E, $x^{(0)}\in E\subset X$, если сужение f_E отображения f на множество E непрерывно в этой точке.

Если отображения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ отображают множество $X\subset \mathbf{R}^n$ в пространство $\mathbf{R}^m$ и $x^{(0)}$ является конечной или бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X, то отображение $\beta(x)$ называют *бесконечно малым по сравнению с отображением* $\alpha(x)$ *при* $x\to x^{(0)}$ и пишут

$$\beta=o(\alpha),\quad x\to x^{(0)}, \tag{34.14}$$

если существует такая числовая функция $\varepsilon(x)$, также определенная на множестве X, что

$$\beta(x)=\varepsilon(x)\,\alpha(x),\quad x\in X, \tag{34.15}$$

$$\lim_{x\to x^{(0)}}\varepsilon(x)=0. \tag{34.16}$$

Если $x^{(0)}\in X$, то из условия (34.16) следует (см. (34.9)), что

$$\varepsilon(x^{(0)})=0.$$

З а м е ч а н и е. Аналогично случаю функций одной переменной понятие предела функции многих переменных обобщается и на случай функций, принимающих комплексные значения. Пусть $x^{(0)}$ — конечная или бесконечно удаленная точка прикосновения множества $X \subset R^n$, а w_0 — конечная или бесконечно удаленная точка комплексной плоскости C. Для функции f, заданной на множестве X, $f\colon X \to C$, определение предела

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = w_0 \tag{34.17}$$

можно сформулировать как в терминах последовательностей, так и в терминах окрестностей. Например, в терминах последовательностей это определение имеет следующий вид.

Существование предела (34.17) означает, что для любой последовательности точек $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, выполняется равенство $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = w_0$.

Если $f(x) = u(x) + iv(x)$, $w_0 = u_0 + iv_0 \in C$, $u(x), v(x), u_0, v_0 \in R$, $x \in X$, то предел (34.17) существует в том и только том случае, когда существуют пределы

$$\lim_{x \to x^{(0)}} u(x) = u_0, \qquad \lim_{x \to x^{(0)}} v(x) = v_0.$$

Если $x^{(0)} \in X$ и $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$, то функция f называется *непрерывной в точке* $x^{(0)}$.

Как и в случае функций, принимающих действительные значения, для непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ и принадлежность точки $x^{(0)}$ множеству X, на котором задана функция f.

Очевидно, что функция $f(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in X$, непрерывна в точке $x^{(0)}$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны функции $u(x)$ и $v(x)$.

34.4. Свойства пределов отображений. Поскольку определение предела и непрерывности отображений дословно совпадают с соответствующими определениями для функций одной переменной, то для случая отображений сохраняются многие свойства пределов функций и свойства непрерывных функций, доказанные в §. Если элементы пространства R^n рассматривать как векторы, то их можно складывать и умножать на числа. Аналогично случаю числовых функций одной переменной доказывается, что если $f\colon X \to R^m$, $g\colon X \to R^m$, $X \subset \subset R^n$, $\lambda \in R$, $\mu \in R$ и если существуют пределы $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} g(x)$, то существует и предел

$$\lim_{x \to x^{(0)}} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \to x^{(0)}} f(x) + \mu \lim_{x \to x^{(0)}} g(x).$$

Если f и g — числовые функции, т. е. если $m = 1$, то для их пределов имеют место свойства, аналогичные свойствам пределов функций одной переменной, связанные с неравенствами, с произведением и делением функций (см. п. 6.7). Формулировка этих свойств и их доказательства остаются прежними, следует только под множествами понимать множества, лежащие в n-мерном пространстве.

Конечно, при $n > 1$ на случай отображений непосредственно не обобщаются утверждения о пределах функций одной переменной, связанные с упорядочностью их аргумента, т. е. утверждения об односторонних пределах и пределах монотонных функций.

34.5. Предел и непрерывность композиции отображений. Пусть n, m и p — произвольные, вообще говоря, различные натуральные числа, $X \subset R^n$, f — отображение множества X в множество $Y \subset R^m$, а g — отображение Y в пространство R^p, т. е.

$$f: X \to Y \subset R^m, \quad X \subset R^n, \quad g: Y \to R^p.$$

В этом случае имеет смысл композиция $g \circ f$ отображений f и g, задаваемая, как известно (см. п. 1.2), формулой

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X. \tag{34.18}$$

В этой ситуации отображение $y = f(x)$ часто называют *заменой переменной* в отображении $g(y)$.

Пусть $x^{(0)}, y^{(0)}$ и $z^{(0)}$ — конечные или бесконечно удаленные точки соответственно пространств R^n, R^m и R^p, причем если какое-то из чисел n, m или p равно 1, то соответствующая ему из указанных точка может быть и бесконечностью со знаком.

Теорема 1. *Если имеет смысл композиция $g(f(x))$, $x \in X$, и существуют пределы*

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = y^{(0)}, \tag{34.19}$$

$$\lim_{y \to y^{(0)}} g(y) = z^{(0)}, \tag{34.20}$$

то существует и предел

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) = z^{(0)}. \tag{34.21}$$

Объединив формулы (34.20) и (34.21), получим формулу

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y), \tag{34.22}$$

которая показывает, что в предельном переходе $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} g(y)$ при сделанных предположениях можно делать замену переменной $y = f(x)$. В случае $p = 1$ эта формула является формулой замены переменной в предельном переходе для числовой функции g от m переменных, $m = 1, 2, \ldots$

С л е д с т в и е. *Если отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in X \subset \subset R^n$, а отображение g непрерывно в точке $y^{(0)} = f(x^{(0)}) \in R^m$, то их композиция $g(f(x))$ также непрерывна в точке $x^{(0)}$.*

Короче: композиция непрерывных отображений непрерывна.

$\triangleright$ Пусть $\{x^{(k)}\}$ — такая последовательность точек из R^n, что

$$x^{(k)} \in X, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{34.23}$$

Тогда в силу условия (34.19) будем иметь

$$y^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} f(x^{(k)}) \to y^{(0)} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{34.24}$$

Поэтому согласно предположению (34.20)

$$\lim_{k \to \infty} g(y^{(k)}) = z^{(0)}. \tag{34.25}$$

Таким образом,

$$\lim_{k \to \infty} g(f(x^{(k)})) = z^{(0)}. \tag{34.26}$$

Поскольку последовательность $\{x^{(k)}\}$ является произвольной последовательностью, удовлетворяющей условиям (34.23), то равенство (34.26) согласно определению предела отображения и означает справедливость формулы (34.21). $\triangleleft$

Для доказательства следствия достаточно заметить, что точка $x^{(0)}$ принадлежит области определения композиции $g(f(x))$ отображений f и g и, так как согласно теореме это отображение имеет конечный предел в точке $x^{(0)}$, то эта композиция непрерывна в $x^{(0)}$.

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях теоремы 1 отображение g непрерывно в точке $y^{(0)}$:

$$\lim_{y \to y^{(0)}} g(y) = g(y^{(0)}), \tag{34.27}$$

то

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) = g\Big(\lim_{x \to x^{(0)}} f(x)\Big), \tag{34.28}$$

т. е., как и в случае функций одной переменной, операция взятия непрерывного отображения перестановочна с предельным переходом.

В самом деле,

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) \underset{(34.22)}{=} \lim_{y \to y^{(0)}} g(y) \underset{(34.27)}{=} g(y^{(0)}) \underset{(34.19)}{=} g\Big(\lim_{x \to x^{(0)}} f(x)\Big).$$

З а м е ч а н и е 2. Если отображение $y = f(x)$ отображает некоторую окрестность U точки $x^{(0)} \in R^n$ в пространство R^m, а отображение $z = g(y)$ — некоторую окрестность V точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ в какое-то пространство R^p, причем отображение f непрерывно в точке $x^{(0)}$, то существует такая окрестность U_0 точки $x^{(0)}$ в пространстве R^n, что на ней определена композиция $g \circ f$ отображений g и f.

В самом деле, в силу непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ для указанной окрестности V согласно (34.12) существует такая окрестность $U_0 \subset U$ точки $x^{(0)}$, что $f(U_0) \subset V$. Очевидно, что композиция $g \circ f$ определена на окрестности U_0 точки $x^{(0)}$.

Элементарной функцией многих переменных называется функция, которая может быть получена из этих переменных с помощью композиций основных элементарных функций и четырех арифметических действий. Так как все эти операции не выводят из класса непрерывных функций, то справедлива следующая

Теорема 2. *Всякая элементарная функция многих переменных непрерывна на множестве своего определения.*

34.6. Повторные пределы. Для отображений $f\colon X \to R^m$, $X \subset R^n$, при $n > 1$ наряду с определением предела в смысле определения 1 можно рассматривать пределы другого вида, а именно связанные с последовательным переходом к пределу по разным координатам точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, т. е. пределы вида

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^{(0)}} \lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^{(0)}} \ldots \lim_{x_{i_n} \to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где $(i_1, i_2, ..., i_n)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, ..., n$, а отображение f определено, например, в некоторой проколотой или обычной окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$. Такие пределы называются *повторными пределами.*

Аналогично пределу в смысле определения 2 повторные пределы отображения сводятся к повторным пределам координатных функций этого отображения. Поэтому ограничимся рассмотрением примеров только повторных пределов числовых функций.

Пример 1. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} + y \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0, \text{ т. е. если } xy \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0, \text{ т. е. если } xy = 0. \end{cases}$$

Исследуем различные пределы функции f в точке $(0,\ 0)$. Очевидно, что у этой функции в точке $(0,\ 0)$ существует предел по всему множеству ее задания, и, более того, она непрерывна в этой точке:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Что же касается повторных пределов

$$\lim_{y \to 0} \Big(\lim_{x \to 0} f(x, y) \Big), \quad \lim_{x \to 0} \Big(\lim_{y \to 0} f(x, y) \Big),$$

то они не существуют, так как уже не существуют пределы

$$\lim_{x\to 0} y \sin\frac{1}{x}, \quad y \neq 0,$$

$$\lim_{y\to 0} x \sin\frac{1}{y}, \quad x \neq 0,$$

а

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}\right) = 0, \quad y \neq 0, \qquad \text{и} \qquad \lim_{y\to 0}\left(y\sin\frac{1}{x}\right) = 0, \quad x \neq 0.$$

Пример 2. Для функции $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, заданной этой формулой на всей плоскости, кроме начала координат, оба повторных предела в точке (0, 0) существуют и равны нулю:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Что же касается всестороннего предела функции f в точке (0, 0), то он не существует, так как ее пределы в этой точке вдоль координатных осей равны 0, а вдоль прямой $y = x$ ее предел равен 1/2, ибо $f(x, x) \equiv 1/2,\ x \neq 0$.

§ 35. Непрерывные отображения множеств

35.1. Непрерывные отображения компактов. Равномерная непрерывность отображений. Отображение, непрерывное в каждой точке отображаемого множества, называется *непрерывным на этом множестве.*

Докажем несколько теорем, являющихся обобщениями доказанных ранее теорем о непрерывных на отрезках функциях (см. § 7).

Теорема 1. *Непрерывный образ компакта является компактом.*

Следствие. *Числовая непрерывная на компакте функция ограничена и достигает своих экстремальных* (*наибольшего и наименьшего*) *значений.*

▷ Пусть множество X является компактом, $X \subset R^n$ и отображение $f\colon X \to R^n$ непрерывно на X. Покажем, что из любой последовательности точек образа $f(X)$ компакта X можно выделить сходящуюся к точке из $f(X)$ подпоследовательность. Это и будет означать, что множество $f(X)$ — компакт.

Пусть $y^{(k)} \in f(X)$. Тогда существуют такие точки $x^{(k)} \in X$, что $f(x^{(k)}) = y^{(k)},\ k = 1, 2, \ldots$ Поскольку множество X — компакт, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(k_j)}\}$ последовательности $\{x^{(k)}\}$, предел которой принадлежит множеству X: $\lim\limits_{j\to\infty} x^{(k_j)} = x^{(0)} \in X$. Пусть $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

В силу непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ имеем

$$\lim_{j\to\infty} y^{(k_j)} = \lim_{j\to\infty} f(x^{(k_j)}) = f(x^{(0)}) = y^{(0)}.$$

Таким образом, подпоследовательность $\{y^{(k_j)}\}$ последовательности $\{y^{(k)}\}$ сходится к точке $y^{(0)} \in f(X)$.

Докажем следствие.

Если $f: X \to R$, X — компакт, $X \subset R^n$, то в силу доказанной теоремы множество $f(X)$ является компактом на числовой оси, т. е. ограниченным и замкнутым числовым множеством. В силу своего определения нижняя и верхняя грани множества являются точками прикосновения этого множества. Из ограниченности множества $f(X)$ следует, что его нижняя и верхняя грани конечны. Поскольку $f(X)$ — замкнутое множество, то они содержатся в нем. Это означает, что функция f достигает на компакте X наибольшего и наименьшего значений. Ясно, что отсюда следует и ее ограниченность. $\lhd$

Замечание. Если функция определена на некотором множестве X n-мерного пространства и ее значениями являются комплексные числа, то она называется ограниченной на этом множестве, если на нем ограничена ее абсолютная величина.

Таким образом, ограниченность комплекснозначной функции сводится к ограниченности функции, принимающей только действительные значения, — ее абсолютной величине. Из этого в силу теоремы 1 сразу следует, что всякая комплекснозначная функция, непрерывная в каждой точке некоторого компакта, ограничена на нем.

Равномерная непрерывность. В п. 7.4 было введено понятие равномерно непрерывной функции на отрезке. Это определение можно обобщить на случай отображений $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$. Если отображение f непрерывно на множестве X, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x \in X$ существует такое $\delta > 0$ (тем самым зависящее от ε и x), что для всех точек $x' \in X$, для которых $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Как и в случае функций одной переменной отказ от зависимости числа δ от точки множества приводит к понятию равномерной непрерывности.

Определение 3. Отображение $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x \in X$ и $x' \in X$ таких, что $|x' - x| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

В символической записи это определение выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in X, \quad |x' - x| < \delta: \ |f(x') - f(x)| < \varepsilon, \tag{35.1}$$

т. е. снова повторение записи определения равномерной непрерывности функции одной переменной (см. (7.22)).

Вспомнив определение диаметра множества (см. определение 7 в п. 33.2) по аналогии со случаем числовых функций одной переменной легко убедиться, что определение равномерной непрерывности отображения можно сформулировать следующим образом.

Определение 3$'$. Отображение $f\colon X \to R^m$, $X \subset R^n$, называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого множества $E \subset X$ диаметра, меньшего чем δ: $\operatorname{diam} X < \delta$, выполняется неравенство

$$\operatorname{diam} f(E) < \varepsilon.$$

Диаметр $\operatorname{diam} f(E)$ образа множества $E \subset X$ при отображении f называется *колебанием* $\omega(f; E)$ этого отображения на множестве E, т. е.

$$\omega(f; E) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{diam} f(E). \tag{35.2}$$

В этих терминах определение (35.1) равномерной непрерывности отображения в символической записи имеет вид

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall E \in X, \ \operatorname{diam} E < \delta\colon \omega(f; E) < \varepsilon. \tag{35.3}$$

Теорема 2. *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.*

Следствие. *Если числовая функция непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нем.*

$\triangleright$ Если $f\colon X \to R^m$ — непрерывное отображение компакта $X \subset R^n$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x \in X$ существует такое $\delta_x > 0$, что для всех точек $x' \in X$, удовлетворяющих условию $|x' - x| < \delta_x$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.4}$$

Система всех сферических окрестностей $\Omega = \{U(x; \delta_x)\}$, $x \in X$, образует покрытие компакта X. Если δ — лебегово число этого покрытия (см. теорему 4 в п. 33.4), то для любых точек $x' \in X$ и $x'' \in X$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, найдется такой элемент покрытия Ω, обозначим его $U(x^{(0)}; \delta_{x^{(0)}})$, что $x' \in U(x^{(0)}; \delta_{x^{(0)}})$ и $x'' \in U(x^{(0)}; \delta_{x^{(0)}})$, а поэтому

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant |f(x'') - f(x^{(0)})| + |f(x^{(0)}) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность отображения f. $\triangleleft$

Следствие является частным случаем теоремы при $m = 1$. Для функций, непрерывных на отрезке, оно было доказано в п. 7.4.

В теореме 2 требование того, что отображаемое множество является компактом, существенно. Например, непрерывная и ограниченная на конечном интервале $(0,\ 1)$ функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной, так как при любом $n = 1, 2, \ldots$ имеем $\operatorname{diam} f\Big(\Big(0, \dfrac{1}{n}\Big)\Big) = 2$.

В самом деле, с одной стороны для любых $x', x'' \in (0,1)$ для функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ имеет место неравенство

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\sin\frac{1}{x''} - \sin\frac{1}{x'}\right| \leqslant \left|\sin\frac{1}{x''}\right| + \left|\sin\frac{1}{x'}\right| = 2.$$

С другой — для любого $n \in \boldsymbol{N}$ найдется такое $m \in \boldsymbol{N}$, что

$$0 < \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi m} < \frac{1}{n}, \quad 0 < \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi m} < \frac{1}{n}. \tag{35.5}$$

А тогда при $x' = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi m}$, $x'' = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi m}$ будем иметь

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\right| = 2 \ \text{ и } \ x', x'' \in \Big(0, \frac{1}{n}\Big).$$

Это и означает, что $\operatorname{diam} f\Big(\Big(0, \dfrac{1}{n}\Big)\Big) = \sup\limits_{x', x'' \in (0,1)} |f(x'') - f(x')| = 2$ и, следовательно, сколь угодно малым по диаметру множествам $E = \Big(0, \dfrac{1}{n}\Big)$ не соответствуют достаточно малые по диаметру множества $f(E)$.

35.2. Непрерывное отображение линейно связных множеств. Прежде всего докажем следующую простую теорему.

Теорема 3. *Непрерывный образ линейно связного множества является линейно связным множеством.*

$\triangleright$ Пусть X — линейно связное множество, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и f — его непрерывное отображение в пространство $\boldsymbol{R}^m$. Пусть $Y = f(X)$ и $y' \in Y$, $y'' \in Y$. Тогда существуют такие точки $x' \in X$ и $x'' \in X$, что $f(x') = y'$, $f(x'') = y''$. В силу линейной связности множества X существует такая кривая $\Gamma = \{x(t); a \leqslant t \leqslant b\}$, что $x(a) = x'$, $x(b) = x''$, и для всех $t \in [a, b]$ выполняется включение $x(t) \in X$. Очевидно, что кривая $f(\Gamma) = \{f(x(t)); a \leqslant t \leqslant b\}$ соединяет точки y' и y'' в множестве Y, т. е. $f(x(a)) = f(x') = y'$, $f(x(b)) = f(x'') = y''$, и для всех $t \in [a, b]$ выполняется включение $f(x(t)) = f(x) \in Y$. Это и означает, что множество Y линейно связно. $\triangleleft$

Докажем теперь теорему о непрерывных числовых функциях на линейно связных множествах, обобщающую теорему Коши о промежуточных значениях непрерывных на отрезке функций.

Теорема 4. *Функция, непрерывная на линейно связном множестве, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.*

Следствие. *Функция, непрерывная на замыкании линейно связного множества, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.*

$\triangleright$ Докажем теорему. Пусть X — линейно связное множество, $X \subset \subset R^n$, функция f непрерывна на X, $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и, например, $a < c < b$. В силу линейной связности множества X существует такая кривая $\Gamma = \{x(t);\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, лежащая в X, что $x^{(1)}$ является началом, а $x^{(2)}$ — ее концом:

$$x(\alpha) = x^{(1)}, \quad x(\beta) = x^{(2)}, \quad x(t) \in X, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{35.6}$$

Функция $F(t) = f(x(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ как композиция непрерывных функций $f(x)$ и $x(t)$. Кроме того,

$$F(\alpha) = f(x(\alpha)) \underset{(35.6)}{=} f(x^{(1)}) = a, \quad F(\beta) = f(x(\beta)) \underset{(35.6)}{=} f(x^{(2)}) = b.$$

Поэтому, в силу теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывных на отрезке функций (п. 7.2), существует такое $t_0 \in [\alpha, \beta]$, что $F(t_0) = c$. Полагая $x^{(0)} = x(t_0)$, получим $f(x^{(0)}) = f(x(t_0)) = F(t_0) = c$. $\triangleleft$

$\triangleright$ Докажем следствие. Пусть функция f непрерывна на замыкании $\overline{X}$ линейно связного множества $X \subset R^n$, $x^{(1)} \in \overline{X}$, $x^{(2)} \in \overline{X}$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и, например, $a < c < b$. В силу непрерывности функции f в точке $x^{(1)}$ для $\varepsilon = c - a > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \overline{X} \bigcap U(x^{(1)}; \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < c - a$ и, следовательно, неравенство

$$f(x) < c. \tag{35.7}$$

Поскольку $x^{(1)}$ — точка прикосновения множества X, то в ее δ-окрестности $U(x^{(1)}; \delta)$ существует точка $y^{(1)}$, принадлежащая X:

$$y^{(1)} \in X \bigcap U(x^{(1)}; \delta).$$

Для нее в силу (35.7) выполняется неравенство

$$f(y^{(1)}) < c. \tag{35.8}$$

Аналогично, существует и такая точка $y^{(2)} \in X$, что

$$f(y^{(2)}) > c. \tag{35.9}$$

Таким образом, $f((y^{(1)}) < c < f((y^{(2)})$, и мы находимся в условиях теоремы 2, и потому из условий (35.8) и (35.9) следует, что существует такая точка $x^{(0)} \in X$, что

$$f((x^{(0)}) = c. \ \triangleleft$$

Замечание. Из теоремы 4 и ее следствия вытекает, в частности, что функция, непрерывная на области или ее замыкании (п. 33.3), принимая какие-либо два значения, принимает и все промежуточные.

Упражнение. Построить пример линейно связной области, замыкание которой не является линейно связным.

35.3. Непрерывные отображения: общие свойства. При непрерывных отображениях образ открытого множества не является, вообще говоря, открытым, а замкнутого — замкнутым. Это видно уже на примере числовых функций одной переменной. Так отображение $y = \sin x$ отображает интервал $(0, \pi)$ — открытое множество — на полуинтервал $(0, 1]$, который не является открытым множеством, а отображение $y = \operatorname{arctg} x$ отображает числовую прямую — замкнутое множество — на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, не являющийся замкнутым множеством. То, что в последнем примере в качестве замкнутого множества взято неограниченное множество не является случайным, так как ограниченное замкнутое множество, будучи компактом, согласно теореме 1 при непрерывном отображении отображается в компакт и, следовательно, в замкнутое множество. Покажем, что для прообразов открытых и замкнутых множеств дело обстоит иначе.

Лемма. *Если отображение $f: G \to R^m$, $G \subset R^n$, задано на открытом множестве G, то оно непрерывно в точке $x^{(0)} \in G$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности V точки $f(x^{(0)})$ существует такая окрестность U точки $x^{(0)}$, что*

$$f(U) \subset V. \tag{35.10}$$

Таким образом, в отличие от общего случая (см. (34.12)) здесь можно не брать пересечение окрестности точки $x^{(0)}$ с отображаемым множеством G. (Это уже было использовано в замечании 2 п. 34.5.)

▷ Если $f: G \to R^m$, где G — открытое в пространстве R^n множество, и отображение f непререрывно в точке $x^{(0)} \in G$, т. е. $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$, то согласно определению $1'$ предела для любой окрестности V точки $f(x^{(0)})$ существует такая окрестность U_0 точки $x^{(0)}$, что для нее выполняется условие (34.12), т. е. в данном случае

$$f(G \cap U_0) \subset V.$$

Поскольку пересечение $U = G \cap U_0$ открытых множеств G и U_0 является открытым множеством и содержит точку $x^{(0)}$, то оно также является окрестностью этой точки и $f(U) \subset V$. Включение (35.10) доказано.

Обратное утверждение, т. е. что из выполнения условия (35.10) следует непрерывность отображения f в точке $x^{(0)}$, следует непосредственно из определения непрерывности (34.12), так как $U \subset G$ и, следовательно, $G \cap U = U$. ◁

Теорема 5. *Отображение $f : G \to R^m$ открытого множества $G \subset R^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества является открытым множеством.*

$\triangleright$ Если отображение f непрерывно на открытом множестве G, V — открытое в R^m множество и $x \in f^{-1}(V)$, то V является окрестностью точки $y = f(x) \in V$. Согласно лемме существует такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$ и, следовательно, $U \subset f^{-1}(V)$, т. е. для каждой точки прообраза $f^{-1}(V)$ открытого множества V существует ее окрестность, содержащаяся в этом прообразе. Это и означает, что множество $f^{-1}(V)$ является открытым.

Пусть теперь при отображении f прообраз всякого открытого множества — открытое множество и $x \in G$. Тогда какова бы ни была окрестность V точки $f(x)$ она, будучи открытым множеством, имеет своим прообразом

$$U = f^{-1}(V) \tag{35.11}$$

также открытое множество, которое поэтому является окрестностью точки $x \in U$. Из равенства (35.11) следует, что $f(U) = V$, и, следовательно, отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in G$. $\triangleleft$

Теорема 6. *Отображение $f : X \to R^m$ замкнутого множества $X \subset R^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого замкнутого множества является замкнутым множеством.*

$\triangleright$ Пусть отображение f непрерывно на замкнутом множестве X, Y — замкнутое множество в пространстве R^m и x — точка прикосновения прообраза

$$f^{-1}(Y) \subset X \tag{35.12}$$

множества Y:

$$x \in \overline{f^{-1}(Y)}. \tag{35.13}$$

Множество X замкнуто: $X = \overline{X}$, поэтому

$$x \underset{(35.13)}{\in} \overline{f^{-1}(Y)} \underset{(35.12)}{\subset} \overline{X} = X$$

и, следовательно, отображение f определено в точке x.

Покажем, что $f(x) \in Y$. Из того, что x — точка прикосновения множества $f^{-1}(Y)$, следует, что существует такая последовательность точек

$$x^{(k)} \in f^{-1}(Y), \quad k = 1, 2, ..., \tag{35.14}$$

что

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x.$$

Последовательность $y^{(k)} = f(x^{(k)})$, $k = 1, 2, ...$, имеет предел, так как в силу непрерывности отображения f в точке x имеем

$$\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x). \tag{35.15}$$

Поскольку множество Y замкнуто и $y^{(k)} = f(x^{(k)}) \in Y$, то $f(x) \underset{(35.15)}{\in} Y$, а следовательно, $x \in f^{-1}(Y)$. Это и означает замкнутость множества $f^{-1}(Y)$.

Пусть теперь $f: X \to R^m$ — отображение замкнутого множества $X \subset R^n$, при котором прообраз всякого замкнутого множества также является замкнутым множеством. Пусть $x \in X$ и V — какая-либо окрестность точки $y = f(x)$ в пространстве R^m. Поскольку V — открытое множество, то множество $R^m \setminus V$ является замкнутым и, следовательно, замкнутым будет и его прообраз $f^{-1}(R^m \setminus V)$. Поэтому дополнение $U = R^n \setminus f^{-1}(R^m \setminus V)$ в пространстве R^n этого прообраза является открытым множеством.

Поскольку $f(x) \in U$, то $f(x) \notin R^m \setminus V$. Поэтому $x \notin f^{-1}(R^m \setminus V)$, следовательно, $x \in R^n \setminus f^{-1}(R^m \setminus V) = U$. Множество U, будучи открытым множеством, является окрестностью точки x.

Из равенства $U = R^n \setminus f^{-1}(R^m \setminus V)$ имеем $f(U \bigcap X) \bigcap (R^m \setminus V) = \varnothing$, т. е. $f(U \bigcap X) \subset V$. Это означает, что отображение f непрерывно в точке x. $\triangleleft$

§ 36. Частные производные. Дифференцируемость функций многих переменных

36.1. Частные производные. Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Тогда, например, *частной производной* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ в точке $x^{(0)}$ называется обычная производная $\dfrac{df}{dx_1}$ в точке $x_1^{(0)}$ функции, получающейся из данной фиксированием всех аргументов: $x_2 = x_2^{(0)}$, ..., $x_n = x_n^{(0)}$, кроме первого, т. е. функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Таким образом,

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}}.$$

Вспомнив определение производной функции одной переменной и положив

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^{(0)},$$

$$\Delta_{x_1} f(x^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} f(x_1^{(0)} + \Delta x_1,\, x_2^{(0)},\, \ldots,\, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\, \ldots,\, x_n^{(0)}),$$

получим

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^{(0)})}{\Delta x_1}.$$

($\Delta_{x_1} f(x^{(0)})$ называется *приращением функции f в точке $x^{(0)}$ по переменной x_1*). Правильнее было бы писать не $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}$, а $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)})$, так как $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ есть единый символ для обозначения частной производной, но обычно по традиции употребляется первое обозначение.

Аналогично определяются частные производные функции f по другим переменным $x_2, ..., x_n$.

Отметим, что из существования у функции всех частных производных в точке не следует непрерывность этой функции в рассматриваемой точке. Это естественно, так как существование частных производных в данной точке накладывает ограничения на поведение функции в окрестности точки лишь в направлении координатных осей, в то время как в определении непрерывности функции содержится требование к поведению функции при приближении аргумента к точке произвольным образом. Это подтверждается примером функции

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad xy = 0, \\ 1, & \text{если} \quad xy \neq 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет в точке (0, 0) частные производные

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

(функция f постоянна на координатных осях — она на них равна тождественно нулю), но не является непрерывной в этой точке, так как, например, ее предел по биссектрисе $x = y$ первого координатного угла при $(x,x) \to (0,0)$, $x \neq 0$, не равен ее значению в точке (0, 0):

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

В заключение отметим, что частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ обозначаются также символами f'_{x_i}, f_{x_i} и $D_{x_i} f$.

Аналогично случаю обычной производной для функции одной переменной определяется понятие односторонних частных производных.

36.2. Дифференцируемость функций многих переменных. Определим сначала для простоты записи понятие дифференцируемости функции для случая функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой δ-окрестности $U = U(M_0;\delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$. Для точки $M = (x,y)$ положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Тогда условие $M \in U(\bar{M}_0;\delta)$ можно записать в виде $\rho < \delta$.

Пусть

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0);$$

Δz называется (*полным*) *приращением функции* f *в точке* $M = (x_0, y_0)$.

Определение 1. Функция $z = f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* (x_0, y_0), если существуют два таких числа A и B, что

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0. \tag{36.1}$$

Так как функции

$$\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y) \underset{(36.1)}{=} o(\rho) \tag{36.2}$$

и $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ определены в δ-окрестности U_0 начала координат (0, 0), т. е. при всех $\Delta x, \Delta y$, для которых $\rho < \delta$, в том числе и при $\Delta x = \Delta y = 0$ (тогда $\rho = 0$ и $o(0) = 0$, ибо при $\Delta x = \Delta y = 0$ и $\Delta z = 0$), то согласно определению $o(\rho)$ (см. (34.14)–(34.6)) существует такая функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$, определенная также для всех $\Delta x, \Delta y$, для которых $\rho < \delta$, что

$$o(\rho) \underset{(34.15)}{=} \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, \quad (\Delta x, \Delta y) \in U_0, \tag{36.3}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \underset{(34.16)}{=} 0. \tag{36.4}$$

Заметим, что так как функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ определена при $\Delta x = \Delta y = 0$, то в силу (36.4) она непрерывна в точке (0, 0) и, следовательно,

$$\varepsilon(0,0) = 0. \tag{36.5}$$

Итак, определение дифференцируемости (36.1) функции f в точке (x_0, y_0) можно записать в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho, \quad \varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y), \tag{36.6}$$

причем выполняется условие (36.4), а поэтому и условие (36.5).

Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется ее *дифференциалом в этой точке* и обозначается dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

В этом случае приращения аргументов Δx и Δy обозначают обычно соответственно dx и dy и, таким образом,

$$dz = Adx + Bdy. \tag{36.7}$$

Докажем лемму, показывающую, что условие дифференцируемости функции в точке можно записать в несколько другом виде.

Лемма. *Для того чтобы функция $z = f(x,y)$, заданная в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), была дифференцируема в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие функции $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, стремящиеся к нулю при $\rho \to 0$:*

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0, \tag{36.8}$$

что приращение Δz функции f в точке (x_0, y_0) имело бы вид

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \tag{36.9}$$

$\triangleright$ 1. Пусть имеет место равенство (36.6). При $\rho \neq 0$ имеем

$$\varepsilon\rho = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon\Big(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\,\Delta x + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\,\Delta y\Big).$$

Положим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\rho}\varepsilon, & \rho \neq 0, \\ 0, & \rho = 0, \end{cases} \tag{36.10}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = \begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\rho}\varepsilon, & \rho \neq 0, \\ 0, & \rho = 0. \end{cases} \tag{36.11}$$

Тогда для всех $\rho \geqslant 0$

$$\varepsilon\rho = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{36.12}$$

а так как

$$\frac{|\Delta x|}{\rho} \leqslant 1, \quad \frac{|\Delta y|}{\rho} \leqslant 1, \quad \rho \neq 0, \tag{36.13}$$

то для всех $\rho \geqslant 0$

$$|\varepsilon_1| \leqslant |\varepsilon|, \quad |\varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon|,$$

и, следовательно, в силу условия (36.4) выполняются условия (36.8). Подставив выражение (36.12) в формулу (36.6), получим (36.9).

2. Пусть имеет место равенство (36.9). Преобразуем два последних слагаемых в правой части этого равенства следующим образом:

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \Big(\varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\rho}\Big)\rho, \quad \rho \neq 0.$$

Положим

$$\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varepsilon_1 \dfrac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \dfrac{\Delta y}{\rho}, & \text{если} \quad \rho \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad \rho = 0. \end{cases} \tag{36.14}$$

Тогда для всех ρ получим равенство $\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \varepsilon\rho$, т. е. снова равенство (36.12), в котором при $\rho \neq 0$ для функции $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ справедлива следующая оценка:

$$|\varepsilon| = \Big|\varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\rho}\Big| \leqslant |\varepsilon_1| \frac{|\Delta x|}{\rho} + |\varepsilon_2| \frac{|\Delta y|}{\rho} \underset{(36.13)}{\leqslant} |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|.$$

Из условия $\varepsilon(0,0) = 0$ следует, что полученное неравенство $|\varepsilon| \leqslant$ $\leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$ справедливо и при $\rho = 0$ (оно превращается в равенство $0 = 0$), поэтому $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \underset{(36.8)}{=} 0$. Подставив выражение (36.12) в формулу (36.9), получим (36.6). $\triangleleft$

Выясним теперь свойства функции, которые следуют из ее дифференцируемости.

Теорема 1. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

▷ В самом деле, если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z \underset{(36.6)}{=} \lim_{\rho\to 0}[A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)\rho] = 0. \quad \triangleleft$$

Теорема 2. *Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то в этой точке существуют частные производные функции f по x и по y, причем, если $dz = Adx + Bdy$ — дифференциал функции f в точке (x_0,y_0), то*

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B. \tag{36.15}$$

Таким образом, дифференциал (36.7) можно записать в виде

$$dz \underset{\substack{(36.7)\\(36.15)}}{=} \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

▷ Если функция f дифференцируема в точке (x_0,y_0), то, положив в формуле (36.9) $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + \varepsilon_1\Delta x, \tag{36.16}$$

где $\Delta_x z$ — приращение функции f по переменной x в точке (x_0,y_0), и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1 = 0, \tag{36.17}$$

ибо в этом случае $\rho = |\Delta x|$.

Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} \underset{(36.16)}{=} \lim_{\Delta x\to 0}(A+\varepsilon_1) \underset{(36.17)}{=} A,$$

т.е. существует частная производная по x функции f в точке (x_0,y_0), и

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A.$$

Аналогично доказывается существование производной $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ и ее равенство числу B. ◁

Замечание 1. Функция, имеющая в некоторой точке частные производные, может быть недифференцируемой в этой точке. Примером такой функции является функция, рассмотренная в конце п. 36.1. Она имеет в точке (0, 0) частные производные, но не является в ней непрерывной и тем более дифференцируемой, так как из дифференцируемости следует непрерывность (теорема 1). Однако если у функции потребовать не только существование, но и непрерывность ее частных производных, то такая функция окажется уже дифференцируемой.

Теорема 3. *Если функция имеет в окрестности точки частные производные и они непрерывны в этой точке, то функция в ней дифференцируема.*

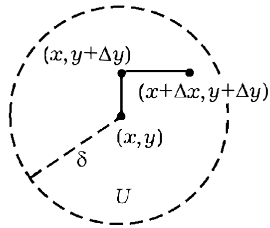

Рис. 134

$\triangleright$ Пусть функция f задана в δ-окрестности U точки (x,y), имеет в этой окрестности частные производные f_x, f_y, непрерывные в точке (x,y). Заметим, что если $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, то отрезки с концами в точках (x,y), $(x, y+\Delta y)$ и в точках $(x, y+\Delta y)$, $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ целиком лежат в окрестности U, т. е. в множестве задания функции f (рис. 134).

Имеем

$$\Delta f = f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,y) = \\ = [f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y+\Delta y)] + [f(x,\, y+\Delta y) - f(x,y)]. \tag{36.18}$$

В квадратных скобках стоят приращения функций одной переменной (другая переменная фиксирована): в первой скобке — приращение по первой переменной, во второй — по второй. Применив к этим приращениям формулу конечных приращений Лагранжа (см. п. 12.2), получим

$$\Delta f \underset{(36.18)}{=} f_x(x+\theta_1\Delta x,\, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x,\, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \tag{36.19}$$

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1, \tag{36.20}$$

значения θ_1 и θ_2 зависят, конечно, от приращений Δx и Δy. Важным для дальнейшего является то обстоятельство, что в силу условия (36.20) при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ точки $(x+\theta_1\Delta x,\, y+\Delta y)$ и $(x,\, y+\theta_2\Delta y)$ имеют своим пределом точку (x,y) *).

Частные производные f_x и f_y непрерывны по условию в точке (x,y), поэтому

$$\lim_{\rho\to 0} f_x(x+\theta_1\Delta x,\, y+\Delta y) = f_x(x,y), \quad \lim_{\rho\to 0} f_y(x,\, y+\theta_2\Delta y) = f_x(x,y). \tag{36.21}$$

Следовательно, если

$$\varepsilon_1 = f_x(x+\theta_1\Delta x,\, y+\Delta y) - f_x(x,y), \quad \varepsilon_2 = f_y(x,\, y+\theta_2\Delta y) - f_y(x,y), \tag{36.22}$$

*) Здесь пределы понимаются как пределы отображений $(\Delta x, \Delta y) \mapsto (x_0 + \theta_1\Delta x,\, y_0 + \Delta y)$ и $(\Delta x, \Delta y) \mapsto (x_0,\, y_0 + \theta_2\Delta y)$.

то функции $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$ стремятся к нулю при $\rho \to 0$ (точка (x, y) фиксирована):

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Из равенств (36.19) и (36.22) имеем

$$\Delta f = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

что согласно лемме и означает дифференцируемость функции f в точке (x, y). $\triangleleft$

Функция, имеющая в точке непрерывные частные производные, называется *непрерывно дифференцируемой* в этой точке. Согласно теореме 3 непрерывно дифференцируемая в некоторой точке функция дифференцируема в ней.

В дальнейшем нам потребуется описание поведения функции $\varepsilon = \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y)$ в остаточном члене $\varepsilon\rho$ правой части формулы (36.6) в случае, когда точка (x, y) принадлежит некоторому компакту, лежащему в области определения функции. Для формулировки этого описания введем понятие равномерного стремления к нулю функции на множестве. Определение этого понятия дадим сразу для функций любого числа переменных (в таком виде оно и будет использоваться в дальнейшем в § 44).

Определение 2. Пусть функция f определена на произведении $X \times Y$ множеств $X \in \mathbb{R}^n$ и $Y \in \mathbb{R}^n$, $x \in X$, $y \in Y$, $y^{(0)} \in Y$.

Функция $f(x, y)$ называется *равномерно стремящейся к нулю на множестве X при $y \to y^{(0)}$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$ и всех $y \in U(y^{(0)}; \delta) \bigcap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x, y)| < \varepsilon.$$

В случае равномерного стремления функции $f(x, y)$ к нулю на множестве X при $y \to y^{(0)}$ пишут $f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$, $y \to y^{(0)}$.

Равномерное стремление функции $f(x, y)$ к нулю на множестве X при $y \to y^{(0)}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y \to y^{(0)}} \sup_{x \in X} |f(x, y)| = 0.$$

Действительно, пусть $y \in U(y^{(0)}; \delta) \bigcap Y$. Тогда, если $|f(x, y)| < \varepsilon$, $x \in X$, то $\sup\limits_{x \in X} |f(x, y)| \leqslant \varepsilon$, а если $\sup\limits_{x \in X} |f(x, y)| < \varepsilon$, то и $|f(x, y)| < \varepsilon$, $x \in X$.

Подробно понятие равномерного стремления функции к пределу на множестве будет изучаться в п. 49.1.

Замечание 2. Если $X \subset \mathbb{R}^n$, X — компакт, $d > 0$, $X_d = \{x : \rho(x, X) \leqslant d\}$, функция f непрерывна на X_d и $\varepsilon(x, \Delta x) = f(x + \Delta x) -$

$-f(x)$, $x \in X$, $|\Delta x| \leqslant d$ и, следовательно, $x + \Delta x \in X_d$, то функция $\varepsilon(x, \Delta x)$ равномерно стремится к нулю на компакте X при $\Delta x \to 0$.

$\triangleright$ Согласно замечанию 2 в п. 33.4 множество X_d также является компактом, а поэтому непрерывная на нем функция f равномерно непрерывна. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X_d$, $x + \Delta x \in X_d$, $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| = |f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В частности, это верно для всех $x \in X$ и $|\Delta x| < \delta$, если выбрать $\delta < d$, что и означает равномерное стремление к нулю функции $\varepsilon(x, \Delta x)$:

$$\varepsilon(x, \Delta x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0, \quad \Delta x \to 0. \quad \triangleleft$$

Сделанное замечание показывает связь понятий равномерной непрерывности и равномерного стремления к нулю. На этой связи основано доказательство нижеследующей теоремы.

Для простоты записи вернемся снова к функциям двух переменных.

Теорема 4. *Если функция f имеет непрерывные частные производные на открытом множестве $G \subset R^2$ и*

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon \rho,$$

то функция $\varepsilon = \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y)$ равномерно стремится к нулю на любом компакте $X \subset G$ при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, $(x, y) \in X$.

$\triangleright$ Пусть X — компакт, $X \subset G$. Множество $R^n \setminus G$ замкнуто (см. лемму 6 в п. 33.3) и не пересекается с компактом X, поэтому (см. теорему 6 в п. 33.4) множества X и $R^n \setminus G$ находятся на положительном расстоянии:

$$d = \rho(X, R^n \setminus G) > 0.$$

Пусть $X_d = \left\{M \in G\colon \rho(M, X) \leqslant \frac{d}{2}\right\}$. Поскольку множество X — компакт, то и множество X_d — компакт (см. замечание 2 в п. 33.4). Очевидно, что $X_d \subset G$. Если $M_1 = (x, y) \in X$, $M_2 = (x + \Delta x, y + {}$ ${}+ \Delta y) \in X_d$, то ясно, что любая точка $M = (x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, т. е. точка отрезка с концами M_1 и M_2, содержится в компакте X_d. Действительно,

$$|M_1 M| = \sqrt{(\theta\Delta x)^2 + (\theta\Delta y)^2} = \theta\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \theta|M_1 M_2| \leqslant \frac{\theta}{2} d \leqslant \frac{1}{2} d,$$
$$M_1 \in X, \quad M_2 \in X_d.$$

Частные производные f_x и f_y, будучи непрерывными на открытом множестве G, непрерывны, а поэтому и равномерно непрерывны на компакте X_d. Поэтому для любого $\eta > 0$ существует такое δ,

$0 < \delta < d/2$, что для всех точек $(x,y) \in X$ и всех таких $(\Delta x, \Delta y)$, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, выполняются неравенства

$$|f_x(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f_x(x,y)| < \eta,$$
$$|f_y(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f_y(x,y)| < \eta.$$

Следовательно, в силу формул (36.19) и (36.22) имеют место неравенства

$$|\varepsilon_1| < \eta, \quad |\varepsilon_2| < \eta,$$

а это и означает, что $\varepsilon_1 \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ и $\varepsilon_2 \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $\rho \to 0$.

Определим функцию $\varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y)$ следующим образом (ср. с (36.14)):

$$\varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varepsilon_1 \dfrac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \dfrac{\Delta y}{\rho} & \text{при} \quad \rho \neq 0, \\ \quad 0 & \text{при} \quad \rho = 0. \end{cases}$$

Тогда $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$ и $\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \varepsilon\rho$, а следовательно,

$$f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,y) \underset{\substack{(36.19)\\(36.20)}}{=} f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon\rho,$$

при этом для всех $(x,y) \in X$ при $\rho < \delta$ выполняется неравенство

$$\varepsilon < 2\eta,$$

что и означает равномерное стремление к нулю функции $\varepsilon = \varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y)$ на компакте X при $\rho \to 0$. $\lhd$

З а м е ч а н и е 3. Определения дифференцируемости функции и ее дифференциала в точке обобщаются на случай функции любого числа переменных, обобщенной в некоторой окрестности этой точки. Дифференцируемость функции $y = f(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ означает, что ее приращение $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$, где $x^{(0)} + \Delta x = (x_1^{(0)} + \Delta x_1,\, ...,\, x_n^{(0)} + \Delta x_n)$, представимо в виде

$$\Delta y = dy + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{36.23}$$

где

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\, dx_i, \tag{36.24}$$

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \quad dx_i = \Delta x_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Функция (36.24) при выполнении условия (36.23) называется *дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$*, а также *полным дифференциалом*, в отличие от дифференциалов

$$d_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

функции $f(x)$ по отдельным переменным x_i, $i = 1, 2, ..., n$, которые называются *частными дифференциалами.*

Теоремы 1–4 переносятся на случай функций любого числа переменных.

Замечание 4. Функция, имеющая непрерывные частные производные на некотором множестве, называется *непрерывно дифференцируемой на этом множестве.* В силу теоремы 3 непрерывно дифференцируемая на множестве функция дифференцируема на нем.

36.3. Дифференцирование сложной функции. Рассмотрим вначале вопрос о дифференцируемости композиции функции двух переменных и функции одной переменной.

Теорема 5. *Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, то сложная функция $f(x(t), y(t))$ дифференцируема в точке t_0 и в этой точке*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{36.25}$$

Отметим, что при выполнении условий теоремы в некоторой окрестности точки t_0 сложная функция заведомо имеет смысл. В самом деле, согласно определению дифференцируемости функция f определена в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0). Из дифференцируемости же функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 следует, что они, а следовательно, и отображение $(x(t), y(t))$, ставящее в соответствие числу t точку плоскости $(x(t), y(t))$, определены в некоторой окрестности точки t_0 и непрерывны в самой этой точке. Отсюда и из замечания 2 из п. 34.5 сразу следует, что сложная функция $f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0.

$\triangleright$ В силу дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) имеем (обозначения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и ρ см. в п. 36.2)

$$\Delta z \underset{\substack{(36.9)\\(36.15)}}{=} \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{36.26}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0, \tag{36.27}$$

где частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ берутся в точке (x_0, y_0).

Выберем теперь Δx и Δy специальным образом: задав произвольно (достаточно малое) Δt, положим

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), \quad \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0). \tag{36.28}$$

В силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 имеем $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$, а поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \rho = \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0. \tag{36.29}$$

Следовательно, согласно теореме 6 о пределе композиции функций (п. 34.5) из равенств (36.27) и (36.29) получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{36.30}$$

Поделим обе части равенства (36.26) на $\Delta t \neq 0$. Тогда в силу существования в точке t_0 конечных производных

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

выражение, которое получится в правой части равенства (36.26), будет иметь конечный предел:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \underset{(36.30)}{=} \underset{(36.30)}{=} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \bigg|_{t=t_0},$$

т. е. будет существовать производная $\dfrac{dz}{dt}$ и для нее будет справедлива формула (36.25). $\lhd$

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 вместо дифференцируемости функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ в точке t_0 потребовать лишь, чтобы они были дифференцируемы справа (слева) в этой точке, то при сохранении прочих условий теоремы сложная функция $f(x(t), y(t))$ будет также дифференцируема справа (слева) в точке t_0 и будет справедлива формула (36.25), если только под производными $\dfrac{dz}{dt}, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ понимать производные справа (слева).

Замечание 2. Если функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0) и, следовательно, имеют в этой точке частные производные $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ (теорема 2), а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, то в точке (u_0, v_0) существуют и частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$ и

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{36.31}$$

$\triangleright$ Доказательство того, чти при сделанных предположениях сложная функция $f(x(u,v),y(u,v))$ определена в некоторой окрестности точки (u_0,v_0), проводится аналогично случаю, рассмотренному в теореме 5.

Формулы же (36.31) сразу следуют из формулы (36.25), так как, зафиксировав одно из переменных, u или v, мы окажемся в условиях теоремы 5: сложная функция $f(x(u,v),y(u,v))$ будет функцией одной переменной. $\triangleleft$

Замечание 3. Формула (36.31) обобщается на случай функций любого числа переменных: если функция $y = y(x)$, $x = (x_1,...,x_n)$, дифференцируема в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$, а функции $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1,...,t_m)$, дифференцируемы в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)},...,t_m^{(0)})$ и $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1,2,...,n$, то сложная функция $y(x(t))$ имеет в точке $t^{(0)}$ частные производные $\frac{\partial y}{\partial t_j}$ и

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1,2,...,m. \tag{36.32}$$

36.4. Инвариантность формы первого дифференциала. Аналогично случаю одной переменной запись дифференциала функции многих переменных имеет один и тот же вид как относительно независимых, так и зависимых переменных.

Теорема 6. *Если функции $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1,...,t_m)$, $i = 1,2,...,n$, имеют в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)},...,t_m^{(0)})$ непрерывные частные производные, а функция $y = f(x)$, $x = (x_1,...,x_n)$, — непрерывные частные производные в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$, где $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1,2,...,n$, то сложная функция $f(x(t))$ дифференцируема в точке $t^{(0)}$ и*

$$dy = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j}\,dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\,dx_i,$$

короче,

$$dy = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial t_j}\,dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\,dx_i. \tag{36.33}$$

$\triangleright$ Заметим, что из непрерывности частных производных функции следует дифференцируемость этой функции, поэтому в условиях теоремы функции $f(x)$ и $x_j(t)$ дифференцируемы соответственно в точках $x^{(0)}$ и $t^{(0)}$. Согласно определению дифференцируемости функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Из дифференцируемости же функций $x_j(t)$ следует их непрерывность в точке $t^{(0)}$, а поэтому непрерывность в этой точке и отображения $x(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1(t),...$ $...,x_n(t))$. Отсюда, согласно замечанию 2 из п. 34.5, следует, что в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ определена сложная функция $f(x(t))$, о которой идет речь в теореме.

Из формулы (36.32) и непрерывности частных производных $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$, следует, что сложная функция $y = f(x(t))$ имеет в точке $t^{(0)}$ непрерывные частные производные $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, ..., m$, и, следовательно, она дифференцируема.

Первое равенство (36.33) следует из определения дифференциала (см. теорему 2 и формулу (36.24)). Докажем второе равенство:

$$dy \underset{(36.24)}{=} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial t_j}\, dt_j \underset{(36.32)}{=} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \Big) dt_j = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}\, dt_j \Big) \underset{(36.24)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Здесь после того как дифференциал dy был записан по формуле (36.24) через приращения $dt_j = \Delta t_j$ независимых переменных $t_1, t_2, ...$ $..., t_m$, были использованы формулы (36.32) для производных сложных функций. После этого был изменен порядок суммирования по индексам i и j, а затем снова были использованы формулы (36.24), но уже для функций $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, ..., t_m)$, $i = 1, 2, ..., n$. $\triangleleft$

Подчеркнем, что в формуле (36.33) дифференциалы dt_j являются дифференциалами независимых переменных и поэтому совпадают с их приращениями Δt_j, а dx_i — дифференциалы функций; они, вообще говоря, не совпадают с приращениями Δx_i переменных x_i.

Свойство дифференциала, выражаемое формулой (36.33), называется *инвариантностью формы дифференциала*: дифференциал записывается одинаковым образом, использованы ли в его записи дифференциалы зависимых или независимых переменных.

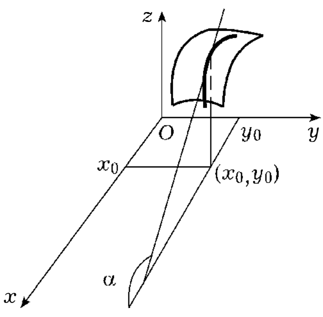

Рис. 135

36.5. Геометрический смысл частных производных и дифференциала. Рассмотрим снова для простоты функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть она имеет в точке (x_0, y_0) частную производную

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{df(x, y_0)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{36.34}$$

где α, согласно геометрическому смыслу производной функции одной переменной $f(x, y_0)$, является углом между осью x и касательной к графику этой функции (рис. 135), т. е.

к кривой

$$z = f(x, y), \quad y = y_0,$$

в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$. В этом и состоит геометрический смысл частной производной.

Вспомним теперь, что дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) означает, что

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0, \tag{36.35}$$

где

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = z - z_0. \tag{36.36}$$

Подставив (36.36) в равенство (36.35), получим

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0. \tag{36.37}$$

Плоскость, определяемая уравнением

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0), \tag{36.38}$$

называется *касательной плоскостью к графику функции* $z = f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0, z_0). Если ее аппликату обозначить $z_{\text{кас}}$, то формулу (36.37) можно записать в виде

$$z - z_{\text{кас}} = o(\rho), \quad \rho \to 0, \quad z = f(x, y),$$

т. е. разность между аппликатами графика функции и касательной плоскости является бесконечно малой более высокого порядка, чем ρ при $\rho \to 0$. Плоскость $z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$, удовлетворяющая такому условию, единственна, ибо это условие равносильно дифференцируемости функции и коэффициенты A и B уравнения такой плоскости совпадают с коэффициентами дифференциала, которые, будучи равными соответствующим частным производным, определены однозначно.

Равенство (36.38) можно записать (см. (36.36)) в виде

$$z_{\text{кас}} - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y \underset{(36.10)}{=} dz.$$

Таким образом, дифференциал функции равен приращению аппликаты касательной плоскости к графику функции:

$$dz = z_{\text{кас}} - z_0.$$

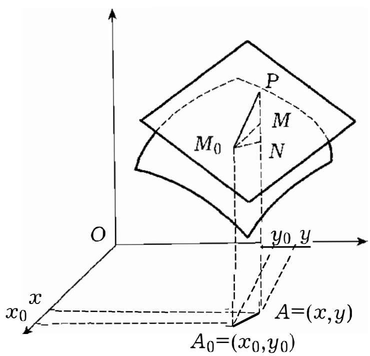

Рис. 136

На рис. 136

$$A_0 = (x_0, y_0),$$

$$A = (x, y) = (x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y),$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = A_0 M_0 = AN, \quad z = f(x, y) = AM, \quad z_{\text{кас}} = AP$$

и, следовательно,

$$dz = NP = AP - AN = z_{\text{кас}} - z_0, \quad AM - AP = o(\rho), \quad \rho = A_0 A \to 0.$$

36.6. Производная по направлению. Градиент. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) и задан вектор $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$. Обозначим через $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ его направляющие косинусы, т. е. координаты единичного вектора $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}/|\mathbf{l}|$ в направлении вектора $\mathbf{l}$:

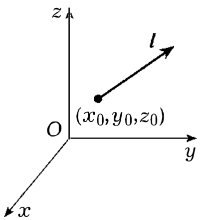

Рис. 137

$$\mathbf{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{36.39}$$

Проведем через точку (x_0, y_0, z_0) луч в направлении вектора $\mathbf{l}$ (рис. 137) и запишем его уравнение в параметрическом виде:

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma, \quad t \geqslant 0. \tag{36.40}$$

Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \underset{(36.39)}{=} 1$, то из формул (36.40) следует, что

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t,$$

т. е. значение параметра t равно расстоянию от точки (x, y, z) луча (36.40), соответствующей этому значению параметра, до точки (x_0, y_0, z_0).

Рассмотрим сужение функции f на луч (36.40), т. е. композицию функций $f(x, y, z)$ и функций (36.40):

$$f(x_0 + t\cos\alpha,\, y_0 + t\cos\beta,\, z_0 + t\cos\gamma), \quad t \geqslant 0 \tag{36.41}$$

(она определена для всех достаточно малых t). Производная справа этой функции в точке $t = 0$ называется *производной функции f в точке (x_0, y_0, z_0) по направлению вектора* $\mathbf{l}$ и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha,\, y_0 + t\cos\beta,\, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0}. \tag{36.42}$$

В правой части этого равенства стоит производная функции одной переменной. Если $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а $M = (x, y, z)$ — точка луча (36.40) и, следовательно, $|M_0 M| = t$, то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \mathbf{l}} \underset{(36.42)}{=} \lim_{t \to +0} \frac{f(M) - f(M_0)}{t}. \tag{36.43}$$

Так как все величины в правой части этого равенства не зависят от выбора системы координат (они определяются функцией f, точкой M_0 и вектором $\mathbf{l}$), то производная по направлению $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ в точке M_0 функции f, аргументом которой является точка пространства, не зависит от выбора системы координат.

Если существует не только предел справа (36.43), но двусторонний предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(M)-f(M_0)}{t}$, то он называется *производной по прямой*

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Функции (36.40) линейны по t и поэтому, очевидно, дифференцируемы. Следовательно, если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0), то сложная функция (36.41) дифференцируема в точке $t = 0$ (теорема 5 из п. 36.3). Вычислив ее производную по формуле производной сложной функции (см. (36.25)), получим

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{36.44}$$

где, в силу (36.40), $\dfrac{dx}{dt} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{dt} = \cos\beta$, $\dfrac{dz}{dt} = \cos\gamma$.

Подставив эти выражения в формулу (36.44), будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{36.45}$$

Здесь значения частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ взяты в точке (x_0, y_0, z_0).

Вектор $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ называется *градиентом функции* f (в точке, в которой взяты значения частных производных) и обозначается либо $\operatorname{grad} f$, либо ∇f (читается “набла эф”). Таким образом,

$$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{36.46}$$

Использовав понятие градиента и скалярного произведения, формулу (36.45) для производной по направлению можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = (\nabla f, \mathbf{l}_0) =$$
$$= |\nabla f||\mathbf{l}_0|\cos(\widehat{\nabla f \mathbf{l}_0}) \underset{(36.39)}{=} |\nabla f|\cos\varphi, \tag{36.47}$$

где φ — угол между векторами ∇f и $\mathbf{l}$, или, что то же, между векторами ∇f и $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}/|\mathbf{l}|$.

Из формулы (36.47) видно, что градиент функции не зависит от выбора системы координат, как это могло бы показаться из определения (36.46). Если $\nabla f \neq \mathbf{0}$, то направление градиента ∇f является единственным направлением, по которому в данной точке производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ имеет наибольшее значение (оно достигается при $\varphi = 0$, т. е. когда $\cos\varphi = 1$), а длина градиента ∇f равна этому наибольшему значению (для направления градиента, и только для него, $\cos\varphi = 1$). Если же $\nabla f = \mathbf{0}$, то в данной точке производные функции f по всем направлениям равны 0.

Понятие производной функции по направлению существует для функций любого числа переменных. Если функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, определена в окрестностях точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, в пространстве R^n задан вектор $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}/|\mathbf{l}| = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, то производная функция f в точке $x^{(0)}$ по направлению вектора $\mathbf{l}$ определяется равенством

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial \mathbf{l}} \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(x_1^{(0)} + t\cos\alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + t\cos\alpha_n)\Big|_{t=0}, \quad t \geqslant 0. \quad (36.48)$$

Если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то из формулы (36.48) следует, что в этой точке существует производная по любому направлению и

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial \mathbf{l}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \cos\alpha_i.$$

Градиент $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$ функции f в общем случае определяется по формуле

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right),$$

и для производной дифференцируемой функции f по направлению вектора $\mathbf{l}$ справедлива формула

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{l}} = (\nabla f(x), \mathbf{l}_0), \quad \mathbf{l}_0 = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}.$$

Из этой формулы так же, как и в случае $n = 3$, следует, что *градиент функции любого числа переменных не зависит от выбора системы координат.*

Замечание. Существуют такие функции, имеющие в некоторой точке производные по любым прямым, проходящим через эту точку (и даже равные между собой), что эти функции не непрерывны в этой точке и, следовательно, заведомо недифференцируемы.

Примером такой функции является функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \neq x^2 \quad \text{или если} \quad x = y = 0, \\ 1, & \text{если} \quad y = x^2 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 > 0. \end{cases}$$

Действительно, так как пересечение любой прямой, проходящей через точку $(0,0)$, с достаточно малой окрестностью (зависящей от выбранной прямой) этой точки содержится в множестве точек

(x, y), для которых $f(x, y) = 0$ (рис. 138), то в точке (0, 0) существует производная $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ по любому направлению, и она равна нулю, т. е. для любого вектора $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ имеет место

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{l}} = 0.$$

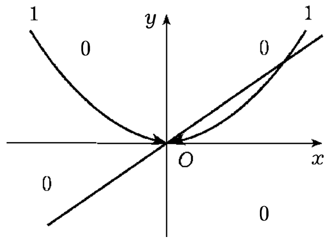

Рис. 138

Однако функция $f(x, y)$ не является непрерывной в точке $(0,0)$. Чтобы в этом убедиться, найдем предел функции f при $(x, y) \to (0,0)$ по параболе $y = x^2$ с выколотой точкой $(0,0)$:

$$\lim_{\substack{(x,x^2)\to(0,0)\\ x\neq 0}} f(x, x^2) = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

Это и означает, что рассматриваемая функция не является непрерывной в начале координат.

§ 37. Частные производные и дифференциалы высших порядков

37.1. Частные производные высших порядков. Частные производные функции в свою очередь являются функциями, и потому можно рассматривать их частные производные. Например, у функции $z = f(x, y)$ могут существовать частные производные

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x},$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

и т. д., причем смысл введенных обозначений ясен из самой записи. Производные f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} называются *частными производными второго порядка.* Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Оказывается, что при достаточно общих условиях результат дифференцирования по различным переменным не зависит от выбора порядка переменных, по которым происходит дифференцирование.

Теорема. *Если функция f определена вместе со своими частными производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и производные f_{xy} и f_{yx} непрерывны в этой точке, то их значения в ней равны*:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{37.1}$$

$\triangleright$ Рассмотрим повторное приращение $\Delta_{xy} f(x_0, y_0)$ функции f в точке (x_0, y_0), т. е. приращение функции f сначала по переменной x, а затем по переменной y в указанной точке. Имеем

$$\Delta_{xy} f(x_0, y_0) = \Delta_y(\Delta_x f(x_0,\, y_0)) = \Delta_y(f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0, y_0)) =$$
$$= f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - (f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0, y_0)). \tag{37.2}$$

Аналогично для повторного приращения $\Delta_{yx} f(x_0, y_0)$ функции f сначала по переменной y, а затем по переменной x, получим

$$\Delta_{yx} f(x_0, y_0) = \Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta_x(f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) =$$
$$= f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - (f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)). \tag{37.3}$$

Правые части в равенствах (37.2) и (37.3) равны, поэтому равны и левые:

$$\Delta_{xy} f(x_0, y_0) = \Delta_{yx} f(x_0, y_0). \tag{37.4}$$

Преобразовав разность $f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0, y_0)$ по формуле Лагранжа (см. п. 12.2)

$$f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0, y_0) \underset{(12.11)}{=} f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\, y_0)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1, \tag{37.5}$$

получим

$$\Delta_{xy} f(x_0, y_0) \underset{(37.2)}{=} \Delta_y(f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0, y_0)) \underset{(37.5)}{=}$$
$$\underset{(37.5)}{=} \Delta_y f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\, y_0)\Delta x. \tag{37.6}$$

Применив снова формулу Лагранжа, но теперь уже к приращению $\Delta y f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)$ по переменной y функции $f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y)$ в точке y_0, будем иметь

$$\Delta_{xy} f(x_0, y_0) \underset{(37.6)}{=} \Delta_y f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\, y_0)\Delta x =$$
$$= f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x,\, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y. \tag{37.7}$$

Аналогично,

$$\Delta_{yx} f(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x,\, y_0 + \theta_4 \Delta y)\Delta x \Delta y, \quad 0 < \theta_3,\ \theta_4 < 1. \tag{37.8}$$

Из формул (37.4), (37.7) и (37.8) имеем

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x,\, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y = f_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x,\, y_0 + \theta_4 \Delta y)\Delta x \Delta y. \tag{37.9}$$

Сократив при $\Delta x\Delta y \neq 0$ обе части этого равенства на произведение $\Delta x\Delta y$, получим

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x,\, y_0 + \theta_2\Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_3\Delta x,\, y_0 + \theta_4\Delta y). \qquad (37.10)$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x^2 + \Delta y^2 \to 0$, $\Delta x\Delta y \neq 0$, в силу непрерывности в точке (x_0, y_0) частных производных f_{xy} и f_{yx} будем иметь $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$. Теорема доказана. $\triangleleft$

Замечание. Из доказанной теоремы в случае непрерывности соответствующих частных производных следует независимость результата дифференцирования от порядка переменных, по которым производится дифференцирование, для функций любого числа переменных и для частных производных любого порядка, так как этот более общий случай можно свести к последовательному рассмотрению вторых частных производных функций двух переменных и тем самым к формуле (37.1). Например, для функции $f(x, y, z)$ трех переменных имеем

$$f_{xyz} = f_{zyx}. \qquad (37.11)$$

В самом деле,

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zx})_y = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

37.2. Дифференциалы высших порядков. Для дифференцируемой функции $y = f(x_1, ..., x_n)$ ее дифференциал имеет вид

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i}\, dx_i \qquad (37.12)$$

и является функцией от $2n$ переменных $x_1, ..., x_n$, $dx_1, ..., dx_n$. Вычислим дифференциал от dy, рассматривая его только как функцию $x_1, ..., x_n$ (т.е. зафиксировав значения $dx_1, ..., dx_n$). Обозначив дифференциалы при новом дифференцировании символом δ и опустив для простоты записи обозначение аргументов $x_1, ..., x_n$, будем иметь

$$\delta(dy) \underset{(37.12)}{=} \sum_{i=1}^{n} \delta\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\, \delta x_j\Big) dx_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\, dx_i\, dx_j.$$

Таким образом, дифференциал от дифференциала является билинейной формой относительно переменных $dx_1, ..., dx_n$ и $\delta x_1, ..., \delta x_n$. Соответствующая ей квадратичная форма (получающаяся из нее при $\delta x_i = dx_i$, $i = 1, 2, ..., n$) называется *вторым дифференциалом функции f в данной точке* и обозначается символом d^2y. Таким образом,

$$d^2 y \overset{\text{def}}{=} \delta(dy)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,\ldots,n}},$$

откуда

$$d^2y = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_i\,dx_j.$$

Аналогично определяются и дифференциалы высших порядков

$$d^{m+1}y = \delta(d^m y)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,\ldots,n}}. \tag{37.13}$$

Нетрудно доказать, что

$$d^m y = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\Big)^{\{m\}} f(x_1, \ldots, x_n). \tag{37.14}$$

Здесь $\{m\}$ — символическая степень, обозначающая, что выражение $\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\Big)^{\{m\}}$ записывается с теми же коэффициентами, которые получаются при обычном возведении в степень. Формула (37.14) в раскрытом виде выглядит следующим образом:

$$d^m y = \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{m!}{m_1!\ldots m_n!}\,\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\,dx_1^{m_1}\ldots dx_n^{m_n}.$$

При $m = 1$ формула (37.14) уже известна (см. (37.12)), для произвольного натурального m она доказывается методом математической индукции исходя из определения (37.13).

Замечание. Как и для случая функций одной переменной, для функции любого числа переменных дифференциалы порядков выше первого не имеют инвариантной формы относительно выбора переменных.

§ 38. Формула Тейлора для функций многих переменных

38.1. Формула Тейлора для функций двух переменных. Для большей краткости записи формул будем использовать символическую степень (см. (37.14)). При $n = 2$ имеем

$$\Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{k\}} f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{k} C_k^j\,\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}\,\Delta x^{k-j}\,\Delta y^j.$$

Теорема. 1. *Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно, $m \geqslant 1$, в некоторой круговой окрестности точки (x_0, y_0). Тогда в этой окрестности*

$$f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{k\}} f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{m!}\Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{m\}} f(x_0+\theta\Delta x,\, y_0+\theta\Delta y), \quad 0<\theta<1. \quad (38.1)$$

Следствие. *В условиях теоремы имеет место формула*

$$f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{k\}} f(x_0,y_0)+o(\rho^m),$$
$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0. \qquad (38.2)$$

Формулы (38.1) и (38.2) называются *формулами Тейлора функции* f в *точке* (x_0,y_0).

Пусть $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$. Многочлен

$$P_m(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\Big((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{k\}} f(x_0,y_0)$$

называется *многочленом Тейлора степени* m *функции* f *в точке* (x_0,y_0), а разность $f(x,y)-P_m(x,y)$ — *остаточным членом* $r_m(x,y)$ *формулы Тейлора.* Таким образом, формула Тейлора имеет вид

$$f(x,y)=P_m(x,y)+r_m(x,y).$$

Формула (38.1) называется *формулой Тейлора с остаточным членом* $r_{m-1}(x,y)$ *в виде Лагранжа*, а формула (38.2) — *формулой Тейлора с остаточным членом* $r_m(x,y)$ *в виде Пеано.*

$\triangleright$ Зафиксируем приращения Δx и Δy так, чтобы точка $(x_0+\Delta x,$ $y_0+\Delta y)$ лежала в круговой окрестности точки (x_0,y_0), указанной в условиях теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t)\stackrel{\text{def}}{=}f(x_0+t\Delta x,\, y_0+t\Delta y), \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \qquad (38.3)$$

являющуюся композицией функций $f(x,y)$ и $x=x_0+t\Delta x$, $y=$ $=y_0+t\Delta y$ и потому m раз непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$. Согласно формуле Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа (см. п. 32.3)

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\ldots+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}\,t^{m-1}+\frac{F^{(m)}(\theta t)}{(m)!}\,t^m,$$
$$0<\theta<1, \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Отсюда при $t=1$ получим

$$f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)\underset{(38.3)}{=}F(1)=$$
$$=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\ldots+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+\frac{F^{(m)}(\theta)}{(m)!}, \quad 0<\theta<1. \quad (34.4)$$

Вычислим производные функции F. Из формул $x = x_0 + t\Delta x$ и $y = y_0 + t\Delta y$ следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x, \quad \frac{dy}{dt} = \Delta y, \tag{38.5}$$

поэтому

$$\begin{gathered} F'(t) \underset{(38.3)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \underset{(38.5)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y, \end{gathered} \tag{38.6}$$

$$\begin{aligned} F''(t) &\underset{(38.6)}{=} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Delta x + \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Delta y = \\ &= \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\frac{dy}{dt}\Big)\Delta x + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\Big)\Delta y \underset{(38.5)}{=} \\ &\underset{(38.5)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\Delta x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\Delta y^2 = \\ &= \Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{2\}} f(x_0 + t\Delta x,\, y_0 + t\Delta y). \end{aligned}$$

Вообще, по индукции легко получить, что

$$F^{(k)}(t) = \Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{k\}} f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad k = 0, 1, ..., m.$$

Следовательно,

$$F^{(j)}(0) = \Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{j\}} f(x_0, y_0), \quad j = 0, 1, ..., m-1,$$

$$F^{(m)}(\theta) = \Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x,\, y_0 + \theta\Delta y).$$

Подставив эти выражения в формулу (38.4), получим формулу Тейлора (38.1). $\triangleleft$

$\triangleright$ Докажем следствие. Положим

$$\begin{gathered} \varepsilon_j = \varepsilon_j(\Delta x, \Delta y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^{m-j}\,\partial y^j} - \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^{m-j}\,\partial y^j}, \\ j = 0, 1, ..., m. \end{gathered} \tag{38.7}$$

По условию теоремы все частные производные функции f до порядка m включительно непрерывны в точке (x_0, y_0), поэтому

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_j(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad j = 0, 1, ..., m. \tag{38.8}$$

Преобразуем теперь при $\rho \neq 0$ остаточный член $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ в формуле (38.1) следующим образом:

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) \underset{(38.1)}{=} \frac{1}{m!}\Big(\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x,\, y_0 + \theta\Delta y) =$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x,\, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^{m-j}\, \partial y^j} \Delta x^{m-j} \Delta y^j \underset{(38.7)}{=}$$

$$\underset{(38.7)}{=} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^{m-j}\, \partial y^j} \Delta x^{m-j} \Delta y^j + \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} C_m^j \varepsilon_j \Delta x^{m-j} \Delta y^j =$$

$$= \frac{1}{m!}\Big(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{m\}} f(x_0, y_0) + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{j=0}^{m} C_m^j \Big(\frac{\Delta x}{\rho}\Big)^{m-j} \Big(\frac{\Delta y}{\rho}\Big)^j \varepsilon_j. \tag{38.9}$$

Так как $|\Delta x/\rho| \leqslant 1$, $|\Delta y/\rho| \leqslant 1$, то

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \rho\neq 0}} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} C_m^j \Big|\frac{\Delta x}{\rho}\Big|^{m-j} \Big|\frac{\Delta y}{\rho}\Big|^j \varepsilon_j \underset{(38.8)}{=} 0 \tag{38.10}$$

и, следовательно ($\varepsilon_j = 0$ при $\rho = 0$, $j = 1, 2, ..., n$),

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) \underset{\substack{(38.9)\\(38.10)}}{=} \frac{1}{m!}\Big(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\{m\}} f(x_0, y_0) + o(\rho^m), \quad \rho \to 0.$$

Подставив это выражение в (38.1), получим формулу Тейлора в виде (38.2). $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 1. В случае $m = 1$ формула (38.1) имеет вид

$$f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial f(x_0 + \theta\Delta x,\, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0 + \theta\Delta x,\, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial y} \Delta y, \quad 0 < \theta < 1.$$

Эта формула называется *формулой конечных приращений Лагранжа для функции двух переменных.*

38.2. Формула Тейлора для функций любого числа переменных. Рассмотрим теперь случай функций $f(x)$ от n переменных $x = (x_1, ..., x_n)$, $n \geqslant 1$. Пусть $k_1, ..., k_n$ — неотрицательные целые числа, $k = (k_1, ..., k_n)$, $|k| = k_1 + ... + k_n$ (т. е. здесь $|k|$ обозначает величину, отличную, вообще говоря, от длины вектора k), $k = k_1!...k_n!$, $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$,

$$\Delta x^k = \Delta x_1^{k_1} ... \Delta x_n^{k_n}; \quad f^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}.$$

Как и выше, для записи формул будем использовать символическую степень (см. (37.14)):

$$\Big(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\{l\}} f(x_1, ..., x_n) = \sum_{|k|=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(x) \Delta x^k,$$

l — неотрицательное целое.

Для функции $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ от n переменных, m раз непрерывно дифференцируемой в окрестности точки $x = (x_1, ..., x_n)$, формула Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа имеет вид

$$f(x_1 + \Delta x_1, \, ..., \, x_n + \Delta x_n) = \\ = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{l!} \Big(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \Big)^{\{l\}} f(x_1, ..., x_n) + \\ + \frac{1}{m!} \Big(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \Big)^{\{m\}} f(x_1 + \theta \Delta x_1, \, ..., \, x_n + \theta \Delta x_n), \\ 0 < \theta < 1,$$

или (что в силу введенных обозначений то же самое)

$$f(x + \Delta x) = \sum_{|k|=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \Delta x^k + \sum_{|k|=m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x + \theta \Delta x) \Delta x^k.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в этом случае имеет вид

$$f(x + \Delta x) = \sum_{|k|=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \Delta x^k + o(\rho^m), \quad \Delta x \to 0, \quad |\Delta x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2}. \tag{38.11}$$

Вывод всех этих формул производится совершенно аналогично случаю $n = 2$.

Покажем единственность представления функции $f(x + \Delta x)$ (x фиксировано) в виде

$$f(x + \Delta x) = P_m(\Delta x) + o(\Delta x^m), \quad \Delta x \to 0, \tag{38.12}$$

где

$$P_m(\Delta x) = \sum_{|k|=0}^{m} a_k \Delta x^k \tag{38.13}$$

— многочлен степени не выше m от n переменных $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$.

Лемма. *Если многочлен*

$$P_m(x) = \sum_{|k|=0}^{m} a_k \Delta x^k,$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \quad x^k = x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}, \quad k = (k_1, ..., k_n),$$

тождественно равен нулю:

$$P_m(x) \equiv 0, \tag{38.14}$$

в некоторой окрестности нуля, то все его коэффициенты равны нулю.

$\triangleright$ Из (38.14) следует, что для любого $k = (k_1, ..., k_n)$ имеет место равенство $P_m^{(k)}(0) = 0$, но если $0 \leqslant |k| \leqslant m$, то $P_m^{(k)}(0) = k!\, a_k$. Из двух последних равенств следует, что для всех k таких, что $0 \leqslant |k| \leqslant m$, выполняются равенства $a_k = 0$. $\triangleleft$

Теорема. 2. *Если функция f определена в окрестности точки x, то ее представление в виде* (38.12) *единственно.*

$\triangleright$ Пусть число $\delta > 0$ выбрано таким образом, что для всех Δx, $|\Delta x| < \delta$, у функции f наряду с представлением (38.12) имеет место представление

$$f(x + \Delta x) = \sum_{|k|=0}^{m} b_k \Delta x^k + o(\Delta x^m), \quad \Delta x \to 0. \tag{38.15}$$

Тогда, положив (см. (38.13))

$$c_k = b_k - a_k \tag{38.16}$$

и вычтя из равенства (38.15) равенство (38.12), получим, что

$$\sum_{|k|=0}^{m} c_k \Delta x^k + o(\Delta x^m) = 0, \quad \Delta x \to 0. \tag{38.17}$$

Зафиксируем произвольно Δx, $|\Delta x| < \delta$; тогда, если $|t| \leqslant 1$, то $|t\,\Delta x| < \delta$, и в (38.17) можно вместо Δx подставить $t\,\Delta x$. Выполнив эту подстановку, будем иметь

$$\sum_{|k|=0}^{m} c_k t^{|k|} \Delta x^k + o((t\,\Delta x)^m) = 0, \quad t\,\Delta x \to 0.$$

Поскольку приращение Δx фиксировано, то $o((t\,\Delta x)^m) = o(t^m)$, $t \to 0$, а поэтому

$$\sum_{l=0}^{m} t^l \sum_{|k|=l} c_k \Delta x^k + o(t^m) = 0, \quad t \to 0.$$

В силу теоремы 2 из п. 14.1 отсюда следует, что

$$\sum_{|k|=l} c_k \Delta x^k = 0,$$

причем это верно для всех таких Δx, что $|\Delta x| < \delta$, т. е. стоящий в левой части этого равенства многочлен относительно переменных $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ равен нулю в некоторой окрестности нуля. Согласно лемме отсюда следует, что все $c_k = 0$. Поэтому в силу (38.16) для всех k таких, что $0 \leqslant |k| \leqslant m$, выполняется равенство $a_k = b_k$. $\triangleleft$

Из доказанной теоремы следует, что если для m раз непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки x функции f получено представление вида (38.12), то оно является формулой Тейлора для этой функции с остаточным членом в виде Пеано. Действительно, в этом случае формула Тейлора имеет место, а другого такого представления в силу теоремы 2 быть не может.

§ 39. Экстремумы функций многих переменных

39.1. Необходимые условия экстремума.

Определение 1. Пусть функция f определена на множестве $X \subset R^n$. Точка $x^{(0)} \in X$ называется точкой *локального максимума* (*минимума*), если существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех точек $x \in X \cap U(x^{(0)})$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x^{(0)})$ (соответственно неравенство $f(x) \geqslant f(x^{(0)})$).

Если, кроме того, при $x \neq x^{(0)}$ имеет место неравенство $f(x) \neq f(x^{(0)})$, то точка $x^{(0)}$ называется точкой *строгого локального максимума* (*минимума*).

Точки (строгого) локального максимума и минимума называются точками (строгого) локального экстремума. Эпитет "локальный" часто для краткости опускается.

Если $x^{(0)}$ — точка экстремума функции f, то говорят, что функция f *имеет экстремум в этой точке*.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Если функция f определена в окрестности точки экстремума $x^{(0)}$ и если в этой точке существует частная производная $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$, то она равна нулю*:

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0.$$

Следствие. *Если функция дифференцируема в точке экстремума, то ее дифференциал в этой точке равен нулю.*

$\triangleright$ Пусть для определенности $i = 1$. Если точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots$ $\ldots, x_n^{(0)})$ является точкой экстремума функции f, то точка $x_1^{(0)}$ является точкой экстремума функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1. При этом поскольку точка $x^{(0)}$ была внутренней точкой множества определения X функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, точка $x_1^{(0)}$ является внутренней точкой определения функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Следовательно, согласно теореме Ферма

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_1} = \left.\frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}} = 0. \quad \triangleleft$$

Следствие теоремы вытекает из того, что если функция f дифференцируема в точке, то она определена в некоторой ее окрестности и имеет в самой точке все частные производные первого порядка, которые согласно теореме 1 равны нулю. Поэтому дифференциал $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n$ в точке экстремума равен нулю при любых значениях переменных $dx_1, \ldots, dx_n$.

Определение 2. Точка $x^{(0)}$, в которой все частные производные функции f существуют и равны нулю:

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_n} = 0, \tag{39.1}$$

называется *стационарной точкой функции* f.

Условие (39.1) можно записать короче в виде

$$df(x^{(0)}) = 0.$$

Согласно теореме 1, если точка экстремума функции f является внутренней для области определения функции и в ней существуют все частные производные, то эта точка является стационарной. Уже в теории экстремумов функций одной переменной мы видели, что не всякая стационарная точка является точкой экстремума. Найдем условия, при выполнении которых стационарная точка функции многих переменных является точкой экстремума этой функции.

39.2. Достаточные условия экстремума. Функция вида $A(x) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a_{ij} = a_{ji}$ — некоторые числа, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется, как известно, *квадратичной формой.*

Если $A(x)$ — квадратичная форма, $x \in R^n$, то для любого числа t имеет место равенство

$$A(tx) = t^2 A(x), \tag{39.2}$$

в частности, $A(-x) = A(x)$ (мы рассматриваем точки пространства R^n как векторы). В самом деле,

$$A(tx) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}tx_itx_j = t^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = t^2 A(x).$$

Отсюда следует, что на каждой прямой $x = tx^{(0)}$, $A(x^{(0)}) \neq 0$, $-\infty < t < +\infty$, квадратичная форма $A(x)$ сохраняет один и тот же знак при $t \neq 0$, ибо $A(x) = A(tx^{(0)}) = t^2 A(x^{(0)})$, а поэтому знак $A(x)$ в любой точке x указанной прямой при $t \neq 0$ такой же, как и в точке $x^{(0)}$: $\operatorname{sign} A(x) = \operatorname{sign} A(x^{(0)})$, $A(x^{(0)}) \neq 0$.

Лемма 1. *Для любой точки прямой* $x = tx^{(0)}$, $|x^{(0)}| = 1$, $-\infty < t < +\infty$, $t \neq 0$, *имеет место*

$$A\left(\frac{x}{|x|}\right) = A(x^{(0)}). \tag{39.3}$$

Таким образом, значение $A\left(\frac{x}{|x|}\right)$ не зависит от выбора точки $x \neq 0$ на прямой $x = tx^{(0)}$ — это значение совпадает со значением $A(x^{(0)})$.

$\triangleright$ Действительно,

$$\frac{x}{|x|} = \frac{tx^{(0)}}{|tx^{(0)}|} = \frac{t}{|t|}\frac{x^{(0)}}{|x^{(0)}|} = \pm x^{(0)},$$

поэтому

$$A\left(\frac{x}{|x|}\right) = A(\pm x^{(0)}) = A(x^{(0)}). \quad \triangleleft$$

Квадратичная форма $A(x)$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если для любого $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, $x \neq 0$, выполняется неравенство $A(x) > 0$ (соответственно $A(x) < 0$).

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*. Квадратичные формы, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются *знаконеопределенными* или *знакопеременными*.

Лемма 2. *Нижняя грань абсолютных значений знакоопределенной квадратичной формы на единичной сфере положительна.*

$\triangleright$ Пусть $A(x)$ — знакоопределенная квадратичная форма, а $S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$ — единичная сфера. Она является ограниченным замкнутым множеством, т.е. компактом. Функция $A(x)$, будучи многочленом, непрерывна на всем пространстве R^n, следовательно, функция $A(x)$, а потому и ее абсолютная величина $|A(x)|$, непрерывны на компакте S^{n-1}. Согласно теореме Вейерштрасса функция $|A(x)|$ достигает своего наименьшего значения на S^{n-1} в некоторой точке $x^{(0)} \in S^{n-1}$:

$$|A(x^{(0)})| = \inf_{x \in S^{n-1}} |A(x)|.$$

Поскольку $|x^{(0)}| = 1$, а следовательно, $x^{(0)} \neq 0$, а квадратичная форма $A(x)$ знакоопределенная, то $|A(x^{(0)})| > 0$, т. е. неравенство (39.4) доказано. $\triangleleft$

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). *Если функция дважды непрерывно дифференцируема в стационарной точке и если в этой точке второй дифференциал является положительно определенной квадратичной формой, то точка является точкой строгого минимума, если — отрицательно определенной, то — точкой строгого максимума, если же — знаконеопределенной формой, то экстремума в рассматриваемой точке нет.*

$\triangleright$ Пусть $x^{(0)}$ — стационарная точка функции $y = f(x)$, т. е. в этой точке выполняются условия (39.1), и пусть

$$A(\Delta x) = d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \, \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j, \quad \Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n), \tag{39.5}$$

— ее второй дифференциал в точке $x^{(0)}$. Согласно формуле Тейлора для приращения функции $\Delta f = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ будем иметь

$$\Delta f \underset{\substack{(38.2)\\(39.1)}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i\, \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|^2,$$

где $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$ и

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0. \tag{39.6}$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\Delta f \underset{(39.5)}{=} \frac{1}{2} A(\Delta x) + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|^2 = \frac{|\Delta x|^2}{2}\Big(A\Big(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\Big) + 2\varepsilon(\Delta x)\Big). \tag{39.7}$$

Здесь $\left|\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}\right| = \dfrac{|\Delta x|}{|\Delta x|} = 1$ и, следовательно, точка $\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|}$ лежит на единичной сфере S^{n-1}.

Рассмотрим два случая.

1. Если $A(\Delta x)$ — знакоопределенная квадратичная форма, то согласно лемме 1

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \inf_{S^{n-1}} |A(\Delta x)| > 0. \tag{39.8}$$

Поскольку $\dfrac{\Delta x}{|\Delta x|} \in S^{n-1}$, то для всех $\Delta x \neq 0$ выполняется неравенство

$$\left|A\Big(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\Big)\right| \geqslant \mu, \tag{39.9}$$

а в силу условия (39.6) существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, для которых $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство

$$|2\varepsilon(\Delta x)| < \mu. \tag{39.10}$$

Из соотношений (39.7), (39.9) и (39.10) следует, что для всех Δx, $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$, знак приращения функции Δf совпадает со знаком квадратичной формы $A(\Delta x/|\Delta x|)$, и, следовательно, если $A(x)$ — положительно определенная квадратичная форма, то $\Delta f > 0$, т. е. точка $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума, а если $A(x)$ — отрицательно определенная форма, то $\Delta f < 0$, т. е. точка $x^{(0)}$ является точкой строгого максимума.

2. Если $A(\Delta x)$ — знакопеременная квадратичная форма, то существуют такие $\Delta x'$ и $\Delta x''$, что $A(\Delta x') > 0$, $A(\Delta x'') < 0$ (отсюда, очевидно, следует, что $\Delta x' \neq 0$ и $\Delta x'' \neq 0$, ибо $A(0) = 0$). Тогда для любого $t \neq 0$ будем иметь $A(t\Delta x') > 0$ и $A(t\Delta x'') < 0$, в частности, $A(\Delta x'/|\Delta x'|) > 0$, $A(\Delta x''/|\Delta x''|) < 0$.

В силу условия (39.6) существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, $|\Delta x| < \delta$, имеют место неравенства

$$|2\varepsilon(\Delta x)| < A\Big(\frac{\Delta x'}{|\Delta x'|}\Big), \quad |2\varepsilon(\Delta x)| < A\Big(\frac{\Delta x''}{|\Delta x''|}\Big). \tag{39.11}$$

Поэтому для любой точки Δx вида $\Delta x = t\Delta x'$, $|\Delta x| < \delta$, $t \neq 0$, получим неравенство

$$\Delta f \underset{(39.7)}{=} \frac{|\Delta x|^2}{2}\Big[A\Big(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\Big) + 2\varepsilon(\Delta x)\Big] \underset{(39.3)}{=}$$
$$\underset{(39.3)}{=} \frac{|\Delta x|^2}{2}\Big[A\Big(\frac{\Delta x'}{|\Delta x'|}\Big) + 2\varepsilon(\Delta x)\Big] \underset{(39.11)}{>} 0,$$

а для точки Δx вида $\Delta x = t\Delta x''$, $|\Delta x| < \delta$, — неравенство

$$\Delta f \underset{(39.7)}{=} \frac{|\Delta x|^2}{2}\Big[A\Big(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\Big) + 2\varepsilon(\Delta x)\Big] \underset{(39.3)}{=}$$
$$\underset{(39.3)}{=} \frac{|\Delta x|^2}{2}\Big[A\Big(\frac{\Delta x''}{|\Delta x''|}\Big) + 2\varepsilon(\Delta x)\Big] \underset{(39.11)}{<} 0.$$

Поскольку среди указанных Δx имеются сколь угодно малые по длине $|\Delta x|$, то существуют как сколь угодно близкие к $x^{(0)}$ точки $x = x^{(0)} + \Delta x$, для которых $\Delta f > 0$, так и точки, в которых $\Delta f < 0$. Это и означает, что точка $x^{(0)}$ не является точкой экстремума. $\lhd$

Замечание. Для установления знакоопределенности квадратичной формы существует критерий Сильвестра: для того чтобы квадратичная форма

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма $A(x)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $-A(x) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} (-a_{ij})x_i x_j$ была положительно определенной, т. е. необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Если в том и в другом случае знаки строгих неравенств заменить на нестрогие, то получатся условия

$$a_{11} \geqslant 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

и соответственно

$$a_{11} \leqslant 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad ..., \quad (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

которые являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы квадратичная форма $A(x)$ принимала лишь неотрицательные (соответственно лишь неположительные значения), т. е., как говорят, была неотрицательной (соответственно неположительной).

В обоих случаях

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Поэтому если

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0,$$

то квадратичная форма $A(x)$ заведомо принимает как положительные, так и отрицательные значения, т. е. является знаконеопределенной.

В качестве примера рассмотрим случай функции двух переменных и сформулируем для него условия в терминах, удобных для применения, когда в точке имеется строгий максимум или минимум, и условия, когда в точке нет экстремума.

Пусть функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и эта точка является стационарной:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Обозначим через f^0_{xx}, f^0_{xy} и f^0_{yy} соответствующие вторые частные производные функции f в точке (x_0, y_0). Если

$$\begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} > 0, \quad f^0_{xx} \neq 0, \tag{39.12}$$

то согласно критерию Сильвестра при $f^0_{xx} > 0$ квадратичная форма

$$A(dx, dy) = f^0_{xx}dx^2 + 2f^0_{xy}dxdy + f^0_{yy}dy^2 \tag{39.13}$$

положительно, а при $f^0_{xx} < 0$ отрицательно определенная. Поэтому в силу теоремы 2, если

$$f^0_{xx} > 0, \quad \begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} > 0, \tag{39.14}$$

то точка (x_0, y_0) является точкой строгого локального минимума, а если

$$f^0_{xx} < 0, \quad \begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} > 0, \tag{39.15}$$

то (x_0, y_0) является точкой строгого локального максимума.

Если же

$$\begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} < 0, \tag{39.16}$$

то квадратичная форма (39.13) знаконеопределенная (почему?), и потому точка (x_0, y_0) согласно теореме 2 не является точкой экстремума.

Исследование квадратичной формы двух переменных (а частности, (39.13)) на знакоопределенность легко провести и без критерия Сильвестра. Действительно, если $f^0_{xx} \neq 0$, то

$$A(dx, dy) \underset{(39.13)}{=} \frac{1}{f^0_{xx}}[(f^0_{xx}dx + f^0_{xy}dy)^2 + (f^0_{xx}f^0_{yy} - f^{0^2}_{xy})dy^2]. \tag{39.17}$$

Отсюда следует, что если $dx^2 + dy^2 \neq 0$, то при выполнении условий (39.12) имеем

$$\operatorname{sign} A(dx, dy) = \operatorname{sign} f^0_{xx},$$

т. е. квадратичная форма (39.13) положительно определенная при $f^0_{xx} > 0$ и отрицательно определенная при $f^0_{xx} < 0$.

Если же выполняется условие (39.16), то при $dx \neq 0$, $dy = 0$ имеем

$$\operatorname{sign} A(dx, 0) = \operatorname{sign} f^0_{xx},$$

а при $dx = f^0_{xy}$, $dy = -f^0_{xx}$ получим

$$\operatorname{sign} A(f^0_{xy}, -f^0_{xx}) = -\operatorname{sign} f^0_{xx}.$$

Это означает, что квадратичная форма (39.13) является знаконеопределенной.

Аналогично проводится исследование знакоопределенности квадратичной формы (39.13) в случае, когда $f^0_{xx} = 0$, но $f_{yy} \neq 0$ при условии, что

$$\begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{39.18}$$

Если же это условие выполнено, а

$$f^0_{xx} = f^0_{yy} = 0, \tag{39.19}$$

то квадратичная форма (39.13) имеет вид

$$A(dx, dy) = 2f^0_{xy}dxdy,$$

причем в силу выполнения условий (39.18) и (39.19) здесь $f^0_{xy} \neq 0$. Поэтому

$$A(-dx, dy) = -A(dx, dy),$$

откуда сразу видно, что квадратичная форма в этом случае знакопеременная.

В случае когда

$$\begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} = 0, \tag{39.20}$$

точка (x_0, y_0) может как быть точкой экстремума, так и не быть ею. Например, для функций $f_1(x, y) = x^3 + y^3$ и $f_2(x, y) = x^4 + y^4$ точка $(0, 0)$ является стационарной точкой, в которой выполняется условие (39.20), причем $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$. Функция f_1 меняет знак в любой окрестности точки $(0, 0)$, и потому точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума, а функция f_2 всюду, кроме точки $(0, 0)$, положительна, и, следовательно, точка $(0, 0)$ является для нее точкой строгого минимума.

§ 40. Неявные функции. Отображения

40.1. Неявные функции задаваемые одим уравнением. Если функция двух переменных $F(x, y)$ определена на некотором подмножестве E плоскости R^2 переменных x, y, т. е. $E \subset R^2$, и существует такая функция f одной переменной, определенная на некотором подмножестае X числовой прямой, т. е. $X \subset R$, что для любого $x \in X$ имеет место включение $(x, f(x)) \in E$ и выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$, то функция f называется *неявной функцией, определенной уравнением*

$$F(x, y) = 0 \tag{40.1}$$

(или решением этого уравнения). Говорят также, что функция f *задана неявно уравнением* (40.1).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{40.2}$$

Это уравнение задает неявно бесконечное множество функций, определенных на отрезке $X = [-1, 1]$. Функциями, задаваемыми уравне-

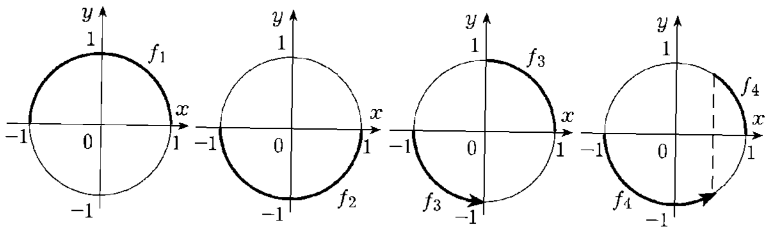

Рис. 139

нием (40.2), например, являются функции (рис. 139)

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 0, \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{если} \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 1/2. \end{cases}$$

Если наложить дополнительные условия, которым должна удовлетворять неявная функция, задаваемая уравнением (40.2), то может случиться, что такая функция будет единственной. Так, если потребовать, чтобы функция f была неотрицательна и определена на отрезке $[-1, 1]$, то имеется только одна неявная функция, задаваемая уравнением (40.2), а именно функция f_1, для которой выполняются эти требования.

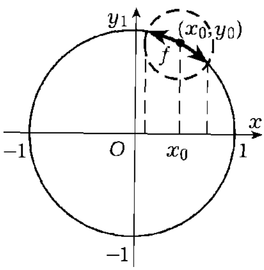

Рис. 140

Другой пример. Если координаты точки (x_0, y_0) удовлетворяют уравнению (40.2),

$$x_0^2 + y_0^2 = 1,$$

$y_0 \neq 0$ и $U = U(x_0, y_0)$ — какая-то круговая окрестность точки (x_0, y_0), не пересекающаяся с осью x (рис. 140), то снова существует единственная неявная функция f, определенная уравнением (40.2) и такая, что ее график содержится в окрестности U.

Сформулируем в виде леммы одно общее утверждение, представляющее собой условие, при котором существует единственная неявная функция, определяемая уравнением (40.1).

Лемма. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в прямоугольной окрестности*

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y)\colon |x - x_0| < \xi, \ |y - y_0| < \eta\}$$

точки (x_0, y_0) и при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна по y на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$. Тогда если $F(x_0, y_0) = 0$, то для любой окрестности $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$,

$0 < \varepsilon < \eta$, *точки* y_0 *существует такая окрестность* $U(x_0) = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$, $0 < \delta < \xi$, *точки* x_0, *что для каждого* $x \in U(x_0)$ *имеется и притом единственное решение* $y \in U(y_0)$ *уравнения*

$$F(x, y) = 0.$$

Это решение — обозначим его $y = f(x)$ *— как функция переменной* x *непрерывно в точке* x_0, *и*

$$f(x_0) = y_0.$$

Поскольку условия $x \in U(x_0) = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$, $y \in U(y_0) = (y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon)$ равносильны условию $(x, y) \in U_0(x_0, y_0) \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) : |x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \varepsilon\}$, т. е. принадлежности точки (x, y) окрестности $U_0(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), то в этой окрестности при любом $x \in U(x_0)$ существует и при этом единственная точка (x, y), являющаяся решением уравнения $F(x, y) = 0$.

Это означает, что условия

$$F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in U_0(x_0, y_0)$$

выполняются тогда и только тогда, когда $y = f(x)$, $x \in U(x_0)$.

$\triangleright$ Зафиксируем произвольно ε, $0 < \varepsilon < \eta$. В силу сделанного предположения функция $F(x_0, y_0)$ строго монотонна по y на отрезке $[y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon]$, а поскольку $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x_0, y_0 \pm \varepsilon) \neq 0$. Пусть для определенности функция $F(x_0, y)$ строго возрастает; тогда $F(x_0,\, y_0 + \varepsilon) > 0$, а $F(x_0,\, y_0 - \varepsilon) < 0$.

В силу того, что функция $F(x, y)$ непрерывна на открытом множестве $U(x_0, y_0)$ и

$$(x_0,\, y_0 + \varepsilon) \in U(x_0, y_0), \quad (x_0,\, y_0 - \varepsilon) \in U(x_0, y_0),$$

существует такое δ, $0 < \delta < \xi$, что в δ-окрестностях точек $(x_0,\, y_0 + \varepsilon)$ и $(x_0,\, y_0 - \varepsilon)$ функция F сохраняет тот же знак, что и в самих этих точках.

Поэтому для всех $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ выполняются неравенства

$$F(x_0,\, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0,\, y_0 + \varepsilon) > 0. \tag{40.3}$$

Зафиксируем произвольно x из интервала $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$. Функция $F(x, y)$ непрерывна по y на отрезке $[y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon]$, поэтому из выполнения условий (40.3) следует, что существует такое $y^* \in (y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon)$, что

$$F(x, y^*) = 0, \tag{40.4}$$

а так как, кроме того, функция $F(x, y)$ строго монотонна по y на отрезке $[y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon]$, то такое значение y^* единственно.

Таким образом, определена однозначная функция: каждому значению $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ поставлено в соответствие единственное число

$$y^* \in (y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon). \tag{40.5}$$

Обозначим эту функцию через f, т. е. $y^* = f(x)$. Согласно ее определению при любом $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеет место равенство $F(x, y^*) = 0$, т. е.

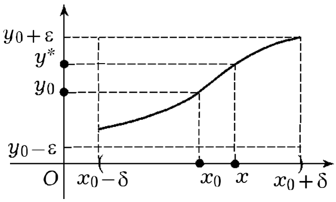

Рис. 141

$$F(x, f(x)) = 0, \tag{40.6}$$

причем, так как при каждом $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ значение y^*, обладающее свойством (40.4), единственно, то существует только одна функция f, определенная на интервале $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ и удовлетворяющая условию (40.6). При этом из того, что $F(x_0, y_0) = 0$, и из единственности функции f следует, что $y_0 = f(x_0)$ (рис. 141). Наконец, из произвольного задания достаточно малого $\varepsilon > 0$ следует, что функция f непрерывна в точке x_0: для любого $\varepsilon > 0$ было найдено такое $\delta > 0$, что из включения $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ вытекает, что

$$f(x) \underset{(40.5)}{\in} (f(x_0) - \varepsilon,\, f(x_0) + \varepsilon). \quad \lhd$$

Теорема 1. *Если функция $F(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), имеет в этой окрестности частную производную $F_y(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0), и*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то найдутся такие окрестности $U(x_0)$ и $U(y_0)$ соответственно точек x_0 и y_0, что для любого $x \in U(x_0)$ существует единственное решение $y \in U(y_0)$ уравнения $F(x, y) = 0$. Это решение, обозначаемое $y = f(x)$ как функция переменной x, непрерывно на окрестности $U(x_0)$ и $y_0 = f(x_0)$.

Если, кроме того, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует частная производная $F_x(x, y)$, непрерывная в самой точке (x_0, y_0), то функция f имеет в точке x_0 производную и

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \tag{40.7}$$

Следствие. *Если в дополнение к условиям теоремы частные производные функции F непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то неявная функция f в некоторой окрестности точки x_0 имеет непрерывную производную.*

Интересно отметить, что для неявной функции f можно доказать ее существование, но нельзя, вообще говоря, ее явно выразить через функцию F, а для производной функции f такое явное выражение имеется — формула (40.7).

$\rhd$ Пусть для определенности $F_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда из условий теоремы следует, что существует такая прямоугольная окрестность

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y)\colon |x - x_0| < \xi,\ |y - y_0| < \eta\}$$

точки (x_0, y_0), что функция $F(x, y)$ в ней непрерывна, а производная $F_y(x, y)$ положительна: $F_y(x, y) > 0$. В этой окрестности выполняются все условия леммы, в частности, из неравенства $F_y(x, y) > 0$ следует строгое возрастание по переменной y функции $F(x, y)$ при фиксированном значении x. Поэтому для произвольно заданной ε-окрестности

$$U(y_0) = (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon),\ \ 0 < \varepsilon < \eta,$$

точки y_0 в силу леммы найдется δ-окрестность точки x_0:

$$U(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),$$

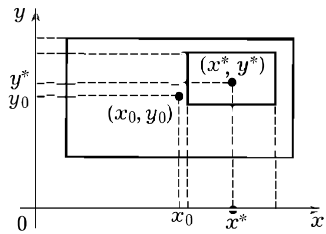

Рис. 142

для которой существует единственная функция $y = f(x)$, заданная на окрестности $U(x_0)$, непрерывная в точке x_0 и такая, что при всех $x \in U(x_0)$ выполняется включение $f(x) \in U(y_0)$ и равенство $F(x, f(x)) = 0$.

Покажем, что эта функция непрерывна во всех точках окрестности $U(x_0)$. Если $x^* \in U(x_0)$, $y^* \in U(y_0)$ и $F(x^*, y^*) = 0$, т. е. $y^* = f(x^*)$, то, очевидно, существует прямоугольная окрестность

$$U(x^*, y^*) = \{(x, y)\colon |x - x^*| < \xi^*,\ |y - y^*| < \eta^*\},$$

содержащаяся в $U(x_0, y_0)$ (рис. 142):

$$U(x^*, y^*) \subset U(x_0, y_0).$$

Ясно, что из этого включения следует, что в окрестности $U(x^*, y^*)$ также выполняются все условия леммы, а поэтому функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x^*, и так как x^* — произвольная точка окрестности $U(x^{(0)})$, то функция $y = f(x)$ непрерывна на этой окрестности.

Пусть, наконец, у функции F в окрестности точки (x_0, y_0) существует частная производная F_x, непрерывная в самой точке (x_0, y_0). Тогда функция F дифференцируема в этой точке, т. е.

$$F(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \\ = F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon \Delta y, \quad (40.8)$$

где (см. лемму в п. 36.2)

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \quad (40.9)$$

Если $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и, следовательно, $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) \in U(y_0)$, то согласно определению функции f будем иметь

$$F(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = 0.$$

Кроме того, по условию теоремы $F(x_0, y_0) = 0$, поэтому условие (40.8) в данном случае имеет вид

$$F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = 0.$$

Отсюда при $\Delta x \neq 0$ следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2}. \tag{40.10}$$

Так как в силу непрерывности функции f $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \rho = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0 \tag{40.11}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 \underset{\substack{(40.9)\\(40.11)}}{=} 0.$$

Таким образом, правая часть неравенства (40.10) имеет предел при $\Delta x \to 0$, равный $-\dfrac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$; тот же предел имеет и левая часть, а это означает, что существует производная $f'(x_0)$ и что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(40.10)}{=} -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \quad \triangleleft$$

Для доказательства следствия заметим, что если частные производные F_x и F_y дополнительно к условиям теоремы 1 непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то согласно доказанному производная f' существует в некоторой окрестности точки x_0 и в силу формулы (40.7) для всех точек x этой окрестности имеет место равенство

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \tag{40.12}$$

Отсюда в силу непрерывности композиции непрерывных функций следует, что в этом случае производная $f'(x)$ также непрерывна в некоторой окрестности точки x_0.

Замечание. Формула (40.12) дает возможность, в частности, написать уравнение касательной к плоской кривой, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

Если (x_0, y_0) — точка рассматриваемой кривой и в этой точке для функции F выполняются условия теоремы 1, то в окрестности точки (x_0, y_0) кривая имеет явное представление $y = f(x)$, для которого $y_0 = f(x_0)$ и (см. (40.7)):

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Поскольку уравнение касательной к графику функции f в точке (x_0, y_0) имеет вид (п. 10.3)

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \tag{40.13}$$

то, подставив в это уравнение выражение (40.7) для производной $f'(x_0)$, преобразуем его к виду

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \\ + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{40.14}$$

Это и есть канонический вид уравнения касательной к кривой, заданной неявным образом.

Случай одного уравнения более чем с двумя неизвестными, т. е. уравнения вида

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0, \quad n > 1, \tag{40.15}$$

рассматривается аналогично. Следует лишь в формулировках и доказательствах леммы и теоремы 1 под x понимать точку $x = (x_1, ..., x_n)$ n-мерного пространства R^n, а под окрестностью $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ — ее окрестность в R^n (рис. 143, на котором изображен случай $n = 2$). В частности, если функция F непрерывна в окрестности точки $(x^{(0)}, y_0)$, имеет в этой окрестности производную по y, непрерывную в точке $(x^{(0)}, y_0)$, и

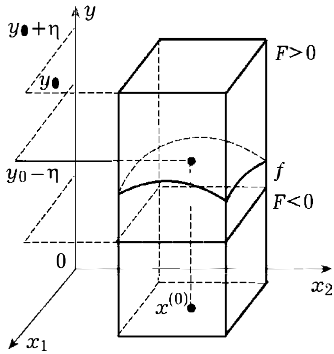

Рис. 143

$$F(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, y_0) = 0,$$

$$F_y(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, y_0) \neq 0,$$

то существуют такие окрестности $U(x^{(0)})$ и $U(y_0)$ точек $x^{(0)}$ и y_0, что уравнение (40.15) однозначно разрешимо относительно переменной $y = f(x)$ в окрестности

$$U(x^{(0)}, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) = (x_1, ..., x_n, y)\colon x \in U(x^{(0)}),\ y \in U(y_0)\}$$

точки $(x^{(0)}, y_0) = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, y_0)$ и решение непрерывно во всех точках $x \in U(x^{(0)})$.

Если, кроме того, существуют частные производные F_{x_i}, непрерывные в точке $(x^{(0)}, y_0)$, $i = 1, 2, ..., n$, то у функции f в точке $x^{(0)}$ существуют частные производные f_{x_i} и

$$f_{x_i}(x^{(0)}) = -\frac{F_{x_i}(x^{(0)}, y_0)}{F_y(x^{(0)}, y_0)}. \tag{40.16}$$

Для обобщения теории неявных функций на случай систем уравнений удобно сформулировать теорему о неявной функции, задаваемой одним уравнением $F(x, y) = 0$ для случая, когда у функции F непрерывны все ее частные производные на некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_0)$.

Теорема 1′. *Если функция F непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_0)$, $F(x^{(0)}, y_0) = 0$, $F_y(x^{(0)}, y_0) \neq \neq 0$, то найдутся такие окрестности $U(x^{(0)})$ и $U(y_0)$ соответственно точек $x^{(0)}$ и y_0, что для любой точки $x \in U(x^{(0)})$ существует единственное решение $y = f(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$ такое, что $f(x) \in U(y_0)$; при этом функция f непрерывно дифференцируема на окрестности $U(x^{(0)})$ и $f(x^{(0)}) = y_0$.*

Непрерывность частных производных неявно заданной функции f в силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций следует из того, что они, согласно (40.16), задаются формулами.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F(x, f(x))}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F(x, f(x))}{\partial y}}, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

40.2. Декартово произведение множеств. Если даны два каких-то множества, X и Y, то множество всевозможных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, называется *декартовым произведением множеств X и Y* и обозначается $X \times Y$.

Пример 1. Если $X = R^m$, $Y = R^n$, т. е. X и Y — соответственно m- и n-мерные арифметические пространства и, следовательно, состоят из всевозможных точек $x = (x_1, ..., x_m)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$, то элементами $X \times Y$ являются всевозможные пары (x, y), или, что равносильно, всевозможные системы $(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$. Отсюда следует, что декартово произведение $R^m \times R^n$ является $(m+n)$-мерным арифметическим пространством:

$$R^m \times R^n = R^{m+n}.$$

Пример 2. Если $x^{(0)} \in R^m$, $y^{(0)} \in R^n$, U и V — соответственно прямоугольные окрестности точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ в пространствах R^m и R^n, то $U \times V$ является прямоугольной окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ в пространстве $R^m \times R^n = R^{m+n}$.

В самом деле, если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)})$ и

$$U = \{x = (x_1, ..., x_m)\colon\ |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i,\ i = 1, 2, ..., m\},$$
$$V = \{y = (y_1, ..., y_n)\colon\ |y_j - y_j^{(0)}| < \varepsilon_j,\ j = 1, 2, ..., n\},$$

то

$$U \times V = \{(x, y) = (x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)\colon \\ |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i,\ i = 1, 2, ..., m;\ |y_j - y_j^{(0)}| < \varepsilon_j,\ j = l, 2, ..., n\},$$

что и является прямоугольной окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ в R^{m+n}.

Пример 3. Если X и Y — открытые множества соответственно в пространствах R^m и R^n, то их произведение $X \times Y$ является открытым множеством в пространстве $R^m \times R^n = R^{m+n}$.

Действительно, если $(x, y) \in X \times Y$, то в силу открытости множеств X и Y существуют такие прямоугольные окрестности U и V соответственно точек x и y, что $U \subset X$, $V \subset Y$, а следовательно, $U \times V \subset X \times Y$. Поскольку же, согласно примеру 2, множество $U \times V$ является (прямоугольной) окрестностью точки (x, y), то $X \times Y$ — открытое множество.

Пример 4. Если $X \subset R^n$, $[a, b]$ — отрезок числовой оси R, то множество $X \times [a, b]$ состоит из всевозможных точек (x, y) $(n+1)$-мерного пространства $R^{n+1} = R^n \times R$, таких, что $x \in X$, $a \leqslant y \leqslant b$.

Множество $X \times [a, b]$ называется *цилиндром*, множество X — его *основанием*, а число $h = b - a$ — его *высотой*.

40.3. Неявные функции, задаваемые системой уравнений. Если задана система функций

$$\varphi_i(t_1, ..., t_m), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{40.17}$$

каждая из которых имеет в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, ..., t_m^{(0)})$ частные производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, ..., m$, то матрица, составленная из этих частных производных так, что i является номером строки, а j — столбца, т.е. матрица

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{pmatrix} \tag{40.18}$$

называется *матрицей Якоби*) системы* (40.17) *в точке* $t^{(0)}$. Если $n = m$, то определитель матрицы Якоби (40.18) называется *якобианом системы функций* (40.17) *в точке* $t^{(0)}$ и обозначается $\dfrac{\partial(\varphi_i, ..., \varphi_n)}{\partial(t_1, ..., t_n)}$ (при $t = t^{(0)}$).

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} F_1(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0, \end{gathered} \tag{40.19}$$

или, короче, полагая $x = (x_1, ..., x_m)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, систему

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

*) К.Г. Якоби (1804–1851) — немецкий математик.

Сформулируем условия, при которых эту систему можно разрешить относительно переменных $y_1, ..., y_n$, в результате чего получится система функций

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, ..., x_m), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n(x_1, ..., x_m), \end{aligned} \tag{40.20}$$

задающая отображение $y = f(x)$ некоторой окрестности точки $x \in R^m$ в n-мерное пространство R^n.

Теорема 2. *Если функции* $F_i(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)})$,

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{40.21}$$

и

$$\left.\frac{\partial(F_1, ..., F_n)}{\partial(y_1, ..., y_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0, \tag{40.22}$$

то существуют такие окрестности $U(x^{(0)})$ *и* $U(y^{(0)})$ *точек* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$ *соответственно в пространствах* R^m *и* R^n, *что система уравнений* (40.19) *однозначно разрешима в окрестности* $U(x^{(0)}) \times U(y^{(0)})$ *точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *относительно переменных* $y_1, ..., y_n$, *т. е. для любого* $x \in U(x^{(0)})$ *существует и притом единственное* $y \in U(y^{(0)})$ *такое, что*

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Если

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, ..., x_m), \end{cases} \tag{40.23}$$

— указанное решение, то все функции f_i, $i = 1, 2, ..., n$, *непрерывно дифференцируемы на* $U(x^{(0)})$ *и* $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

$\triangleright$ Доказательство проведем по индукции: пусть теорема доказана для случая системы из $n - 1$ уравнений, $n \geqslant 2$ (для одного уравнения теорема доказана в п. 40.1).

Если дана система n уравнений (40.19), удовлетворяющая условиям теоремы, то в силу предположения (40.22) по крайней мере один из элементов последней строчки якобиана $\dfrac{\partial(F_1, ..., F_n)}{\partial(y_1, ..., y_n)}$ в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ не обращается в нуль. Пусть для определенности этим элементом будет $\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}$, т. е. $\dfrac{\partial F_n(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_n} \neq 0$.

При выполнении этого условия последнее уравнение системы (40.19) можно разрешить относительно y_n в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, т. е. существует такая функция

$$y_n = \varphi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{n-1}),$$

что в указанной окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ система (40.19) равносильна системе

$$\begin{aligned} &F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-1, \\ &y_n = \varphi(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{n-1}), \end{aligned} \tag{40.24}$$

причем

$$F_n(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{n-1}, \varphi(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{n-1})) \equiv 0, \tag{40.25}$$

и функция φ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, ..., x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, ..., y_{n-1}^{(0)})$.

Введем для краткости записи обозначения

$$\begin{aligned} &\widetilde{y} = (y_1, ..., y_{n-1}), \quad \widetilde{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, ..., y_{n-1}^{(0)}), \\ &\Phi_j(x, \widetilde{y}) = F_j(x, \widetilde{y}, \varphi(x, \widetilde{y})), \quad j = 1, 2, ..., n-1. \end{aligned} \tag{40.26}$$

Теперь условие (40.25) примет вид

$$F_n(x, \widetilde{y}, \varphi(x, \widetilde{y})) = 0, \tag{40.27}$$

а система (40.24) — вид

$$\Phi_j(x, \widetilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-1, \quad y_n = \varphi(x, \widetilde{y}). \tag{40.28}$$

Покажем, что $\left.\dfrac{\partial(\Phi_1, ..., \Phi_{n-1})}{\partial(y_1, ..., y_{n-1})}\right|_{(x^{(0)}, \widetilde{y}^{(0)})} \neq 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k} \underset{(40.26)}{=} \frac{\partial F_j}{\partial y_k} + \frac{\partial F_j}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad j = 1, 2, ..., n-1, \\ &\frac{\partial F_n}{\partial y_k} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \underset{(40.27)}{=} 0, \quad k = 1, 2, ..., n-1. \end{aligned} \tag{40.29}$$

Поэтому, умножив последний столбец якобиана $\dfrac{\partial(F_1, ..., F_n)}{\partial(y_1, ..., y_n)}$ на $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_k}$ и прибавив его к k-му столбцу, $k = 1, 2, ..., n-1$, получим

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \underset{(40.29)}{=} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \frac{\partial(\Phi_1, ..., \Phi_{n-1})}{\partial(y_1, ..., y_{n-1})}.$$

Отсюда, в силу условия (40.22), следует, что

$$\left.\frac{\partial(\Phi_1, ..., \Phi_{n-1})}{\partial(y_1, ..., y_{n-1})}\right|_{(x^{(0)}, \widetilde{y}^{(0)})} \neq 0.$$

Поэтому, согласно предположению индукции, система $n-1$ уравнений

$$\Phi_j(x, \widetilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-1, \tag{40.30}$$

в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, \widetilde{y}^{(0)})$ может быть разрешена единственным образом относительно переменных $y_1, ..., y_{n-1}$:

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, ..., x_m), \quad j = 1, 2, ..., n-1. \tag{40.31}$$

Поэтому, положив $\widetilde{f}(x) = (f_1(x), ..., f_{n-1}(x))$, будем иметь

$$\Phi_j(x, \widetilde{f}(x)) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-1. \tag{40.32}$$

В указанной окрестности соотношения (40.30) и (40.31) равносильны, а функции f_j, $j = 1, 2, ..., n-1$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Если

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x, \widetilde{f}(x)) = \varphi(x_1, ..., x_m, f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_{n-1}(x_1, ..., x_m)), \tag{40.33}$$

то система функций

$$f(x) = (\widetilde{f}(x), f_n(x)) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{40.34}$$

является непрерывно дифференцируемым решением системы (40.19) в некоторой окрестности

$$U(x^{(0)}, y^{(0)}) = U(x^{(0)}) \times U(y^{(0)})$$

точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$: при $x \in U(x^{(0)})$ имеем $f(x) \in U(y^{(0)})$ и

$$F_j(x, f(x)) \underset{(40.34)}{=} F_j(x, \widetilde{f}(x), f_n(x)) \underset{(40.33)}{=} F_j(x, \widetilde{f}(x), \varphi(x, \widetilde{f}(x))) \underset{(40.26)}{=}$$

$$\underset{(40.26)}{=} \Phi_j(x, \widetilde{f}(x)) \underset{(40.32)}{=} 0, \quad j = 1, 2, ..., n-1,$$

$$F_n(x, f(x)) \underset{(40.34)}{=} F_n(x, \widetilde{f}(x), f_n(x)) \underset{(40.33)}{=} F_n(x, \widetilde{f}(x), \varphi(x, \widetilde{f}(x))) \underset{(40.27)}{=} 0.$$

В силу единственности решения (40.34) в рассматриваемой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ соотношения (40.19) и (40.34) равносильны и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. $\triangleleft$

Используя обозначения (40.24), (40.26) и (40.33), схему доказательства теоремы 2 можно кратко изобразить следующим образом:

$$\overline{F}_i(x,y)=0,\quad i=1,2,...,n,$$
$$\Updownarrow$$
$$F_j(x,y)=0,\quad j=1,2,...,n-1,$$
$$y_n=\varphi(x,\widetilde{y}),$$
$$\Updownarrow$$
$$\Phi_j(x,\widetilde{y})=0,\quad j=1,2,...,n-1,$$
$$y_n=\varphi(x,\widetilde{y}),$$
$$\Updownarrow$$
$$y_j=\mathring{f}_j(x),\quad j=1,2,...,n-1,$$
$$y_n=\varphi(x,\widetilde{y}),$$
$$\Updownarrow$$
$$y_i=f_i(x),\quad i=1,2,...,n.$$

Полученное решение $y=f(x)=(f_1(x),...,f_n(x))$ системы (40.19) единственно, так как в вышеуказанной схеме при переходе от каждой системы уравнений к следующей получается равносильная в некоторой окрестности точки $(x^{(0)},y^{(0)})$ система.

40.4. Свойства якобианов отображений. Напомним, что отображение f множества $X\subset R^m$ в пространство R^n задается n функциями от m переменных:

$$y=f(x)=\begin{cases} y_1=f_1(x_1,...,x_m),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n=f_n(x_1,...,x_m),\end{cases} \tag{40.35}$$

$$x=(x_1,...,x_m)\in X,\quad y=(y_1,...,y_n)\in R^n.$$

Функции f называются *координатными функциями отображения* f, $j=1,2,...,n$.

Если X — открытое множество, то отображение (40.35) называется *дифференцируемым в точке этого множества*, если в нем дифференцируемы все координаты функции. Отображение (40.35) *непрерывно дифференцируемым на множестве* X, если все координатные функции f_i, $i=1,2,...,n$, непрерывно дифференцируемы на X (т. е. имеют на X непрерывные производные).

Пусть $y=f(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $X\subset R^m$ в открытое множество $Y\subset R^n$, а $z=g(y)$ — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества Y в пространство R^p, $x=(x_1,...,x_m)$, $y=(y_1,...,y_n)$, $z=(z_1,...,z_p)$. Тогда имеет смысл композиция $g\circ f$ отображений f и g и она также непрерывно дифференцируема.

Согласно правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, ..., p, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Это означает в силу правила умножения матриц, что при композиции отображений их матрицы Якоби перемножаются:

$$\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right). \tag{40.36}$$

Если $m = n = p$, то, поскольку при умножении матриц их определители также перемножаются, из равенства (26.36) следует равенство

$$\frac{\partial(z_1, ..., z_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = \frac{\partial(z_1, ..., z_n)}{\partial(y_1, ..., y_n)} \frac{\partial(y_1, ..., y_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}, \tag{40.37}$$

т. е. при композиции отображений их якобианы перемножаются.

Если отображение $z = g(y)$ является обратным к взаимно однозначному отображению $y = f(x)$, то отображение $g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ является тождественным отображением:

$$z_1 = x_1, \quad ..., \quad z_n = x_n$$

и его якобиан, очевидно, равен 1. Поэтому равенство (40.37) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(y_1, ..., y_n)} \frac{\partial(y_1, ..., y_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = 1. \tag{40.38}$$

Отсюда следует, что если отображение $y = f(x)$ непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и имеет якобиан, не равный нулю, то обратное отображение $y = f^{-1}(y)$ также имеет якобиан, не равный нулю, и

$$\frac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(y_1, ..., y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, ..., y_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}}. \tag{40.39}$$

Формулы (40.38) и (40.39) показывают, что при композиции отображений их якобианы ведут себя в определенном смысле аналогично производным функций одной переменной.

40.5. Непрерывно дифференцируемые отображения. Для функций одной переменной имеется простое достаточное условие обратимости дифференцируемой функции на промежутке, т. е. условие существования у нее однозначной обратной функции — этим условием является неравенство нулю ее производной. Но уже даже для отображений плоских областей нет аналогичного простого признака существования однозначного обратного отображения. Тем не менее можно указать условие локальной обратимости отображения, т. е. его обратимости в достаточно малой окрестности точки.

Пусть $X \subset R^m$ и f — отображение множества X в пространство R^n.

Определение 1. Взаимно однозначное отображение, у которого как оно само, так и ему обратное отображение непрерывны, называется *гомеоморфным отображением* или *гомеоморфизмом.*

Например, непрерывная строго монотонная на отрезке функция задает его гомеоморфное отображение (см. теорему 3 в п. 7.3).

Определение 2. Отображение называется (*непрерывно*) *дифференцируемым*, если его координатные функции (непрерывно) дифференцируемы.

Поскольку понятие дифференцируемости функции в точке определено лишь для функций, заданных в окрестности этой точки, то определение (непрерывно) дифференцируемого отображения применимо лишь к отображению открытого множества.

Очевидно, что дифференцируемое отображение непрерывно, так как дифференцируемые функции непрерывны (см. теорему 1 в п. 36.2). Непрерывно также и непрерывно дифференцируемое отображение, т. е. отображение, координатные функции которого имеют непрерывные частные производные (см. п. 36.2), так как непрерывно дифференцируемые функции дифференцируемы (см. там же теорему 3).

В дальнейшем будем предполагать, что множества, на которых заданы рассматриваемые отображения, являются открытыми множествами.

Определение 3. Гомеоморфное отображение, у которого как оно само, так и ему обратное непрерывно дифференцируемы, называется *диффеоморфным отображением* или *диффеоморфизмом.*

Например, диффеоморфизмом является отображение интервала числовой прямой, задаваемое непрерывно дифференцируемой на нем функцией с производной, не равной нулю.

Определение 4. Отображение называется *локально гомеоморфным* (*локально диффеоморфным*) в точке, если у этой точки и у ее образа существуют окрестности, гомеоморфно (диффеоморфно) отображающиеся друг на друга при данном отображении.

Ясно, что локально диффеоморфное в данной точке отображение является и локально гомеоморфным в этой точке.

Отметим, что образ открытого множества при локально гомеоморфном во всех точках отображении является также открытым множеством. Это следует из того, что у каждой точки образа отображаемого открытого множества имеется окрестность, являющаяся образом окрестности прообраза рассматриваемой точки. Иначе говоря, у каждой точки образа открытого множества имеется окрестность, содержащаяся в образе этого множества, что и означает его открытость.

Заметим еще, что если окрестность U точки $x^{(0)}$ гомеоморфно (диффеоморфно) отображается на окрестность V точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, то и любая окрестность $U_1 \subset U$ точки $x^{(0)}$ гомеоморфно (диффеоморфно) отображается на некоторую окрестность V_1 точки $y^{(0)}$. Действительно, образ $V_1 = f(U_1)$ открытого множества U_1 при отображении f является в силу вышесказанного открытым множеством, содержащим точку $y^{(0)}$, т. е. ее окрестностью.

Отсюда следует, что если отображение f локально гомеоморфно (диффеоморфно) в точке $x^{(0)}$, то существуют сколь угодно малые по диаметру окрестности этой точки, гомеоморфно (диффеоморфно) отображающиеся на окрестность точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. При этом эти окрестности можно выбрать линейно связными, т. е. такими, чтобы они являлись областями: для этого, например, достаточно выбрать шаровую окрестность точки $x^{(0)}$.

Замечание 1. На окрестностях U и V соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, указанных в определении локального диффеоморфизма в точке $x^{(0)}$, отображение f на U и обратное отображение f^{-1} на V имеют не равные нулю якобианы.

Это сразу следует из того, что согласно формуле (40.38) произведение этих якобианов равно единице.

Пусть G — открытое в пространстве R_x^n множество и $f\colon G \to R_y^n$.

Теорема 3. *Если у непрерывно дифференцируемого отображения f в некоторой точке якобиан не равен нулю, то в этой точке отображение локально диффеоморфно.*

Следствие 1. *Непрерывно дифференцируемое отображение с якобианом, не равным нулю, отображает открытое множество в открытое.*

Следствие 2 (принцип сохранения области). *Образ области при непрерывно дифференцируемом отображении с якобианом, не равным нулю, является областью.*

$\triangleright$ Пусть G — открытое множество в пространстве R_x^n, $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение G в пространство R_y^n, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $f\colon G \to R_y^n$, пусть f_i — координатные функции отображения f, $i = 1, 2, ..., n$:

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{40.40}$$

и

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0, \quad x^{(0)} \in G. \tag{40.41}$$

Введем обозначения

$$F_i(x, y) = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) - y_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{40.42}$$

$$y^{(0)} = f(x^{(0)}), \tag{40.43}$$

тогда

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) \underset{(40.42)}{=} 0,$$

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2, ..., F_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \overset{(40.43)}{=} \left.\frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}\right|_{x^{(0)}} \underset{(40.41)}{\neq} 0.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{40.44}$$

В силу формул (40.42) эта система равносильна системе

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) - y_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

и, следовательно, уравнению

$$y = f(x), \quad x \in G, \quad y \in R^n. \tag{40.45}$$

Из теоремы о неявных функциях (см. п. 40.2) следует, что систему уравнений (40.44), или, что то же самое, уравнение (40.45), можно разрешить относительно $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ (отметим, что в системе (40.44) роли переменных x и y по сравнению с системой (40.21) поменялись местами: там система разрешалась относительно y, а здесь — относительно x). Это означает, что существуют такие окрестности U и V соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$:

$$x^{(0)} \in U, \quad y^{(0)} \in V, \tag{40.46}$$

что для каждой точки $y \in V$ уравнение (40.45) имеет в окрестности U единственное решение, которое обозначим $x = g(y)$. Это решение непрерывно дифференцируемо.

Таким образом, для любой точки $y \in$ $\in V$ существует и при этом единственная точка $x \in U$, а именно $x = g(y)$, такая, что

$$f(g(y)) = y, \tag{40.47}$$

и, следовательно,

$$f(U) \supset V.$$

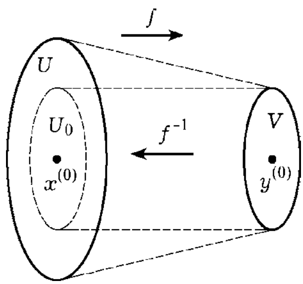

Рис. 144

Рассмотрим отображение f только на открытом множестве U, иначе говоря, рассмотрим сужение f_U отображения f на множество U. Обозначим U_0 прообраз множества V при этом отображении (рис. 144):

$$U_0 = f_U^{-1}(V). \tag{40.48}$$

В силу (40.46) и (40.48)

$$f_U(U_0) = V, \quad x^{(0)} \in U_0.$$

Поскольку f — непрерывно дифференцируемое на U отображение, то оно и непрерывно на U. Поэтому согласно теореме 5 из п. 35.3 множество U_0 является открытым множеством и, следовательно, окрестностью точки $x^{(0)}$.

Из того, что при отображении f для каждой точки $y \in V$ существует единственная точка $x = g(y) \in U$, отображающаяся в точку y, следует, что отображение f_{U_0} взаимно однозначно на множестве U_0 и $f_{U_0}^{-1} = g$ на V. Итак, отображение $f_{U_0}^{-1}$, обратное отображению f_{U_0}, однозначно и дифференцируемо на множестве V. Это и означает, что отображение f локально дифференцируемо в точке $x^{(0)}$. $\lhd$

Первое следствие из теоремы вытекает из того, что локально диффеоморфное отображение локально гомеоморфно, а при локально гомеоморфном отображении открытое множество, как это было отмечено выше, отображается в открытое.

Поскольку область есть линейно связное открытое множество и непрерывный образ линейно связного множества есть также линейно связное множество (теорема 3 в п. 35.2), то второе следствие вытекает из первого.

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы, при выполнении ее условий обратное отображение $f_{U_0}^{-1}$ к сужению f_{U_0} отображения f на множестве U_0 не только дифференцируемо на множестве V, но и непрерывно дифференцируемо на нем.

Замечание 3. Условие того, что якобиан не равен нулю в рассматриваемой точке открытого множества, существенно для справедливости утверждения доказанной теоремы. Действительно, например, уже для случая $n = 1$ функция $f(x) = x^2$ отображает открытое множество $(-1, 1)$ в неоткрытое $[0, 1)$ (здесь якобианом является производная и $f'(0) = 0$).

Замечание 4. Было доказано, что однозначное обратное отображение для отображения с неравным нулю якобианом существует только локально, т. е. в окрестности каждой точки. В целом отображение с неравным нулю якобианом не имеет, вообще говоря, однозначного обратного отображения.

Покажем это на примере отображения $w = z^2$, $z \in C$, $w \in C$, единичного круга с выколотым центром: $0 < |z| < 1$, которое отображает это множество на себя. Это отображение не взаимно однозначно, так как обратное отображение $z = \sqrt{w}$ двузначно: для любого w, $0 < |w| < 1$, существуют два значения корня $z = \sqrt{w}$, $0 < |z| < 1$. Покажем, что якобиан этого отображения не равен нулю. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда $u + iv = (x + iy)^2$, а потому $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Отсюда

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \neq 0.$$

§ 41. Условный экстремум

41.1. Прямой метод отыскания точек условного экстремума. Пусть на множестве $X \subset R^n$ задано $m+1$ функций $f_0, f_1, \ldots, \ldots, f_m$, и пусть X_0 — подмножество множества X, на котором последние m функций одновременно обращаются в нуль:

$$X_0 = \{x \in X\colon\ f_1(x) = \ \ldots = f_m(x) = 0\}.$$

Уравнения

$$f_1(x) = 0,\ \ldots,\ f_m(x) = 0 \tag{41.1}$$

называются *уравнениями связи.*

Определение 1. Точка $x^{(0)} \in X_0$ называется *точкой условного* или *относительного экстремума* функции f_0 при выполнении условий связи (41.1), если она является точкой обычного экстремума сужения функции f_0 на множестве X_0.

Точка условного экстремума может быть либо точкой условного (строгого) максимума, либо точкой условного (строгого) минимума.

Если $x^{(0)}$ — точка условного экстремума функции f_0, то говорят, что функция f_0 имеет в этой точке условный экстремум.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x,y) = y^2 - x^2$ (рис. 145). Она не имеет обычных экстремумов.

При уравнении связи $y=0$ имеем $f(x,0) = -x^2$. Эта функция имеет максимум при $x = 0$. Следовательно, точка $(0,0)$ является точкой условного экстремума функции $f(x,y) = y^2 - x^2$ при уравнении связи $x = 0$.

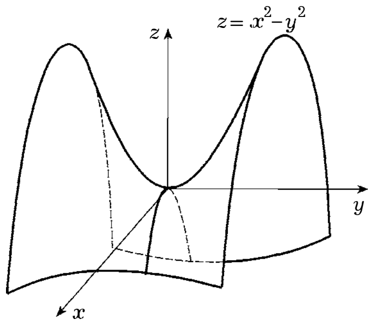

Рис. 145

Если в качестве уравнения связи взять уравнение $y = x+1$, то $f(x,x+1) = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$. Эта функция не имеет экстремумов. Поэтому функция $f(x,y) = y^2 - x^2$ не имеет условного экстремума при уравнении связи $y = x+1$.

Метод, примененный при решении этой задачи, можно применить и в общем случае для изучения условного экстремума.

Пусть все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, а градиенты $\nabla f_1, \nabla f_2, \ldots, \nabla f_m$ последних m функций линейно независимы в точке $x^{(0)}$, или, что то же самое, ранг матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{41.2}$$

равен m (отсюда, очевидно, следует, что $m \leqslant n$, так как ранг матрицы не может быть больше числа ее столбцов).

Равенство ранга матрицы (41.2) числу m равносильно существованию у нее минора порядка m, не равного нулю.

Пусть для определенности

$$\left.\frac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_m)}\right|_{x^{(0)}} = 0$$

и $n > m$. Тогда, согласно теореме о неявных функциях, система уравнений (41.1) в некоторой окрестности U точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ в пространстве R^n переменных $x_1, ..., x_n$ равносильна заданию m функций

$$\begin{gathered} x_1 = \varphi(x_{m+1}, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \varphi(x_{m+1}, ..., x_n) \end{gathered} \tag{41.3}$$

в некоторой окрестности $\widetilde{U}$ точки $\widetilde{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ в пространстве R^{n-m} переменных $(x_{m+1}, ..., x_n)$.

Иначе говоря, существуют такие окрестности $U = U(x^{(0)})$ и $\widetilde{U} = \widetilde{U}(\widetilde{x}^{(0)})$ точек $x^{(0)}$ и $\widetilde{x}^{(0)}$ соответственно в пространствах R^n и R^{n-m}, что точка $x = (x_1, ..., x_n) \in U$ удовлетворяет условию (41.1) тогда и только тогда, когда она имеет вид $(\varphi_1(\widetilde{x}), ..., \varphi_m(\widetilde{x}), x_{m+1}, ..., x_n)$, $\widetilde{x} = (x_{m+1}, ..., x_n) \in \widetilde{U}$.

Определим функцию $\widetilde{f}_0(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} = (x_{m+1}, ..., x_n)$, как результат подстановки выражений (41.3) для переменных $x_1, ..., x_n$ в $y = f_0(x_1, ..., x_n)$, т. е.

$$\widetilde{f}_0(\widetilde{x}) = \widetilde{f}_0(x_{m+1}, ..., x_n) \overset{\text{def}}{=} f_0(\varphi_1(\widetilde{x}), ..., \varphi_m(\widetilde{x}), x_{m+1}, ..., x_n).$$

Функция $\widetilde{f}_0(\widetilde{x})$ определена в вышеуказанной окрестности $\widetilde{U}$ точки $\widetilde{x}^{(0)}$.

Ввиду равносильности условий (41.1) и (41.3) точка $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума для функции f_0 при выполнении уравнений связи (41.1) тогда и только тогда, когда точка $\widetilde{x}^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции $\widetilde{f}_0$.

Затруднение при практическом использовании изложенного метода сведения задачи отыскания точек условного экстремума к задаче отыскания точек обычного экстремума состоит в том, что решение системы уравнений (41.1) не выражается через элементарные функции даже во многих простейших случаях. В следующем пункте будет изложен метод отыскания точек условного экстремума, значительно более удобный для применения.

41.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Теорема 1. *Пусть функции $f_0, f_1, ..., f_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)} \in R^n$, $n > m$. Если $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума функции f_0 относительно уравнений связи* (41.1), *то в этой точке градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, ..., \nabla f_m$ линейно зависимы, т. е. существуют такие числа λ_j, $j = 0, 1, ..., m$, одновременно не равные нулю, что*

$$\lambda_0 \nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + ... + \lambda_m \nabla f_m = 0. \tag{41.4}$$

Следствие. *Если в точке $x^{(0)}$ условного экстремума функции f_0 относительно уравнений связи* (41.1) *градиенты $\nabla f_1, ..., \nabla f_m$ линейно независимы, то существуют такие числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$, что*

$$\nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + ... + \lambda_m \nabla f_m = 0, \tag{41.5}$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{41.6}$$

Существование множителей $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ в теореме 1 (соответственно множителей $\lambda_1, ..., \lambda_m$ в ее следствии) является необходимым условием для точки относительного экстремума $x^{(0)}$ функции f_0 при выполнении уравнений связи (41.1). Если градиенты $\nabla f_1, ..., \nabla f_m$ линейно независимы, то функция

$$F(x) = f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_m f_m(x), \tag{41.7}$$

где числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$ удовлетворяют условию (41.5), называется *функцией Лагранжа*, а сами числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$ — *множителями Лагранжа*.

Условие (41.6) означает, что $\nabla F = 0$, или, в координатной записи,

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

иначе говоря,

$$dF(x^{(0)}) = 0. \tag{41.8}$$

Таким образом, точка $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции Лагранжа.

$\triangleright$ Пусть точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ удовлетворяет уравнениям связи (41.1):

$$f_k(x^{(0)}) = 0, \quad k = 1, 2, ..., m \tag{41.9}$$

и в ней градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, ..., \nabla f_m$ линейно независимы. Покажем, что в этом случае точка $x^{(0)}$ не может быть точкой условного экстремума.

Если градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, ..., \nabla f_m$ линейно независимы в точке $x^{(0)}$, то в этой точке ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{41.10}$$

равен $m+1$ и, следовательно, у этой матрицы существует минор порядка $m+1$, не равный нулю. Пусть для определенности этим минором будет минор, образованный первыми $m+1$ столбцами матрицы (41.10), т. е.

$$\left.\frac{\partial(f_0, f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_{m+1})}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{41.11}$$

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} y_0 &= f_0(x_1, ..., x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, ..., x_n^{(0)}), \\ y_1 &= f_1(x_1, ..., x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, ..., x_n^{(0)}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, ..., x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, ..., x_n^{(0)}). \end{aligned} \tag{41.12}$$

Поскольку $x^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям связи (41.1) (см. (41.9)), то для нее имеем

$$\begin{aligned} f_0(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) &= f_0(x^{(0)}), \\ f_1(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) &= 0, \end{aligned}$$

т. е. отображение (41.12) отображает точку $(x_1^{(0)}, ..., x_{m+1}^{(0)})$ в точку $(f_0(x^{(0)}), \underbrace{0, ..., 0}_{m \text{ раз}})$.

В силу же условия (41.11) отображение (41.12) отображает любую достаточно малую окрестность U точки $(x_1^{(0)}, ..., x_{m+1}^{(0)})$ в пространстве переменных $x_1, ..., x_{m+1}$ на некоторую окрестность V точки $(f_0(x^{(0)}), 0, ..., 0)$ (п. 40.5). Поэтому для всех достаточно малых $\eta > 0$, а именно таких, что $(f_0(x^{(0)}) \pm \eta, 0, ..., 0) \in V$, отображение (41.12) отображает в точки

$$(f_0(x^{(0)}) + \eta,\ 0,\ ...,\ 0) \ \text{ и } \ (f_0(x^{(0)}) - \eta,\ 0,\ ...,\ 0)$$

какие-то точки

$$(x_1', ..., x_{m+1}') \ \text{ и } \ (x_1'', ..., x_{m+1}'')$$

из U (рис. 146). Это означает, что для

$$x' = (x'_1, ..., x'_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, ..., x^{(0)}_n)$$

и

$$x'' = (x''_1, ..., x''_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, ..., x^{(0)}_n)$$

выполняются соотношения (см. (41.12))

$$f_0(x') = f_0(x^{(0)}) + \eta, \quad f_1(x') = ... = f_m(x') = 0$$

и

$$f_0(x'') = f_0(x^{(0)}) - \eta, \quad f_1(x'') = ... = f_m(x'') = 0.$$

Таким образом, точки x' и x'' удовлетворяют уравнениям связи, причем в первой из них значение функции f_0 больше $f(x^{(0)})$, а во второй — меньше.

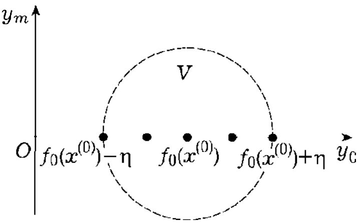

Рис. 146

Поскольку окрестность U была произвольной сколь угодно малой окрестностью точки $x^{(0)}$, то это означает, что сколь угодно близко от точки $x^{(0)}$ есть точки, удовлетворяющие уравнениям связи, в которых функция f_0 принимает значения, как большие, так и меньшие значения $f_0(x_0)$. Это означает, что точка $x^{(0)}$ не является точкой условного экстремума — противоречие. $\triangleleft$

Для доказательства следствия заметим, что если векторы ∇f_1, $\nabla f_2, ..., \nabla f_m$ линейно независимы, то в равенстве (41.4) имеем $\lambda_0 \neq 0$, так как в случае $\lambda_0 = 0$ указанные векторы оказались бы линейно зависимыми. Разделив обе части равенства на λ_0 и обозначив λ_k/λ_0 снова через λ_k, $k = 1, 2, ..., m$, получим равенство (41.5).

Замечание. Для отыскания точек, удовлетворяющих необходимому условию для условного экстремума, пишут функцию Лагранжа (41.7) с неопределенными коэффициентами $\lambda_1, ..., \lambda_m$ и решают систему $m + n$ уравнений (41.1) и (41.6) относительно $m + n$ неизвестных $\lambda_1, ..., \lambda_m, x_1 ..., x_n$.

41.3. Достаточные условия для условного экстремума. Пусть функции $f_0, f_1, ..., f_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)}$ и градиенты $\nabla f_1, \nabla f_2, ..., \nabla f_m$ линейно независимы в этой точке.

Теорема 2. *Пусть точка $x^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям связи и является стационарной точкой функции Лагранжа, т. е.*

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{41.13}$$

Если второй дифференциал

$$d^2F(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial_2 F(x^{(0)})}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_i\, dx_j$$

функции Лагранжа в точке $x^{(0)}$ *принимает только положительные (отрицательные) значения при всех значениях* $dx_1, \ldots, dx_n$, *не равных одновременно нулю и удовлетворяющих продифференцированным уравнениям связи* (41.1), *т. е. уравнениям*

$$\frac{\partial f_k(x^{(0)})}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_k(x^{(0)})}{\partial x_n}\, dx_n = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{41.14}$$

то точка $x^{(0)}$ *является точкой строгого условного минимума (максимума). Если при тех же ограничениях на значения* $dx_1, \ldots$ $\ldots, dx_n$ *второй дифференциал функции Лагранжа принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке* $x^{(0)}$ *условного экстремума нет.*

$\triangleright$ Из линейной независимости градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ следует, что ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ равен m, т. е. у этой матрицы существует не равный нулю минор порядка m. Пусть для определенности

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x=x^{(0)}} \neq 0. \tag{41.15}$$

Тогда в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ переменные $x_1, \ldots, x_m$ в силу уравнения связи

$$f_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{41.16}$$

являются функциями переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$:

$$x_k = \varphi_k(x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{41.17}$$

т. е. являются решениями системы уравнений (41.16).

Воспользуемся тем, что точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой строгого условного экстремума функции при выполнении уравнений связи (41.16) тогда и только тогда, когда точка $\widetilde{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой обычного строгого локального экстремума для функции

$$\widetilde{f}_0(\widetilde{x}) = f_0(\varphi_1(\widetilde{x}), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}), x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad \widetilde{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n), \tag{41.18}$$

а для этого, согласно теореме 2 п. 39.2, достаточно, чтобы

$$d\widetilde{f}_0(x^{(0)}) = 0 \tag{41.19}$$

и второй дифференциал $d^2\widetilde{f}_0(\widetilde{x}^{(0)})$ был знакоопределенной квадратичной формой. Вычислим эти дифференциалы. Для удобства функции f_k, $k = 1, \ldots, m$, и функцию Лагранжа F, в которых переменные $x_1, ..., x_m$ являются функциями (41.17) переменных $x_{m+1}, ..., x_n$, будем обозначать соответственно $\widetilde{f}_k$ и $\widetilde{F}$ (ср. (41.18)). Подставив (41.17) в (41.16), получим тождества $\widetilde{f}_k = 0$, $k = 1, 2, ..., m$, продифференцировав которые в точке $\widetilde{x}^{(0)}$ получим (см. (41.19))

$$d\widetilde{f}_k = 0, \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{41.20}$$

Используя независимость формы записи дифференциала функции от выбора переменных (см. п. 36.4), равенство (41.20) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i = 0, \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{41.21}$$

Здесь $dx_{m+1}, ..., dx_n$ являются дифференциалами (приращениями) независимых переменных, а $dx_1 = d\varphi_1(\widetilde{x})$, ..., $dx_m = d\varphi_m(\widetilde{x})$ — дифференциалами функций в точке $\widetilde{x}^{(0)}$.

Пусть

$$F = f_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \tag{41.22}$$

— функция Лагранжа для точки $x^{(0)}$, т. е. координаты $x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ этой точки и числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$ являются решениями системы уравнений (41.1) и (41.6).

Вычислим первый дифференциал функции $\widetilde{f}_0$ в точке $\widetilde{x}^{(0)}$:

$$d\widetilde{f}_0 \underset{(41.20)}{=} d\widetilde{f}_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, d\widetilde{f}_k =$$
$$= d\Big(\widetilde{f}_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widetilde{f}_k\Big) \underset{(41.22)}{=} d\widetilde{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i \underset{(41.13)}{=} 0. \tag{41.23}$$

(В конце выкладки снова была использована независимость формы записи первого дифференциала от выбора переменных.)

Дифференцируя тождества (41.20), получим

$$d^2\widetilde{f}_k = 0, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{41.24}$$

где по-прежнему дифференциалы $dx_1, ..., dx_n$ связаны соотношениями (41.21). Теперь для второго дифференциала функции (41.18) имеем

$$d^2\widetilde{f}_0 \underset{(41.24)}{=} d^2\widetilde{f}_0 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, d^2\widetilde{f}_k = d^2\Big(\widetilde{f}_0 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \widetilde{f}_k\Big) \underset{(41.22)}{=}$$
$$\underset{(41.22)}{=} d^2\widetilde{F} = d\,(d\widetilde{F}) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} d\Big(\frac{\partial F}{\partial x_i}\Big)\, dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, d^2 x_i \underset{(41.13)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_i\, dx_j.$$

Итак,

$$d^2 \widetilde{f}_0(\widetilde{x}^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x^{(0)})}{\partial x_i \, \partial x_j} \, dx_i \, dx_j = d^2 F(x^{(0)}), \tag{41.25}$$

где дифференциалы $dx_1, ..., dx_n$ удовлетворяют соотношениям (41.21).

Поэтому если дифференциалы $dx_1, ..., dx_n$ не все равны нулю, связаны соотношениями (41.21) (в этом случае в силу выполнения условия (41.15) из теории линейных уравнений следует, что не все равны нулю и приращения $dx_{m+1}, ..., dx_n$) и для них

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x^{(0)})}{\partial x_i \, \partial x_j} \, dx_i \, dx_j > 0,$$

то в силу формулы (41.25) для $dx_{m+1}, ..., dx_n$ будем иметь $d^2 \widetilde{f}_0(\widetilde{x}^{(0)}) > 0$. Отсюда в силу выполнения условия (41.23) следует (согласно теореме 2 п. 39.2), что точка $\widetilde{x}^{(0)}$ является точкой строгого локального минимума для функции $\widetilde{f}_0$, а поэтому точка $x^{(0)}$ — точкой строгого условного минимума для функции f_0 при выполнении уравнений связи (41.16).

Аналогично (с помощью той же теоремы 2 п. 39.2) получаются достаточные условия для точки строгого условного максимума и для отсутствия условного экстремума. $\lhd$

Замечание. Очевидно, что если в рассматриваемой точке второй дифференциал функции Лагранжа является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, т. е. принимает положительные (отрицательные) значения для всех одновременно не равных нулю значений $dx_1, ..., dx_n$ (т. е. без дополнительных на них ограничений (41.14)), то точка $x^{(0)}$ является точкой строгого условного минимума (максимума).

Пример. Найдем, применив метод множителей Лагранжа, точки условного экстремума функции $f(x, y) = xy$ при выполнении уравнения связи $x - y = 0$.

В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, y) = xy + \lambda(x - y).$$

Решая соответствующую систему уравнений (41.6) совместно с уравнением связи, т. е. систему уравнений

$$x - y = 0, \quad y + \lambda = 0, \quad x - \lambda = 0,$$

получим $x = y = \lambda = 0$.

Чтобы выяснить, имеется в точке $(0, 0)$ условный экстремум или нет, исследуем второй дифференциал

$$d^2 f(x, y) = 2 \, dx \, dy$$

при условии

$$dx - dy = 0,$$

получающемся дифференцированием уравнения связи $x - y = 0$. Имеем

$$d^2 f(x,y)|_{x-y=0} = 2\,dx\,dy\big|_{dx=dy} = 2\,dx^2$$

— положительно определенная квадратичная форма. Следовательно, в точке $(0,0)$ имеется строгий условный минимум. В этом, конечно, легко убедиться и непосредственно: из уравнения связи получим $y = x$, а функция

$$f(x,x) = x^2$$

в точке $x = 0$ имеет минимум.

ГЛАВА 5

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 42. Кратные интегралы

42.1. Объем (мера) в n-мерном пространстве. Пусть R^n является n-мерным арифметическим пространством точек $x = (x_1, ..., x_n)$. Множество точек $x \in R^n$, координаты x_i, $i = 1, 2, ..., n$, которых удовлетворяют линейному уравнению вида

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n + a_0 = 0, \quad a_1^2 + ... + a_n^2 > 0$$

(a_i — фиксированные числа, $i = 1, 2, ..., n$), называется *гиперплоскостью в пространстве* R^n. При $n = 3$ понятие гиперплоскости совпадает с понятием обычной плоскости в R^3.

Зафиксируем целое неотрицательное k, $k = 0, 1, 2, ...$ Семейство всевозможных гиперплоскостей

$$x_i = m \cdot 10^{-k}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ..., \quad i = 1, 2, ..., n,$$

“разбивает” пространство R^n на n-мерные замкнутые кубы вида

$$Q = \left\{x\colon\ \frac{m_i}{10^k} \leqslant x_i \leqslant \frac{m_i + 1}{10^k}, \quad i = 1, 2, ..., n\right\}. \tag{42.1}$$

Совокупность всех таких кубов обозначим T_k и назовем *кубильяжем ранга* k пространства R^n, а кубы Q, входящие в кубильяж T_k, будем называть *кубами ранга* k. Пересечение множества внутренних точек любых двух кубов ранга k пусто: в пересечение двух указанных кубов могут входить только их граничные точки.

Очевидно, что при любом $k = 0, 1, 2, ...$ совокупность всех кубов ранга k покрывает все пространство R^n:

$$R^n = \bigcup_{Q \in T_k} Q. \tag{42.2}$$

В одномерном случае, т. е. при $n = 1$, кубы Q являются отрезками, при $n = 2$ — квадратами, при $n = 3$ — обычными трехмерными кубами.

По аналогии с формулой для объема обычного трехмерного куба определим объем μQ^n n-мерного куба

$$Q^n = \{x\colon\ x_i^{(0)} \leqslant x \leqslant x_i^{(0)} + h, \quad i = 1, 2, ..., n\}$$

как n-ю степень длины h его ребра, т. е.

$$\mu Q^n \overset{\text{def}}{=} h^n, \tag{42.3}$$

в частности, согласно этому определению для куба (42.1), длина ребра которого равна 10^{-k}, имеем

$$\mu Q = 10^{-kn}. \tag{42.4}$$

Объем множества S, состоящего из некоторого множества (конечного или бесконечного) попарно различных кубов Q_j ранга k,

$$S = \bigcup_j Q_j, \tag{42.5}$$

определим как сумму объемов входящих в него кубов:

$$\mu S = \sum_j \mu Q_j. \tag{42.6}$$

Меру пустого множества будем считать по определению равной нулю:

$$\mu\varnothing \overset{\text{def}}{=} 0. \tag{42.7}$$

Очевидно, что

$$\mu S \geqslant 0, \tag{42.8}$$

причем если S состоит из конечного числа кубов ранга k, то μS — конечное число, а если S состоит из бесконечного множества указанных кубов, то $\mu S = +\infty$.

Пусть теперь X — произвольное множество в R^n. Обозначим через $s_k(X)$ множество точек всех тех кубов ранга k, которые целиком содержатся в X, а через $S_k(X)$ — множество точек всех тех кубов ранга k, каждый из которых пересекается с X:

$$s_k = s_k(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{Q\in T_k\\ Q\subset X}} Q, \quad S_k = S_k(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{Q\in T_k\\ Q\cap X\neq\varnothing}} Q. \tag{42.9}$$

Из этого определения следует, что множество $s_k(X)$ содержится в X, а множество $S_k(X)$ содержит X:

$$s_k(X) \subset X \subset S_k(X) \tag{42.10}$$

(множества s_k и S_k могут быть и пустыми).

Кроме того, при возрастании k множества s_k возрастают, а множества S_k убывают (рис. 147):

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset \ldots \subset X \subset \ldots \subset S_k \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0. \tag{42.11}$$

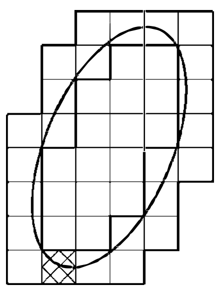

Рис. 147

Из (42.6) и (42.11) следует, что

$$0 \leqslant \mu s_0 \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k \leqslant \ldots \leqslant \mu S_k \leqslant \ldots \leqslant \mu S_0 \tag{42.12}$$

(μs_k, как и μS_k, может быть нулем, положительным числом или $+\infty$).

Таким образом, последовательность $\{\mu s_k\}$ возрастает, а последовательность $\{\mu S_k\}$ убывает в расширенном множестве действительных чисел $\overline{R}$, а поэтому для любого множества $X \subset R^n$ всегда существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{k\to\infty} \mu s_k, \quad \lim_{k\to\infty} \mu S_k.$$

Определение 1. Предел $\lim\limits_{k\to\infty} \mu s_k$ называется *нижней* (или *внутренней*) *n-мерной мерой Жордана* множества $X \subset R^n$ и обозначается $\mu_* X$:

$$\mu_* X \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu s_k. \tag{42.13}$$

Предел $\lim\limits_{k\to\infty} \mu S_k$ называется *верхней* (или *внешней*) *n-мерной мерой Жордана* множества X и обозначается $\mu^* X$:

$$\mu^* X \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu S_k. \tag{42.14}$$

Из (42.12) следует, что

$$0 \leqslant \mu s_k \leqslant \mu S_k \leqslant +\infty.$$

Перейдя в этих неравенствах к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$0 \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X \leqslant +\infty. \tag{42.15}$$

Если нижняя и верхняя n-мерные меры Жордана множества X конечны и равны, т. е.

$$\mu_* X = \mu^* X,$$

то множество X называется *измеримым по Жордану* и общее значение его верхней и нижней n-мерных мер Жордана называется *n-мерной мерой* (*объемом*) *Жордана* и обозначается

$$\mu X = \mu_* X = \mu^* X. \tag{42.16}$$

Итак, в случае измеримого по Жордану множества имеем

$$\mu X = \lim_{k\to\infty} \mu s_k(X) = \lim_{k\to\infty} \mu S_k(X). \tag{42.17}$$

В дальнейшем для краткости вместо "верхняя (нижняя) n-мерная мера Жордана", "n-мерная мера Жордана", "измеримое по Жордану множество" будем, как правило, говорить просто *верхняя* (*нижняя*) *мера*, *мера*, *измеримое множество*. Если будет важно указать, какова размерность n пространства, в котором рассматривается мера μ (42.16), то она будет обозначаться μ_n.

В случае $n = 2$ измеримые по Жордану множества называются также *квадрируемыми*, а при $n = 3$ — *кубируемыми*.

Конечно, далеко не всякое множество в R^n измеримо. Одним из простейших неизмеримых множеств на прямой является множество Q_0 рациональных чисел отрезка $[0, 1]$: как легко убедиться,

$$\mu_* Q_0 = 0, \quad \mu^* Q_0 = 1, \quad n = 1.$$

Замечание 1. Если $\mu_* X = 0$, то множество X измеримо и $\mu X = 0$.

$\triangleright$ Действительно, в этом случае в силу (42.15) имеем $\mu_* X = \mu^* X = 0$, т. е. $\mu X \underset{(42.16)}{=} 0$. $\triangleleft$

Замечание 2. Если множество ограничено, то его верхняя, а следовательно, и нижняя меры конечны.

$\triangleright$ В самом деле, если множество X ограниченно, то существует куб вида

$$Q_m = \{x\colon\ |x_i| \leqslant m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{42.18}$$

содержащий в себе множество X,

$$X \subset Q_m, \tag{42.19}$$

а тогда для $k = 0$, а следовательно, и для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются включения

$$S_k(X) \subset Q_{m+1}, \tag{42.20}$$

где куб Q_{m+1} определяется аналогично кубу (42.18), надо только m заменить на $m + 1$. Из включений (42.20), согласно определениям (42.3) и (42.6), следует, что

$$\mu S_k(X) \leqslant \mu Q_{m+1} \underset{(42.3)}{=} 2^n (m+1)^n.$$

Перейдя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\mu^* X \leqslant 2^n (m+1)^n, \tag{42.21}$$

следовательно, верхняя мера множества X конечна, а тогда в силу неравенства (42.15) конечна и его нижняя мера. $\triangleleft$

Замечание 3. Если множество X неограниченно, то

$$\mu^* X = +\infty, \tag{42.22}$$

поэтому, если множество X измеримо, то оно ограничено.

$\triangleright$ Действительно, множества $S_k(X)$ при любом $k = 0, 1, \ldots$ содержат в себе множество X (см. (42.10)), поэтому при неограниченности множества X множества $S_k(X)$ также неограничены и потому состоят из бесконечного множества кубов ранга k (в противном случае $S_k(X)$, а следовательно, и $X \subset S_k(X)$ были бы ограниченными множествами). Отсюда, согласно определению (42.6), получаем, что при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место $\mu S_k(X) = +\infty$, и поэтому

$$\mu^* X = \lim_{k \to \infty} \mu S_k(X) = +\infty.$$

Если множество X измеримо, то его мера, а следовательно, и верхняя мера (так как они равны) конечны, и потому, согласно доказанному, множество X не может быть неограниченным. ◁

Замечание 4. Нетрудно убедиться методами, применяемыми в элементарной математике для получения формул площади прямоугольника и объема трехмерного прямоугольного параллелепипеда, что объем любого n-мерного параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям, равен произведению длин его ребер.

Отсюда, в частности, следует, что объем куба ранга k в смысле определения (42.17) равен 10^{-kn}, т. е. совпадает с его объемом в смысле определения (42.4).

Подобным образом совпадают и меры множеств $s_k(X)$ и $S_k(X)$, $X \subset R^n$, и множеств S, состоящих из некоторого множества попарно различных кубов одного и того же ранга (см. (42.5)) в смысле определений (42.6) и (42.16). Поэтому все эти множества измеримы.

Кроме того, поскольку при параллельном переносе (т. е. преобразовании пространства R^n вида $y = x + a$, $x, y, a \in R^n$, a фиксировано) длины ребер параллепипедов не меняются, то из сказанного выше следует также, что при параллельном переносе объемы рассматриваемых параллелепипедов и множеств, представляющих собой их объединения, не меняются.

Отметим еще, что открытые и полуоткрытые n-мерные кубы с ребрами длины h, т. е. кубы, задаваемые при каждом $i = 1, 2, ..., n$ одним из неравенств вида $x_i^{(0)} < x_i < x_i^{(0)} + h$ или $x_i^{(0)} \leqslant x_i < x_i^{(0)} + h$ или $x_i^{(0)} < x_i \leqslant x_i^{(0)} + h$, также имеют меру Жордана, равную h^n.

Упражнение 1. Доказать утверждения замечания 4.

Лемма 1 (монотонность нижней и верхней мер). *Если*

$$X_1 \subset X_2, \tag{42.23}$$

то

$$\mu_* X_1 \leqslant \mu_* X_2, \tag{42.24}$$

$$\mu^* X_1 \leqslant \mu^* X_2. \tag{42.25}$$

Следствие. *Подмножество множества меры нуль также имеет меру нуль.*

▷ Если $X_1 \subset X_2$, то при любом $k = 0, 1, 2, ...$ справедливы включения

$$s_k(X_1) \subset s_k(X_2), \quad S_k(X_1) \subset S_k(X_2),$$

так как в силу включения $X_1 \subset X_2$ из того, что куб Q ранга k содержится в X_1, следует, что он содержится и в X_2, а из того, что он пересекается с X_1, следует, что он пересекается и с X_2. Поэтому, согласно определению (42.6),

$$\mu s_k(X_1) \leqslant \mu s_k(X_2), \quad \mu S_k(X_1) \leqslant \mu S_k(X_2). \tag{42.26}$$

Перейдя в этих неравенствах к пределу при $k \to \infty$, получим неравенства (42.24) и (42.25). ◁

▷ Докажем следствие. Если $X_1 \subset X_2$ и $\mu X_2 = 0$, то

$$0 \underset{(42.15)}{\leqslant} \mu^* X_1 \underset{(42.25)}{\leqslant} \mu^* X_2 \underset{(42.16)}{=} \mu X_2 = 0,$$

т. е. $\mu^* X_1 = 0$, и, следовательно, согласно замечанию 1 множество X измеримо, и его мера равна нулю. ◁

Изучим теперь связь между измеримостью множества и мерой его границы. Предварительно сделаем несколько замечаний.

Замечание 5. Любое объединение конечного или бесконечного множества кубов данного ранга является замкнутым множеством.

▷ Пусть $\{Q_i\}$ — конечное или бесконечное множество кубов данного ранга k,

$$X = \bigcup_i Q_i \tag{42.27}$$

и $x \in \overline{X}$. Любая ограниченная окрестность точки x (как и вообще любой точки пространства R^n) пересекается лишь с конечным множеством кубов ранга k и, следовательно, с конечным множеством слагаемых Q_{i_j}, $j = 1, 2, ..., m$, суммы $\bigcup\limits_i Q_i$. Поэтому

$$x \in \overline{\bigcup_{j=1}^{m} Q_{i_j}}. \tag{42.28}$$

Поскольку кубы Q_j являются замкнутыми множествами и объединение конечного множества замкнутых множеств снова есть замкнутое множество, то

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{m} Q_{i_j}} = \bigcup_{j=1}^{m} Q_{i_j}. \tag{42.29}$$

Таким образом,

$$x \in \bigcup_{j=1}^{m} Q_{i_j}$$

и, следовательно, существует такой номер j_0, что $x \in Q_{i_{j_0}}$, а поэтому в силу равенства (42.27) $x \in X$. Таким образом, из включения $x \in \overline{X}$ вытекает, что $x \in X$. Это означает, что $\overline{X} = X$, т. е, что X — замкнутое множество. ◁

Для всякого множества $X \in R^n$ обозначим $\sigma_k = \sigma_k(X)$ объединение кубов ранга k, содержащихся в множестве $S_k = S_k(X)$, но не содержащихся в множестве $s_k = s_k(X)$ (см. заштрихованный квадрат на рис. 147, $n = 2$):

$$\sigma_k = \sigma_k(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \in S_k,\ Q \notin s_k}} Q. \tag{42.30}$$

Из этого определения следует, что

$$S_k = s_k \cup \sigma_k, \tag{42.31}$$

причем никакой куб ранга k не принадлежит одновременно множествам s_k и σ_k. Поэтому согласно определению (42.6)

$$\mu S_k = \mu s_k + \mu\sigma_k\ ^{*}). \tag{42.32}$$

В силу определения (42.30) множество σ_k так же, как и множества s_k и S_k, является объединением кубов одного ранга, поэтому все эти множества являются замкнутыми множествами (см. замечание 5):

$$\overline{s}_k = s_k, \quad \overline{S}_k = S_k, \quad \overline{\sigma}_k = \sigma_k. \tag{42.33}$$

Напомним, что для любого множества $X \subset R^n$ имеют место равенства (см. 33.44))

$$\overline{X} = X_{\text{int}} \cup \partial X, \quad X_{\text{int}} \cap \partial X = \varnothing, \tag{42.34}$$

где X_{int} — множество внутренних точек множества X, а ∂X — его граница.

Замечание 6. Для любого многогранника S, состоящего из конечного или бесконечного множества кубов одного и того же ранга k, его точка имеет окрестность, содержащуюся в S, в том и только

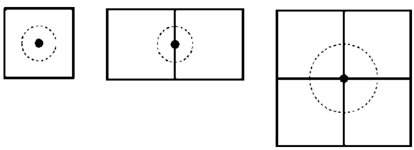

Рис. 148

том случае, когда все кубы ранга k, содержащие точку x, содержатся в многоугольнике S (рис. 148).

Отсюда следует, что точка пространства R^n принадлежит внутренности $(s_k)_{\text{int}}$ множества s_k тогда и только тогда, когда все кубы ранга k, к которым она принадлежит, содержатся в множестве $s_k = s_k(X)$.

Замечание 7. Наряду с равенством (42.31) имеет место более точное равенство

$$S_k = (s_k)_{\text{int}} \cup \sigma_k, \tag{42.35}$$

в котором слагаемые не пересекаются:

$$(s_k)_{\text{int}} \cap \sigma_k = \varnothing. \tag{42.36}$$

*) Меры μs_k, μS_k и $\mu\sigma_k$ могут быть как конечными, так и бесконечными, причем, как обычно, для любого действительного числа a считается, что $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ и $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

В силу формул (42.31) и (42.34) имеем

$$S_k = (s_k)_{\mathrm{int}} \cup \partial s_k \cup \sigma_k. \tag{42.37}$$

Докажем, что

$$\partial s_k \subset \sigma_k. \tag{42.38}$$

Пусть $x \in \partial s_k$. Поскольку

$$\partial s_k \subset \overline{s}_k \underset{(42.33)}{=} s_k \subset X,$$

то $x \in X$ и, следовательно, любой куб ранга k, содержащий точку x, содержится в множестве S_k (см. определение (42.9)). Согласно замечанию 6 хотя бы один куб из этих кубов не содержится в s_k (в противном случае точка x являлась бы внутренней точкой множества s_k, т. е. $x \in (s_k)_{\mathrm{int}}$, а следовательно, не принадлежала бы его границе ∂s_k). Таким образом, $x \in Q \subset S_k$, $Q \not\subset s_k$.

В силу определения множества σ_k куб Q, а поэтому и точка x содержатся в σ_k. Это и означает справедливость включения (42.38). Из этого включения следует, что в равенстве (42.37) можно отбросить слагаемое ∂s_k (оно входит в другое слагаемое), т. е. имеет место равенство (42.35).

Докажем теперь равенство (42.36). Если $x \in (s_k)_{\mathrm{int}}$, то согласно замечанию 6 любой куб Q ранга k, содержащий точку x: $Q \ni x$, содержится в s_k и, следовательно, не содержится в σ_k: $Q \not\subset \sigma_k$. Это означает, что $x \notin \sigma_k$, т. е. имеет место равенство (42.36). $\lhd$

З а м е ч а н и е 8. Отметим еще (это нам вскоре пригодится), что если какой-то куб Q содержит как точки, принадлежащие некоторому множеству X, так и не принадлежащие ему, то этот куб Q содержит и граничные точки множества X. Пусть, например,

$$a \in Q \cap X, \quad b \in Q \setminus X.$$

Тогда, как в этом нетрудно убедиться, на отрезке $[a, b]$ с концами в точках a и b существует такая точка ξ, что $\xi \in \partial X$. (Если на отрезке $[a, b]$ ввести параметр t, например, так, чтобы $[a, b] = \{x = a + (b - a)t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, и положить

$$t_0 = \sup_{a+(b-a)t \in X} t,$$

то $\xi = a + (b - a)t_0 \in \partial X$.)

Поскольку же в силу выпуклости куба Q весь отрезок $[a, b]$ содержится в Q, то $\xi \in Q$ и, следовательно, пересечение куба Q с множеством ∂X непусто: оно во всяком случае содержит точку ξ.

Л е м м а 2. *Для любого множества $X \subset R^n$ справедливы включения*

$$\partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X) \tag{42.39}$$

(рис. 149).

▷ Сначала докажем включение
$$\partial X \subset \sigma_k(X). \tag{42.40}$$

Пусть $x \in \partial X$. Заметив, что из включения $X \subset S_k(X)$ следует аналогичное включение для замыканий этих множеств
$$\overline{X} \subset \overline{S_k(X)} \underset{(42.33)}{=} S_k(X),$$
получим
$$x \in \partial X \underset{(42.34)}{\subset} \overline{X} \subset S_k(X) \underset{(42.35)}{=} s_k(X)_{\text{int}} \cup \sigma_k(X). \tag{42.41}$$
Из включения же $s_k(X) \underset{(42.9)}{\subset} X$ имеем
$$s_k(X)_{\text{int}} \subset X_{\text{int}}. \tag{42.42}$$

Из включения же $x \in \partial X$ следует, что точка x не является внут-

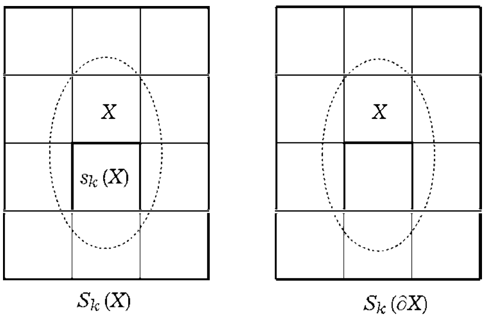

Рис. 149

ренней точкой множества X: $x \notin X_{\text{int}}$ (так как $X_{\text{int}} \cap \partial X = \varnothing$). Поэтому
$$x \underset{(42.42)}{\notin} s_k(X)_{\text{int}}. \tag{42.43}$$

Из (42.41) и (42.43) вытекает, что точка x принадлежит множеству $\sigma_k(X)$, т. е. включение (42.40) доказано.

Покажет теперь справедливость включения
$$\sigma_k(X) \subset S_k(\partial X). \tag{42.44}$$

Если $x \in \sigma_k(X)$, то существует куб Q ранга k, содержащийся в множестве $\sigma_k(X)$ и содержащий точку x: $Q \ni x$. Согласно определению множества $\sigma_k(X)$ этот куб принадлежит множеству $S_k(X)$ и, следовательно, пересечение куба Q с множеством X не пусто. Поскольку этот куб согласно тому же определению не содержится в множестве $s_k(X)$, то он содержит и точки, не принадлежащие множеству X. Отсюда согласно замечанию 8 вытекает, что куб Q содержит точки границы ∂X множества X, а поэтому согласно определению множества $S_k(\partial X)$ как объединения всех кубов ранга k, пересекающихся с множеством ∂X, куб Q содержится в этом множестве. Итак, показано, что из условия $x \in \sigma_k(X)$ следует, что $x \in S_k(\partial X)$, т. е. включение (42.44) также доказано. ◁

Докажем теперь критерий измеримости по Жордану множества n-мерного пространства.

Теорема 1. *Для того чтобы множество X было измеримо по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и чтобы его граница ∂X имела меру Жордана, равную нулю*:

$$\mu(\partial X) = 0. \tag{42.45}$$

▷ 1. Покажем необходимость условий теоремы для измеримости множества. Если множество $X \subset R^n$ измеримо, то оно ограничено (замечание 3), а пределы $\lim\limits_{k\to\infty} s_k(X) = \mu_* X$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(X) = \mu^* X$, согласно определению измеримости множества, конечны и равны между собой. Поэтому, заметив, что множество σ_k измеримо (см. замечание 4), следовательно,

$$\mu^*\sigma_k = \mu\sigma_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{42.46}$$

и использовав монотонность верхней меры, будем иметь

$$0 \leqslant \mu^*\partial X \underset{(42.40)}{\leqslant} \mu^*\sigma_k \underset{(42.46)}{=} \mu\sigma_k \underset{(42.32)}{=} \mu S_k - \mu s_k \underset{(42.17)}{\to} 0 \tag{42.47}$$

при $k \to \infty$. Это означает, что $\mu^*(\partial X) = 0$. Отсюда, согласно замечанию 1, вытекает, что множество ∂X измеримо и что $\mu(\partial X) = 0$.

2. Докажем достаточность условий (42.45) для измеримости ограниченного множества. Пусть множество $X \subset R^n$ ограничено и $\mu(\partial X) = 0$. Тогда, согласно определению измеримости множества,

$$\lim_{k\to\infty} \mu S_k(\partial X) = 0. \tag{42.48}$$

Из соотношения (42.32) с помощью включения (42.44) в силу монотонности меры имеем

$$0 \leqslant \mu S_k(X) - \mu s_k(X) \underset{(42.32)}{=} \mu\sigma_k(X) \underset{(42.44)}{\leqslant} \mu S_k(\partial X) \underset{(42.48)}{\to} 0 \tag{42.49}$$

при $k \to \infty$.

Из ограниченности множества X вытекает существование конечных пределов (замечание 2) $\lim\limits_{k\to\infty} \mu S_k(X) = \mu^* X$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu s_k(X) = \mu_* X$. Поэтому, перейдя к пределу в неравенстве (42.49), получим

$$\mu^* X = \mu_* X,$$

т. е. множество X измеримо по Жордану. ◁

Замечание 9. Компакт, граница которого имеет меру нуль, является измеримым множеством.

Это сразу следует из теоремы 1, так как всякий компакт есть ограниченное множество.

Замечание 10. Граница измеримого множества (как граница всякого ограниченного множества) является ограниченным множеством, а так как граница — замкнутое множество, то в данном случае она является компактом. Таким образом, согласно теореме 1 граница измеримого множества есть компакт меры нуль.

Лемма 3. *Для любой пары множеств X и Y, лежащих в пространстве R^n, справедливы следующие включения*:

$$\partial(X \cup Y) \subset \partial X \cup \partial Y, \tag{42.50}$$

$$\partial(X \cap Y) \subset \partial X \cup \partial Y, \tag{42.51}$$

$$\partial(X \backslash Y) \subset \partial X \cup \partial Y, \tag{42.52}$$

т. е. границы объединения, пересечения и разности двух множеств содержатся в объединении их границ (рис. 150).

Отсюда по индукции следует, что граница объединения и пересечения конечного числа множеств содержится в объединении их границ.

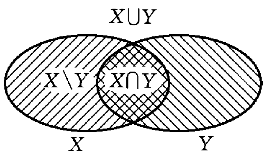

Рис. 150

$\triangleright$ 1) Докажем включение (42.50). Если $x \in \partial(X \cup Y)$, то в любой окрестности точки x содержатся как точки, принадлежащие множеству $X \cup Y$, так и точки, не принадлежащие ему. Возможны два случая: либо в любой окрестности точки x содержатся точки множества X, либо существует окрестность U_0 точки x, не содержащая точек множества X. В первом случае в любой окрестности точки x имеются точки, как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие множеству $X \cup Y$ и, тем более, не принадлежащие множеству X. Это означает, что $x \in \partial X$.

Во втором случае какова бы ни была окрестность U точки x, окрестность $U \cap U_0$ этой точки, как и всякая ее окрестность, содержит точки множества $X \cup Y$, причем в этом случае все они принадлежат множеству Y (так как U_0 не содержит точек множества X) и содержит точки, не принадлежащие множеству $X \cup Y$, а следовательно, не принадлежащие и множеству Y. Поскольку $U \cap U_0 \subset U$, то в рассматриваемом случае в произвольной окрестности U точки x имеются как точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству Y. Это означает, что $x \in \partial Y$.

Итак, имеет место по крайней мере одно из включений $x \in \partial X$ или $x \in \partial Y$, т. е.

$$x \in \partial X \cup \partial Y.$$

2) Докажем включение (42.51). Если $x \in \partial(X \cap Y)$, то в любой окрестности точки x содержатся как точки, принадлежащие пересечению $X \cap Y$ (и, следовательно, точки множеств X и Y), так и точки,

не принадлежащие этому пересечению. Возможны два случая: либо в любой окрестности точки x имеются точки, не принадлежащие множеству X, тогда $x \in \partial X$, либо существует окрестность U_0 точки x, все точки которой принадлежат множеству X. Тогда для любой окрестности U точки x в ее окрестности $U \cap U_0$, как и во всякой окрестности этой точки, имеются точки, принадлежащие пересечению $X \cap Y$, а следовательно, и множеству Y, и точки, не принадлежащие $X \cap Y$, а поэтому не принадлежащие и множеству Y (ибо в U_0 все точки принадлежат множеству X). Таким образом, в окрестности $U \cap U_0$ и, следовательно, в любой окрестности U точки x (ибо $U \supset U \cap U_0$) имеются как точки, принадлежащие множеству Y, так и не принадлежащие ему. Это означает, что $x \in \partial Y$. Итак, если $x \in \partial(X \cap Y)$, то

$$x \in \partial X \cup \partial Y.$$

3) Докажем включение (42.52). Если $x \in \partial(X \backslash Y)$, то в любой окрестности точки x содержатся как точки, принадлежащие разности $X \backslash Y$, так и не принадлежащие ей. Возможны два случая. Первый: в любой окрестности точки x содержатся точки, не принадлежащие множеству X, тогда в любой окрестности точки x имеются как точки, принадлежащие множеству X (так как имеются точки из $X \backslash Y$), так и не принадлежащие X. Поэтому в этом случае $x \in \partial X$. Второй случай: у точки x существует окрестность U_0, все точки которой принадлежат множеству X. Тогда для любой окрестности U точки x в окрестности $U \cap U_0$ этой точки имеются как точки, принадлежащие разности $X \backslash Y$, а следовательно, не принадлежащие множеству Y, так и точки, не принадлежащие рассматриваемой разности, а поэтому принадлежащие множеству Y (ибо все точки из окрестности U_0 принадлежат X). Поскольку $U \cap U_0 \subset U$, то и в окрестности U содержатся как точки, принадлежащие множеству Y, так и не принадлежащие ему. Это означает, что $x \in \partial Y$. Таким образом, если $x \in \partial(X \backslash Y)$, то

$$x \in \partial X \cup \partial Y. \quad \triangleleft$$

Лемма 4 (полуаддитивность верхней меры). *Для любой конечной совокупности множеств $X_1, X_2, ..., X_m$ имеет место неравенство*

$$\mu^* \bigcup_{i=1}^{m} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu^* X_i. \tag{42.53}$$

Следствие. *Объединение конечного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль.*

$\triangleright$ Каковы бы ни были множества $X_1, X_2, ..., X_m$, для любого ранга $k = 0, 1, 2, ...$ справедливо равенство

$$S_k\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{m} S_k(X_i),$$

ибо, если куб Q пересекается с множеством $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$, то он пересекается хотя бы с одним множеством X_i, и наоборот. Поэтому

$$\mu S_k\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} S_k(X_i) \underset{(42.6)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{m} \mu S_k(X_i). \tag{42.54}$$

(Строгое неравенство получится в том случае, когда один и тот же куб Q ранга k будет входить в разные множества $S_k(X)$. Это заведомо будет иметь место, если среди множеств X_i, имеются пересекающиеся.)

Заметив, что

$$\lim_{k\to\infty} \mu S_k\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big) = \mu^* \bigcup_{k=1}^{m} X_i,$$
$$\lim_{k\to\infty} \mu S_k(X_i) = \mu^* X_i,$$

и перейдя в неравенстве (42.54) к пределу при $k \to \infty$, получим неравенство (42.53). $\triangleleft$

Докажем следствие. Если $\mu X_i = 0$, а следовательно, и $\mu^* X_i = 0$, $i = 1, 2, ..., m$, то в силу неравенства (42.53) имеем

$$\mu^* \bigcup_{i=1}^{m} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu^* X_i = 0.$$

Поэтому $\mu^* \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i = 0$, откуда, согласно замечанию 1 вытекает, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ измеримо и его мера равна нулю.

Свойства меры.

Свойство 1 (неотрицательность меры). *Для любого измеримого множества $X \subset R^n$ всегда*

$$\mu X \geqslant 0.$$

Это сразу следует из (42.15) и (42.16).

Свойство 2 (монотонность меры). *Если X_1 и X_2 — измеримые множества и $X_1 \subset X_2$, то*

$$\mu X_1 \leqslant \mu X_2.$$

Это сразу следует из леммы 1 и определения (42. 16) меры измеримого множества.

Свойство 3. *Объединение и пересечение конечного числа измеримых множеств, а также разность двух измеримых множеств являются измеримыми множествами.*

$\triangleright$ В самом деле, если множества $X_1, X_2, ..., X_m$ измеримы, то они ограничены, а поэтому ограничены их объединение и пересечение;

кроме того, их границы ∂X_i имеют меру нуль (теорема 1), следовательно, и объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial X_i$ их границ имеет меру нуль (следствие леммы 4). Границы же $\partial\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i\Big)$ и $\partial\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{m} X_i\Big)$ объединения и пересечения множеств X_i, $i = 1, 2, ..., m$, содержатся в множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial X_i$ (лемма 3) и потому также имеют меру нуль (следствие леммы 1). Поэтому сами эти множества $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{m} X_i$ являются измеримыми множествами (теорема 1).

Аналогично доказывается измеримость разности измеримых множеств. ◁

Из свойства 3 меры и леммы 4, очевидно, следует, что для любых измеримых множеств X_i, $i = 1, 2, ..., m$, справедливо неравенство

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu X_i. \tag{42.55}$$

Свойство 4 (конечная аддитивность меры). *Мера объединения конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.*

▷ Пусть X_i — измеримые множества ($i = 1, 2, ..., m$) и

$$X_i \cap X_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, ..., m. \tag{42.56}$$

Докажем, что

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mu X_i. \tag{42.57}$$

Мы уже имеем неравенство (42.55), даже без предположения о выполнении условия (42.56). Докажем противоположное неравенство. Если куб ранга k содержится в некотором множестве X, а следовательно, в $s_k(X_i)$, то он содержится и в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$, а следовательно, в $s_k\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i\Big)$, поэтому

$$\bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i) \subset s_k\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big), \tag{42.58}$$

откуда

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i) \underset{(42.6)}{\leqslant} \mu s_k\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big). \tag{42.59}$$

Поскольку множества X_i не пересекаются, то не пересекаются и множества $s_k(X_i) \subset X_i$. В силу этого имеет место равенство

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i) \underset{(42.6)}{=} \sum_{i=1}^{m} \mu s_k(X_i). \tag{42.60}$$

Из соотношений (42.59) и (42.60) следует, что
$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(X_i) \leqslant \mu s_k\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big). \tag{42.61}$$

Множества X_i и $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ измеримы, поэтому существуют конечные пределы
$$\lim_{k\to\infty} \mu s_k(X_i) = \mu X_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \lim_{k\to\infty} \mu s_k\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i. \tag{42.62}$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве (42.61), в силу равенств (42.62) получим,что
$$\sum_{i=1}^{m} \mu X_i \leqslant \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i. \tag{42.63}$$

Из неравенств (42.55) и (42.63) вытекает равенство (42.57), т. е. свойство 4. $\lhd$

Отметим, что как нижняя, так и верхняя меры множества не обладают свойствами аддитивности. Это видно уже в одномерном случае. Например, если X_1 — множество рациональных, а X_2 — иррациональных точек отрезка $[0, 1]$, то
$$\mu_* X_1 = \mu_* X_2 = 0, \quad \mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*[0, 1] = 1 \neq 0 = \mu_* X_1 + \mu_* X_2,$$
$$\mu^* X_1 = \mu^* X_2 = 1, \quad \mu^*(X_1 \cup X_2) = \mu^*[0, 1] = 1 \neq 2 = \mu^* X_1 + \mu^* X_2.$$

Замечание 11. Добавление к измеримому множеству множества меры нуль или вычитание его из измеримого множества не нарушает измеримости исходного множества (это следует из свойства 3 меры, поскольку множества меры нуль измеримы) и не меняет его меры (а это следует непосредственно из свойства 4 меры). В частности, если X — измеримое множество, то измеримы его замыкание $\overline{X}$ и множество X_{int} его внутренних точек, причем
$$\mu X_{\text{int}} = \mu X = \mu \overline{X}. \tag{42.64}$$

Действительно,
$$X = X_{\text{int}} \cup (X \backslash X_{\text{int}}), \quad X \backslash X_{\text{int}} \subset \partial X,$$
$$\overline{X} = X \cup (\overline{X} \backslash X), \quad \overline{X} \backslash X \subset \partial X.$$

По теореме 1 имеем $\mu \partial X = 0$, поэтому
$$\mu(X \backslash X_{\text{int}}) = \mu(\overline{X} \backslash X) = 0,$$
и, следовательно, имеет место равенство (42.64).

В частности, если $\mu X = 0$, то $\mu \overline{X} = 0$.

Замечание 12. Замыкание измеримого множества, как и замыкание всякого ограниченного множества, является компактом.

Таким образом, замыкание измеримого множества есть измеримый компакт.

Свойство 5°. *Мера множества не меняется при параллельном переносе.*

Прежде чем доказывать это утверждение, докажем еще одну лемму.

Лемма 5. *Если*

$$X_k \subset X \subset Y_k,$$

X_k, Y_k *— измеримые множества,* $k = 1, 2, ...,$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(Y_k \backslash X_k) = 0,$$

то множество X *также измеримо и*

$$\mu X = \lim_{k\to\infty} \mu X_k = \lim_{k\to\infty} \mu Y_k.$$

$\triangleright$ Действительно, если положить $X'_k = (X_k)_{\text{int}}$, $Y'_k = \overline{Y}_k$, то будем иметь

$$\mu X'_k = \mu (X_k)_{\text{int}} = \mu X_k, \quad \mu Y'_k = \mu \overline{Y}_k = \mu Y_k,$$

а поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \mu(Y'_k \setminus X'_k) = \lim_{k\to\infty} \mu Y'_k - \lim_{k\to\infty} \mu X'_k = \lim_{k\to\infty} \mu Y_k - \lim_{k\to\infty} \mu X_k = \\ = \lim_{k\to\infty} \mu(Y_k \backslash X_k) = 0.$$

Из включений $X \subset \overline{X} \subset Y'_k$, $X'_k \subset X_{\text{int}}$ имеем $\partial X = \overline{X} \backslash X_{\text{int}} \subset \subset Y'_k \backslash X'_k$. Поэтому имеет место неравенство $\mu^* \partial X \leqslant \mu(Y'_k \backslash X'_k)$, откуда при $k \to \infty$ получаем $\mu^* \partial X = 0$, а значит, и $\mu \partial X = 0$. Это согласно теореме 1 означает измеримость множества X. (Ограниченность множества X, которая требуется в условиях теоремы 1, следует из включения $X \subset Y_k$ и ограниченности множества Y_k, как всякого измеримого множества.)

Далее, $X \backslash X_k \subset Y_k \backslash X_k$, $Y_k \backslash X \subset Y_k \backslash X_k$, поэтому $\mu(X \backslash X_k) \leqslant \leqslant \mu(Y_k \backslash X_k)$, $\mu(Y_k \backslash X) \leqslant \mu(Y_k \backslash X_k)$, где $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(Y_k \backslash X_k) = 0$, а следовательно, в силу аддитивности меры

$$\lim_{k\to\infty} (\mu X - \mu X_k) = \lim_{k\to\infty} (\mu Y_k - \mu X) = 0. \quad \triangleleft$$

Докажем теперь свойство 5° меры.

$\triangleright$ Пусть X — измеримое множество, $X \subset R^n$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $X + a = \{x + a\colon\ x \in X\}$. Если Q — n-мерный куб с ребрами длины h и параллельными осям координат, то множество $Q + a$ также является кубом того же вида и, следовательно, измеримым множеством, причем (см. замечание 4)

$$\mu(Q + a) = \mu Q = h^n.$$

Для каждого натурального k множества $X_k = s_k(X) + a$, $Y_k = S_k(X) + a$ измеримы, так как являются объединением конечного числа измеримых множеств вида $Q + a$, где Q — куб ранга k, и

$$\mu X_k = \mu s_k(X), \quad \mu Y_k = \mu S_k(X),$$

ибо меры множеств X_k и Y_k равна сумме мер (как в формуле (42.6)), составляющих их кубов.

Поскольку

$$X_k \subset X + a \subset Y_k$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \mu(Y_k \setminus X_k) = \lim_{k\to\infty} (\mu Y_k - \mu X_k) = \lim_{k\to\infty} (\mu S_k(X) - \mu s_k(X)) = 0,$$

то согласно лемме 5 множество $X + a$ измеримо и

$$\mu(X + a) = \lim_{k\to\infty} \mu X_k = \lim_{k\to\infty} \mu s_k(X) = \mu X. \quad \lhd$$

З а м е ч а н и е 13. Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство R^{n+1} как произведение n-мерного R^n и числовой оси R:

$$R^{n+1} = R^n \times R.$$

Если $X \subset R^n$, $[a,b] \subset R$, то множество $X \times [a,b]$ точек $(x_1, \ldots, x_n, y)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in X$, $y \in [a,b]$, называется *цилиндром с основанием* X (см. п. 40.2) *и образующей* $[a,b]$.

Можно доказать, что если X — измеримое в смысле n-мерной меры множество, то цилиндр $X \times [a,b]$ измерим в смысле $(n+1)$-мерной меры и

$$\mu_{n+1}(X \times [a,b]) = (b-a)\mu_n X. \tag{42.65}$$

У п р а ж н е н и е 2. Доказать утверждения замечания 13.

42.2. Множества меры нуль. Укажем два типа множеств, мера Жордана которых всегда равна нулю (на подобные множества нередко удается разбить границу рассматриваемых множеств и тем самым доказать их измеримость).

Т е о р е м а 2. *График всякой непрерывной на компакте функции имеет меру Жордана, равную нулю.*

$\rhd$ Пусть $X \subset R^n$, X — компакт, $y = f(x)$ — непрерывная на X функция, $x \in X$, $y \in R$ и

$$Y = \{(x,y)\colon\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in X,\ y = f(x)\}$$

— график функции f. Покажем, что $(n+1)$-мерная мера множества Y равна нулю.

Из компактности множества X следует его ограниченность. Поэтому существует n-мерный куб $Q^n(m)$ вида

$$Q^n(m) = \{x\colon\ |x_i| \leqslant m,\ i = 1, 2, ..., n\}, \tag{42.66}$$

содержащий множество X:

$$X \subset Q^n(m).$$

Обозначим через $Q^n(m+1)$ куб, определяемый аналогично (42.66) с заменой m на $m+1$. Тогда ясно, что

$$X \subset S_k(X) \subset Q^n(m+1), \quad k = 1, 2, ... \tag{42.67}$$

Множество $S_k(X)$ состоит из некоторого конечного числа i_k n-мерных кубов ранга k; занумеруем их индексами i и обозначим Q_i^n, $i = 1, 2, ..., i_k$:

$$S_k(X) = \bigcup_{i=1}^{i_k} Q_i^n. \tag{42.68}$$

Для каждого куба Q_i^n обозначим через P_i^{n+1} объединение (“столбик”) всех $(n+1)$-мерных кубов ранга k, содержащихся в $S_k(Y)$ и проектирующихся в указанный n-мерный куб Q_i^n (рис. 151). Тогда

$$S_k(Y) = \bigcup_{i=1}^{i_k} P_i^{n+1}, \tag{42.69}$$

т. е. $S_k(Y)$ можно представить в виде объединения столбиков P_i^{n+1}.

Обозначим через $h_i^{(k)}$ высоту столбика P_i^{n+1}, тогда

$$\mu_{n+1} P_i^{n+1} = h_i^{(k)} \mu_n Q_i^n, \quad i = 1, 2, ..., i_k. \tag{42.70}$$

Пусть $\omega_i^{(k)}(f)$ — колебание функции f на пересечении $X \cap Q_i^{(n)}$ компакта X с кубом $Q_i^{(n)}$, т. е. верхняя грань разностей $f(x') - f(x)$, когда $x, x' \in X \cap Q_i^{(n)}$ (см. (35.2)). Тогда (см. рис. 151, $n = 1$, $X = [a, b]$)

$$h_i^{(k)} \leqslant \omega_i^{(k)}(f) + \frac{2}{10^k}, \quad i = 1, 2, ..., i_k. \tag{42.71}$$

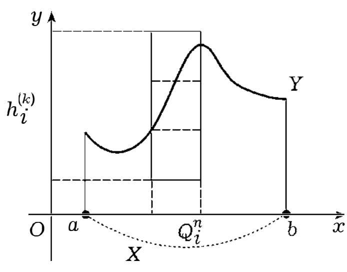

Рис. 151

Зададим теперь произвольно $\varepsilon > 0$. Поскольку функция f непрерывна на компакте X, то она и равномерно непрерывна на нем (теорема 2 из п. 35.1). Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что если ранг k таков, что диаметр $10^{-k}\sqrt{n}$ куба ранга k меньше δ, то колебание $\omega_i^{(k)}(f)$ функции f на пересечении $X \cap Q_i^{(n)}$ меньше ε, так как

$$\operatorname{diam} X \cap Q_i^{(n)} \leqslant \operatorname{diam} Q_i^{(n)} < \delta.$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (42.71) стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому существует такой ранг k_0, что при $k > k_0$ выполняется неравенство $\omega_i^{(k)}(f) + \dfrac{2}{10^k} < \varepsilon$, а следовательно, в силу (42.71) и неравенство

$$h_i^{(k)} < \varepsilon. \tag{42.72}$$

В результате при $k > k_0$ имеем

$$\mu_{n+1}S_k(Y) \underset{(42.69)}{=} \sum_{i=1}^{i_k} \mu_{n+1}P_i^{n+1} \underset{(42.70)}{=} \sum_{i=1}^{i_k} h_i^{(k)}\mu_n Q_i^n \underset{(42.72)}{<}$$
$$\underset{(42.72)}{<} \varepsilon \sum_{i=1}^{i_k} \mu_n Q_i^n \underset{(42.68)}{=} \varepsilon\mu_n S_k(X) \underset{(42.67)}{\leqslant} \varepsilon\mu_n Q(m+1).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, а $\mu_n Q(m+1)$ — фиксированное число, то

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{n+1}S_k(Y) = 0.$$

Это и означает, что $\mu_{n+1}S_k(Y) = 0$. $\lhd$

Из теоремы 2 следует, что если граница подмножества n-мерного пространства представима как объединение конечного числа графиков непрерывных на некоторых компактах функций $n-1$ переменных, то это подмножество измеримо по Жордану, так как его граница имеет n-мерную меру Жордана, равную нулю.

Простейшими примерами таких множеств являются n-мерные параллелепипеды и шары. Отметим, что при $n = 2$ к множествам этого типа относятся и криволинейные трапеции (см. п. 28.1), а при $n = 3$ тела вращения, рассмотренные в п. 28.5. Этим и объясняется то, что при определении площадей и, соответственно, объемов этих множеств мы обошлись лишь понятием внутренней меры μ_* (см. п. 27.1 и п. 27.2).

Теорема 3. *Всякая плоская спрямляемая кривая имеет двумерную меру* (*площадь*), *равную нулю.*

$\rhd$ Пусть $\Gamma = \{r = r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — плоская спрямляемая кривая ($r(t)$ — точка плоскости R^2) и S — ее длина. Разобьем кривую Γ точками $r(t_i)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_m = b$, на m равных по длине дуг $\Gamma_i = \{r = r(t),\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$: длина Γ_i равна

$$S/m. \tag{42.73}$$

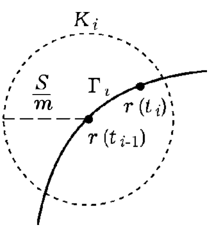

Рис. 152

Пусть K_i — замкнутый круг с центром в точке $r(t_{i-1})$ и радиуса S/m; тогда (см. рис. 152)

$$\Gamma_i \underset{(42.73)}{\subset} K_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и, следовательно,

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Поэтому

$$\mu^*\Gamma \underset{(42.25)}{\leqslant} \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\Big) \underset{(42.53)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{m} \mu^* K_i = \sum_{i=1}^{m} \mu K_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \pi\Big(\frac{S}{m}\Big)^2 = \pi\Big(\frac{S}{m}\Big)^2 \sum_{i=1}^{m} 1 = \frac{\pi S^2}{m} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \qquad (42.74)$$

Мы воспользовались здесь равенством $\mu^* K_i = \mu K_i$. Справедливость его вытекает из того, что круг — измеримое множество, так как его границу можно представить в виде объединения двух полуокружностей, каждая из которых является непрерывной на отрезке функцией и, следовательно, по теореме 2 имеет меру нуль. Поэтому круг, согласно теореме 1, — измеримое множество.

Из (42.74) имеем $\mu^*\Gamma = 0$. Это и означает (см. замечание 1 в п. 42.1), что $\mu\Gamma = 0$. $\triangleleft$

Кривая называется кусочно гладкой, если ее можно представить в виде конечного объединения гладких кривых (п. 17.2).

Как известно (п. 17.3), всякая гладкая кривая спрямляема, поэтому спрямляемы и кусочно гладкие кривые. Отсюда, согласно теореме 3, следует, что всякое ограниченное множество на плоскости, граница которого состоит из конечного числа кусочно гладких кривых, является квадрируемым.

Замечание 1. Аналогично теореме 4 доказывается, что n-мерная мера спрямляемой кривой, лежащей в n-мерном пространстве, равна нулю. Для этого в доказательстве теоремы 4 достаточно круги, которыми покрывается рассматриваемая кривая, заменить соответствующими шарами.

Замечание 2. Если множество X имеет n-мерную меру нуль, то цилиндр $X \times [a, b]$ имеет $(n+1)$-мерную меру нуль. Это сразу следует из формулы (42.65).

42.3. Разбиение измеримых множеств. Пусть X — измеримое по Жордану множество, лежащее в пространстве R^n. Конечная система $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ измеримых множеств X_j, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$, называется *разбиением множества* X, если:

$$1)\ \mu(X_j \cap X_i) = 0 \ \text{ при } \ j \neq i; \qquad 2)\ \bigcup_{j=1}^{j_\tau} X_j = X.$$

Число

$$|\tau| \overset{\text{def}}{=} \max_{j=1,2,\ldots,j_\tau} \operatorname{diam} X_j,$$

где $\operatorname{diam} X_j$ — диаметр множества X_j, называется *мелкостью разбиения* τ.

Если $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ и $\tau^* = \{X_i^*\}_{i=1}^{i=i_{\tau^*}}$ — два разбиения множества X и для каждого $X_i^* \in \tau^*$ существует такое $X_j \in \tau$, что $X_i^* \subset X_j$, то говорят, что *разбиение* τ^* *вписано в разбиение* τ (или, что *разбиение* τ^* *следует за разбиением* τ), и пишут $\tau^* \succ \tau$ или, что то же самое, $\tau \prec \tau^*$.

Свойства разбиений.

1° (транзитивность). *Если* $\tau \prec \tau^*$ *и* $\tau^* \prec \tau^{**}$, *то* $\tau \prec \tau^{**}$. Это непосредственно вытекает из определения следования одного разбиения за другим (ср. с соответствующим свойством разбиения отрезка на отрезки в п. 23.1).

2° (финальность). *Для любых двух разбиений* τ^* *и* τ^{**} *множества* X *существует его разбиение* τ, *следующее и за* τ^*, *и за* τ^{**}:

$$\tau \succ \tau^*, \quad \tau \succ \tau^{**}.$$

За элементы разбиения τ можно взять всевозможные пересечения элементов разбиений τ^* и τ^{**}.

Лемма 6. *Если* $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — *разбиение множества* X, *то*

$$\mu X = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j.$$

$\triangleright$ Пусть X^* — объединение всевозможных попарных пересечений различных множеств $X_j \in \tau$ (эти пересечения по определению разбиения имеют меру нуль), т. е.

$$X^* = \bigcup_{i \neq j} X_i \cap X_j.$$

Сумма конечного множества множеств меры нуль также имеют меру нуль:

$$\mu X^* = 0. \tag{42.75}$$

Обозначим через X_j^* множество, получающееся из множества X_j удалением из него точек множества X^*:

$$X_j^* = X_j \setminus X^*.$$

Если из множества вычесть множество меры нуль, то его мера не изменится. Поэтому

$$\mu X_j^* = \mu X_j, \quad j = 1, 2, ..., j_\tau. \tag{42.76}$$

Множества X_j^* попарно и с множеством X^* не пересекаются. Очевидно, имеет место равенство

$$X = \bigcup_{j=1}^{j_\tau} X_j^* \cup X^*, \tag{42.77}$$

причем, слагаемые его правой части не пересекаются. Поэтому, используя аддитивность меры, получим

$$\mu X \underset{(42.77)}{=} \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j^* + \mu X^* \underset{(42.75)}{=} \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j^* \underset{(42.76)}{=} \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j. \quad \triangleleft$$

Лемма 7. *У всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.*

$\triangleright$ Пусть X — измеримое множество, $X \subset R^n$. Обозначим через $X_j^{(k)}$, $j = 1, 2, ..., j_k$, всевозможные непустые пересечения кубов ранга k с множеством X. Таким образом, для каждого $j = 1, 2, ..., j_k$ существует такой куб ранга k, обозначим его $Q_j^{(k)}$, что

$$X_j^{(k)} = X \cap Q_j^{(k)} \neq \varnothing. \tag{42.78}$$

Система множеств

$$\tau_k = \{X_j^{(k)}\}_{j=1}^{j=j_k}$$

образует разбиение множества X. Действительно, множества $X_j^{(k)}$ измеримы как пересечение двух измеримых множеств X и $Q_j^{(k)}$, их объединение составляет множество:

$$X = \bigcup_{j=1}^{j_k} X_j^{(k)}.$$

Пересечения множеств $X_j^{(k)}$ имеют меру нуль. В самом деле, при $i \neq j$ имеем

$$X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)} \underset{(42.78)}{\subset} Q_i^{(k)} \cap Q_j^{(k)} \subset \partial Q_i^{(k)} \cap \partial Q_j^{(k)},$$

и так как для любого куба мера его границы равна нулю, то

$$\mu(X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)}) \leqslant \mu(\partial Q_i^{(k)} \cap \partial Q_j^{(k)}) \leqslant \mu \partial Q_i^{(k)} = 0, \quad i \neq j.$$

Мелкость разбиения τ_k стремится к нулю при $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} |\tau_k| = 0.$$

Это следует из того, что диаметр n-мерного куба ранга k равен $\dfrac{\sqrt{n}}{10^k}$, и потому

$$|\tau_k| = \max_{j=1,2,\ldots,j_k} \operatorname{diam} X_j^{(k)} \leqslant \operatorname{diam} Q_1^{(k)} = \frac{\sqrt{n}}{10} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \quad \triangleleft$$

42.4. Интегральные суммы. Определение кратного интеграла. Пусть на измеримом множестве $X \subset R^n$ определена функция f, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — разбиение множества X, $\xi^{(j)} \in X_j$, $j = 1, 2, ..., j_\tau$, и $\sigma_\tau \equiv \sigma_\tau(f) \equiv \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, ..., \xi^{(j_\tau)}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=1}^{j_\tau} f(\xi^{(j)})\mu X_j$.

Всякая сумма этого вида называется *интегральной суммой Римана функции f, соответствующей разбиению τ.*

Определение 2. Функция f называется *интегрируемой по Риману на множестве X*, если один и тот же конечный предел имеет любая последовательность интегральных сумм

$$\sigma_{\tau_m} = \sum_{j=1}^{j_m} f(\xi^{(j,m)})\mu X_j^{(m)},$$

соответствующих разбиениям $\tau_m = \{X_j^{(m)}\}_{j=1}^{j=j_m}$ множества X, у которых их мелкость $|\tau_m|$ стремится к нулю при $m \to \infty$, т. е.

$$\lim_{m \to \infty} |\tau_m| = 0,$$

а точки $\xi^{(j,m)}$ выбраны произвольным образом в множествах $X_j^{(m)}$:

$$\xi^{(j,m)} \in X_j^{(m)}, \quad j = 1, 2, ..., j_m, \quad m = 1, 2, ...$$

Этот предел, если он существует, называется *интегралом Римана от функции f по множеству X* и обозначается

$$\int\limits_X f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_X f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \to \infty} \sigma_{\tau_m}(f; \xi^{(1,m)}, ..., \xi^{(j_m,m)}). \tag{42.79}$$

Условие (42.69) равносильно тому, что *существует число, обозначаемое $\int\limits_X f(x)\,dx$, которое удовлетворяет следующему условию: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ множества X мелкости $|\tau| < \delta$ и при любом выборе точек $\xi^{(j)} \in X_j$, $j = 1, 2, ..., j_\tau$, имеет место неравенство*

$$\left| \int\limits_X f(x)\,dx - \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, ..., \xi^{(j_\tau)}) \right| < \varepsilon. \tag{42.80}$$

Доказательство эквивалентности условий (42.79) и (42.80) проводится аналогично доказательству эквивалентности определения предела функции в терминах последовательности и в терминах окрестностей (см. п. 6.4).

Упражнение 3. Доказать эквивалентность условий (42.79) и (42.80).

Выполнение условия (42.79), или, что равносильно, условия (42.80), коротко записывают равенством

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = \int\limits_X f(x)\,dx \tag{42.81}$$

и говорят, что интеграл $\int\limits_X f(x)\,dx$ *является пределом интегральных сумм* σ_τ *при* $|\tau| \to 0$.

Множество X, по которому производится интегрирование, часто называют *областью интегрирования.*

Вместо "функция, интегрируемая по Риману", и "интеграл Римана" будем для краткости говорить просто "интегрируемая функция" и "интеграл". Если $n > 1$, то интеграл $\int\limits_X f(x)\,dx$ называется *кратным интегралом.* Его обозначают также

$$\int\limits_X \cdots \int f(x_1, ..., x_n)\,dx_1 ... dx_n.$$

В случае $n = 2$ он называется *двойным*, в случае $n = 3$ — *тройным* интегралом, а в случае произвольного $n \in \mathbb{N}$ — *n-кратным.*

Замечание 1. Интегральные суммы являются функциями, аргументами которых являются разбиения τ и точки $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., j_\tau$, лежащие в элементах этих разбиений. Однако предел интегральных сумм это не предел функции, а принципиально новое понятие. При переходе к пределу интегральных сумм их аргументы τ и $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., j_\tau$, изменяются, но ни к чему не стремятся, и здесь нельзя, как в случае предела функции, указать "точку" $(\tau, \xi^{(1)}, ..., \xi^{(j_\tau)})$, в которой берется предел интегральных сумм.

Замечание 2. Можно показать, что в случае $n = 1$ и $X = [a, b]$ (т. е. когда X — отрезок) определения интеграла по отрезку в смысле ранее данного определения в п. 32.1 (т. е. когда рассматривались интегральные суммы, соответствующие только разбиению отрезка на отрезки) и в смысле определения этого пункта (т. е. когда рассматриваются интегральные суммы, соответствующие разбиению отрезка на произвольные измеримые множества) равносильны, т. е. приводят к одному и тому же понятию интеграла.

Замечание 3. В дальнейшем нам не раз придется встречаться с пределами типа (42.81) в несколько более простой ситуации, а именно, когда задана некоторая функция $F(\tau)$, определенная на множестве всех разбиений τ некоторого измеримого множества X (таким образом, здесь $F(\tau)$ зависит только от τ, в отличие от интегральных сумм, которые зависят еще от точек $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., j_\tau$).

Будем говорить, что число a является *пределом функции* $F(\tau)$ при $|\tau| \to 0$, и писать

$$\lim_{|\tau|\to 0} F(\tau) = a, \tag{42.82}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ мелкости $|\tau| < \delta$ имеет место

$$|F(\tau) - a| < \varepsilon.$$

Упражнение 4. Сформулировать в предположениях замечания 3 определение предела функции $F(\tau)$ при $|\tau| \to 0$ в терминах пределов последовательностей так, чтобы оно было равносильно определению (42.82).

42.5. Неполные интегральные суммы. Введем еще обозначения, которые мы будем неоднократно использовать.

Пусть $X \subset R^n$ и $X_0 \subset R^n$ — измеримые множества, а $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — разбиение множества X. Отберем те множества $X_j \in \tau$, которые не пересекаются с множеством X_0, и обозначим их совокупность $\tau(X_0)$; совокупность же оставшихся $X_j \in \tau$, т. е. тех, которые пересекаются с множеством X_0, обозначим $\tau_0(X_0)$. Таким образом,

$$\tau(X_0) = \{X_j \in \tau\colon\ X_j \cap X_0 = \varnothing\}, \tag{42.83}$$

$$\tau_0(X_0) = \{X_j \in \tau\colon\ X_j \cap X_0 \neq \varnothing\}. \tag{42.84}$$

Очевидно, что

$$\tau = \tau(X_0) \cup \tau_0(X_0), \tag{42.85}$$

причем, множества $\tau(X_0)$ и $\tau_0(X_0)$ не имеют общих элементов.

Лемма 8. *Если* $\mu X_0 = 0$, *то*

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} \mu X_j = 0. \tag{42.86}$$

$\triangleright$ Согласно определению предела (42.82) надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ множества X мелкости $|\tau| < \delta$ выполняется неравенство

$$\sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} \mu X_j < \varepsilon. \tag{42.87}$$

Из определения (42.9) множества $S_k(X)$ для произвольного множества $X \subset R^n$ следует, что множество X содержится в множестве внутренних точек множества $S_k(X)$, т. е.

$$X \subset S_k(X)_{\mathrm{int}}. \tag{42.88}$$

Это следует из того, что если точка x принадлежит множеству X, то все кубы ранга k, ее содержащие, содержатся в множестве $S_k(X)$, а все кубы ранга k, содержащие какую-либо точку, содержат и некоторую ее окрестность (см. замечание 6 в п. 42.1). Таким образом, $S_k(X)$ содержит окрестность точки $x \in X$, что и означает принадлежность этой точки к внутренности множества $S_k(X)$.

По условию $\mu X_0 = 0$, поэтому (замечание 11 из п. 42.1) и $\mu \overline{X}_0 = 0$. Поскольку X_0 — измеримое множество, то $\overline{X}_0$ является компактом (см. замечание 12 в п. 42.1).

Согласно включению (42.88), примененному к компакту $\overline{X}_0$, этот компакт не пересекается с дополнением $R^n \setminus S_k(\overline{X}_0)_{\rm int}$ к открытому множеству $S_k(\overline{X}_0)_{\rm int}$. Это дополнение является замкнутым множеством (см. лемму 6 в п. 33.3), не пересекающимся с компактом $\overline{X}_0$, а поэтому (см. теорему 6 в п. 33.4) находится от него на положительном расстоянии:

$$\delta \stackrel{\rm def}{=} \rho(\overline{X}_0,\ R^n \setminus S_k(\overline{X}_0)_{\rm int}) > 0. \tag{42.89}$$

Следовательно, если E — какое-либо множество диаметра, меньшего δ, $\operatorname{diam} E < \delta$, пересекает множество $\overline{X}_0 E \cap \overline{X}_0 \neq \varnothing$ (рис. 153), то

$$E \subset S_k(\overline{X}_0)_{\rm int} \subset S_k(\overline{X}_0). \tag{42.90}$$

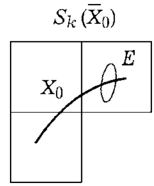

Рис. 153

Пусть произвольно зафиксировано $\varepsilon > 0$. В силу условия $\mu \overline{X}_0 = 0$ существует такое натуральное k, что

$$\mu S_k(\overline{X}_0) < \varepsilon. \tag{42.91}$$

Определим для этого k число δ по формуле (42.89). Пусть, далее, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — какое-либо разбиение множества X мелкости $|\tau| < \delta$ и, тем самым, для диаметров множеств X_j выполняются неравенства

$$\operatorname{diam} X_j < \delta, \quad j = 1, 2, ..., j_\tau.$$

Если $X_j \in \tau_0(X_0)$, т. е. $X_j \cap X_0 \neq \varnothing$, то тем более $X_j \cap \overline{X}_0 \neq \varnothing$, а тогда (см. (42.90) при $E = X_j$)

$$X_j \subset S_k(\overline{X}_0),$$

и поэтому

$$\bigcup_{X_j \in \tau_0(X_0)} X_j \subset S_k(\overline{X}_0). \tag{42.92}$$

Заметив, что множества $X_j \in \tau_0(X_0)$ образуют разбиение множества $\bigcup\limits_{X_j \in \tau_0(X_0)} X_j$ (и, следовательно, к ним можно применить лемму 6), будем иметь

$$\sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} \mu X_j = \mu \bigcup_{X_j \in \tau_0(X_0)} X_j \underset{(42.92)}{\leqslant} \mu S_k(\overline{X}_0) \underset{(42.91)}{<} \varepsilon. \quad \triangleleft$$

Пусть на множестве X задана функция f, $\mu X_0 = 0$. Сумма

$$\sigma_{\tau(X_0)} f = \sum_{X_j \in \tau(X_0)} f(\xi^{(j)}) \mu X_j, \quad \xi^{(j)} \in X_j \in \tau(X_0), \tag{42.93}$$

называется *неполной интегральной суммой функции* f. Ее всегда можно дополнить до интегральной суммы $\sigma_\tau(f)$, выбрав каким-либо образом точки $\xi^{(j)} \in X_j \in \tau_0(X_0)$ и положив

$$\sigma_{\tau_0(X_0)}(f) = \sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} f(\xi^{(j)}) \mu X_j; \tag{42.94}$$

тогда будем иметь

$$\sigma_\tau(f) = \sigma_{\tau(X_0)} + \sigma_{\tau_0(X_0)}. \tag{42.95}$$

При этом любая интегральная сумма $\sigma_\tau(f)$ может быть получена таким образом из соответствующей $\sigma_{\tau(X_0)}$.

Теорема 4. *Пусть X — измеримое множество, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — его разбиение, а X_0 — множество меры нуль: $\mu X_0 = 0$.*

Если функция f ограничена на множестве X, то интеграл $\int\limits_X f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда при $|\tau| \to 0$ существует конечный предел неполных интегральных сумм $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau(X_0)}$, причем если этот предел существует, то он равен интегралу $\int\limits_X f(x)\,dx$.

Предел $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau(X_0)}$ определяется аналогично пределу (42.79) интегральных сумм σ_τ.

$\triangleright$ Поскольку функция f ограничена на множестве X, то существует такая постоянная $c > 0$, что для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c. \tag{42.96}$$

Поэтому

$$|\sigma_{\tau_0(X_0)}| \underset{(42.94)}{\leqslant} \sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} |f(\xi^{(j)})| \mu X_j \underset{(42.96)}{\leqslant} c \sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} \mu X_j.$$

По условию $\mu X_0 = 0$, следовательно, согласно лемме 8 правая часть получившегося неравенства стремится к нулю при $|\tau| \to 0$, а потому $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau_0(X_0)} = 0$, и теперь утверждение теоремы сразу следует из равенства (42.95). $\triangleleft$

Из доказанной теоремы явствует, что при нахождении интеграла $\int\limits_X f(x)\,dx$ можно пренебрегать значениями ограниченной функции f на множестве меры нуль, в частности, на границе измеримого по Жордану множества.

Если $\mu X = 0$, то любая функция f, определенная на множестве X, интегрируема на нем и, как это легко видеть (все $\sigma_\tau = 0$),

$$\int\limits_X f(x)\,dx = 0.$$

В частности, функция f может быть и неограниченной.

Можно доказать, что при определенных ограничениях на множество X из интегрируемости функции по этому множеству следует ее ограниченность. Но мы в этом параграфе будем в дальнейшем просто заранее предполагать, что все рассматриваемые функции ограничены.

42.6. Существование кратного интеграла. По аналогии со случаем функций одной переменной введем понятие нижней и верхней сумм, соответствующих данному разбиению множества задания функции.

Определение 3. Пусть функция f ограничена на измеримом множестве $X \subset R^n$, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — разбиение множества X,

$$m_j = \inf_{x\in X_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x\in X_j} f(x), \quad j = 1, 2, ..., j_\tau.$$

Тогда суммы $s_\tau = \sum\limits_{j=1}^{j_\tau} m_j \mu X_j$, $S_\tau = \sum\limits_{j=1}^{j_\tau} M_j \mu X_j$ называют соответственно *нижними и верхними суммами Дарбу.*

Для сумм Дарбу s_τ, S_τ и интегральных сумм Римана σ_τ справедливы очевидные неравенства $s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau$. Кроме того, аналогично одномерному случаю (п. 32.3) доказывается, что для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 множества X выполняется неравенство $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$.

При заданной на множестве X функции f суммы s_τ и S_τ являются функциями разбиений τ множества X, а поэтому для них имеет смысл понятия пределов $\lim\limits_{|\tau|\to 0} s_\tau$ и $\lim\limits_{|\tau|\to 0} S_\tau$ (см. 42.82).

Теорема 5. *Для того чтобы функция f, ограниченная на измеримом по Жордану множестве X, была на нем интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы для ее сумм Дарбу выполнялось условие*

$$\lim_{|\tau|\to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{42.97}$$

При выполнении этого условия

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = \int\limits_X f(x)\,dx. \tag{42.98}$$

Условие (42.97) *равносильно условию*

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{j=1}^{j_\tau} \omega(f; X_j)\mu X_j = 0, \tag{42.99}$$

где $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ *— разбиение множества* X, *на котором определена функция* f, *а*

$$\omega(f; X_j) = \sup_{x'\in X_j,\ x''\in X_j} [f(x'') - f(x')]$$

— колебание функции f *на множестве* X_j, $j = 1, 2, ..., j_\tau$ (*определение колебания см. в. п.* 35.1).

Все эти утверждения доказываются аналогично одномерному случаю.

Теорема 6. *Если функция непрерывна на измеримом по Жордану компакте, то она интегрируема на нем по Риману.*

И эта теорема доказывается аналогично одномерному случаю (п. 23.6). Поясним на ее примере, как это выглядит.

$\triangleright$ Пусть функция f непрерывна на измеримом компакте X. Тогда она ограничена и равномерно непрерывна на X. Последнее означает, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что если диаметр множества $E \subset X$ меньше δ: $\operatorname{diam} E < \delta$, то колебание $\omega(f; E)$ функции f на множестве E меньше ε:

$$\omega(f; E) < \varepsilon. \tag{42.100}$$

Если теперь $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — произвольное разбиение мелкости $|\tau| < \delta$ компакта X, то

$$\operatorname{diam} X_j \leqslant |\tau| < \delta, \quad j = 1, 2, ..., j_\tau,$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{j_\tau} \omega(f; X_j)\mu X_j \underset{(42.100)}{<} \varepsilon \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j = \varepsilon \mu X,$$

так как согласно лемме 6 $\sum\limits_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j = \mu X$. В силу произвольности $\varepsilon > > 0$ отсюда следует равенство (42.99).

Таким образом, функция f ограничена, и для нее выполняется условие (42.99), а поэтому она интегрируема. $\triangleleft$

Замечание. Можно доказать, что если функция ограничена на измеримом компакте и множество точек ее разрыва имеет меру Жордана, равную нулю, то функция интегрируема на рассматриваемом компакте.

42.7. Свойства кратных интегралов. На кратные интегралы от ограниченных функций переносятся все основные свойства интеграла по отрезку (п. 33.1): линейность, аддитивность по множествам, правило интегрирования неравенств, оценка абсолютной величины интеграла через интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции и теоремы о среднем. Доказательства этих свойств кратных интегралов проводятся аналогично одномерному случаю, поэтому ограничимся лишь их формулировками и некоторыми пояснениями. Исключение сделаем только для полной аддитивности интеграла и следствия теоремы о среднем, для которых приведем полные доказательства.

1°. *Если X — измеримое множество, то* $\int\limits_X dx = \mu X$.

2°. (линейность интеграла). *Если функции f_i, интегрируемы на множестве X, то для любых чисел λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, функция $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ также интегрируема на X и*

$$\int\limits_X \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int\limits_X f_i(x)\, dx.$$

3°. *Если X и Y — измеримые множества, $X \subset Y$, функция f ограничена и интегрируема на множестве Y, то она интегрируема и на множестве X.*

4°. (аддитивность интеграла по множествам). *Если X — измеримое множество, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — его разбиение, функция f определена и ограничена на множестве X, а ее сужения на X_j интегрируемы на X_j, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$, то функция f интегрируема на X и*

$$\int\limits_X f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{j_\tau} \int\limits_{X_j} f(x)\, dx.$$

Это равенство легко доказывается по аналогии с одномерным случаем при предположении, что функция f интегрируема на множестве X. При предположении о ее интегрируемости только на множествах X_j, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$, доказательство более сложно (его можно найти, например, в учебнике: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. — М.: Высшая школа, 1988, 1989).

Замечание 1. Ограниченность функции в свойстве 4 существенна. Подтвердим это следующим примером. Пусть (r, φ) — полярные координаты на плоскости, $X' = \{(r, \varphi)\colon r < 1\}$ — открытый круг, $X'' = \{(r, \varphi)\colon r = 1\}$ — ограничивающая его окружность. Рассмотрим функцию

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad r < 1, \\ 1/\varphi, & \text{если} \quad r = 1,\ 0 < \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Ясно, что сужения функции f на множествах X' и X'' интегрируемы и
$$\int\limits_{X'} f(x)\,dx = \int\limits_{X''} f(x)\,dx = 0,$$
но на замкнутом круге $X' \cup X''$ функция f не интегрируема.

Это следует из неограниченности функции f в окрестности точки $(1, 2\pi)$, так как для любого разбиения $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$, в котором множество X_j, содержащее точку $(1, 2\pi)$, имеет положительную меру, множество значений интегральных сумм σ_τ неограниченно (доказывается это аналогично тому, как доказывалась неинтегрируемость неограниченной функции на отрезке, см. п. 23.2).

Для полноты доказательства заметим, что у круга существуют сколь угодно мелкие разбиения с указанным свойством, например, вида рассмотренного при доказательстве леммы 7 в п. 42.3.

Замечание 2. Если функция f интегрируема и ограниченна на множестве X, то она интегрируема и на множестве X_{int} его внутренних точек, причем
$$\int\limits_{X_{\mathrm{int}}} f(x)\,dx = \int\limits_{X} f(x)\,dx.$$

Это следует из свойства 4°, так как
$$X = X_{\mathrm{int}} \cup (X \backslash X_{\mathrm{int}}), \quad \mu(X \backslash X_{\mathrm{int}}) = 0$$
(см. замечание 11 в п. 42.1) и интеграл от любой функции по множеству меры нуль равен нулю.

Аналогично, если функция f интегрируема и ограниченна на замыкании $\overline{X}$ измеримого множества X, то она интегрируема и на самом этом множестве, причем
$$\int\limits_{X} f(x)\,dx = \int\limits_{\overline{X}} f(x)\,dx,$$
так как $\overline{X} = X \cup (\overline{X} \backslash X)$ и $\mu(\overline{X} \backslash X) = 0$.

5°. *Если функции f и g интегрируемы и ограниченны на некотором множестве X, то и их произведение fg, а если $\inf\limits_{X} |g(x)| > 0$, то и отношение f/g, интегрируемы на этом множестве.*

6°. (интегрирование неравенств). *Если функции f и g интегрируемы на множестве X и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то*
$$\int\limits_{X} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{X} g(x)\,dx.$$

Следствие (монотонность интеграла от неотрицательных функций по множествам). *Если X и Y — измеримые множества,*

$X \subset Y$, функция f неотрицательна, ограниченна и интегрируема на Y, то

$$\int_X f(x)\,dx \leqslant \int_Y f(x)\,dx.$$

7°. *Если функция f интегрируема и ограниченна на множестве X, то и ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем, причем*

$$\left|\int_X f(x)\,dx\right| \leqslant \int_X |f(x)|\,dx.$$

При доказательстве интегрирования неравенств для функций, интегрируемых на отрезке, не использовалась их ограниченность, поэтому и в случае функций любого числа переменных свойство 6° интеграла справедливо без предположения ограниченности рассматриваемых функций. При доказательстве же следствия используется свойство 3°, доказываемое при предположении ограниченности подынтегральной функции, поэтому в формулировке следствия содержится условие ограниченности функции.

8°. *Если функция f ограничена, интегрируема и неотрицательна на измеримом открытом множестве G, $x^{(0)} \in G$, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ и $f(x^{(0)}) > 0$, то*

$$\int_G f(x)\,dx > 0.$$

Отсюда следует, что если функция f непрерывна и интегрируема на открытом множестве G и $\int\limits_G |f(x)|\,dx = 0$, то функция f тождественно равна нулю в G:

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{в} \quad G.$$

9°. (полная аддитивность интеграла по открытым множествам). *Если G, G_m — измеримые открытые множества,*

$$G_m \subset G_{m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{42.101}$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = G, \tag{42.102}$$

а функция f интегрируема и ограниченна на множестве G, то

$$\lim_{m\to\infty} \int_{G_m} f(x)\,dx = \int_G f(x)\,dx. \tag{42.103}$$

$\triangleright$ Докажем сначала, что из выполнения условий (42.101) и (42.102) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \mu G_m = \mu G. \tag{42.104}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда в силу равенства $\lim\limits_{k\to\infty} \mu s_k(G) = \mu G$ (см. (42.17)) существует такой ранг k, что

$$\mu G - \varepsilon < \mu s_k(G). \tag{42.105}$$

Множества $s_k(G)$, будучи объединением конечного множества замкнутых кубов, является компактом. Поскольку этот компакт лежит в множестве G, то в силу равенства (42.102) система открытых множеств $\{G_m\}$ является его покрытием. Из этого покрытия согласно теореме Гейне–Бореля (см. в п. 33.3 теорему 4) можно выделить конечное покрытие. Ясно, что если m_0 — наибольший номер множеств G_m, входящих в это конечное покрытие, то в силу включений (42.101) имеет место включение

$$s_k(G) \subset G_{m_0}. \tag{42.106}$$

Из неравенства (42.105) и включений

$$s_k(G) \subset G_{m_0} \subset G_m, \quad m > m_0,$$

имеем при $m > m_0$

$$\mu G - \varepsilon < \mu s_k(G) \leqslant \mu G_m \leqslant \mu G.$$

Это и означает выполнение равенства (42.104).

Докажем теперь равенство (42.103). Ограниченность функции f на множестве G означает существование такой постоянной $c > 0$, что для всех точек $x \in G$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$. Поэтому

$$\left|\int\limits_G f(x)\,dx - \int\limits_{G_m} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{G\setminus G_m} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{G\setminus G_m} |f(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c \int\limits_{G\setminus G_m} dx \underset{1^\circ}{=} c\mu(G\setminus G_m) = c(\mu G - \mu G_m) \underset{(42.104)}{\longrightarrow} 0$$

при $m \to \infty$, т. е. равенство (42.103) доказано. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 3. В формулировке полной аддитивности интеграла по открытым множествам условие ограниченности функции можно отбросить, так как из интегрируемости функции по открытому множеству следует ее ограниченность на нем. Это доказывается аналогично тому, как в одномерном случае доказывается ограниченность функции, интегрируемой на отрезке (см., например, снова учебник: К у д р я в ц е в Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. Т.2. — М.: Высшая школа, 1988).

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что для любого измеримого открытого множества G существует последовательность измеримых открытых множеств G_m, удовлетворяющая условиям (42.101) и (42.102). Более того, эту последовательность можно даже выбрать таким образом, что не только сами множества G_m, но и их замыкания $\overline{G}_m$ будут содержаться в множестве G:

$$G_m \subset \overline{G}_m \subset G, \quad m = 1, 2, \dots \tag{42.107}$$

При этом поскольку множества G_m измеримы, то они ограниченны. Следовательно, ограничены и их замыкания $\overline{G}_m$, которые являются поэтому компактами.

В качестве таких множеств G_m можно взять например, множества

$$G_m = s_m(G)_{\text{int}}, \tag{42.108}$$

где, как обычно, множество $s_m(G)$ состоит из кубов ранга m, содержащихся в множестве G.

▷ Проверим выполнение условий (42.101), (42.102) и (42.107) для множеств (42.108). Свойство (42.101) в этом случае выполняется в этом случае очевидным образом:

$$G_m = s_m(G)_{\text{int}} \subset s_{m+1}(G)_{\text{int}} = G_{m+1}.$$

Докажем свойство (42.102). Ясно, что из

$$G_m = s_m(G)_{\text{int}} \subset s_m(G) \subset G$$

следует, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \subset G. \tag{42.109}$$

С другой стороны, для любой точки $x \in G$ в силу открытости множества G существует ее ε-окрестность $U(x;\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, содержащаяся в G: $U(x;\varepsilon) \subset G$. Если ранг m_0 кубов таков, что куб этого ранга имеет диаметр меньше ε, т. е. $\dfrac{\sqrt{n}}{10^{m_0}} < \varepsilon$, то все кубы ранга m_0, содержащие точку x, лежат в окрестности $U(x;\varepsilon)$ точки x и, следовательно, в множестве G. Поэтому

$$x \in s_{m_0}(G)_{\text{int}} \underset{(42.108)}{=} G_{m_0}$$

(см. замечание 6 в п. 42.1). Итак, если $x \in G$, то существует такой ранг m_0, что

$$x \in G_{m_0}$$

и, значит,

$$G \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m. \tag{42.110}$$

Из включений (42.109) и (42.110) и следует равенство (42.102).

Наконец,

$$\overline{G}_m = \overline{s_k(G)}_{\text{int}} = s_k(G) \subset G,$$

т. е. условие (42.107) также выполнено. ◁

З а м е ч а н и е 5. Поясним, почему свойство 9 называется полной аддитивностью интеграла. Если последовательность $\left\{\int\limits_{G_m} f(x)\,dx\right\}$ заменить рядом $\int\limits_{G_1} f(x)\,dx + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\int\limits_{G_{m+1}\setminus G_m} f(x)\,dx$, для которого эта последовательность является последовательностью частичных сумм, то формулу (42.103) можно записать в виде равенства

$$\int\limits_G f(x)\,dx = \int\limits_{G_1} f(x)\,dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{G_{m+1}\setminus G_m} f(x)\,dx, \quad G = G_1 \cup \bigcup_{m=1}^{\infty}(G_{m+1}\setminus G_m).$$

Свойство интеграла по сумме счетной совокупности непересекающихся множеств быть равным сумме интегралов по этим множествам называется полной аддитивностью интеграла.

10° (теорема о среднем). *Если функции f и g интегрируемы на множестве $X \subset R^n$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in X$, и функция $g(x)$ не меняет знак на X, то существует такое число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, что*

$$\int\limits_X f(x)g(x)\,dx = \mu\int\limits_X g(x)\,dx. \tag{42.111}$$

С л е д с т в и е. *Если множество G — область, функции f и g интегрируемы, функция f непрерывна и ограничена, а функция g не меняет знак на G, то в области G существует такая точка ξ, что*

$$\int\limits_G f(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_G g(x)\,dx. \tag{42.112}$$

Свойство 10° доказывается аналогично интегральной теореме о среднем для интеграла по отрезку и не требует предположения об ограниченности рассматриваемых функций, так как основано лишь на интегрировании неравенств (см. п. 24.2). В основе доказательства следствия лежит та же идея, что и в одномерном случае, однако оно имеет некоторые особенности. Поэтому приведем его.

$\triangleright$ В силу ограниченности функции f ее нижняя $m = \inf\limits_{x\in G} f(x)$ и верхняя $M = \sup\limits_{x\in G} f(x)$ грани конечны на области G:

$$-\infty < m \leqslant f(x) \leqslant M < +\infty, \quad x \in G. \tag{42.113}$$

Число μ в равенстве (42.111) удовлетворяет неравенству $m \leqslant \mu \leqslant$ $\leqslant M$. Если $m < \mu < M$, то согласно определению нижней и верхней граней существуют такие точки $x^{(1)} \in G$ и $x^{(2)} \in G$, что

$$f(x^{(1)}) < \mu < f(x^{(2)}).$$

Отсюда в силу линейной связности области G и непрерывности на ней функции f найдется такая точка $\xi \in G$, что $f(\xi) = \mu$ (см. п. 35.2), и формула (42.112) в этом случае доказана.

Пусть $\mu = m$ или $\mu = M$, например $\mu = M$. Тогда из равенства (42.111) при $\mu = M$ следует, что

$$\int\limits_G (M - f(x))g(x)\,dx = 0. \tag{42.114}$$

Если $\int\limits_G g(x)\,dx = 0$, то в силу равенства (42.111) имеем

$$\int\limits_G f(x)g(x)\,dx = 0,$$

и, следовательно, формула (42.112) справедлива при любом выборе точки ξ в области G.

Пустъ $\int\limits_G g(x)\,dx \neq 0$, например

$$\int\limits_G g(x)\,dx > 0. \tag{42.115}$$

Функция g не меняет на G свой знак. Случай $g(x) \leqslant 0$, $x \in G$, противоречит условию (42.115). Поэтому для всех точек $x \in G$ выполняется неравенство

$$g(x) \geqslant 0. \tag{42.116}$$

Согласно полной аддитивности интеграла по открытым множествам (см. свойство 9°) и замечаниям 3 и 4 из неравенства (42.115) следует, что существует такое открытое множество G_0, для которого

$$G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G \tag{42.117}$$

и выполняется неравенство

$$\int\limits_{\overline{G}_0} g(x)\,dx > 0. \tag{42.118}$$

В силу измеримости области G она ограничена, поэтому ограничено и замыкание $\overline{G}_0$ множества G_0, а следовательно, оно является компактом.

Если бы не существовало точки $\xi \in \overline{G}_0$, в которой $f(\xi) = M$, то для всех точек $x \in \overline{G}_0$ выполнялось бы неравенство

$$M - f(x) > 0, \quad x \in \overline{G}_0. \tag{42.119}$$

В силу достижимости непрерывной на компакте функцией своего наименьшего значения имеем

$$m_0 = \min_{x \in \overline{G}_0} (M - f(x)) > 0. \tag{42.120}$$

Поэтому

$$\int\limits_G (M - f(x))g(x)\,dx \underset{(42.117)}{\geqslant} \int\limits_{\overline{G}_0} (M - f(x))g(x)\,dx \underset{(42.120)}{\geqslant}$$
$$\underset{(42.120)}{\geqslant} m_0 \int\limits_{\overline{G}_0} g(x)\,dx \underset{(42.118)}{>} 0.$$

Это противоречит равенству (42.114). Следовательно, существует такая точка $\xi \in \overline{G}_0 \subset G$, что $f(\xi) = M$.

Случай $\mu = m$ рассматривается аналогично. ◁

§ 43. Сведение кратного интеграла к повторному

43.1. Сведение двойного интеграла к повторному. Пусть функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[a, b]$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и (рис. 154)

$$E = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}, \quad -\infty < a < b < +\infty. \tag{43.1}$$

Ясно, что множество E — измеримый по Жордану компакт, так как оно ограничено, замкнуто и его граница имеет меру нуль.

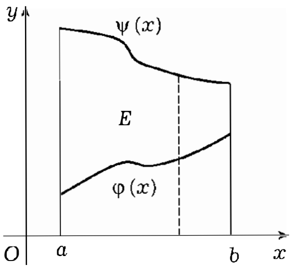

Рис. 154

Если функция f задана на множестве E и при каждом $x \in [a, b]$ интегрируема по y на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$, то функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{43.2}$$

называется *интегралом, зависящим от параметра* x, а интеграл

$$\int\limits_a^b \Bigl[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\Bigr]\,dx \tag{43.3}$$

(если он, конечно, существует) называется *повторным интегралом*. Повторный интеграл (43.3) обычно записывают в виде

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

Лемма. *Если функция f непрерывна на компакте E (см. (43.1)), то зависящий от параметра интеграл (43.2) непрерывен на отрезке $[a, b]$.*

▷ Сделаем в интеграле (43.2), зависящем от параметра x, замену переменной так, чтобы получился интеграл с постоянными пределами интегрирования. Этой цели служит преобразование

$$y = \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

отображающее отрезок $[0,1]$ на отрезок $[\varphi(x),\psi(x)]$. Поскольку $dy = (\psi(x)-\varphi(x))\,dt$, то

$$F(x) = \int_0^1 f(x,\,\varphi(x)+(\psi(x)-\varphi(x))t)(\psi(x)-\varphi(x))\,dt.$$

Полагая для краткости

$$g(x,t) \overset{\text{def}}{=} f(x,\,\varphi(x)+(\psi(x)-\varphi(x))t)(\psi(x)-\varphi(x)), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{43.4}$$

будем иметь $F(x) = \int\limits_0^1 g(x,t)\,dt$, где функция $g(x,t)$ определена на прямоугольнике $P = \{(x,t)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Из непрерывности функций f, φ и ψ в силу формулы (43.4) следует непрерывность функции g на прямоугольнике P, а так как всякий прямоугольник является компактом, то функция g и равномерно непрерывна на P. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, для которых $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|g(x+\Delta x,\,t) - g(x,t)| < \varepsilon, \quad (x,t) \in P, \quad (x+\Delta x,\,t) \in P, \tag{43.5}$$

а следовательно, и неравенство

$$|\Delta F(x)| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = \left|\int_0^1 g(x+\Delta x,\,t)\,dt - \int_0^1 g(x,t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 |g(x+\Delta x,\,t) - g(x,t)|\,dt \underset{(43.5)}{<} \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta F(x) = 0, \quad x \in [a,b],$$

т. е. что функция F непрерывна на отрезке $[a,b]$. $\lhd$

Т е о р е м а 1. *Если функция f непрерывна на компакте E (см. формулу (43.1)), то*

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{43.6}$$

$\rhd$ Прежде всего заметим, что согласно лемме повторный интеграл, стоящий в правой части равенства (43.6), существует, ибо функция F (см. (43.2)) непрерывна, а потому и интегрируема на отрезке $[a,b]$,

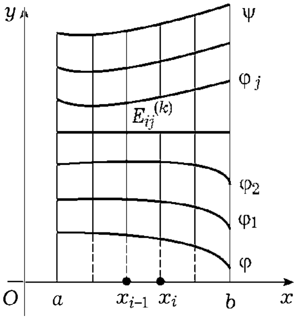

Рис. 155

т. е. существует интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Для доказательства равенства (43.6) зафиксируем произвольно натуральное число k и разобьем отрезок $[a,b]$ точками x_i, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = b$, на k равных отрезков. Тогда $x_i = a + \frac{b-a}{k}i$ и

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{43.7}$$

Введем следующие функции (рис. 155):

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = \varphi(x), \\ &\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{k}\,j, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{k}\,k = \psi(x). \end{aligned} \tag{43.8}$$

Очевидно, что

$$\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x) = \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{k}. \tag{43.9}$$

Положим

$$E_{ij}^{(k)} = \{(x,y)\colon\ x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ \ \varphi_{j-1}(x) \leqslant y \leqslant \varphi_j(x)\}.$$

Множества $E_{ij}^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, k$, образуют разбиение множества E. Обозначим это разбиение τ_k:

$$\tau_k = \{E_{ij}^{(k)}\}. \tag{43.10}$$

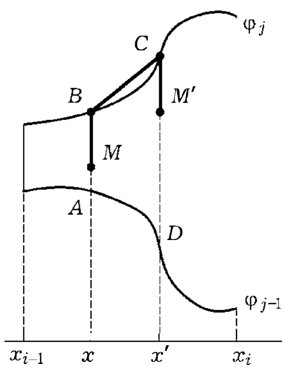

Рис. 156

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} |\tau_k| = 0, \tag{43.11}$$

где, как обычно, $|\tau_k|$ — мелкость разбиения τ_k:

$$|\tau_k| = \max_{i,j=1,2,\ldots,k} \operatorname{diam} E_{ij}^{(k)}.$$

Длину отрезка с концами в точках A и B будем обозначать $|AB|$.

Пусть $M = (x,y)$, $M' = (x',y')$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant x' \leqslant b$, $A = (x, \varphi_{j-1}(x))$, $B = (x, \varphi_j(x))$, $C = (x', \varphi_j(x'))$, $D = (x', \varphi_{j-1}(x'))$ (рис. 156).

Вспомнив, что

$$\operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} = \sup_{M, M' \in E_{ij}^{(k)}} |MM'|, \tag{43.12}$$

оценим расстояние $|MM'|$ при $M \in E_{ij}^{(k)}$, $M' \in E_{ij}^{(k)}$:

$$|MM'| \leqslant |MB| + |BC| + |CM'| \leqslant |AB| + |BC| + |CD| =$$
$$= \varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x) + \sqrt{(x'-x)^2 + [\varphi_j(x') - \varphi_j(x)]^2} + \varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x'). \tag{43.13}$$

Функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а поэтому ограниченны, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|\varphi(x)| \leqslant c, \quad |\psi(x)| \leqslant c, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{43.14}$$

Оценим отдельные члены в правой части неравенства (43.13):

$$0 \leqslant \varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x) \underset{(43.9)}{=} \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k} \leqslant \frac{|\psi(x)| + |\varphi(x)|}{k} \underset{(43.14)}{\leqslant} \frac{2c}{k}. \tag{43.15}$$

Аналогично,

$$0 \leqslant \varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x') \leqslant \frac{2c}{k}. \tag{43.16}$$

Очевидно,

$$|x' - x| \leqslant x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}, \quad x', x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{43.17}$$

Наконец,

$$|\varphi_j(x') - \varphi_j(x)| \underset{(43.8)}{\leqslant} |\varphi(x') - \varphi(x)| + \frac{|\psi(x') - \psi(x)| + |\varphi(x') - \varphi(x)|}{k} j \leqslant$$
$$\leqslant 2\,|\varphi(x') - \varphi(x)| + |\psi(x') - \psi(x)|, \tag{43.18}$$

так как $j/k \leqslant 1$, $j = 1, 2, ..., k$.

Теперь заметим, что функции φ и ψ, будучи непрерывными на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывны на нем. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что как только $|x' - x| < \delta$, выполняются неравенства

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad |\psi(x') - \psi(x)| < \varepsilon. \tag{43.19}$$

Выберем теперь k_0 так, чтобы при $k > k_0$ выполнялись неравенства

$$\frac{b-a}{k} < \delta, \quad \frac{b-a}{k} < \varepsilon, \quad \frac{4c}{k} < \varepsilon. \tag{43.20}$$

Тогда при $x, x' \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., k$, и $k > k_0$ имеем

$$|MM'| \underset{\substack{(43.13)\\(43.15)-(43.20)}}{\leqslant} \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 9\varepsilon^2} = (1 + \sqrt{10})\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} \underset{(43.12)}{\leqslant} (1+\sqrt{10})\varepsilon$, а поэтому и

$$|\tau^{(k)}| \leqslant (1+\sqrt{10})\varepsilon, \quad k > k_0.$$

Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ это и означает выполнение равенства (43.11).

Положим теперь

$$m_{ij}^{(k)} = \inf_{E_{ij}^{(k)}} f(x,y), \quad M_{ij}^{(k)} = \sup_{E_{ij}^{(k)}} f(x,y), \quad i,j = 1,2,...,k,$$

$$s_{\tau_k} = \sum_{i,j=1}^{k} m_{ij}^{(k)} \mu E_{ij}^{(k)}, \quad S_{\tau_k} = \sum_{i,j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \mu E_{ij}^{(k)}, \quad k = 1,2,...$$

В силу интегрируемости функции $f(x,y)$ (она непрерывна на измеримом компакте E) из стремления к нулю мелкостей $|\tau_k|$ разбиений τ_k при $k \to \infty$ нижние s_{τ_k} и верхние S_{τ_k} суммы Дарбу функции $f(x,y)$ имеют своим пределом интеграл от нее по множеству E (см. (42.87)):

$$\lim_{k\to\infty} s_{\tau_k} = \lim_{k\to\infty} S_{\tau_k} = \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy. \tag{43.21}$$

Вспомнив (п. 28.1), что

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\,dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_j(x)\,dx - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{j-1}(x)\,dx = \mu E_{ij}^{(k)},$$

будем иметь

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,dy \leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)} \varphi_j(x) dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \bar{M}_{ij} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij} \mu E_{ij}^{(k)} = S_{\tau_k}.$$

Аналогично,

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \geqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} m_{ij} \mu E_{ij}^{(k)} = s_{\tau_k}.$$

Таким образом,

$$s_{\tau_k} \leqslant \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \leqslant S_{\tau_k}.$$

Устремив здесь k к бесконечности, в силу (43.21) получим

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \leqslant \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy,$$

что доказывает равенство (43.6).

Замечание. Если множество E удовлетворяет относительно оси y условиям, аналогичным условиям, которым оно удовлетворяет относительно оси x (см.(43.1)), т. е.

$$E = \{(x,y)\colon\ c \leqslant y \leqslant d,\ \ \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\},$$

где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, то в случае непрерывности на множестве E функции f будем иметь

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (43.22)$$

43.2. Сведение интеграла произвольной кратности к повторному. Сформулируем теоремы о сведении n-кратного интеграла к повторному в случае $n > 2$. Пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна

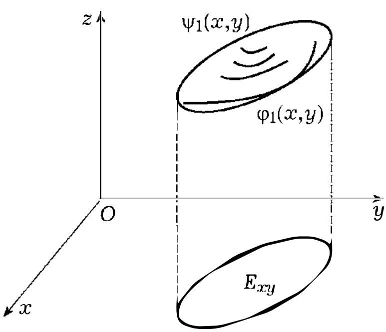

Рис. 157

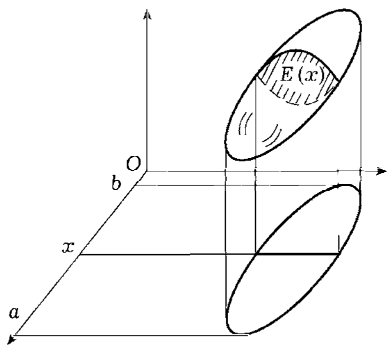

Рис. 158

на множестве $E \subset R^3$, проекция E_{xy} которого на плоскость переменных x и y является квадрируемым компактом, $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — непрерывные на этом компакте функции, $\varphi(x,y) \leqslant \psi(x,y)$, $(x,y) \in$ $\in E_{xy}$, и (рис. 157)

$$E = \{(x,y,z)\colon\ (x,y) \in E_{xy},\quad \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\}.$$

Тогда множество E является кубируемым компактом и

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{E_{xy}} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{43.23}$$

Если множество E_{xy} имеет вид (43.1), т. е.

$$E_{xy} = \{(x,y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \psi_1(x)\},$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то, применив в правой части формулы (43.23) формулу (43.6) к двойному интегралу по множеству E_{xy}, получим

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{43.24}$$

Если обозначить через $E(x_0)$ сечение множества E плоскостью $x = x_0$, т. е.

$$E(x_0) = E \cap \{(x,y,z)\colon\ x = x_0\},$$

то при условии $x \in [a,b]$ включение $(x,y,z) \in E(x_0)$ равносильно включениям $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \psi_1(x)$, $\varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)$ (рис. 158).

Поэтому, объединив в формуле (43.24) два внутренних интегрирования по переменным y и z, получим формулу

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{E(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz. \tag{43.25}$$

Например, если $f(x,y,z) \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_E dx\,dy\,dz = \mu_3 E, \qquad \iint\limits_{E(x)} dy\,dz = \mu_2 E(x),$$

где μ_3 — объем (трехмерная мера), а μ_2 — площадь (двумерная мера), и из формулы (43.25) следует, что

$$\mu_3 E = \int\limits_a^b \mu_2 E(x)\,dx,$$

т. е. объем тела E равен одномерному интегралу от площадей сечений $E(x)$.

Аналогично, для $n > 3$ при соответствующих предположениях справедлива формула

$$\underbrace{\iint\ldots\int}_{n \text{ раз}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_n. \tag{43.26}$$

Объединяя в (43.26) интегрирования по различным группам переменных, получим формулы типа формул (43.23) и (43.25):

$$\iint\limits_E \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{E_{x_1!, x_2, \dots, x_k}} \dots \int dx_1\, dx_2 \dots dx_k \iint\limits_{E_{x_1, x_2, \dots, x_k}} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_{k+1} dx_{k+2} \dots dx_n,$$

где $E_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ — проекция множества E на пространство точек $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, а $E_{x_1, x_2, \dots, x_k}$ — сечение множества E, ортогональное этому пространству. В частности, при $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1$ и $k = 1$ имеем

$$\mu_n E = \int\limits_a^b dx_1 \iint\limits_{E(x_1)} \dots \int dx_2\, dx_3 \dots dx_n = \int\limits_a^b \mu_{n-1} E(x_1)\, dx_1.$$

43.3. Объем n-мерного шара. Методом сведения кратного интеграла к повторному иногда удается вычислить значение кратного интеграла. Поясним это на примере получения формулы для величины объема n-мерного шара радиуса r. Пусть

$$V_r^n = \{x\colon\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant r^2\}$$

— n-мерный шар радиуса r с центром в начале координат.

Известно, что

$$\mu_2 V_r^2 = 2\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \pi r^2, \tag{43.27}$$

отсюда можно найти объем трехмерного шара следующим образом:

$$\mu_3 V_r^3 = 2\int\limits_0^r \mu_2 V^2_{\sqrt{r^2 - z^2}}\, dz = 2\pi \int\limits_0^r (r^2 - z^2)\, dz = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Применим этот метод и для вычисления объема $\mu_n V_r^n$ шара V_r^n при произвольном $n = 1, 2, \dots$ Пусть

$$\mu_{n-1} V = \varkappa_{n-1} r^{n-1},$$

где $\varkappa_{n-1}$ — некоторая постоянная $\left(\varkappa_2 = \pi,\ \varkappa_3 = \dfrac{4}{3}\pi\right)$; тогда

$$\mu V_r^n = \iint\limits_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant r^2} \dots \int dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= 2\int\limits_0^r dx_1 \iint\limits_{x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \leqslant r^2 - x_1^2} \dots \int dx_2\, dx_3 \dots dx_n =$$

$$= 2\int_0^r \mu_{n-1} V^{n-1}_{\sqrt{r^2-x_1^2}}\,dx_1 = 2\kappa_{n-1}\int_0^r (r^2-x_1^2)^{(n-1)/2}dx_1 \underset{x_1=r\cos t}{=}$$

$$\underset{x_1=r\cos t}{=} 2\kappa_{n-1}r^n\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt = \kappa_n r^n, \quad \kappa_n = 2\kappa_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt.$$

Получившийся интеграл был вычислен раньше (см. формулу (26.4)), откуда

$$\kappa_n = \begin{cases} 2\kappa_{n-1}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad n = 2m, \\ 2\kappa_{n-1}\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при} \quad n = 2m+1, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, для коэффициентов κ_n получена рекурентная формула. Последовательно ее применяя, получим

$$\kappa_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad \kappa_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{43.28}$$

43.4. Независимость меры от выбора системы координат. При определении меры множества в п. 42.1 остался невыясненным вопрос о независимости меры от выбора системы координат. Мера множеств определяется посредством многогранников, состоящих из кубов, ребра которых параллельны координатным осям, поэтому вопрос о независимости меры множеств от выбора системы координат сводится к независимости объемов кубов от этого выбора. Отношение объемов одного и того же куба, вычисленное в разных системах координат, не зависит от выбора куба, так как любые два куба с ребрами, параллельными координатным осям одной системы координат, могут быть получены один из другого с помощью параллельного переноса и гомотетии с центром в совмещенных центрах кубов. Если указанное отношение равно единице, то мера множества не зависит от выбора системы координат.

Пусть в пространстве R^n имеется две системы координат. Меру множества, определенную с помощью первой из них, обозначим через μ, а с помощью второй — через $\widetilde{\mu}$. Пусть Q — n-мерный куб с ребрами, параллельными координатным осям первой координатной системы.

Граница куба Q является объединением его граней, они могут быть представлены как графики непрерывных функций на соответствующих компактах и потому имеют меру нуль в любой системе координат. Следовательно, и вся граница куба Q имеет меру нуль, что влечет за собой измеримость самого куба Q в любой системе координат. Пусть

$$\widetilde{\mu}Q = \lambda\mu Q \tag{43.29}$$

и X — какое-либо измеримое в первой системе координат множество, тогда оно ограничено. Поэтому множество $s_k = s_k(X)$ всех кубов ранга k, содержащихся в нем, и множество $S_k = S_k(X)$ всех кубов того же ранга, пересекающихся с ним, состоят из конечного множества кубов этого ранга. Пусть, например,

$$s_k = \bigcup_{i=1}^{i_0} Q_i$$

(Q_i — куб ранга k). Множество s_k, будучи конечной суммой измеримых в обеих координатных системах множеств Q_i, также измеримо в этих системах, причем множества Q_i, $i = 1, 2, ..., i_0$, образуют его разбиение, поэтому (см. лемму 6 в п. 42.3)

$$\widetilde{\mu} s_k = \sum_{i=1}^{i_0} \widetilde{\mu} Q_i \underset{(43.29)}{=} \lambda \sum_{i=1}^{i_0} \mu Q_i = \lambda \mu s_k. \tag{43.30}$$

Если $\sigma_k = \sigma_k(X)$ — множество кубов ранга k, входящих в множество S_k, но не входящих в множество s_k, то σ_k отличается от множества $S_k \setminus s_k$ на множество меры нуль (см. замечание 7 в п. 42.1) в обеих координатных системах. Следовательно, $\widetilde{\mu}(S_k \setminus s_k) = \widetilde{\mu}\sigma_k$, $\mu(S_k \setminus s_k) = \mu\sigma_k$. Множество σ_k состоит из конечного множества кубов ранга k, поэтому аналогично (43.30) имеем

$$\widetilde{\mu}(S_k \setminus s_k) = \widetilde{\mu}\sigma_k = \lambda\mu\sigma_k = \lambda\mu(S_k \setminus s_k). \tag{43.31}$$

Поскольку $s_k \subset X \subset S_k$ и, в силу измеримости множества X в первой системе координат,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(S_k \setminus s_k) = 0,$$

то и во второй системе координат также

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu}(S_k \setminus s_k) \underset{(43.31)}{=} \lambda \lim_{k\to\infty} \mu(S_k \setminus s_k) = 0.$$

Поэтому, согласно лемме 7 п. 43.3, множество X измеримо во второй системе координат и

$$\widetilde{\mu} X = \lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu} s_k \underset{(43.30)}{=} \lambda \lim_{k\to\infty} \mu s_k = \lambda\mu X. \tag{43.32}$$

Докажем, что $\lambda = 1$. Для этого заметим, что объем n-мерного шара V_r^n радиуса r равен $\varkappa_n r^n$ (см. п. 43.3), где $\varkappa_n$ — определенное число. Величина длины радиуса шара, как и длина всякого отрезка, имеет одно и то же значение при любом выборе системы координат. Таким образом, объем n-мерного шара V_r^n не зависит от выбора системы координат

$$\widetilde{\mu} V_r^n = \mu V_r^n. \tag{43.33}$$

Для многогранника $s_k(V_r^n)$ (см. формулу (42.9)), состоящего из кубов ранга k (следовательно, с ребрами, параллельными координатным осям первой координатной системы), будем иметь

$$\widetilde{\mu} s_k(V_r^n) \underset{(43.29)}{=} \lambda \mu s_k(V_r^n).$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu} s_k(V_r^n) = \lambda \lim_{k\to\infty} \mu s_k(V_r^n) = \lambda\mu V_r^n,$$

но

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu} s_k(V_r^n) \underset{(43.32)}{=} \widetilde{\mu} V_r^n \underset{(43.33)}{=} \mu V_r^n,$$

т. е.

$$\lambda\mu V_r^n = \mu V_r^n.$$

Это означает, что $\lambda = 1$.

Итак, действительно мера множества не зависит от выбора системы координат. Поскольку переход от одного ортонормированного базиса к другому осуществляется с помощью ортогональных матриц, то мера является инвариантом при линейных отображениях, задаваемых формулами

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

с ортогональными матрицами $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$ (см. п. 33.1).

Напомним, что раньше (в п. 42.1) было показано, что мера множества не зависит и от параллельного переноса.

43.5*. Формулы Ньютона–Лейбница и Тейлора. Приведем самый простой вывод формулы Тейлора: она может быть получена последовательным применением формулы Ньютона–Лейбница к получающимся подынтегральным функциям. Остаточный член формулы Тейлора получается в этом случае в виде повторного интеграла, который с помощью формулы перемены порядка интегрирования (см. формулу (43.22)) можно привести к уже известному нам его виду в интегральной форме с однократным интегрированием (см. теорему 6 в п. 32.3).

Теорема 2. *Если функция f имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка n и $x_0 \in [a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{n-1}} f^{(n)}(t_n)\, dt_n \tag{43.34}$$

(формула Тейлора с остаточным членом *в форме повторного интеграла*).

$\triangleright$ Докажем формулу (43.34) по индукции. При $n = 1$ она является формулой Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t_1)\, dt_1.$$

Если при некотором $m = 1, 2, ..., n-1$ имеет место формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int\limits_{x_0}^{x} dt_1 \int\limits_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{x_0}^{t_{m-1}} f^{(m)}(t_m)\, dt_m, \quad (43.35)$$

то, применив формулу Ньютона–Лейбница к функции $f^{(m)}(t_m)$, т. е.

$$f^{(m)}(t_m) = f^{(m)}(x_0) + \int\limits_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1},$$

подставив получившееся выражение в интегральный член равенства (43.35) и проинтегрировав первое слагаемое, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} dt_1 \int\limits_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{x_0}^{t_{m-1}} \Big(f^{(m)}(x_0) + \int\limits_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1} \Big)\, dt_m =$$

$$= f^{(m)}(x_0) \int\limits_{x_0}^{x} dt_1 \int\limits_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{x_0}^{t_{m-1}} dt_m + \int\limits_{x_0}^{x} dt_1 \int\limits_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1} =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \int\limits_{x_0}^{x} dt_1 \int\limits_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{x_0}^{t_{m-1}} dt_m \int\limits_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1}. \quad (43.36)$$

Из равенств (43.35) и (43.36) следует, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int\limits_{x_0}^{x} dt_1 \int\limits_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{x_0}^{t_{m-1}} dt_m \int\limits_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1}.$$

При $m = n - 1$ эта формула превращается в формулу (43.34). $\triangleleft$

Покажем, что остаточный член

$$r_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} dt_1 \int\limits_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{x_0}^{t_{n-1}} f^{(n)}(t_n)\, dt_n \quad (43.37)$$

в формуле Тейлора (43.34) может быть преобразован к уже известной его интегральной форме с одним интегрированием.

Сначала заметим, что для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции φ имеет место формула

$$\int_a^b dy \int_a^y \varphi(x)(y-x)^{k-1}dx = \frac{1}{k}\int_a^b \varphi(x)(b-x)^k dx, \quad k \neq 0. \tag{43.38}$$

Она получается с помощью изменения порядка интегрирования

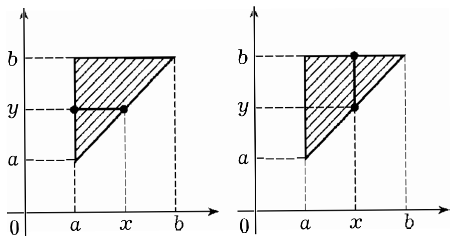

Рис. 159

(см. рис. 159, интегирорование производится по заштрихованному треугольнику):

$$\int_a^b dy \int_a^y \varphi(x)(y-x)^{k-1}dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_x^b (y-x)^{k-1}dy =$$
$$= \frac{1}{k}\int_a^b \varphi(x)(b-x)^k dx.$$

Далее, справедлива формула

$$\int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{k-1}} \varphi(t_k)\,dt_k = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^b \varphi(t)(b-t)^{k-1}dt, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{43.39}$$

Эта формула также доказывается по индукции: если справедливо равенство (45.39), то, применив его к внутреннему интегралу

$$\int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_k} \varphi(t_{k+1})\,dt_{k+1}$$

$(k+1)$-кратного интеграла, получим

$$\int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_k} \varphi(t_{k+1})\,dt_{k+1} \underset{(43.39)}{=}$$
$$\underset{(43.39)}{=} \frac{1}{(k-1)!}\int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} \varphi(t)(t_1-t)^{k-1}dt \underset{(43.38)}{=} \frac{1}{k!}\int_a^b \varphi(t)(b-t)^k dt,$$

т. е. формула (43.39) остается верной при замене k на $k+1$.

Остаточный член (43.37) формулы Тейлора в силу формулы (45.39) при $\varphi(t) = f^{(n)}(t)$, $a = x_0$, $b = x$ и $k = n$ имеет вид

$$r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt,$$

т. е. получилась запись остаточного члена в интегральной форме, полученной ранее в п. 32.3 (см. формулу (32.40)).

Итак, формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме является ничем иным как итерацией формулы Ньютона–Лейбница.

§ 44. Замена переменных в кратных интегралах

44.1. Линейные отображения. Пусть R_x^n и R_y^n — точечные n-мерные евклидовы пространства, точки которых обозначаются соответственно

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Линейным отображением L: $R_x^n \to R_y^n$ называется отображение, координатные функции которого являются линейными функциями:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + p_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{44.1}$$

Матрица (a_{ij}), $i, j = 1, 2, ..., n$, называется *матрицей линейного отображения* L в данной системе координат. Точка $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ является образом начала координат при отображении L.

Таким образом, линейное отображение L является композицией $L = PA$ однородного линейного отображения A с координатными функциями

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{44.2}$$

и параллельного переноса P

$$y_i = z_i + p_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{44.3}$$

Определителем отображения A называется определитель матрицы (a_{ij}), т. е. $\det A = \det(a_{ij})$. Напомним, что определитель отображения не зависит от выбора системы координат. Если $\det A \neq 0$, то отображение A (и отображение PA) называется *невырожденным.*

Лемма 1. *Если*

$$c_0 = \max_{i,j=1,2,\ldots,n} |a_{ij}|, \tag{44.4}$$

то для любых точек $x, x' \in R_x^n$ *выполняется неравенство*

$$|L(x') - L(x)| \leqslant nc_0|x' - x|. \tag{44.5}$$

$\triangleright$ Предварительно заметим, что из неравенства Коши–Шварца (см. п. 33.1)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

при $b_i = 1$, $i = 1, 2, ..., n$, следует неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{44.6}$$

Если $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, $L(x) = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $L(x') = (y'_1, y'_2, ..., y'_n)$, то

$$|L(x') - L(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y'_i - y_i)^2} \underset{(44.1)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x'_j - x_j|\right)^2} \underset{(44.4)}{\leqslant} a_0\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |x'_j - x_j|\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant a_0\sqrt{n\left(\sum_{j=1}^{n} |x'_j - x_j|\right)^2} \underset{(44.6)}{\leqslant} a_0 n\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x'_j - x_j)^2} = a_0 n|x' - x|.$$

Неравенство (44.5) доказано. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е. Образ n-мерного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат пространства R^n (см. определение 4 в п.33.2), при невырожденном линейном отображении пространства R^n в себя называется *n-мерным параллелепипедом*. Ясно, что всякий n-мерный параллелепипед является измеримым множеством, так как его граница состоит из конечного множества $(n-1)$-мерных граней, каждая из которых, будучи графиком непрерывной на лежащем в пространстве R^{n-1} компакте функции, имеет n-мерную меру нуль.

Л е м м а 2. *Если линейное отображение L является композицией однородного линейного отображения A и параллельного переноса P:*

$$L = PA,$$

а J — определитель линейного отображения A: $J = \det A$, то для любого измеримого множества $X \subset R^n$ выполняется равенство

$$\mu L(X) = |J|\mu X. \tag{44.7}$$

▷ Из линейной алгебры известно, что всякое линейное однородное отображение A может быть представлено в виде

$$A = BC,$$

где B — неотрицательное самосопряженное линейное отображение (неотрицательность линейного отображения B означает, что $\det B \geqslant 0$), а C — ортогональное отображение. Таким образом,

$$L = PA = PBC.$$

При параллельном переносе и ортогональном отображении мера множества не меняется (см. п. 42.1 и п. 43.4). Поэтому достаточно доказать, что для любого измеримого множества X выполняется равенство

$$\mu B(X) = |J|\mu X.$$

Из линейной алгебры известно также, что для самосопряженного неотрицательного отображения существует система координат, в которой его матрица диагональна:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{44.8}$$

Пусть Q — n-мерный куб, ребра которого параллельны осям этой координатной системы и имеют длину h. Отображение B сводится к “растяжениям” в направлениях координатных осей: с коэффициентом λ_i в направлении i-й оси, $i = 1, 2, \ldots, n$. При таком растяжении объем всякого параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат, изменяется с коэффициентом λ_i, а в результате коэффициент изменения объема куба Q при отображении B будет равен $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$. Таким образом,

$$\mu B(Q) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \mu Q = \det B \mu Q \tag{44.9}$$

(напомним, что определитель линейного отображения не зависит от выбора системы координат).

Далее, из равенства $A = BC$ имеем

$$\det A = \det B \det C.$$

Определитель ортогонального отображения равен ± 1, а $\det B \geqslant 0$, поэтому

$$|J| = |\det A| = \det B. \tag{44.10}$$

Следовательно, окончательно

$$\mu B(Q) \underset{\substack{(44.9) \\ 44.10}}{=} |J|\mu Q. \tag{44.11}$$

Это равенство справедливо для всех кубов Q, ребра которых параллельны координатным осям, в которых матрица преобразования B имеет диагональный вид (44.8).

Пусть X — измеримое множество, $X \in R^n_x$, а $s_k(X)$ и $S_k(X)$ — множества, состоящие из кубов ранга k в указанной системе координат и определяемые по формулам (42.9). Из включений

$$s_k(X) \subset X \subset S_k(X)$$

следует, что

$$B(s_k(X)) \subset B(X) \subset B(S_k(X)), \tag{44.12}$$

$$B(S_k(X)) \setminus B(s_k(X)) \subset B(S_k(X) \setminus s_k(X)). \tag{44.13}$$

Множества $s_k(X)$, $S_k(X)$ и $S_k(X) \setminus s_k(X)$ представляют собой объединение конечного множества кубов ранга k в выбранной системе координат (часть этих кубов в множестве $S_k(X) \setminus s_k(X)$ может быть открытыми или полуоткрытыми, см. замечание 4 в п. 42.1). Поэтому множества $B(s_k(X))$, $B(S_k(X))$ и разность $B(S_k(X)) \setminus B(s_k(X))$ будут объединением конечного множества параллелепипедов (замкнутых, открытых, полуоткрытых), и потому являются измеримыми множествами.

Мера множества $S_k(X) \setminus s_k(X)$ равна сумме мер составляющих его кубов, поэтому мера его образа $B(S_k(X) \setminus s_k(X))$ равна сумме мер образов этих кубов, а для них справедливо равенство (44.11). Следовательно,

$$\mu(B(S_k(X))\setminus B(s_k(X))) \underset{(44.13)}{\leqslant} \mu B(S_k(X)\setminus s_k(X)) \leqslant$$
$$\leqslant |J|\mu(S_k(X)\setminus s_k(X)).$$

Поскольку в силу измеримости множества X имеет место равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k(X)\setminus s_k(X)) = 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B(S_k(X))\setminus B(s_k(X))) = 0.$$

Отсюда и из включений (44.12) согласно лемме 5 п. 42.1 явствует, что множество $B(X)$ измеримо, а поскольку

$$\mu B(s_k(X)) = |J|\mu s_k(X),$$

то и то, что

$$\mu B(X) = \lim_{k\to\infty} \mu B(s_k(X)) = |J| \lim_{k\to\infty} \mu s_k(X) = |J|\mu X.$$

Лемма доказана. $\triangleleft$

44.2. Дифференцируемые отображения. Пусть G — открытое множество пространства R_x^n, а F — отображение множества G в пространство R_y^n:

$$y = F(x), \quad x \in G. \tag{44.14}$$

В координатной системе отображение F записывается в виде

$$y_i = y_i(x) = y_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad x \in G. \tag{44.15}$$

Введем обозначения

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}), \quad y^{(0)} = F(x^{(0)}) = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}),$$

$$\Delta x = x - x^{(0)} = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n), \quad |\Delta x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}.$$

Напомним, что отображение F называется дифференцируемым в точке $x^{(0)} \in G$ (см. п. 40.5), если его координатные функции $y_i = y_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируемы в этой точке и, следовательно, их можно представить в виде

$$y_i = y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_j + \varepsilon_i(x^{(0)}, \Delta x)|\Delta x|, \tag{44.16}$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial y_i(x^{(0)})}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_i(x^{(0)}, \Delta x) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Обозначим через $L_{x^{(0)}}$ линейное отображение, задаваемое формулами

$$y_i = y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^{(0)}), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Рассматривая элементы n-мерного пространства как векторы и, тем самым, их отображения как вектор-функции, дифференцируемые в точке $x^{(0)}$, отображение F можно записать в виде

$$F(x) = L_{x^{(0)}}(x) + \varepsilon|\Delta x|, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0, \tag{44.17}$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon(x^{(0)}, \Delta x) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n), \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(x^{(0)}, \Delta x), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Индекс $x^{(0)}$ в обозначении $L_{x^{(0)}}$ показывает, что это линейное отображение зависит от точки $x^{(0)}$.

Отсюда, введя обозначение $o(\Delta x) = \varepsilon|\Delta x|$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$, имеем

$$F(x) - L_{x^{(0)}}(x) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Это означает, что для дифференцируемого в точке $x^{(0)}$ отображения F существует такое линейное отображение $L_{x^{(0)}}$, что в окрестности точки $x^{(0)}$ отображение F отличается от этого линейного отображения на бесконечно малую более высокого порядка, чем расстояние $|x - x^{(0)}| = |\Delta x|$ от точки $x^{(0)}$ до точки x при стремлении этого расстояния к нулю. В этом и состоит смысл дифференцируемости отображения в точке.

Напомним еще (см. п. 40.4), что отображение (44.14) называется непрерывно дифференцируемым на открытом множестве G, если все его координатные функции (44.9) непрерывно дифференцируемы на этом множестве (см. замечание 3 в п. 36.2).

Лемма 3. *Если отображение* (44.14) *непрерывно дифференцируемо на открытом множестве* $G \subset R^n_x$, *то*

$$F(x) - L_{x^{(0)}}(x) = \varepsilon|\Delta x|, \quad x \in G, \tag{44.18}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(x^{(0)}, \Delta x)$ *на любом компакте* $X \subset G$ *равномерно стремится к нулю при* $x - x^{(0)} = \Delta x \to 0$, $x^{(0)} \in X$.

Таким образом, новое, что привносит формула (44. 18) по сравнению с формулой (44.17), состоит в том, что в формуле (44.17) точка $x^{(0)}$ была фиксирована, а в формуле (44.18) эта точка может меняться, оставаясь принадлежащей некоторому компакту X. При этом стремление к нулю функции $\varepsilon(x^{(0)}, \Delta x)$ происходит равномерно на X. Определение равномерного стремления функции к нулю на множестве дано в п. 36.2.

$\triangleright$ Из непрерывной дифференцируемости координатных функций (44.15) следует, что функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x^{(0)}, \Delta x)$, $i = 1, 2, ..., n$, в формулах (44.16) на любом компакте $X \subset G$ равномерно стремятся к нулю при $x \to x^{(0)}$ (см. теорему 4 в п. 36.2). Следовательно, на любом компакте $X \subset G$ при $x - x^{(0)} = \Delta x \to 0$, $x^{(0)} \in X$, равномерно стремится к нулю и вектор-функция $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$, так как $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2}$. $\triangleleft$

Лемма 4. *При непрерывно дифференцируемом отображении открытого множества компакт меры нуль, лежащий в этом множестве, отображается в компакт меры нуль.*

$\triangleright$ Непрерывно дифференцируемое отображение является, очевидно, и непрерывным, а нам известно, что непрерывный образ компакта есть компакт (см. теорему 1 в п. 35.1). Оценим верхнюю меру образа компакта.

Предварительно заметим, что всякое ограниченное множество $E \subset R^n_x$ содержится в некотором n-мерном кубе Q_E с ребром длины $2\operatorname{diam} E$ (см. замечание 2 в п. 33.2).

В силу включения $E \subset Q_E$ имеет место неравенство

$$\mu^* E \leqslant \mu Q_E = (2\operatorname{diam} E)^n. \tag{44.19}$$

Пусть теперь G — открытое множество в R^n_x, X — компакт, $X \subset G$. Тогда его расстояние до непересекающегося с ним замкнутого множества $R^n_x \backslash G$ положительно (см. теорему 6 в п. 33.4):

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \rho(X, R^n_x \backslash G) > 0.$$

Выберем ранг k_0 так, чтобы диаметр куба ранга k_0 был меньше δ. Тогда всякий куб ранга k_0, пересекающийся с компактом X, будет содержаться в множестве D. Многогранник $S_{k_0}(X)$ (состоящий из всех таких кубов, см. (42.9)) также является компактом. В самом деле, компакт X есть ограниченное множество, поэтому множество $S_{k_0}(X)$ представляет собой объединение конечного множества кубов ранга k_0.

Положим
$$c = \max_{\substack{x \in S_{k_0}(X) \\ i,j=1,2,\dots,n}} \left| \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j} \right|. \tag{44.20}$$

Пусть $x \in S_{k_0}(X)$, $x' \in S_{k_0}(X)$ и отрезок $[x, x']$ с концами в точках x и x' содержится в $S_{k_0}(X)$,

$$F(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \quad F(x') = (y_1(x'), y_2(x'), \dots, y_n(x')),$$
$$x' - x = \Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n).$$

Тогда, применив формулу конечных приращений Лагранжа для функций многих переменных (см. замечание 1 в п. 38.11), будем иметь

$$|F(x') - F(x)| =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i(x') - y_i(x))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i(x + \theta_i \Delta x)}{\partial x_j} \, \Delta x_j \Big)^2} \underset{(44.20)}{\leqslant}$$
$$\underset{(44.20)}{\leqslant} c \sqrt{n \Big(\sum_{j=1}^n \Delta x_j \Big)^2} \underset{(44.6)}{\leqslant} cn \sqrt{\sum_{j=1}^n \Delta x_j^2} = cn|x' - x|. \tag{44.21}$$

Из этого неравенства следует, что для любого выпуклого множества $E \subset S_{k_0}(X)$ (т. е. такого, что оно вместе с любыми своими точками содержит и отрезок с концами в этих точках, см. п. 33.3),

$$\operatorname{diam} F(E) \leqslant cn \operatorname{diam} E.$$

Действительно,
$$\operatorname{diam} F(E) = \sup_{x, x' \in E} |F(x') - F(x)| \underset{(44.21)}{\leqslant} cn \sup_{x, x' \in E} |x' - x| = cn \operatorname{diam} E.$$

Если множество E является n-мерным кубом Q_h с ребром длины h, $Q_h \subset S_{k_0}(X)$, то, заметив, что $\operatorname{diam} Q_h = h\sqrt{n}$ и $\mu Q_h = h^n$, имеем
$$\operatorname{diam} F(Q_h) \leqslant cn \operatorname{diam} Q_h = cn^{3/2} h,$$

а поэтому

$$\mu^* F(Q_h) \underset{(44.19)}{\leqslant} (2\operatorname{diam} F(Q_h))^n \leqslant 2^n c^n n^{3n/2} h^n = 2^n c^n n^{3n/2} \mu Q_h. \tag{44.22}$$

Для любого ранга $k \geqslant k_0$ имеем $S_k(X) \subset S_{k_0}(X)$. Пусть

$$S_k(X) = \bigcup_{j=1}^{j_k} Q_j^{(k)}, \tag{44.23}$$

$Q_j^{(k)}$ — кубы ранга k, $j = 1, 2, ..., j_k$. Заметим, что

$$F\Big(\bigcup_{j=1}^{j_k} Q_j^{(k)}\Big) = \bigcup_{j=1}^{j_k} F(Q_j^{(k)}). \tag{44.24}$$

Из включения $X \subset S_k(X)$ следует включение $F(X) \subset F(S_k(X))$, а следовательно,

$$\mu^* F(X) \leqslant \mu^* F(S_k(X)) \underset{(44.23)}{=} \mu^* F\Big(\bigcup_{j=1}^{j_k} Q_j^{(k)}\Big) \underset{(44.24)}{=} \mu^* \bigcup_{j=1}^{j_k} F(Q_j^{(k)}) \underset{(42.53)}{\leqslant}$$
$$\underset{(42.53)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{j_k} \mu^* F(Q_j^{(k)}) \underset{(44.22)}{\leqslant} 2^n c^n n^{3n/2} \sum_{j=1}^{j_k} \mu Q_j^{(k)} = 2^n c^n n^{3n/2} \mu S_k(X). \tag{44.25}$$

Если мера компакта X равна нулю, то $\lim\limits_{k\to\infty} \mu S_k(X) = 0$, откуда в силу неравенства (44.25) следует, что $\mu^* F(X) = 0$, а поэтому и $\mu F(X) = 0$. $\triangleleft$

Обозначим якобиан непрерывно дифференцируемого отображения (44.8) через J_F:

$$J_F = J_F(x) = \frac{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}.$$

Лемма 5. *Если F — непрерывно дифференцируемое отображение с якобианом, не обращающимся в нуль, открытого множества $G \subset R_x^n$ в R_y^n, X — компакт, $X \subset G$, Q_h — n-мерный куб с ребром длины h, $Q_h \subset G$, $x^{(0)} \in X \cap Q_h$, то имеет место неравенство*

$$\mu^* F(Q_h) \leqslant |J_F(x^{(0)})| \mu Q_h + \alpha(h) \mu Q_h, \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0. \tag{44.26}$$

Подчеркнем, что в этом неравенстве бесконечно малая $\alpha = \alpha(h)$ не зависит ни от выбора точки $x^{(0)} \in X$, ни от выбора конкретных кубов Q_h, а зависит только от длин их ребер h (и, конечно, от компакта X). В этом случае говорят, что на компакте X имеет место равномерная оценка (44.26).

Заметив, что $\mu Q_h = h^n$, эту оценку можно записать в виде

$$\mu^* F(Q) \leqslant |J_F(x^{(0)})| \mu Q_h + o(h^n), \quad h \to 0. \tag{44.27}$$

$\triangleright$ Доказательство этой леммы основано на том, что для линейного отображения $L_{x^{(0)}}$, как и для всякого линейного отображения, абсолютная величина определителя его матрицы (a_{ij}) согласно лемме 2 равна коэффициенту изменения объемов тел при этом отображении. Для отображения $L_{x^{(0)}}$ указанный определитель совпадает с якобианом $J_F(x^{(0)})$ отображения F в точке $x^{(0)}$, и, таким образом, в силу леммы 2

$$\mu L_{x^{(0)}}(Q_h) = |J_F(x^{(0)})|\mu Q_h. \tag{44.28}$$

Используя связь (44.17) между отображениями F и $L_{x^{(0)}}$, докажем неравенство (44.26).

Пусть X — компакт, $X \subset G$. Тогда

$$\delta = \rho(X, R^n_x \backslash G) > 0.$$

В дальнейшем всегда будем предполагать, что $\operatorname{diam} Q_h = h\sqrt{n} < \delta$. В этом случае всякий куб Q_h, пересекающийся с компактом X, будет содержаться в множестве G: $Q_h \subset G$.

Согласно лемме 3 (см. (44.18))

$$|F(x) - L_{x^{(0)}}(x)| = |\varepsilon(x^{(0)}, \Delta x)||\Delta x|,$$

где функция $|\varepsilon(x^{(0)}, \Delta x)|$ равномерно на компакте X стремится к нулю при $x - x^{(0)} = \Delta x \to 0$, $x^{(0)} \in X$. Поэтому если

$$\varepsilon(\Delta x) = \sup_{x^{(0)} \in X} |\varepsilon(x^{(0)}, \Delta x)|,$$

то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0, \tag{44.29}$$

и справедливо неравенство

$$|F(x) - L_{x^{(0)}}(x)| \leqslant \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|, \quad x^{(0)} \in X, \quad x = x^{(0)} + \Delta x \in G. \tag{44.30}$$

Если точки $x^{(0)}$ и x' принадлежат одному и тому же кубу Q_h, то

$$|\Delta x| = |x - x^{(0)}| \leqslant h\sqrt{n}, \quad x^{(0)} \in Q_h, \quad x \in Q_h.$$

Поэтому в силу неравенства (44.30) имеем

$$|F(x) - L_{x^{(0)}}| \leqslant \varepsilon(\Delta x)h\sqrt{n}.$$

Положим

$$\alpha_0 = \alpha_0(h) = \sqrt{n} \sup_{|\Delta x| \leqslant h\sqrt{n}} \varepsilon(\Delta x); \tag{44.31}$$

тогда

$$|F(x) - L_{x^{(0)}}| \leqslant \alpha_0(h)h, \quad x^{(0)} \in X \cap Q_h, \quad x = x^{(0)} + \Delta x \in Q_h, \tag{44.32}$$

где

$$\lim_{h \to 0} \alpha_0(h) \underset{\substack{(44.29)\\(44.31)}}{=} 0. \tag{44.33}$$

При линейном отображении $L_{x^{(0)}}$ образом $P = L_{x^{(0)}}(Q_h)$ куба Q_h является невырожденный параллелепипед (якобиан $J_F(x^{(0)}) \neq 0$). Пусть $U_{\alpha_0 h} = U(P; \alpha_0 h)$ является $\alpha_0 h$-окрестностью параллелепипеда P (определение окрестности множества см. в п. 33.3, определение 15). Ясно, что из неравенства (44.32) следует, что

$$F(Q_h) \subset U_{\alpha_0 h}. \tag{44.34}$$

Пусть $P_{\alpha_0 h}$ — n-мерный параллелепипед, $(n-1)$-мерные грани которого параллельны соответствующим $(n-1)$-мерным граням параллелепипеда P и находятся от них на расстоянии $\alpha_0 h$, причем параллелепипед P содержится внутри параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$ (рис. 160). Тогда

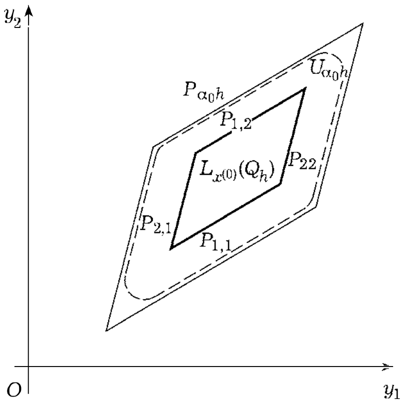

Рис. 160

$$U_{\alpha_0 h} \subset P_{\alpha_0 h} \tag{44.35}$$

и, следовательно,

$$F(Q_h) \underset{\substack{(44.34)\\(44.35)}}{\subset} P_{\alpha_0 h}. \tag{44.36}$$

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ — длины ребер параллелепипеда $P = L_{x^{(0)}}(Q_h)$. Оценим длины $a_i + \Delta a_i$ ребер параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$, параллельных соответственно ребрам длин a_i параллелепипеда P, $i = 1, 2, ..., n$.

Пусть H_i — расстояние между двумя параллельными $(n-1)$-мерными гранями параллелепипеда P, содержащими ребра длин $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n$. Тогда расстояние между двумя параллельными $(n-1)$-мерными гранями параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$, содержащими ребра длин $a_1 + \Delta a_1$, ..., $a_{i-1} + \Delta a_{i-1}$, $a_{i+1} + \Delta a_{i+1}$, ..., $a_n + \Delta a_n$, в силу определения этого параллелепипеда равно $H_i + 2\alpha_0 h$. Иначе говоря, H_i и $H_i + 2\alpha_0 h$ являются длинами высот соответственно параллелепипедов P и $P_{\alpha_0 h}$.

Обозначим φ_i, $0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi/2$, угол, образованный ребром длины a_i параллелепипеда P с $(n-1)$-мерной гиперплоскостью, содержащей его ребра длин $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n$ (этот угол, очевидно, равен углу, образованному ребром длины $a_i + \Delta a_i$ параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$ с соответствующей $(n-1)$-мерной гиперплоскостью), т. е. угол между рассматриваемым ребром и его проекцией на указанную гиперплоскость.

Длины ребер и высот параллелепипеда P и $P_{\alpha_0 h}$ связаны с углами φ_i соотношениями

$$a_i = \frac{H_i}{\sin \varphi_i}, \quad a_i + \Delta a_i = \frac{H_i + 2\alpha_0 h}{\sin \varphi_i}.$$

Поэтому
$$\Delta a_i = \frac{H_i + 2\alpha_0 h}{\sin\varphi_i} - \frac{H_i}{\sin\varphi_i} = \frac{2\alpha_0 h}{\sin\varphi_i}. \tag{44.37}$$

Элементы матрицы $\left(\dfrac{\partial y_i(x^{(0)})}{\partial x_j}\right)$ линейного отображения $L_{x^{(0)}}$ являются непрерывными функциями на открытом множестве G, а углы φ_i непрерывно зависят от этих элементов и, следовательно, также являются непрерывными функциями точки $x^{(0)}$ на G: $\varphi_i = \varphi_i(x^{(0)})$. В силу невырожденности отображений $L_{x^{(0)}}$, $x^{(0)} \in G$, т. е. необращения в нуль на G их якобианов, для всех точек $x^{(0)} \in G$ имеем $\varphi_i(x^{(0)}) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому наименьшие значения непрерывных на компакте X функций φ_i также положительны:
$$\min_{x\in X} \varphi_i(x) = c_i, \quad 0 < c_i \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть
$$c_0 = \max\left\{\frac{1}{\sin c_1}, \ldots, \frac{1}{\sin c_n}\right\}.$$

Тогда
$$\Delta a_i \underset{(44.37)}{\leqslant} 2c_0\alpha_0 h. \tag{44.38}$$

Разность замкнутого параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$ и открытого P_{int} („рамка", окаймляющая параллелепипед P) является объединением параллелепипедов $P_{i,1}$ и $P_{i,2}$ с ребрами длин $a_1 + \Delta a_1$, ..., $a_{i-1} + \Delta a_{i-1}$, ..., $a_{i+1} + \Delta a_{i+1}$, ..., $a_n + \Delta a_n$ и высотами длины $\alpha_0 h$. Поэтому
$$P_{\alpha_0 h} \subset P \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_{i,1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_{i,2}. \tag{44.39}$$

Ребра длины a_i параллелепипеда P получаются при отображении $L_{x^{(0)}}$ из ребер куба Q_h, имеющих длину h. Следовательно, в силу леммы 1 имеет место неравенство
$$a_i \leqslant nh, \tag{44.40}$$
где
$$c = \max_{\substack{i,j=1,2,\ldots,n\\ x\in X}} \left|\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j}\right| < +\infty.$$

Заметив, что объем любого n-мерного параллелепипеда не превосходит объема прямоугольного параллелепипеда с ребрами той же длины, т. е. произведения длин его ребер, имеющих общую вершину, будем иметь
$$\begin{aligned}
&\mu P_{i,j} \leqslant \\
&\leqslant (a_1 + \Delta a_1)\ldots(a_{i-1} + \Delta a_{i-1})(a_{i+1} + \Delta a_{i+1})\ldots(a_n + \Delta a_n)\alpha_0 h \underset{\substack{(44.38)\\(44.40)}}{\leqslant} \\
&\underset{\substack{(44.38)\\(44.40)}}{\leqslant} (cnh + 2c_0\alpha_0 h)^{n-1}\alpha_0 h = (cn + 2c_0\alpha_0)^{n-1}\alpha_0 h^n = \\
&= (cn + 2c_0\alpha_0)^{n-1}\alpha_0 \mu Q_h, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{44.41}$$

Выше было замечено, что согласно лемме 2 имеет место равенство

$$\mu P = \mu L_{x^{(0)}}(Q_h) \underset{(44.28)}{=} |J_F(x^{(0)})| \mu Q_h. \tag{44.42}$$

Оценим теперь верхнюю меру множества $F(Q_h)$:

$$\mu^* F(Q_h) \underset{(44.36)}{\leqslant} \mu P_{\alpha_0 h} \underset{(44.39)}{\leqslant} \mu P + \sum_{i=1}^{n} \mu P_{i,1} + \sum_{i=1}^{n} \mu P_{i,2} \underset{\substack{(44.41)\\(44.42)}}{\leqslant}$$

$$\underset{\substack{(44.41)\\(44.42)}}{\leqslant} |J_F(x^{(0)})| \mu Q_h + 2n(cn + 2c_0\alpha_0(h))^{n-1} \alpha_0(h) \mu Q_h.$$

Положив

$$\alpha(h) = 2n(cn + 2c_0\alpha_0(h))^{n-1} \alpha_0(h),$$

окончательно получим

$$\mu^* F(Q_h) \leqslant |J_F(x^{(0)})| \mu Q_h + \alpha(h) \mu Q_h, \quad \lim_{h \to 0} \alpha(h) \underset{(44.33)}{=} 0. \quad \lhd$$

В левой части неравенства (44.26) стоит верхняя мера образа $F(Q_h)$ куба Q_h при отображении F, а не его мера, поскольку осталось невыясненным, измеримо ли множество $F(Q_h)$ при сделанных предположениях. Для дальнейшего нам понадобится лишь случай взаимно однозначных непрерывно дифференцируемых отображений, якобиан которых не обращается в нуль. Поэтому мы и ограничимся доказательством измеримости образа измеримого множества лишь в этом случае.

Если отображение F непрерывно дифференцируемо и его якобиан не обращается в нуль на открытом множестве $G \subset R_x^n$, то образ $F(G)$ этого множества также является открытым множеством, и у точек $x \in G$, $y = F(x) \in F(G)$ существуют сколь угодно малые окрестности, взаимно однозначно отображающиеся друг на друга (см. п. 40.5). Если, кроме того, отображение F взаимно однозначно отображает все открытое множество G на его образ $F(G)$, то для любого множества $X \subset G$ его внутренность X_{int} отображается на внутренность $F(X)_{\text{int}}$ его образа:

$$F(X_{\text{int}}) = F(X)_{\text{int}}, \tag{44.43}$$

а если границы ∂X и $\partial F(X)$ множеств X и $F(X)$ содержатся соответственно в множествах G и $F(G)$, то они также отображаются друг на друга:

$$F(\partial X) = \partial F(X). \tag{44.44}$$

В этом случае имеет место также и равенство

$$F(\overline{X}) = \overline{F(X)}. \tag{44.45}$$

В самом деле,

$$\overline{X} = X_{\text{int}} \cup \partial X, \quad \overline{F(X)} = F(X)_{\text{int}} \cup \partial F(X),$$

поэтому

$$F(\overline{X}) =$$
$$= F(X_{\text{int}} \cup \partial X) = F(X_{\text{int}}) \cup F(\partial X) \underset{\substack{(44.43)\\(44.44)}}{=} F(X)_{\text{int}} \cup \partial F(X) = \overline{F(X)}.$$

Лемма 6. *При непрерывно дифференцируемом взаимно однозначном отображения с якобианом, не обращающимся в нуль, открытого множества G образ измеримого множества, содержащегося вместе со своим замыканием в G, является измеримым множеством.*

$\triangleright$ Пусть G — открытое в R_x^n множество и F: $G \to R_y^n$ — указанное в условиях леммы его отображение.

Пусть X — измеримое множество и его замыкание $\overline{X}$ лежит в G:

$$X \subset \overline{X} \subset G. \tag{44.46}$$

Замыкание $\overline{X}$ множества X, как замыкание всякого измеримого множества, является компактом (см. замечание 12 в п. 42.1), а отображение F непрерывно, поэтому образ $F(\overline{X})$ множества $\overline{X}$ при этом отображении также является компактом (см. теорему 1 в п. 35.1), а следовательно, ограниченным множеством. Но так как $F(X) \underset{(44.46)}{\subset} F(\overline{X})$, то множество $F(X)$ также ограничено.

Граница ∂X измеримого множества имеет меру нуль и является компактом (см. замечание 10 в п. 42.1). Поэтому и образ этой границы является компактом меры нуль (см. лемму 4):

$$\mu F(\partial X) = 0. \tag{44.47}$$

Поскольку при отображении F граница образа множества является образом его границы (см. (44.44)), то граница $\partial F(X)$ образа $F(X)$ множества X имеет меру нуль:

$$\mu \partial F(X) \underset{(44.44)}{=} \mu F(\partial X) \underset{(44.47)}{=} 0.$$

Таким образом, $F(X)$ является ограниченным множеством с границей меры нуль, и поэтому измеримо (см. теорему 1 в п. 42.1). $\triangleleft$

Поскольку n-мерный замкнутый куб является измеримым множеством, то в случае, когда этот куб лежит в открытом множестве G, его образ при непрерывно дифференцируемом взаимно однозначном отображении F с якобианом, не равным нулю, является измеримым множеством. Поэтому для таких отображений в неравенстве (44.26) (см. лемму 5) в его левой части верхнюю меру можно заменить на меру, т. е. в этом случае справедливо неравенство

$$\mu F(Q_h) \leqslant |J(x^{(0)})|\mu Q_h + \alpha(h)\mu Q_h, \tag{44.48}$$

где

$$\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0. \tag{44.49}$$

44.3 Формула замены переменного в кратном интеграле. Пусть F — непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение открытого множества $G \subset R^n_x$ в пространство R^n_y и его якобиан J_F не обращается в нуль на множестве G.

Теорема 1. *Если X — измеримое множество, содержащееся вместе со своим замыканием в открытом множестве G:*

$$X \subset \overline{X} \subset G,$$

а функция f непрерывна на множестве $\overline{F(X)}$, то

$$\int\limits_{\overline{F(X)}} f(y)\,dy = \int\limits_{\overline{X}} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{44.50}$$

Эта формула равносильна формуле

$$\int\limits_{F(X)} f(y)\,dy = \int\limits_{X} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{44.51}$$

Действительно, ограниченная функция одновременно интегрируема или нет как на измеримом множестве, так и на его замыкании, причем в случае интегрируемости интегралы от функции по множеству и по его замыканию совпадают (см. замечание 2 в п. 42.7). В нашем случае функции $f(y)$ и $f(F(x))|J_F(x)|$ непрерывны соответственно на компактах $\overline{f(X)}$ и $\overline{X}$ (являющихся замыканием измеримых множеств $f(X)$ и X), а следовательно, ограничены и интегрируемы на них. Таким образом, все входящие в формулы (44.50) и (44.51) интегралы существуют, а сами эти формулы равносильны.

$\triangleright$ Докажем формулу (44.50). Прежде всего заметим, что ее достаточно доказать лишь при дополнительном предположении неотрицательности функции f на множестве $\overline{f(X)}$:

$$f(y) \geqslant 0, \quad y \in \overline{f(X)}. \tag{44.52}$$

В самом деле, функция f, как это уже отмечалось выше, ограничена на компакте $\overline{f(X)}$. Поэтому существует такая постоянная $c > 0$, что

$$f(y) > -c, \quad y \in \overline{f(X)}.$$

Если теорема 1 справедлива для двух неотрицательных функций $f_1(x) = f(x) + c$ и $f_2(x) = c$, то она в силу свойства линейности интеграла справедлива и для функции

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Обозначим через $X_j^{(k)}$, $j = 1, 2, ..., j_k$, всевозможные непустые пересечения замыкания $\overline{X}$ множества X с кубама ранга k. Таким образом, для каждого $j = 1, 2, ..., j_k$ существует такой куб ранга k, обозначим его $Q_j^{(k)}$, что

$$X_j^{(k)} = \overline{X} \cap Q_j^{(k)} \neq \varnothing. \tag{44.53}$$

Системы множеств

$$\tau_k = \{X_j^{(k)}\}_{j=1}^{j=j_k}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{44.54}$$

образуют разбиения компакта $\overline{X}$, мелкости которых стремятся к нулю:

$$\lim_{k\to\infty} |\tau_k| = 0 \tag{44.55}$$

(см. лемму 7 в п. 42.3). Отсюда следует, что системы множеств

$$F(\tau_k) \overset{\text{def}}{=} \{F(X_j^{(k)})\}_{j=1}^{j=j_k} \tag{44.56}$$

образуют разбиения замыкания $\overline{F(X)}$ множества $F(X)$ (рис. 161), мелкости которых также стремятся к нулю.

Действительно, элементы $X_j^{(k)}$ разбиения τ_k являются измеримы-

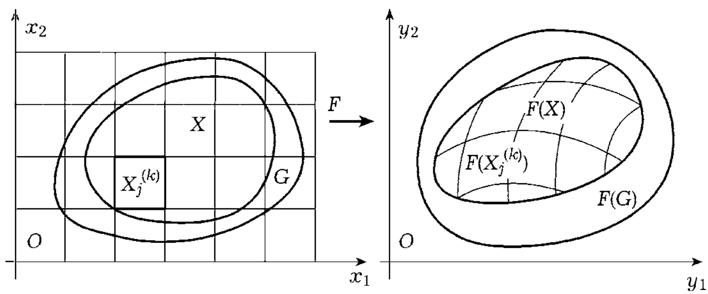

Рис. 161

ми компактами как пересечения двух измеримых компактов $\overline{X}$ и $Q_j^{(k)}$, лежащих в открытом множестве G, поэтому согласно лемме 6 их образы $F(X_j^{(k)})$ являются измеримыми множествами. Из того, что τ_k является разбиением множества $\overline{X}$, следует, что

$$\overline{F(X)} \underset{(44.45)}{=} F(\overline{X}) \underset{(44.54)}{=} F\Big(\bigcup_{j=1}^{j_k} X_j^{(k)}\Big) = \bigcup_{j=1}^{j_k} F(X_j^{(k)}). \tag{44.57}$$

Наконец, в силу взаимной однозначности отображения F пересечение образов множеств при этом отображении равно образу их пересечения, а поэтому

$$F(X_i^{(k)}) \cap F(X_j^{(k)}) = F(X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)}). \qquad (44.58)$$

Пересечения $X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)}$, $i \neq j$, имеют меру нуль и являются компактами как пересечения двух компактов $X_i^{(k)} \in \tau_k$, $X_j^{(k)} \in \tau_k$. Следовательно, образы этих пересечений в свою очередь оказываются множествами меры нуль, поэтому и мера пересечения $F(X_i^{(k)}) \cap F(X_j^{(k)})$ равна нулю:

$$\mu(F(X_i^{(k)}) \cap F(X_j^{(k)})) \underset{(44.58)}{=} \mu F(X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)}) = 0, \quad i \neq j.$$

Из выполнения условия (44.55) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} |F(\tau_k)| = 0. \qquad (44.59)$$

Действительно, отображение F компакта $\overline{X}$, будучи непрерывным, является и равномерно непрерывным (см. теорему 2 в п. 35.1), и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех множеств $E \subset \overline{X}$, $\operatorname{diam} E < \delta$, выполняется неравенство

$$\operatorname{diam} F(E) < \varepsilon. \qquad (44.60)$$

Из условия (44.55) следует, что существует такой ранг k_0, что для всех рангов $k > k_0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{diam} X_j^{(k)} < \delta, \quad j = 1, 2, ..., j_k. \qquad (44.61)$$

В результате для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер k_0, что для всех номеров $k > k_0$ имеет место неравенство

$$|F(\tau_k)| = \max_{j=1,2,\ldots,j_k} \operatorname{diam} F(X_j^{(k)}) \underset{(44.60)}{<} \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (44.59).

Измеримый компакт $\overline{X}$ лежит в открытом множестве G. Его граница $\partial\overline{X}$ является компактом меры нуль и ее образ $F(\partial\overline{X})$ при отображении F является границей образа $F(\overline{X}) = \overline{F(X)}$ компакта $\overline{X}$ (см. (44.44)), а следовательно, согласно лемме 4 также имеет меру нуль,

$$\mu\partial\overline{F(X)} = 0.$$

Рассмотрим теперь неполные интегральные суммы (см. п. 42.5) вида $\sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(X)})}$ для интеграла $\int\limits_{\overline{F(X)}} f(y)\,dy$ и оценим их с помощью неполных интегральных сумм $\sigma_{\tau_k(\partial\overline{X})}$ для интеграла $\int\limits_{\overline{X}} f(F(x))|J_F(x)|\,dx$.

Отберем те из множеств $F(X_j^{(k)})$, которые не пересекаются с границей $\partial\overline{F(X)}$ множества $\overline{F(X)}$. В силу свойств отображения F (см., в частности, (44.44)) это равносильно выбору тех множеств $X_j^{(k)}$, которые не пересекаются с границей $\partial\overline{X}$ множества $\overline{X}$.

Для таких множеств $X_j^{(k)}$ имеем

$$X_j^{(k)} = \overline{X} \cap Q_j^{(k)} = Q_j^{(k)} \subset \overline{X}, \tag{44.62}$$

т. е. множество $X_j^{(k)}$ является в этом случае кубом ранга k.

Действительно, в силу условия (44.53) в кубе $Q_j^{(k)}$ имеется точка компакта $\overline{X}$. Если бы этот куб не содержался в $\overline{X}$, то в нем нашлась бы точка, не принадлежащая $\overline{X}$, а поэтому и точка x, принадлежащая его границе: $x \in \partial\overline{X} \subset \overline{X}$ (см. замечание 8 в п. 42.1). Таким образом,

$$x \in \overline{X} \cap Q_j^{(k)} = X_j^{(k)} \quad \text{и} \quad x \in \partial\overline{X},$$

что противоречит выбору множества $X_j^{(k)}$.

Выберем теперь произвольным образом по точке $\eta^{(j,k)}$ в каждом из отобранных множеств $F(X_j^{(k)})$ разбиения $F(\tau_k)$. В силу включения $\eta^{(j,k)} \in F(X_j^{(k)})$ существуют такие точки $\xi^{(j,k)}$, что

$$F(\xi^{(j,k)}) = \eta^{(j,k)}. \tag{44.63}$$

Неполная интегральная сумма $\sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(X)})}$ для интеграла $\int\limits_{\overline{F(X)}} f(y)\,dy$ при выбранных точках $\eta^{(j,k)}$ имеет вид

$$\sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(X)})} = \sum_{F(X_j^{(k)})\cap\partial\overline{F(X)}=\varnothing} f(\eta^{(j,k)})\mu F(X_j^{(k)}) \underset{(44.62)}{=}$$

$$\underset{(44.62)}{=} \sum_{Q_j^{(k)}\subset\overline{X}} f(\eta^{(j,k)})\mu F(Q_j^{(k)}). \tag{44.64}$$

Соответствующая этой интегральной сумме неполная интегральная сумма $\sigma_{\tau_k(\partial\overline{X})}$ для интеграла $\int\limits_{\overline{X}} f(F(x))|J_F(x)|\,dx$ при выборе (44.63) точек $\xi^{(j,k)}$ записывается следующим образом:

$$\sigma_{\tau_k(\partial\overline{X})} = \sum_{Q_j^{(k)}\subset\overline{X}} f(F(\xi^{(j,k)}))|J_F(\xi^{(j,k)})|\mu Q_j^{(k)}. \tag{44.65}$$

Заметим, что функция f, будучи непрерывной на компакте $\overline{F(X)}$, ограничена на нем:

$$0 \leqslant f(y) \leqslant c < +\infty, \quad y \in \overline{F(X)}. \tag{44.66}$$

Оценим неполную интегральную сумму $\sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(X)})}$ с помощью неравенства (44.48):

$$\sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(X)})} \underset{\substack{(44.48),(44.63)\\(44.64)}}{\leqslant} \sum_{Q_j^{(k)} \subset \overline{X}} f(F(\xi^{(j,k)}))|J_F(\xi^{(j,k)})|\mu Q_j^{(k)} +$$

$$+ \sum_{Q_j^{(k)} \subset \overline{X}} \alpha(h) f(\eta^{(j,k)})\mu Q_j^{(k)} \underset{\substack{(44.65)\\(44.66)}}{\leqslant} \sigma_{\tau_k(\partial\overline{X})} + c\alpha(h) \sum_{Q_j^{(k)} \subset \overline{X}} \mu Q_j^{(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_{\tau_k(\partial\overline{X})} + c\mu\overline{X}\alpha(h). \tag{44.67}$$

Первое слагаемое в правом части этого неравенства является неполной интегральной суммой (44.65), а второе в силу выполнения условия (44.49) стремится к нулю при $k \to \infty$ (здесь $h = 10^{-k}$):

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(10^{-k}) = 0.$$

Мелкости разбиений τ_k и $F(\tau_k)$ стремятся к нулю при $k \to \infty$ (см. (44.55) и (44.59)), поэтому, согласно теореме 4 п. 42.5, рассматриваемые неполные интегральные суммы стремятся при $k \to \infty$ к соответствующим интегралам:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(X)})} = \int\limits_{\overline{F(X)}} f(y)\,dy,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k(\partial\overline{X})} = \int\limits_{\overline{X}} f(F(x))|J_F(x)|\,dx.$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве (44.67), получим неравенство

$$\int\limits_{\overline{F(X)}} f(y)\,dy \leqslant \int\limits_{\overline{X}} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{44.69}$$

Теперь заметим, что отображение F^{-1}, обратное данному отображению F, также непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно, а его якобиан $J_{F^{-1}}(y)$ не обращается в нуль на открытом множестве $F(G)$, и для него имеет место формула (см. п. 40.4)

$$J_{F^{-1}}(y) = \frac{1}{J_F(x)}, \quad x = F^{-1}(y). \tag{44.70}$$

Для отображений F и F^{-1} имеет место равенство

$$F(F^{-1}(y)) = y, \quad y \in F(G), \tag{44.71}$$

так как отображение FF^{-1} является тождественным отображением множества $F(G)$ на себя.

Применим к интегралу, стоящему в правой части неравенства (40.69), само это неравенство для отображения F^{-1}. Это можно сделать, ибо для обратного отображения F^{-1} выполняются все условия теоремы. Заметив, что $\overline{X} = \overline{F^{-1}(F(X))}$, получим

$$\int\limits_{\overline{X}} f(F(x))|J_F(x)|\,dx = \int\limits_{\overline{F^{-1}(F(X))}} f(F(x))|J_F(x)|\,dx \underset{\substack{(44.69)\\ x=F^{-1}(y)}}{\leqslant}$$
$$\underset{\substack{(44.69)\\ x=F^{-1}(y)}}{\leqslant} \int\limits_{\overline{F(X)}} f(F(F^{-1}(y)))|J_F(F^{-1}(y))||J_{F^{-1}}(y)|\,dy \underset{\substack{(44.70)\\ (44.71)}}{=} \int\limits_{\overline{F(X)}} f(y)\,dy. \tag{44.72}$$

Из неравенств (44.69) и (44.72) следует формула (44.50). ◁

Используя полную аддитивность интеграла (см. свойство 9° в п. 42.7), формулу (44.50) замены переменных в кратном интеграле можно обобщить на более широкий класс отображений, отказавшись от взаимной однозначности отображения и неравенства нулю якобиана отображения на границе области интегрирования.

Для того чтобы сформулировать это обобщение, нам понадобится понятие непрерывной продолжаемости отображения, в частности непрерывной продолжаемости функции.

Непрерывное отображение множества в некоторое пространство называется *непрерывно продолжаемым на замыкание множества*, если существует непрерывное отображение этого замыкания в то же пространство, совпадающее на самом множестве с данным отображением.

Непрерывные продолжения отображений и числовых функций будем обозначать теми же символами, что и продолжаемые отображения и функции.

Т е о р е м а 2. *Если отображение F: $G \to R^n_y$ открытого измеримого множества $G \to R^n_x$ на открытое измеримое множество $G^* \subset R^n_y$ взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо, его якобиан не обращается в нуль на G, если отображение F и его якобиан непрерывно продолжаемы на замыкание $\overline{G}$ множества G, а функция f непрерывна на множестве G^* и непрерывно продолжаема не его замыкание $\overline{G^*}$, то*

$$\int\limits_{G^*} f(y)\,dy = \int\limits_{G} f(F(x))|J_F(x)|\,dx, \quad G^* = F(G). \tag{44.73}$$

Таким образом, в условиях теоремы непрерывное продолжение отображения F может и не быть взаимно однозначным на границе ∂G области интегрирования G, а непрерывное продолжение якобиана может на этой границе обращаться в нуль.

$\triangleright$ Замыкание $\overline{G^*}$ измеримого множества G^* является измеримым компактом, на который по условию теоремы непрерывно продолжаема функция f, поэтому это продолжение интегрируемо на компакте $\overline{G^*}$, а следовательно, сама функция f интегрируема на открытом множестве G^*. В силу же непрерывной продолжаемости отображения F и его якобиана на замыкание $\overline{G}$ множества G, рассуждая аналогичным образом, получим, что функция $f(F(x))|J_F(x)|$ интегрируема на открытом множестве G. Таким образом, интералы, стоящие как в левой, так и в правой части равенства (44.73) в условиях теоремы существуют.

Множество G открыто и измеримо. Поэтому существует последовательность таких измеримых открытых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, что (см. замечание 4 в п. 42.7)

$$G_k \subset G_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{44.74}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G, \tag{44.75}$$

причем

$$G_k \subset \overline{G_k} \subset G, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{44.76}$$

Ясно, что замыкание $\overline{G_k}$ множества G_k является компактом. Применив теорему 1 к множествам G_k, получим

$$\int\limits_{F(G_k)} f(y)\,dy = \int\limits_{G_k} f(F(x))|J_F(x)|\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{44.77}$$

Теперь заметим, что множества $F(G_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, также открыты, и для них в силу условий (44.74) и (44.75) выполняются условия

$$F(G_k) \subset F(G_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} F(G_k) = F(G) = G^*. \tag{44.78}$$

Из (44.74) и (44.75) согласно полной аддитивности интеграла по открытым множествам (см. свойство 9 в п. 42.7) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{G_k} f(F(x))|J_F(x)|\,dx = \int\limits_{G} f(F(x))|J_F(x)|\,dx.$$

Аналогично, из (44.78) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{F(G_k)} f(y)\,dy = \int\limits_{G^*} f(y)\,dy.$$

Поэтому, перейдя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (44.77), получим формулу (44.73). $\triangleleft$

44.4 Геометрический смысл абсолютной величины якобиана отображения. Пусть F — непрерывное дифференцируемое взаимно однозначное отображение открытого измеримого множества $G \subset R_x^n$ на открытое измеримое множество $G^* \subset R_y^n$: $F(G) = G^*$. Пусть якобиан J_F отображения F не обращается в нуль на G, и пусть как отображение F, так и его якобиан непрерывно продолжаемы на замыкание $\overline{G}$ множества G. Как и раньше, будем эти продолжения обозначать соответственно F и J_F, называя продолженную функцию J_F по-прежнему *якобианом отображения* F.

Пусть D — измеримая область, т. е. измеримое линейно связное открытое множество, содержащееся в замыкании $\overline{G}$ открытого множества G:

$$D \subset \overline{G}.$$

Таким образом, в некоторых точках области D якобиан отображения может обращаться в нуль. Это может происходить в тех точках, которые принадлежат границе открытого множества G. Примером такой точки является точка $(0,0)$ для проколотого круга $G = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\} \setminus \{(0,0)\}$ и круга $D = \{(x_1, x_2)\colon\ x_1^2 + x_2^2 < 1/2\}$.

Пусть образ $F(\overline{D})$ замыкания $\overline{D}$ области D является измеримым множеством. Для его меры имеет место формула (см. свойство 1° кратного интеграла в п. 42.1)

$$\mu F(D) = \int\limits_{F(D)} dy.$$

Применив к интегралу, стоящему в правой части этого равенства, формулу замены переменного в кратном интеграле (здесь $f(y) = 1$), получим

$$\mu F(D) = \int\limits_D |J_F(x)|\, dx.$$

По теореме о среднем (см. п. 42.7, свойство 10°) имеем

$$\int\limits_D |J_F(x)|\, dx = |J_F(\xi)| \mu D, \quad \xi \in D,$$

и, таким образом,

$$\frac{\mu F(D)}{\mu D} = |J_F(\xi)|, \quad \xi \in D. \tag{44.79}$$

Если $\{D\}$ — семейство указанных областей, содержащее области сколь угодно малого диаметра, и если существует точка $x^{(0)}$, принадлежащая всем областям этого семейства, то

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \frac{\mu F(D)}{\mu D} = |J_F(x^{(0)})|, \quad x^{(0)} \in D. \tag{44.80}$$

Действительно, из неравенства $|\xi - x^{(0)}| \leqslant \operatorname{diam} D$, $x^{(0)}, \xi \in D$, следует, что

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \xi = x^{(0)}.$$

Отсюда, в силу непрерывности якобиана J_F отображения F, имеем

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} J_F(\xi) = J_F(x^{(0)}).$$

Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (44.79), получим формулу (44.88), которая и выражает геометрический смысл абсолютной величины якобиана отображения. Коротко говорят, что абсолютная величина якобиана отображения в данной точке равна коэффициенту изменения меры множества в этой точке.

44.5. Криволинейные координаты. Взаимно однозначное отображение

$$y = F(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \quad x \in G, \tag{44.81}$$

множества $G \subset R^n_x$ в пространство R^n_y ставит в соответствие каждой точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ набор чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Эти числа можно рассматривать как другие координаты той же точки x. Эти координаты называются обычно *криволинейными координатами*, так как кривые, получающиеся из уравнений

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при фиксировании всех аргументов, кроме одного, называемые координатными кривыми, не являются, вообще говоря, прямыми, как в случае декартовых координат.

Таким образом, формулы (44.81) можно рассматривать не только как формулы, задающие отображение множества из одного пространства в другое, в каждом из которых заданы декартовы координаты соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, но и как переход от координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к новым координатам $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в том же пространстве. В этом случае множество $G^* = F(G)$ представляет собой множество наборов новых координат точек множества G.

В формуле замены переменных в кратных интегралах (44.73) при такой интерпретации соотношений (44.81) в обеих частях равенства следует писать одну и ту же область интегрирования:

$$\int_G f(y)\,dy = \int_G f(F(x))|J_F(x)|\,dx, \tag{44.82}$$

так как интегрирование происходит по одному и тому же множеству, описываемому разными способами.

Обратный переход от координат $y_1, y_2, ..., y_n$ к координатам x_1, $x_2, ..., x_n$ осуществляется при помощи обратного отображения

$$x = F^{-1}(y) = \begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2, ..., y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n(y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{44.83}$$

Рассмотрим более подробно двумерный случай. Пусть задано взаимно однозначное отображение

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{44.84}$$

открытого множества G^* плоскости $R^2_{x,y}$ в плоскость $R^2_{u,v}$. Будем рассматривать пару (u, v) как новые координаты точки (x, y). Уравнения координатных линий в этом случае имеют вид

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v)$$

и

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0),$$

т. е. представляют собой параметрически заданные плоские кривые.

Будем предполагать, что отображение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{44.85}$$

обратное к отображению (44.84), определено на некотором открытом множестве $G \subset R^2_{u,v}$ и удовлетворяет всем условиям, при которых была доказана формула замены переменных в кратных интегралах (см. теорему 2 в п. 44.3 при $n = 2$). Посмотрим, каков геометрический смысл якобиана $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ при интерпретации формул (44.84) как формул перехода от декартовых координат x, y к, вообще говоря, криволинейным координатам u, v.

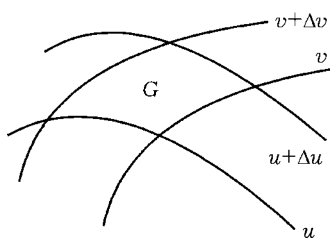

Рис. 162

Зафиксируем значения u_0, v_0, $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$, $(u_0, v_0) \in G$, и обозначим через P ограниченную область, граница которой состоит из частей координатных линий $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ (рис. 162), т. е.

$$P = \{(x, y)\colon\ x = x(u),\ y = y(v);\ u_0 < u < u_0 + \Delta u,\ v_0 < v < v_0 + \Delta v\}$$

(P называется *координатным параллелограммом*), и пусть $M_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.

Если рассмотреть вспомогательную плоскость переменных u, v, то на ней неравенства $u_0 < u < u_0 + \Delta u$, $v_0 < v < v_0 + \Delta v$ задают прямоугольник P^*. Граница ∂P координатного параллелограмма P

на плоскости переменных x, y при достаточно малых Δu и Δv является образом при отображении (44.85) границы прямоугольника P^*, которая, как и граница всякого прямоугольника, является кусочно гладкой кривой и, следовательно, имеет площадь, равную нулю (см. теорему 3 в п. 42.2). Отсюда вытекает согласно лемме 4 п. 44.2, что и площадь ее образа, т. е. площадь множества ∂P, также равна нулю. Поэтому к координатному параллелограмму P можно применять формулу (44.82). Согласно интегральной теореме о среднем существует такая точка $M \in P$, что

$$\mu P = \iint\limits_{P} dx\,dy \underset{(44.82)}{=} \iint\limits_{P^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{M} \iint\limits_{P^*} du\,dv =$$

$$= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{M} \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u} du \int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{M} \Delta u\,\Delta v. \quad (44.86)$$

Положим

$$\varepsilon(M) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{M} - \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{M_0}. \quad (44.87)$$

Очевидно, что в силу непрерывной дифференцируемости отображения (44.85)

$$\lim_{\Delta u^2+\Delta v^2\to 0} \varepsilon(M) = 0.$$

Подставив (44.87) в (44.86), получим

$$\mu P = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{M_0} \Delta u\,\Delta v + \varepsilon(M)\Delta u\,\Delta v. \quad (44.88)$$

Таким образом, абсолютная величина якобиана $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ равна “коэффициенту искажения” площади криволинейного координатного параллелограмма P по сравнению (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем эта площадь) с площадью $\Delta u\,\Delta v$ декартова координатного прямоугольника со сторонами Δu и Δv. Это обстоятельство часто используется на практике при вычислении якобианов преобразований криволинейных координат в декартовы.

Из криволинейных координат на плоскости отметим полярные координаты r, φ, связанные с декартовыми x, y соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \quad (44.89)$$

Координатными линиями полярных координат являются окружности $r = \mathrm{const}$ и лучи, выходящие из начала координат, $\varphi = \mathrm{const}$.

В этом случае координатные линии пересекаются под прямыми углами (когда имеет место такое обстоятельство, то говорят, что криволинейные координаты *ортогональны*).

Рассмотрим координатный параллелограмм P полярных координат (рис. 163). Длины двух его сторон равны Δr и $r\Delta\varphi$. Вычислим приближенно его площадь, считая его обыкновенным прямоугольником:

$$\mu P \approx r\Delta r\Delta\varphi. \qquad (44.90)$$

Из формул (44.88) и (44.90) следует, что $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$. В этом, конечно, легко убедиться и непосредственно, вычислив соответствующие частные производные.

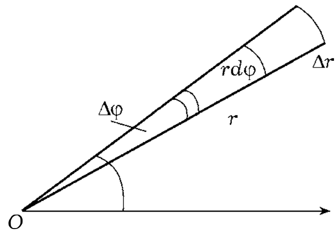

Рис. 163

Рассмотрим плоскость, на которой декартовы координаты обозначены r, φ, и на ней открытый прямоугольник

$$G = \{(r,\varphi)\colon\ 0 < r < R,\ \ 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

При отображении

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < r < R, \quad (44.91)$$

открытый прямоугольник G отображается на множество G^* плоскости с декартовыми координатами x, y, которое представляет собой круг $x^2 + y^2 < R^2$, из которого удален радиус: $0 \leqslant x < R$, $y = 0$.

Отображение (44.91) и его якобиан r непрерывно продолжаемы на замкнутый прямоугольник $\overline{G} = \{(r,\varphi)\colon\ 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, образом которого при продолженном отображении является замкнутый круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Отметим, что продолженное отображение уже не является взаимно однозначным: взаимная однозначность нарушается на границе прямоугольника G (отрезки $0 \leqslant r \leqslant R$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ отображаются в один и тот же отрезок $0 \leqslant x \leqslant R$, $y = 0$, а отрезок $r = 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и вовсе отображается в одну точку $(0,0)$). Якобиан продолженного отображения обращается в нуль при $r = 0$.

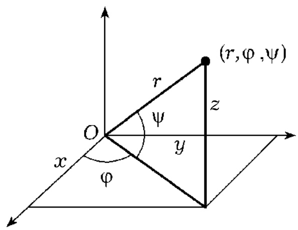

Рис. 164

Согласно теореме 2 п. 44.3 для отображения (44.91) и непрерывной на круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ функции $f(x,y)$ имеет место формула

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant R}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi.$$

Из криволинейных координат в пространстве отметим сферические и цилиндрические. Сферические r, φ, ψ связаны с декартовыми x, y, z формулами

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$
$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$$

(рис. 164). Вычислим якобиан:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\left(\sin\psi\begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \cos\psi\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix}\right) =$$

$$= r^2(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi) = r^2\cos\psi.$$

Цилиндрические координаты r, φ, h связаны с декартовыми x, y, z соотношениями (см. рис. 162)

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h,$$

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\infty < h < +\infty.$$

Легко вычисляется якобиан этого преобразования:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

§ 45. Криволинейные интегралы.

45.1. Криволинейный интеграл первого рода. Пусть $\Gamma = \{M(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — спрямляемая кривая в R^3 (или, в R^2), $M(s) = (x(s), y(s), z(s))$, s — переменная длина дуги, и пусть на кривой Γ задана числовая функция F, т. е. F является функцией точки кривой $(x(s), y(s), z(s))$. Обычно пишут $F = F(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \Gamma$, но при этом надо отдавать себе отчет в том, что одна и та же точка (x,y,z) пространства может быть носителем разных точек кривой.

Если $M(0) = A$, $M(S) = B$, то кривую Γ, ориентированную с помощью представления $M = M(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, т. е. с отсчетом дуг от точки A, будем обозначать $\overset{\frown}{AB}$.

Определение 1. *Криволинейным интегралом первого рода от функции F по кривой $\overset{\frown}{AB}$* называется интеграл

$$\int_0^S F(x(s), y(s), z(s))\,ds.$$

Этот криволинейный интеграл обозначается $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)\,ds$ или, короче,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F ds, \quad \int\limits_{\Gamma} F ds.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Fds \equiv \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\, ds \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^S F(x(s), y(s), z(s))\, ds. \tag{45.1}$$

В данном случае знак $\equiv$ означает равноправность употребления символов, которые этот знак соединяет. Кривая $\overset{\frown}{AB}$ в интеграле (45.1) называется *путем интегрирования.*

Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1°. *Если F непрерывна на кривой $\overset{\frown}{AB}$ (т. е. функция $F(x(s), y(s), z(s))$ непрерывна на отрезке $[0, S]$), то интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Fds$ существует.*

$\triangleright$ Это следует из того, что указанный интеграл в силу определения (45.1) сводится к интегралу от непрерывной функции на отрезке, который существует. $\triangleleft$

В дальнейшем в этом пункте будем для простоты всегда предполагать, что функция F непрерывна на кривой Γ.

2°. *Криволинейный интеграл первого рода по кривой не зависит от ее ориентации*:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} Fds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Fds. \tag{45.2}$$

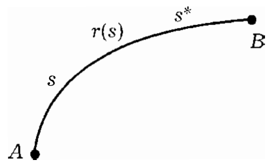

Рис. 165

$\triangleright$ Пусть $M = M(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, — представление кривой. Обозначим для ясности переменную длину дуги, отсчитываемую от точки B, через s^*. Очевидно, что

$$s^* = S - s, \quad ds^* = -ds, \tag{45.3}$$

а так как $s = S - s^*$, то

$$M = M(S - s^*) = (x(S - s^*),\, y(S - s^*),\, z(S - s^*)), \quad 0 \leqslant s^* \leqslant S,$$

является представлением кривой $\overset{\frown}{BA}$ (рис. 165). Поэтому

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\, ds^* \underset{(45.1)}{=} \int\limits_0^S F(x(S - s^*),\, y(S - s^*),\, z(S - s^*))\, ds^* \underset{(45.3)}{=}$$

$$\underset{(45.3)}{=} -\int\limits_S^0 F(x(s), y(s), z(s))\, ds = \int\limits_0^S F(x(s), y(s), z(s)) ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F\, ds. \quad \triangleleft$$

Третье свойство интеграла будет касаться его вычисления в случае, когда кривая Γ задается с помощью произвольного параметра. Будем предполагать, что кривая Γ гладкая, т. е. задана непрерывно дифференцируемым представлением $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$,

$a \leqslant t \leqslant b$, без особых точек, т. е.

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0, \quad t \in [a, b].$$

В этом случае кривая Γ спрямляема, и ее переменная длина дуги $s = s(t)$ может быть принята за параметр:

$$\Gamma = \{x(s),\, y(s),\, z(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\},$$

и, таким образом,

$$x(s(t)) = \varphi(t), \quad y(s(t)) = \psi(t), \quad z(s(t)) = \chi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{45.4}$$

3°. *Имеет место формула*

$$\int\limits_{\Gamma} F ds = \int\limits_a^b F s' dt, \tag{45.5}$$

или, подробнее,

$$\int\limits_{\Gamma} F ds = \int\limits_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt.$$

$\triangleright$ Сделав в интеграле, стоящем в правой части равенства (45.1), замену переменной $s = s(t)$ и вспомнив (п. 17.3), что

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2},$$

получим

$$\int\limits_{\Gamma} F ds \underset{(45.1)}{=} \int\limits_0^S F(x(s), y(s), z(s))\, ds \underset{(45.4)}{=} \int\limits_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) s'(t)\, dt =$$
$$= \int\limits_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt. \quad \triangleleft$$

Отметим, что поскольку левая часть равенства (45.5) не зависит от параметра t, то и правая его часть также не зависит от выбора параметра.

В случае если кривая Γ является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. ее представлением являются функции $x = x$, $y = f(x)$, то формула (45.5) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} F(x, y) ds = \int\limits_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

45.2. Криволинейный интеграл второго рода. При изучении физических полей (например, поля скоростей текущей жидкости, поля тяготения, электромагнитного поля и т. п.) часто встречаются интегралы вида

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

где $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ — векторное поле на кривой Γ, а $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Сформулируем определение интегралов такого вида.

Пусть Γ — гладкая ориентированная кривая, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $0 \leqslant s \leqslant S$, — ее векторное представление, в котором за параметр s взята переменная длина дуги, и, следовательно, $A = (x(0), y(0), z(0))$ — начальная, а $B = (x(S), y(S), z(S))$ — конечная точки кривой Γ. Пусть

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \tag{45.6}$$

— единичный касательный вектор к кривой Γ, направление которого соответствует выбранному отсчету длин дуг (п. 17.3). Если вектор $\boldsymbol{\tau}$ образует с координатными осями углы α, β и γ, то

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \tag{45.7}$$

Напомним, что из формул (45.6) и (45.7) следуют равенства

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{45.8}$$

Пусть на кривой Γ задано векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, точнее, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x(s), y(s), z(s))$, $0 \leqslant s \leqslant S$. Обозначим координаты вектора $\mathbf{a}$ через P, Q, R:

$$\mathbf{a} = (P, Q, R) \tag{45.9}$$

(ясно, что P, Q и R также являются функциями точки кривой Γ).

Определение 2. *Криволинейным интегралом второго рода* от векторной функции $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ по кривой $\overset{\frown}{AB}$ называется интеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}\, ds. \tag{45.10}$$

Этот криволинейный интеграл обозначается $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$. Таким образом,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}\, ds. \tag{45.11}$$

Из этого определения видно, что криволинейный интеграл второго рода сводится к криволинейному интегралу первого рода специального вида. Для наглядности заметим, что интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}\, ds$ получается из интеграла $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ с помощью формального преобразования

$d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}\, ds$ (см. (45.6)).

Интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ обозначается также $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$, где под знаком интеграла написано в координатной форме скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ и $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, т. е.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} \equiv \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz. \tag{45.12}$$

Записав скалярное произведение векторов

$$\mathbf{a} = (P, Q, R) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

(см. (45.7)) также в скалярной форме

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\tau} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma, \tag{45.13}$$

определение (45.11) в силу (45.12) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds. \tag{45.14}$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1°. *Если функция* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ *непрерывна на кривой* $\overset{\frown}{AB}$ (*т. е. ее координаты* P, Q, R *непрерывны на кривой* Γ *как функции ее параметра*), *то интеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ *существует.*

$\triangleright$ В силу непрерывной дифференцируемости кривой $\overset{\frown}{AB}$ и непрерывности на ней функций P, Q и R подынтегральная функция в криволинейном интеграле первого рода, стоящем в правой части равенства (45.11), является непрерывной, а следовательно, этот интеграл существует (п. 45.1). $\triangleleft$

2°. *При изменении ориентации кривой криволинейный интеграл второго рода меняет только знак:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}. \tag{45.15}$$

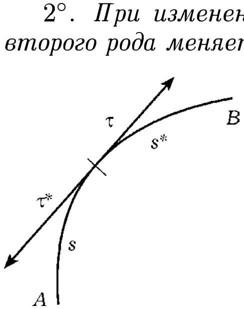

Рис. 166

(Само собой разумеется, что в случае, когда рассматриваемый интеграл равен нулю, никакого изменения знака не происходит, так как знака просто нет. Однако равенство (45.15) остается верным.)

$\triangleright$ Пусть $s^* = S - s$, т. е. s^* — переменная длина дуги, отсчитываемая от точки B кривой Γ, а $\boldsymbol{\tau}^*$ — единичный касательный к кривой Γ вектор, соответствующий этому отсчету дуг. Очевидно, что (рис. 166) $\boldsymbol{\tau}^* = -\boldsymbol{\tau}$.

В самом деле,

$$\boldsymbol{\tau}^* = \frac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{ds^*} = -\boldsymbol{\tau}, \quad \text{ибо} \quad \frac{ds}{ds^*} = -1. \tag{45.16}$$

Теперь имеем

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} \underset{(45.11)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}^* ds^* \underset{(45.2)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}^* ds \underset{(45.16)}{=} -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau} ds \underset{(45.11)}{=} -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}. \quad \triangleleft$$

3°. *Если $\overset{\frown}{AB}$ — гладкая ориентированная кривая, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее векторное представление, то*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_a^b \mathbf{a}\mathbf{r}'\,dt \tag{45.17}$$

(*формально правая часть равенства* (45.17) *получается из левой, если положить* $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'dt$).

$\triangleright$ Заметив, что

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'}{s'} \tag{45.18}$$

(штрихом обозначены производные по t), получим

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} \underset{(45.11)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}\,ds \underset{(45.5)}{=} \int\limits_a^b \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}s'\,dt \underset{(45.18)}{=} \int\limits_a^b \mathbf{a}\mathbf{r}'\,dt. \quad \triangleleft$$

В координатном виде формула (44.17) имеет вид

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_a^b (Px' + Qy' + Rz')\,dt. \tag{45.19}$$

Эта формула выражает криволинейный интеграл второго рода по кривой Г при помощи ее представления посредством произвольного параметра. Отметим, что поскольку интеграл, стоящий в левых частях формул (45.17) и (45.19), согласно определению 2 не зависит от выбора параметра на ориентированной кривой, то и интеграл, стоящий в правых частях этих формул, не зависит от выбора параметра.

Если кривая $\overset{\frown}{AB}$ является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, то формула (45.19) приобретает в этом случае вид

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))\,dx.$$

В случае $Q \equiv 0$ эта формула принимает вид

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x, f(x))\,dx. \tag{45.20}$$

именно в таком виде она и будет применяться в дальнейшем. Равенство (45.20) было получено в предположении гладкости графика функции, что равносильно ее непрерывной дифференцируемости, так как в данном случае $t = x$, $\mathbf{r} = (x, f(x))$, $\mathbf{r}' = (1, f'(x)) \neq 0$. Однако в саму формулу (45.20) не входит производная функции $f(x)$. Это довольно неестественно, так как обычно подобные формулы справедливы тогда, когда написанные выражения имеют смысл. В данном случае правая часть равенства (45.20) заведомо имеет смысл в предположении лишь непрерывности функций $f(x)$ и $P(x,y)$. Эту неестественность можно устранить двояко: либо попытаться дать более общее определение криволинейного интеграла второго рода, чем определение 2, так, чтобы в случае непрерывных функций $f(x)$ и $P(x,y)$ была справедлива формула (45.20) (такая попытка с положительным результатом будет сделана в п. 45.3*), либо просто принять равенство (45.20) за определение интеграла $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx$ в случае, когда кривая $\overset{\frown}{AB}$ является графиком непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$.

Это определение корректно в том смысле, что для непрерывно дифференцируемых функций такое определение в силу доказанного выше совпадает для данного случая с первоначальным.

В этом случае естественно положить по определению

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx \overset{\mathrm{def}}{=} -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx \underset{(45.20)}{=} -\int_a^b P(x,f(x))\,dx.$$

З а м е ч а н и е. Часто приходится рассматривать интегралы по кривым, получающимся объединением некоторых кривых. Кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *объединением кривых* Γ_i, если существует такое разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=m}$ отрезка $[a,b]$, что $\Gamma_i = \{\mathbf{r}(t); t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, $i = 1, 2, ..., m$, т. е. представления кривых Γ_i, являются сужениями представления кривой Γ на отрезки разбиения τ. В этом случае пишут

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i.$$

Криволинейный интеграл (первого или второго рода) по кусочно гладкой кривой $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Gamma_i$, где Γ_i, $i = 1, 2, ..., m$, — гладкие кривые, определяется как сумма соответствующих интегралов по гладким кривым Γ_i:

$$\int\limits_{\Gamma} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_i}.$$

45.3*. Интеграл Стилтьеса. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на отрезке $[a,b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение этого отрезка, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1})$, $i = 1, 2, ..., i_\tau$, и

$$\sigma_\tau(f,g) \equiv \sigma_\tau(f,g;\xi_1,...,\xi_{i_\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta g(x_i). \tag{45.21}$$

Определение 3. Функция f называется *интегрируемой по функции g на отрезке* $[a,b]$, если для любой последовательности разбиений $\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{i=i_{\tau_n}}$ этого отрезка такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$, и для любого выбора точек $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, 2, ..., i_{\tau_n}$, существует и притом один и тот же предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Этот предел называют *интегралом Стилтьеса**) функции f по функции g и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f,g). \tag{45.22}$$

В случае $g(x) \equiv x$ интеграл Стилтьеса является, очевидно, интегралом Римана. Если функция $g(x)$ постоянная, то интеграл от любой функции по ней равен нулю.

Как обычно, можно сформулировать равносильное определение интеграла Стилтьеса на "$\varepsilon - \delta$ языке". Сделаем это.

Число, обозначаемое $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$, называется *интегралом Стилтьеса* от функции f по функции g на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a,b]$ мелкости $|\tau| < \delta$ и для всех точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., i_\tau$, выполняется неравенство

$$\left|\sigma_\tau(f,g;\xi_1,...,\xi_{i_\tau}) - \int_a^b f(x)\,dg(x)\right| < \varepsilon.$$

Интеграл Стилтьеса обладает свойством линейности как относительно функции f, так и относительно функции g.

Теорема 1. *Если существуют интегралы* $\int\limits_a^b f_i(x)\,dg(x)$, *а* $\lambda_i \in R$,

*) Т.И. Стилтьес (1856–1894) — нидерландский математик.

$i = 1, 2, ..., n,$ *то существует интеграл Стилтьеса*

$$\int_a^b \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)\Big)\, dg(x)$$

и

$$\int_a^b \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)\Big)\, dg(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(x)\, dg(x).$$

Теорема 2. *Если существуют интегралы* $\int_a^b f(x)\, dg_i(x)$, *а* $\lambda_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$, *то существует и интеграл* $\int_a^b f(x)\, d\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\Big)$, *причем*

$$\int_a^b f(x)\, d\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f(x)\, dg_i(x).$$

Эти теоремы доказываются аналогично случаю интеграла Римана с помощью предельного перехода в соответствующих равенствах для интегральных сумм.

Существование интеграла Стилтьеса. Отметим два класса функций, по которым у непрерывных функций существуют интегралы Стилтьеса.

Функция называется *кусочно постоянной на отрезке*, если она имеет на нем конечное число точек разрыва и постоянна на каждом из промежутков, остающихся на отрезке после удаления из него точек разрыва функции.

Теорема 3. *Непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *интегрируема по кусочно постоянной на этом отрезке функции* g, *и интеграл Стилтьеса равен сумме произведений скачков* c_k *функции* g *во всех ее точках разрыва* a_k, $a \leqslant a_k \leqslant b$, $k = 1, 2, ..., n$, *на значение функции* f *в этих точках:*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sum_{k+1}^n c_k f(a_k). \tag{45.23}$$

Здесь, если $a < a_k < b$, то $c_k = g(a_k + 0) - g(a_k - 0)$; если $a_k = a$, то $c_k = g(a + 0) - g(a)$, а если $a_k = b$, то $c_k = g(b) - g(b - 0)$.

$\triangleright$ Пусть сначала кусочно постоянная функция g имеет на отрезке $[a, b]$ только одну точку разрыва $x = c$. Если $c = a$, то для любого разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a, b]$ и точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., i_\tau$, при $i = 2, 3, ..., i_\tau$ имеем $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = 0$, и поэтому в силу непрерывности функции f

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f, g) = \lim_{|\tau|\to 0} f(\xi_1)(g(x_1) - g(a)) = \\ = f(a)(g(a+0) - g(a)), \tag{45.24}$$

так как в силу постоянства функции g на полуинтервале $(a, b]$

$$g(a+0) = g(x), \quad x \in (a, b].$$

Аналогично, если единственной точкой разрыва функции g является точка $x = b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(b)(g(b) - g(b-0)). \tag{45.25}$$

Пусть теперь единственная точка разрыва $x = c$ функции g лежит между точками a и b, т. е. $a < c < b$. Если $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — такое разбиение отрезка $[a, b]$, что точка $x = c$ в него не входит, т. е. существует такой номер i_0, что

$$x_{i_0-1} < c < x_{i_0}, \tag{45.26}$$

то в силу кусочного постоянства функции g для всех $i \neq i_0$ имеем

$$\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = 0, \tag{45.27}$$

а при $i = i_0$ в силу неравенства (45.26)

$$g(x_{i_0-1}) = g(c-0), \quad g(x_{i_0}) = g(c+0),$$

и поэтому

$$\Delta g(x_{i_0}) = g(x_{i_0}) - g(x_{i_0-1}) = g(c+0) - g(c-0). \tag{45.28}$$

Если $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., i_\tau$, то интегральные суммы имеют вид

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = f(\xi_{i_0})\Delta g(x_{i_0}) \underset{(45.28)}{=} f(\xi_{i_0})(g(c+0) - g(c-0)) \tag{45.29}$$

(остальные слагаемые суммы при $i \neq i_0$, в силу равенства (45.27), обращаются в нуль).

Обозначим τ^* разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из разбиения τ добавлением к нему точки $x = c$, т. е. $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. Ясно, что $|\tau^*| \leqslant |\tau|$. Пусть $\eta_1 \in [x_{i_0-1}, c]$, $\eta_2 \in [c, x_{i_0}]$ и

$$\sigma_{\tau^*} = f(\eta_1)(g(c) - g(c-0)) + f(\eta_2)(g(c+0) - g(c)) \tag{45.30}$$

— некоторая интегральная сумма, соответствующая разбиению τ^*. Рассмотрим еще частный случай интегральной суммы (45.30), у которой $\eta_1 = \eta_2 = c$:

$$\sigma_{\tau^*, c} = f(c)(g(c) - g(c-0)) + f(c)(g(c+0) - g(c)) =$$
$$= f(c)(g(c+0) - g(c-0)). \tag{45.31}$$

Сравним суммы σ_τ, σ_{τ^*} и $\sigma_{\tau^*,c}$. В силу непрерывности функции f имеем

$$\lim_{|\tau|\to 0}(\sigma_\tau - \sigma_{\tau^*,c}) = \lim_{|\tau|\to 0}(f(\xi_{i_0}) - f(c))(g(c+0) - g(c-0)) = 0,$$

$$\lim_{|\tau|\to 0}(\sigma_{\tau^*} - \sigma_{\tau^*,c}) = \lim_{|\tau|\to 0}[(f(\eta_1) - f(c))(g(c) - g(c-0)) + \\ + (f(\eta_2) - f(c))(g(c+0) - g(c-0))] = 0.$$

Из последних двух равенств следует, что интегральные суммы σ_τ, σ_{τ^*} и $\sigma_{\tau^*,c}$ при $|\tau| \to 0$ одновременно имеют пределы или нет, причем если эти пределы существуют, то они равны. Суммы $\sigma_{\tau^*,c}$ — постоянные величины и, следовательно, очевидным образом имеют предел. Поэтому интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ существует и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \sigma_{\tau^*,c} = f(c)(g(c+0) - g(c-0)). \tag{45.32}$$

Если функция g кусочно постоянна, то она является суммой кусочно постоянных функций, имеющих только одну точку разрыва. Применив к каждой из них формулу (45.32) и сложив результаты, получим в силу теоремы 2 формулу (45.23). ◁

З а м е ч а н и е. Одним из следствий доказанной теоремы является возможность представить любую конечную сумму $\sum\limits_{i=1}^n u_i$ как интеграл Стилтьеса. Действительно, кусочно постоянная функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^k u_k, & \text{если} \quad k-1 < x \leqslant k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

имеет при $u_k \neq 0$ точку разрыва $a_k = k - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, со скачком $c_k = u_k$. Поэтому в силу формулы (45.23) при $f \equiv 1$ имеем

$$\int\limits_0^n dg(x) = \sum_{i=1}^n u_i. \tag{45.33}$$

Таким образом, понятие конечной суммы входит в понятие интеграла Стилтьеса.

Обобщением утверждения об интегрируемости по Риману непрерывной на отрезке функции является следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Непрерывная на отрезке функция интегрируема по монотонной на этом отрезке функции.*

▷ Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция g монотонна на этом отрезке. Достаточно рассмотреть только случай возрастающих функций g, так как если функция g убывает, то функция $-g$

возрастает, и из существования интеграла Стилтьеса $\int\limits_a^b f(x)\,d(-g(x))$ согласно теореме 2 следует и существование интеграла Стилтьеса

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = -\int\limits_a^b f(x)\,d(-g(x)). \tag{45.34}$$

Таким образом, случай убывающей функции g сводится к случаю возрастающей.

Итак, пусть функция f непрерывна, а g — возрастающая функция. Доказательство существования интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ проведем методом, аналогичным методу доказательства интегрируемости по Риману непрерывной на отрезке функции.

Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, $\Delta g(x_i) = g(x_i) - -g(x_{i-1})$. Функция f, будучи непрерывной на отрезке $[a,b]$, принимает на отрезках $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ наибольшие и наименьшие значения

$$m_i = \min_{\Delta_i} f(x) = f(\eta_i), \quad M_i = \max_{\Delta_i} f(x) = f(\zeta_i), \quad i = 1, 2, ..., i_\tau. \tag{45.35}$$

Положим

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta g(x_i), \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \Delta g(x_i). \tag{45.36}$$

Очевидно,

$$s_\tau \leqslant S_\tau. \tag{45.37}$$

Покажем, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{45.38}$$

Имеем

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} (f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta g(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta g(x_i), \tag{45.39}$$

где $\omega_i(f)$ — колебание функции f на отрезке Δ_i, $i = 1, 2, ..., i_\tau$:

$$\omega_i(f) = \sup_{\xi,\eta\in\Delta_i} |f(\eta) - f(\xi)|.$$

Функция f будучи непрерывной на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на нем. Поэтому ее колебания $\omega_i(f)$ сколь угодно малы при достаточно мелких разбиениях τ, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ, для которых $|\tau| < \delta$, выполняется неравенство

$$\omega_i(f) < \varepsilon.$$

Поскольку функция g возрастает, то $\Delta g(x_i) \geqslant 0$, $i = 1, 2, ..., i_\tau$. Следовательно, при $|\tau| < \delta$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f) \Delta g(x_i) <$$
$$< \varepsilon \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta g(x_i) = \varepsilon \sum_{i=1}^{i_\tau} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = \varepsilon (g(b) - g(a)). \quad (45.40)$$

Это и означает справедливость утверждения (45.38).

Покажем теперь, что для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}. \quad (45.41)$$

Пусть сначала разбиение $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{j=j_{\tau^*}}$ отрезка $[a, b]$ вписано в его разбиение τ,

$$\Delta_j^* = [x_{j-1}^*, x_j^*], \quad \Delta g(x_j^*) = g(x_j^*) - g(x_{j-1}^*).$$

Обозначим $\Delta_{j_i}^*$ те отрезки разбиения τ^*, которые содержатся в отрезке Δ_i разбиения τ, $i = 1, 2, ..., i_\tau$. Тогда

$$\Delta_i = \bigcup_{j_i} \Delta_{j_i}^*, \quad \Delta g(x_i) = \sum_{j_i} \Delta g(x_{j_i}^*), \quad (45.42)$$

и если

$$m_j^* = \min_{\Delta_j^*} f(x), \quad M_j^* = \max_{\Delta_j^*} f(x), \quad (45.43)$$

то

$$m_i \leqslant m_{j_i}^*, \quad M_i \geqslant M_{j_i}^*, \quad i = 1, 2, ..., i_\tau. \quad (45.44)$$

Поэтому

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta g(x_i) \underset{(45.42)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \sum_{j_i} \Delta g(x_{j_i}) \underset{(45.44)}{\leqslant}$$
$$\underset{(45.44)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{j_i} m_{j_i}^* \Delta g(x_{j_i}^*) = \sum_{j=1}^{j_{\tau^*}} m_j^* \Delta g(x_j^*) = s_{\tau^*}. \quad (45.45)$$

Аналогично доказывается, что $S_{\tau^*} \leqslant S_\tau$. Таким образом,

$$s_\tau \leqslant s_{\tau^*} \leqslant S_{\tau^*} \leqslant S_\tau. \quad (45.46)$$

Поэтому для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$, взяв разбиение τ этого отрезка, вписанное в разбиения τ_1 и τ_2, получим

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}.$$

Неравенство (45.41) доказано.

Положим

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \sup_\tau S_\tau. \tag{45.47}$$

Из неравенства (45.41) следует, что

$$I_* \leqslant I^*. \tag{45.48}$$

Покажем, что на самом деле

$$I_* = I^*. \tag{45.49}$$

Из определения (45.47) и неравенства (45.48) следует, что

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau, \tag{45.50}$$

а поэтому и неравенство

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Отсюда в силу стремления правой части неравенства к нулю при $|\tau| \to 0$ (см. (45.38)) и следует равенство (45.49).

Если $I = I_* = I^*$, то из (45.50) имеем

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau, \quad 0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Из этих неравенств снова в силу стремления к нулю их правых частей при $|\tau| \to 0$ следует, что существуют пределы

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = I. \tag{45.51}$$

Для любой интегральной суммы Стилтьеса

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta g(x_i), \quad x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i, \quad i = 1, 2, ..., i_\tau,$$

в силу очевидных неравенств $f(\eta_i) \underset{(45.35)}{\leqslant} f(\xi_i) \underset{(45.35)}{\leqslant} f(\zeta_i)$, $i = 1, 2, ..., i_\tau$, имеем

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

Отсюда и из равенства (45.51) следует, что существует конечный предел

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = I, \tag{45.52}$$

т. е. существует интеграл Стилтьеса от функции f по функции g. $\triangleleft$

Укажем случай, когда интеграл Стилтьеса превращается в интеграл Римана.

Теорема 5. *Если функция f непрерывна, а функция g непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то функция f интегрируема на* *этом отрезке по функции g и*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{45.53}$$

(слева — интеграл Стилтьеса, справа — интеграл Римана).

$\triangleright$ Пусть, как обычно, $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$.

Согласно формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$\begin{gathered} \Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\eta_i)\Delta x_i, \\ \eta_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, i_\tau. \end{gathered} \tag{45.54}$$

Поэтому

$$\sigma(f,g) \underset{\substack{(45.21)\\(45.54)}}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)g'(\eta_i)\Delta x_i. \tag{45.55}$$

Функция f, будучи непрерывной на отрезке $[a,b]$, ограничена на нем. Поэтому существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant c, \quad x \in [a,b]. \tag{45.56}$$

Производная g' функции g непрерывна, а следовательно, равномерно непрерывна на отрезке $[a,b]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любых точек ξ, η, для которых $|\xi - \eta| < \delta$, выполняется неравенство

$$|g'(\eta) - g'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)c}. \tag{45.57}$$

Сравним сумму (45.21) с обычной интегральной суммой для функции fg':

$$\sigma(fg') = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)g'(\xi_i)\Delta x_i \tag{45.58}$$

для разбиения τ мелкости $|\tau| < \delta$. Поскольку в этом случае $|\eta_i - \xi_i| \leqslant$ $\leqslant \Delta x_i < \delta$, то

$$|\sigma_\tau(f,g) - \sigma_\tau(fg')| \underset{\substack{(45.21)\\(45.58)}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{i_\tau} |f(\xi_i)||g'(\eta_i) - g'(\xi_i)|\Delta x_i \underset{\substack{(45.56)\\(45.57)}}{\leqslant} \underset{\substack{(45.56)\\(45.57)}}{\leqslant} c\,\frac{\varepsilon}{(b-a)c} \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta x_i = \varepsilon. \tag{45.59}$$

Отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \underset{(45.22)}{=} \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f,g) \underset{(45.59)}{=} \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(fg') = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \quad \triangleleft$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Если существует интеграл Стилтьеса* $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$, *а*

$$f^*(x) = f(a+b-x), \quad g^*(x) = g(a+b-x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (45.60)$$

то существует и интеграл

$$\int\limits_a^b f^*(x)\,dg^*(x) = -\int\limits_a^b f(x)\,dg(x). \qquad (45.61)$$

Таким образом, при изменении ориентации отрезка $[a,b]$, т. е. при замене переменной x на t по формуле $x = a+b-t$, интеграл Стилтьеса меняет знак.

Это следует из того, что когда переменная x изменяется в обратном направлении, т. е. от точки b к точке a, приращение $\Delta g(x_i)$ функции $g(x)$ меняет знак. Точнее,

$$\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = -(g(x_{i-1}) - g(x_i)).$$

Поэтому интегральным суммам $\sigma_\tau(f,g)$ будут соответствовать интегральные суммы $-\sigma_\tau(f,g)$, а следовательно, и их пределы будут отличаться знаком.

Левая часть формулы (45.31) обычно обозначается $\int\limits_b^a f(x)\,dg(x)$, при такой записи эта формула принимает следующий вид:

$$\int\limits_b^a f(x)\,dg(x) = -\int\limits_a^b f(x)\,dg(x).$$

$\triangleright$ Если $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., i_\tau$,

$$x_j^* = a+b-x_i, \quad i+j = i_\tau, \quad i = 0, 1, ..., i_\tau, \qquad (45.62)$$

$$\xi_j^* = a+b-\xi_{i+1}, \quad i+j = i_\tau, \quad i = 0, 1, ..., i_\tau - 1, \qquad (45.63)$$

то $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{j=i_\tau}$ — также разбиение отрезка $[a,b]$, $|\tau|^* = |\tau|$, $\xi_j^* \in [x_{j-1}^*, x_j^*]$, $j = 1, 2, ..., i_\tau$,

$$f(\xi_j^*) \underset{(45.60)}{=} f(a+b-\xi_j^*) \underset{(45.63)}{=} f(\xi_{i+1}), \qquad (45.64)$$

$$\Delta g^*(x_j^*) = g^*(x_j^*) - g^*(x_{j-1}^*) \underset{(45.60)}{=} g(a+b-x_j^*) - g(a+b-x_{j-1}^*) \underset{(45.62)}{=}$$
$$\underset{(45.62)}{=} g(x_i) - g(x_{i+1}) = -\Delta g(x_{i+1}), \qquad (45.65)$$

$i + j = i_\tau$, $j = 1, 2, ..., i_\tau$, и, следовательно, $i + 1 = 1, 2, ..., i_\tau$.

Поэтому

$$\sigma_{\tau^*}(f^*, g^*) \underset{(45.21)}{=} \sum_{j=1}^{i_\tau} f^*(\xi_j^*)\Delta g^*(x_j^*) \underset{\substack{(45.64)\\(45.65)}}{=} -\sum_{i=0}^{i_\tau - 1} f(\xi_{i+1})(-\Delta g(x_{i+1}) \underset{i=k-1}{=}$$

$$\underset{i=k-1}{=} -\sum_{k=1}^{i_\tau} f(\xi_k)\Delta g(x_k) = -\sigma_\tau(f, g). \quad (45.66)$$

Отсюда

$$\int_a^b f^*(x)\, dg^*(x) \underset{(45.22)}{=} \lim_{|\tau^*|\to 0} \sigma_{\tau^*}(f^*, g^*) \underset{(45.66)}{=} -\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f, g) \underset{(45.22)}{=}$$

$$\underset{(45.22)}{=} \int_a^b f(x)\, dg(x). \quad \triangleleft$$

45.4*. Обобщение понятия криволинейного интеграла второго рода. Часто оказывается полезным более общее понятие криволинейного интеграла второго рода, определяемое независимо от понятия криволинейного интеграла первого рода. Сформулируем это определение.

Пусть

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$$

— параметрически заданная непрерывная кривая в пространстве: $M(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, и функция F задана на множестве точек этой кривой, т. е. на отрезке $[a, b]$ задана функция $F(M(t)) = F(x(t), y(t), z(t))$.

Определение 2*. *Криволинейным интегралом второго рода* $\int_\Gamma F(x, y, z)\, dx$ от функции F по кривой Γ называется интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b F(M(t))\, dx(t). \quad (45.67)$$

Если функция F непрерывна на кривой Γ, т. е. непрерывна на отрезке $[a, b]$ функция $F(M(t))$, а кривая Γ гладкая, и поэтому функция $x(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $x'(t)$, то согласно теореме 5 п. 45.3 имеем

$$\int_a^b F(M(t))\, dx(t) = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t))x'(t)\, dt \underset{(45.19)}{=} \int_\Gamma F(x, y, z)\, dx, \quad (45.68)$$

где согласно формуле (45.19) в правой части равенства стоит криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2. Из равенства (45.68) следует, что для непрерывных на гладкой кривой функций определения 2 и 2* криволинейных интегралов второго рода равносильны.

Заметим вместе с тем, что криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2* может существовать в таких случаях, когда определение 2 просто неприменимо, например в случаях неспрямляемых кривых или кривых, не имеющих касательных.

Криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2* меняет знак при изменении ориентации кривой. Это сразу следует из равенства (45.61), так как изменение ориентации кривой соответствует преобразованию параметра $t = a + b - t^*$, $a \leqslant t \leqslant b$, и, следовательно, соответствует переходу от функции $F(M(t))$, $x(t)$ к функции $F(M(a+b-t^*))$, $x(a+b-t^*)$, $a \leqslant t^* \leqslant b$ (см. (45.60)).

Рассмотрим один пример криволинейного интеграла второго рода общего вида, т. е. в смысле определения 2*, который нам встретится в дальнейшем.

Пусть плоская кривая Г является графиком непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, а функция $F(x, y)$ непрерывна на этом графике. Тогда криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_\Gamma F dx$ в смысле определения 2* равен интегралу Стилтьеса $\int\limits_a^b F(x, f(x))\,dx$:

$$\int\limits_\Gamma F dx = \int\limits_a^b F(x, f(x))\,dx, \tag{45.69}$$

который в этом случае является интегралом Римана от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $F(x, f(x))$ и поэтому существует.

Этот пример является, в частности, примером, показывающим, что криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2* может существовать и в случае, когда о кривой Г не делается никаких предположений, кроме ее непрерывности, т. е. никаких предположений и ее "гладкости" в каком бы то ни было смысле.

Отметим, что если через Γ^- обозначить противоположно ориентированный график функции f, т. е. кривую, получающуюся из кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, при преобразовании параметра $x = a + b - t$, $a \leqslant t \leqslant b$, то в силу изменения знака криволинейного интеграла второго рода при изменении ориентации кривой получим

$$\int\limits_{\Gamma^-} F(x, y)\,dx = -\int\limits_a^b F(x, f(x))\,dx.$$

Пусть в случае кривой

$$\Gamma = \{y = f(x);\ a \leqslant x \leqslant b\}, \tag{45.70}$$

заданной явно, существует такое непрерывно дифференцируемое преобразование параметра

$$x = x(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{45.71}$$

что функция $y = f(x(t))$ является непрерывно дифференцируемой (функция f предполагается только непрерывной) и $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$. Тогда кривая

$$\Gamma_1 = \{x = x(t),\ y = f(x(t));\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

полученная из кривой Γ преобразованием параметра (45.71), является гладкой (т. е. непрерывно дифференцируемой) и не имеет особых точек, а следовательно, в каждой ее точке существует касательный вектор $\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, где α — угол, образованный вектором $\boldsymbol{\tau}$ с осью Ox.

Сделав в интеграле, стоящем в правой части равенства (45.69), замену переменной (45.71) и воспользовавшись формулой (45.19) (при $Q = R = 0$), получим

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y)\,dx \underset{(45.69)}{=} \int\limits_a^b F(x, f(x))\,dx \underset{(45.71)}{=} \int\limits_a^b F(x(t), f(x(t)))x'(t)\,dt \underset{(45.19)}{=}$$

$$= \underset{(45.19)}{=} \int\limits_{\Gamma_1} F(x,y)\,dx \underset{(45.14)}{=} \int\limits_{\Gamma_1} F(x,y)\cos\alpha\,ds.$$

Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемом случае представление кривой Γ (45.70) не являлось, вообще говоря, дифференцируемым, для нее, какова бы ни была непрерывная на ней функция F, при надлежащем выборе параметра справедлива формула

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y)\,dx = \int\limits_{\Gamma_1} F(x,y)\cos\alpha\,ds. \tag{45.72}$$

Обычно в правой части этой формулы вместо Γ_1 пишут Γ, рассматривая Γ и Γ_1 как “одну и ту же кривую” с разными параметризациями.

В результате преобразования параметра (45.71) из кривой Γ получилась гладкая кривая Γ_1. Один из простейших примеров подобной ситуации дает полуокружность, заданная как график функции $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ($y = \sqrt{1-x^2}$ не имеет конечных производных в точках $x = \pm 1$). Если сделать преобразование параметра $x = \cos t$, то та же полуокружность будет задаваться непрерывно дифференцируемым вплоть до концов отрезка представлением $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, и, следовательно, для нее справедлива формула (45.72).

В связи со всем сказанным оказывается целесообразным следующим образом расширить понятие гладкой кривой.

Определение 3. Кривая $\Gamma = \{x(t),\, y(t),\, z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *гладкой*, если существует такое преобразование параметра $t =$

$= f(u)$, $c \leqslant u \leqslant d$, что кривая $\{x(t(u)), y(t(u)), z(t(u));\ c \leqslant u \leqslant d\}$ является непрерывно дифференцируемой и $x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 \neq 0$.

Иначе говоря, после преобразования параметра в кривой Г получается гладкая кривая в смысле данного ранее определения в п. 17.1.

Кривая, являющаяся объединением конечного множества гладких (в новом, более общем, чем раньше, смысле, т. е. в смысле определения 3), называется, как и прежде, кусочно гладкой.

Аналогично понятию интеграла $\int\limits_\Gamma F(x,y,z)\,dx$ обобщаются и понятия криволинейных интегралов второго рода вида $\int\limits_\Gamma F(x,y,z)\,dy$ и $\int\limits_\Gamma F(x,y,z)\,dz$: они также определяются как соответствующие интегралы Стилтьеса. Таким образом, в новом обобщенном смысле можно рассматривать и интегралы вида

$$\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{45.73}$$

определив их как сумму интегралов $\int\limits_\Gamma P\,dx$, $\int\limits_\Gamma Q\,dy$ и $\int\limits_\Gamma R\,dz$. Интеграл (45.73) в случае гладких кривых совпадает с интегралом того же вида, рассмотренным в п. 45.2.

Криволинейные интегралы второго рода в смысле определения 2* можно брать и по кусочно гладкой кривой, т. е. по кривой, являющейся объединением конечного множества гладких кривых. При этом указанный интеграл будет равен сумме интегралов по гладким частям кривой, и, тем самым, он и в этом случае будет равен соответствующему интегралу второго рода в смысле определения 2 (см. замечание в конце п. 45.2).

45.5. Формула Грина. Пусть на плоскости задана правая система координат. Ориентация простого замкнутого контура, лежащего на этой плоскости, называется *положительной*, если она соответствует движению против часовой стрелки, т. е. если при движении по контуру в соответствии с ориентацией конечная часть плоскости, ограниченная контуром, остается слева. Противоположная ориентация называется *отрицательной.*

Если на плоскости задана левая система координат, то *положительной ориентацией простого замкнутого контура* (соответствующей этой системе координат) называется его отрицательная ориентация при правой системе координат. Это определение оправдывается следующим обстоятельством. Если рассматриваемый контур гладкий, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор в направлении положительного (относительно правой или левой системы координат) обхода контура, а $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль, направленная в сторону конечной области, ограниченной контуром (эта нормаль называется *внутренней нормалью*), то упорядоченная пара векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ имеет ту же ориентацию, что координатные орты. Это означает, что определитель матрицы перехода от выбранных векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ к заданному на плоскости базису положителен независимо от того, какой задан базис, лишь бы только контур был ориентирован положительно относительно системы координат, соответствующей этому базису.

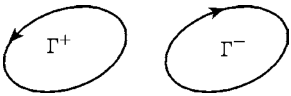

Рис. 167

Положительно ориентированный простой замкнутый контур Γ будем обозначать через Γ^+, а отрицательно ориентированный — через Γ^- (на рис. 167 изображен случай правой системы координат). Будем говорить, что *обход контура*, соответствующий положительной (отрицательной) ориентации, *происходит в положительном* (соответственно в отрицательном) *направлении*.

Ограниченная область G на плоскости переменных x, y называется *элементарной относительно оси* y, если существуют такие две непрерывные на некотором отрезке $[a, b]$ функции φ и ψ, $\varphi(x) < \psi(x)$ при $x \in [a, b]$, что (рис. 168)

$$G = \{(x, y)\colon\ a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}. \tag{45.74}$$

Аналогично определяется плоская область, *элементарная относительно оси* x.

Граница области G, элементарной относительно некоторой координатной оси, является, очевидно, простым замкнутым контуром.

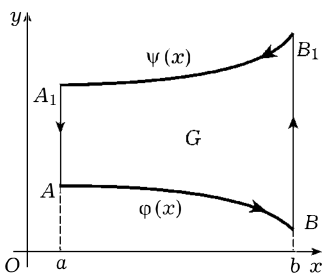

Рис. 168

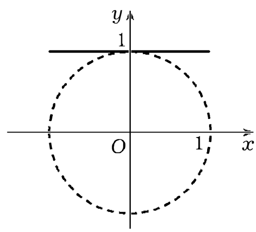

Рис. 169

Как и всякую границу, будем его обозначать ∂G, а в случае, когда он положительно (отрицательно) ориентирован, — через ∂G^+ (соответственно через ∂G^-).

Область, элементарная относительно какой-либо координатной оси, квадрируема, так как ее граница состоит из четырех графиков непрерывных на некоторых отрезках функций. Например, в случае (45.74), т. е. области, элементарной относительно оси y, ее граница ∂G состоит из графиков непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций φ и ψ, а также графиков двух постоянных (относительно переменной y) на соответствующих отрезках функций. Область, элементарная относительно обеих координатных осей, называется *элементарной*.

Если функция f задана на замыкании $\overline{G}$ области G, то может случиться, что в некоторой граничной точке этой области не имеет смысла говорить о той или иной частной производной. Например, если функция f задана только на круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$, то в точке $(0, 1)$ нельзя говорить о производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, так как функция f не определена в точках прямой $y = 1$, кроме точки $(0, 1)$ (рис. 169).

Оказывается удобным ввести понятие непрерывности частных производных вплоть до границы области следующим образом. Пусть функция f имеет в области G, например, частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Будем говорить, что эта частная производная непрерывна на *замыкании* $\overline{G}$ *области* G, если $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ непрерывно продолжаема с области G на ее границу, т. е. если существует непрерывная на $\overline{G}$ функция, совпадающая на области G с частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Это определение, очевидно, имеет смысл для функций любого числа переменных. С понятием непрерывной продолжаемости функций мы уже встречались в п. 44.3.

Можно показать, что в том случае, когда в граничной точке области существует некоторая (быть может, односторонняя) частная производная, она совпадает с непрерывным продолжением (если оно, конечно, существует) этой производной из области на ее границу; это вытекает из следствия 2 теоремы 3 из п. 12.2. Этим обстоятельством оправдывается вышеприведенное определение непрерывности частной производной в замыкании области.

Лемма 2. *Если область G элементарная, а функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{G}$ области G, то*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{45.75}$$

Эта формула называется *формулой Грина* *). Она является обобщением формулы Ньютона–Лейбница $\int\limits_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$ на случай функций двух переменных.

*) Д. Грин (1793–1841) — английский математик.

▷ Рассмотрим интеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. Так как область G — элементарная относительно оси Oy, то его можно свести к повторному. Проделав это и применив затем формулу Ньютона–Лейбница, получим (см. рис. 168, на котором изображен случай правой системы координат)

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \underset{\substack{(45.74)\\(43.6)}}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b (P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)))\,dx \underset{(45.69)}{=}$$
$$\underset{(45.69)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P\,dx - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{B_1A_1}} P\,dx - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx. \quad (45.76)$$

Отрезки A_1A и BB_1 являются, очевидно, гладкими кривыми. Они параллельны оси Oy, поэтому их касательные, совпадающие с ними по направлению, образуют с осью Ox прямой угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, в формуле (45.14) (в ней надо положить $Q = R = 0$) $\cos\alpha = 0$, а значит,
$$\int\limits_{\overset{\frown}{A_1A}} P\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{BB_1}} P\,dx = 0.$$

В силу этого равенства (45.76) можно записать в виде
$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{B_1A_1}} P\,dx - \int\limits_{\overset{\frown}{A_1A}} P\,dx - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx - \int\limits_{\overset{\frown}{BB_1}} P\,dx =$$
$$= -\int\limits_{\partial G^+} P\,dx. \quad (45.77)$$

Аналогично, исходя из того, что область элементарна относительно оси Ox, доказывается, что
$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial G^+} Q\,dy. \quad (45.78)$$

Вычтя из равенства (45.78) равенство (45.77), получим формулу (45.75). ◁

Если граница открытого плоского множества G состоит из конечного или бесконечного множества простых замкнутых контуров, то ее *положительной ориентацией* (при правой системе координат) называется совокупность таких ориентаций этих контуров G, что при обходе по ним в соответствии с их ориентацией множество всегда остается слева (рис. 170). Противоположная ориентация контуров называется *отрицательной ориентацией* указанной границы.

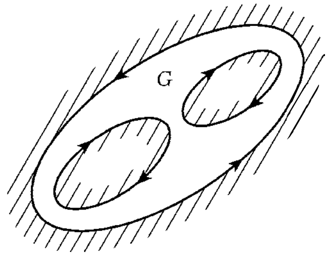

Рис. 170

Положительно ориентированная граница ∂G открытого множества G обозначается ∂G^+, а отрицательно — ∂G^-.

Граница открытого плоского множества называется *кусочно гладкой*, если она состоит из конечного числа простых кусочно гладких контуров.

Так как площадь кусочно гладкой кривой, как и всякой спрямляемой кривой, равна нулю (п. 42.2), то и площадь границы плоского открытого множества, если эта граница кусочно гладкая, равна нулю, а следовательно, само множество квадрируемо (см. п. 42.1).

Если область G такова, что существуют такие элементарные области G_i, $i = 1, 2, ..., m$, что

$$\overline{G} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{G}_i, \tag{45.79}$$

$$G_i \bigcap G_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, ..., m, \tag{45.80}$$

то говорят, что область G можно разбить на конечное множество элементарных областей.

Теорема 2. *Если G — ограниченная область, граница которой состоит из конечного множества простых замкнутых контуров и которую можно разбить на конечное множество элементарных областей, а функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{G}$ области G, то имеет место формула Грина*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{45.81}$$

Следствие. *Если в дополнение к условиям теоремы граница ∂G области G кусочно гладкая, то формулу* (45.81) *можно записать в виде*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} (P \cos \alpha + Q \cos \beta)\, ds, \tag{45.82}$$

где $(\cos \alpha, \cos \beta)$ *— единичный касательный к границе ∂G области G вектор (конечно, в тех точках, в которых он существует).*

Интегралы в правых частях формул (45.81) и (45.82) понимаются как суммы интегралов по контурам, из которых состоит граница ∂G области G.

Докажем теорему.

▷ Пусть граница ∂G области G состоит из конечного множества простых замкнутых контуров, а G_i, $i = 1, 2, ..., m$, — такие области, что для них выполняются условия (45.79) и (45.80). Согласно лемме 2 для каждого G_i, $i = 1, 2, ..., m$, имеет место равенство

$$\iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G_i^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{45.83}$$

Суммируя левые части этих равенств, в силу выполнения условий (45.79) и (45.80) из аддитивности кратного интеграла получим

$$\sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{45.84}$$

При суммировании правых частей равенств (45.83) остается только криволинейный интеграл по ∂G^+, так как все другие части границ ∂G_i встретятся в сумме дважды и с противоположными ориентациями, в силу чего сумма интегралов по ним равна нулю (рис. 171):

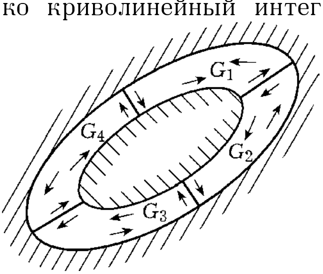

Рис. 171

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\partial G_i^+} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{\partial G^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{45.85}$$

Поскольку в силу формул (45.83) левые части равенств (45.84) и (45.85) равны, то равны и правые, т. е. формула (45.81) рассматриваемого случая доказана. ◁

Следствие теоремы вытекает из справедливости равенства (45.14) для кусочно гладких кривых.

Замечание. Формула Грина (45.81) верна вообще для любой области с кусочно гладкой границей. Ее доказательство в таких предположениях выходит за рамки настоящего курса.

45.6. Формула для площадей. В качестве приложения формулы Грина рассмотрим задачу вычисления площадей при помощи криволинейных интегралов.

Если в формуле Грина (45.81) положить $P = 0$, $Q = x$ на $\overline{G}$, то, заметив, что $\iint\limits_G dx\,dy = \mu G$, получим

$$\mu G = \iint\limits_G dx\,dy \underset{(45.81)}{=} \int\limits_{\partial G^+} x\,dy. \tag{45.86}$$

Аналогично, при $P = -y$, $Q = 0$

$$\mu G = \iint\limits_G dx\,dy = -\int\limits_{\partial G^+} y\,dx. \tag{45.87}$$

Из равенств (45.86) и (45.87) следует формула

$$\mu G = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G^+} x\,dy - y\,dx. \tag{45.88}$$

Пример. Вычислим с помощью формулы (45.88) площадь S, ограниченную эллипсом

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Применив формулу (45.88), получим

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G^+} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\,a\,b\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

45.7. Геометрический смысл знака якобиана отображения плоской области. Пусть

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{45.89}$$

— непрерывно дифференцируемое отображение F плоской области $G \subset R^2_{uv}$ в плоскость R^2_{xy} с якобианом, не равным нулю на G. Тогда якобиан в силу его непрерывности сохраняет знак на G (см. замечание в п. 35.2), т. е. либо всюду на G положителен, либо всюду отрицателен.

Лемма 3. *Если Γ — кусочно гладкая кривая, лежащая в области G, то ее образ $F(\Gamma)$ при отображении F также является кусочно гладкой кривой.*

▷ Пусть сначала Γ — гладкая кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек, и пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$, $u'^2(t) + v'^2(t) > 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, — некоторое ее представление. Тогда представлением кривой $F(\Gamma)$ является пара функций

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Кривая $F(\Gamma)$ в силу непрерывности композиции непрерывных функций и правила дифференцирования композиции функций является непрерывно дифференцируемой кривой. Покажем, что эта кривая также не имеет особых точек. В самом деле,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений относительно производных $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, видим, что если в некоторой точке $t \in [a, b]$ выполнялись бы равенства $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, то в силу необращения в нуль якобиана

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

указанная система имела бы единственное решение, которым является нулевое решение, т. е. в той же точке t были бы справедливы равенства $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$. Тем самым, соответствующая точка кривой Γ была бы также особой, что противоречит сделанному предположению.

Итак, если кривая гладкая, то ее образ при отображении F также гладкий. Отсюда сразу следует, что образ кусочно гладкой кривой при рассматриваемом отображении является кусочно гладкой кривой, ибо кусочно гладкая кривая представляет собой объединение конечного множества гладких кривых. $\triangleleft$

Пусть теперь D — ограниченная область, лежащая вместе со своим замыканием в области G. Пусть границей ∂D области D является простой замкнутый кусочно гладкий контур, $D \subset \overline{D} = D \cup \partial D \subset G$. Пусть, далее, $D^* = F(D)$. Тогда в силу принципа сохранения области (см. теорему 4 в п. 40.5) множество D^* как образ области также является областью.

Будем в дальнейшем предполагать, что отображение F взаимно однозначно отображает область G на $G^* = F(G)$. Тогда граница ∂D области D отображается на границу ∂D^* образа D^* области D (см. (44.44) в п. 44.2). Поэтому согласно лемме 3 граница ∂D^* также является простым кусочно гладким контуром. Следовательно, по конурам $\Gamma = \partial D$ и $\Gamma^* = \partial D^*$ можно брать криволинейные интегралы.

Пусть области D и D^* таковы, что к ним применима формула Грина (на самом деле при сделанных предположениях формула Грина всегда применима на областях D и D^*, но у нас это не было доказано).

Обозначим, как обычно, через Γ^+ положительно ориентированный контур Γ. Пусть

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

— представление контура Γ^+ и, следовательно,

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{45.90}$$

— некоторое представление ориентированного контура Γ^*.

Будем еще дополнительно предполагать, что у координатной функции $y(u, v)$ отображения F существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}$ и что они непрерывны и, следовательно, равны друг другу во всех точках области G.

Согласно формуле (45.86)

$$\mu D^* = \varepsilon \int\limits_{\Gamma^*} x\,dy, \tag{45.91}$$

где $\varepsilon = +1$, если ориентация контура Γ^* положительна, и $\varepsilon = -1$, если она отрицательна. Иначе говоря, $\varepsilon = +1$, если положительному обходу контура Γ соответствует при отображении F положительный же обход контура Γ^*, и $\varepsilon = -1$, если положительному обходу контура Γ соответствует отрицательный обход контура Γ^*.

Выясним связь знака ε со знаком якобиана $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ отображения F.

Преобразовав интеграл (45.91) по формуле (45.19) и использовав представление (45.90) контура Γ^*, получим

$$\mu\widetilde{D} = \varepsilon\int\limits_a^b xy'_t\,dt = \varepsilon\int\limits_a^b x\Big(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\Big)\,dt = \varepsilon\int\limits_\Gamma x\,\frac{\partial y}{\partial u}\,du + x\,\frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

К получившемуся интегралу применим формулу Грина (см. (45.81)), положив $P = x\,\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x\,\dfrac{\partial y}{\partial v}$ и заметив, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\,\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$$

(здесь используется предположенное выше существование непрерывных вторых смешанных производных $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ и $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$), будем иметь

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

откуда

$$\mu D^* = \varepsilon\int\limits_{\Gamma^*} P\,du + Q\,dv = \varepsilon\iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\Big)\,du\,dv = \varepsilon\iint\limits_D \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv.$$

Левая часть этого равенства больше нуля, поэтому правая его часть также положительна, а так как якобиан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ отображения F не меняет знака, то это возможно лишь в том случае, когда $\varepsilon\,\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} >$ > 0, т. е. когда число ε имеет тот же знак, что и якобиан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$. Сопоставив это со сказанным выше о знаке числа ε, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если якобиан взаимно однозначного непрерывно дифференцируемого отображения плоской области положителен во всех* *точках области, то при этом отображении сохраняется ориентация простых замкнутых кусочно гладких контуров, а если якобиан отрицателен, то указанная ориентация переходит в противоположную.*

В этом и состоит геометрический смысл знака якобиана отображения плоской области.

§ 46. Элементы теории поверхностей

46.1. Основные определения. Пусть R^2_{uv} — координатная плоскость переменных u, v и G — некоторая область в R^2_{uv}.

Непрерывное отображение $M(u,v)$ (см. п. 34.4, определение 2) замыкания $\overline{G}$ плоской области $G \subset R^2_{uv}$, $(u,v) \in \overline{G}$, в пространство R^3 называется *поверхностью* или, более подробно, *параметрически заданной поверхностью*. Будем обозначать поверхность буквой S и писать

$$S = \{M(u,v);\ (u,v) \in \overline{G}\}, \quad M(u,v) \in R^3. \tag{46.1}$$

Образ множества $\overline{G}$ при отображении $M(u,v)$ называется *носителем поверхности* S.

Иногда там, где это не может привести к недоразумению, носитель поверхности называют также поверхностью.

Для поверхности $S = \{M(u,v);\ (u,v) \in \overline{G}\}$ сужение отображения $M(u,v)$ на границу ∂G области G называется *краем поверхности* S и обозначается ∂S.

Точки поверхности, не являющиеся точками ее края, называются *внутренними точками поверхности.*

Если область G_1 содержится в области G, то поверхность $\{M(u,v);$ $(u,v) \in \overline{G}_1\}$, т. е. сужение отображения $M(u,v)$ на множество $\overline{G}_1$, называется *частью поверхности* $\{M(u,v);\ (u,v) \in \overline{G}\}$.

Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат x, y, z и $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные координатные орты: $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$.

Вектор-функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, где $\mathbf{r}(u,v)$ — радиус-вектор с началом в начале координат пространства R^3 и концом в точке $M(u,v)$, называют *векторным представлением поверхности* S и пишут

$$S = \{\mathbf{r}(u,v);\ (u,v) \in \overline{G}\}.$$

Если $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$, то тройку функций $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, являющихся координатами вектора $\mathbf{r}(u,v)$, а следовательно, и координатами точки $M(u,v)$, называют *координатным представлением поверхности* S и пишут

$$S = \{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v);\quad (u,v) \in \overline{G}\},$$

причем, координатные функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ непрерывны на множестве $\overline{G}$ (см. п. 34.3).

Переменные u и v называют *параметрами поверхности* S (или координатами на поверхности), а кривые вида $M(u,v_0)$ и $M(u_0,v)$ (u_0 и v_0 фиксированы) — соответствующими им *координатными линиями на этой поверхности.*

Точкой поверхности S называется точка $M = M(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, пространства R^3 и пара значений параметров u, v, которым она соответствует. Сама точка M пространства R^3 называется в этом случае *носителем* рассматриваемой точки поверхности. Очевидно, что точка поверхности однозначно определяется значениями параметров, которым она соответствует. Ясно, что совокупность всех носителей точек поверхности составляет носитель этой поверхности.

При определении поверхности отображение $M(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, не предполагается взаимно однозначным: разные точки замыкания $\overline{G}$ области G могут отображаться в одну и ту же точку пространства R^3. Если для точки $M(u_0,v_0)$ поверхности $S = \{M(u,v); (u,v) \in \in \overline{G}\}$ существует такая точка $(u_1,v_1) \in \overline{G}$, что $(u_1,v_1) \neq (u_0,v_0)$, но $M(u_1,v_1) = M(u_0,v_0)$, то точка $M(u_0,v_0)$ называется *кратной точкой поверхности* S. Поверхность, у которой имеются кратные точки, называется *поверхностью с самопересечением.*

Примером поверхности, не имеющей кратных точек, является график S прерывной на замыкании $\overline{G}$ области $G \subset R^2_{xy}$ функции $z = f(x,y)$. Здесь параметрами поверхности являются переменные x и y, а представление поверхности имеет вид $x = x$, $y = y$, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{G}$. Такое представление поверхности называется *явным.*

Понятия частных производных, дифференцируемости, непрерывной дифференцируемости разных порядков для векторных функций многих переменных определяются по аналогии со скалярными функциями. Непрерывная дифференцируемость векторной функции $\mathbf{r}(u,v)$ на замыкании $\overline{G}$ области G означает (ср. случай скалярной функции в п. 45.5), что частные производные $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\mathbf{r}_v = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ непрерывно продолжаемы на границу ∂G области G.

Если векторное представление поверхности является непрерывно дифференцируемой, дважды непрерывно дифференцируемой и т. д. функцией, то задаваемая им поверхность называется соответственно *непрерывно дифференцируемой*, *дважды непрерывно дифференцируемой* и т. д. *поверхностью.*

По аналогии с понятием кривой для поверхности (46.1) вводится понятие преобразования ее параметров: если D — область на плоскости переменных s,t, то гомеоморфное (см. определение 1 в п. 40.5) отображение замыкания $\overline{D}$ области D на замыкание $\overline{G}$ области G:

$$u = u(s,t), \quad v = v(s,t), \quad (s,t) \in \overline{D}, \quad (u,v) \in \overline{G}, \tag{46.2}$$

принадлежащее соответствующему классу, называется *преобразованием параметров* поверхности S, и поверхность

$$\{M(u(s,t),\ v(s,t));\quad (s,t) \in \overline{D}\}$$

обычно называют той же поверхностью S, а отображения (46.1), (46.2) — разными ее представлениями.

Ясно, что поверхность, получающаяся из данной посредством преобразования параметров, имеет тот же носитель, что и исходная поверхность.

Аналогично случаю кривой для поверхности определяется понятие преобразования параметров в случае, когда представление поверхности непрерывно дифференцируемо то или иное число раз.

В случае, например, непрерывно дифференцируемых поверхностей преобразованиями параметров называются диффеоморфные (см. определение 3 в п. 40.5) отображения (46.2) замыкания $\overline{D}$ области D на замыкание $\overline{G}$ области G с якобианом, не равным нулю на D (под частными производными и якобианом в граничных точках области D понимаются их непрерывные продолжения из области D на ее границу; см. об этом в п. 44.3 и п. 45.5). В этом случае отображение

$$s = s(u,v), \quad t = t(u,v), \quad (u,v) \in \overline{G}, \tag{46.3}$$

обратное к отображению (46.2), согласно теореме о неявных функциях будет также непрерывно дифференцируемым с якобианом, не равным нулю.

Пусть поверхность (46.1) непрерывно дифференцируемая, $\mathbf{r}_u$ — производная вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ одного переменного u, т. е. $\mathbf{r}_u$ — касательный вектор к координатной линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$, соответственно $\mathbf{r}_v$ — касательный вектор к координатной линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$, $(u_0, v_0) \in G$.

Под кривыми (соответственно непрерывно дифференцируемыми кривыми и т. п.) на поверхности (46.1) будем понимать кривые, задаваемые представлениями вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, где $u(t)$ и $v(t)$ — такие непрерывные (соответственно непрерывно дифференцируемые) функции на отрезке $[a,b]$, что $(u(t), v(t)) \in \overline{G}$ при $t \in [a,b]$.

Таким образом, кривая $\{\mathbf{r}(u(t), v(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ на поверхности S является образом кривой $\{u(t), v(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, лежащей в замыкании $\overline{G}$ области G при отображении $M(u,v)$.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, — непрерывно дифференцируемая кривая на непрерывно дифференцируемой поверхности (46.1) $t_0 \in [a,b]$, $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t)$, $(u_0, v_0) \in G$. Тогда при $t = t_0$ имеем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt} \tag{46.4}$$

и, следовательно, касательная в точке $M(u_0, v_0)$ к любой кривой на поверхности S лежит в плоскости векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. (Касательные векторы к кривым на поверхности будем обычно рассматривать как векторы с началом в точке касания.)

Для непрерывно дифференцируемой поверхности S касательные векторы к кривым на поверхности в точках $M(u,v)$, когда (u,v) принадлежит границе ∂G области G, определяются с помощью непрерывного продолжения (см. п. 45.5), поэтому формула (46.4) в этом случае также имеет место.

Определение 1. Точка $M_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ поверхности S называется *неособой*, если в ней векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ не коллинеарны. Это равносильно тому, что

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0.$$

Если в точке $M_0 = M(u_0, v_0)$ векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ коллинеарны (в частности, хотя бы один из них равен нулю), то эта точка называется *особой*.

Поверхность, не имеющая особых точек, называется *гладкой*.

У всякой внутренней точки гладкой поверхности S существует окрестность, в которой поверхность имеет явное представление. Действительно, некомпланарность векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ в точке (u_0, v_0) означает, что строчки матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

линейно независимы в этой точке. Отсюда следует, что, например,

$$\left.\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\right|_{(u_0, v_0)} = 0.$$

А тогда в силу теоремы о локальном диффеоморфизме (см. теорему 3 в п. 40.5) у точки (u_0, v_0) существует линейно связная окрестность U, которая с помощью отображения отображается на некоторую линейно связную окрестность V точки (x_0, y_0), $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.

Обратное отображение

$$u = u(x,y),$$
$$v = v(x,y)$$

является преобразованием параметров (для сужения поверхности S на множество U). Подставляя эти преобразование в заданное представление поверхности на окрестности U, получим

$$x = x,$$
$$y = y,$$
$$z = z(u(x,y),\, v(x,y)) \stackrel{\text{def}}{=} f(x,y),$$

что является явным представлением поверхности S в окрестности точки (x_0, y_0).

Замечание. Если краем гладкой поверхности является контур, то он может быть негладким. Например, тождественное отображение квадрата $Q = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ z = 0\}$ на себя является гладкой поверхностью с представлением $x = x$, $y = y$, $z = 0$, т. е. $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,0)$, $\mathbf{r}_x = (1,0,0)$, $\mathbf{r}_y = (0,1,0)$, и ясно, что функции $\mathbf{r}_x$ и $\mathbf{r}_x$ непрерывны и линейно независимы на квадрате Q, а краем этой поверхности является кусочно гладкая кривая, состоящая из сторон квадрата, касательные векторы к которым имеют разрывы в вершинах квадрата Q.

46.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. В силу неколлинеарности векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ в неособой точке в ней однозначно определена плоскость, параллельная этим векторам. Как было показано выше, эта плоскость содержит касательные ко всем непрерывно дифференцируемым кривым на поверхности в рассматриваемой неособой точке поверхности. Это делает естественным следующее.

Определение 2. Плоскость, проходящая через неособую точку $M(u_0,v_0)$ поверхности S параллельно векторам $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)$ и $\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$, называется *касательной плоскостью к поверхности S в этой точке.*

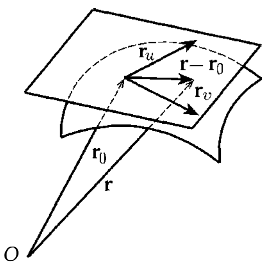

Рис. 172

Ясно, что касательная плоскость определена однозначно.

Равенство (46.4) означает, что касательная в точке $M(u_0,v_0)$ к любой непрерывно дифференцируемой кривой на поверхности лежит в касательной плоскости к поверхности S в этой точке.

Если $\mathbf{r}_u^0 = \mathbf{r}_u(u_0,v_0)$, $\mathbf{r}_v^0 = \mathbf{r}_v(u_0,v_0)$, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0 = M(u_0,v_0)$, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости к поверхности S в точке $\mathbf{r}_0$, то уравнение касательной плоскости, записанное в виде смешанного произведения векторов имеет вид (рис. 172)

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_u^0, \mathbf{r}_v^0) = 0. \tag{46.5}$$

Если

$$\mathbf{r} = (x,y,z), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0),$$
$$\mathbf{r}_u^0 = (x_u^0, y_u^0, z_u^0), \quad \mathbf{r}_v^0 = (x_v^0, y_v^0, z_v^0),$$

то уравнение (46.5) в координатной записи имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{46.6}$$

Если поверхность S является графиком функции, т. е. имеет явное представление вида $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{G}$ и, следовательно, переменные x и y могут быть приняты за координаты на поверхности S, то

$$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,f(x,y)), \quad \mathbf{r}_x = (1,0,f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0,1,f_y). \tag{46.7}$$

Причем

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} \right| = 1 + f_x^2 + f_y^2 > 0.$$

Поэтому если функция f непрерывно дифференцируема на замыкании $\overline{G}$ области G, то поверхность $S = \{z = f(x,y);\ (x,y) \in \overline{G}\}$ гладкая. Уравнение (46.6) в этом случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x^0 \\ 0 & 1 & f_y^0 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. вид

$$z - z_0 = (x - x_0)f_x^0 + (y - y_0)f_y^0, \tag{46.8}$$

где $z_0 = f(x_0,y_0)$, $f_x^0 = f_x(x_0,y_0)$, $f_y^0 = f_y(x_0,y_0)$.

Для случая графика дифференцируемой функции двух переменных в п. 36.5 было дано другое определение касательной плоскости, основанное на локальном приближении дифференцируемой функции линейной функцией. Оно приводило к тому же уравнению (46.8). Это означает, что два определения касательной плоскости к графику дифференцируемой функции (данное в п. 36.5 и здесь) равносильны.

Ненулевой вектор, перпендикулярный касательной плоскости в точке $M(u_0,v_0)$ поверхности S, называется ***нормальным вектором*** или ***нормалью*** к ***поверхности*** S ***в этой точке***, а прямая, проходящая через точку $M(u_0,v_0)$ в направлении нормали, — ***нормальной прямой.***

Очевидно, что если $M(u_0,v_0)$ — неособая точка поверхности, то вектор $\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0$ является в этой точке нормалью, а вектор

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0}{|\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0|} \tag{46.9}$$

— единичной нормалью.

Запишем векторное произведение $\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0$ в координатной форме:

$$\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}.$$

Здесь и в дальнейшем **i**, **j**, **k**, как обычно, обозначают единичные векторы координатных осей (правой или левой) ортонормированной системы координат x, y, z. Так как

$$\mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0 = \left(\begin{vmatrix} y_u^0 & z_u^0 \\ y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix} \right),$$

то уравнение нормальной прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u^0 & z_u^0 \\ y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u^0 & x_u^0 \\ z_v^0 & x_v^0 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix}},$$

а в случае поверхности, заданной явным представлением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, — вид

$$\frac{x - x_0}{f_x^0} = \frac{y - y_0}{f_y^0} = -(z - z_0), \tag{46.10}$$

где $f_x^0 = f_x(x_0, y_0)$, $f_y^0 = f_y(x_0, y_0)$.

Иногда поверхность задается в неявном виде с помощью уравнения

$$F(x, y, z) = 0 \tag{46.11}$$

в том смысле, что координаты (x, y, z) точек рассматриваемой поверхности удовлетворяют уравнению (46.11). Если функция F непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и одна из частных производных функции F в точке (x_0, y_0, z_0) не равна нулю, например, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то согласно теореме о неявных функциях в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) уравнение (46.11) можно записать в виде

$$z = f(x, y), \tag{46.12}$$

т. е. локально множество точек (x, y, z), удовлетворяющих уравнению (46.11), является параметрически заданной поверхностью с явным представлением. Вспомнив, что для частных производных функции (46.12) имеют место формулы

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

из уравнения (46.8) получим, что уравнение касательной плоскости поверхности, заданной неявно уравнением (46.11), имеет вид

$$(x - x_0)F_x^0 + (y - y_0)F_y^0 + (z - z_0)F_z^0 = 0, \tag{46.13}$$

где $F_x^0 = F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y^0 = F_y(x_0, y_0, z_0)$, $F_z^0 = F_z(x_0, y_0, z_0)$, а уравнение нормальной прямой — вид

$$\frac{(x - x_0)}{F_x^0} = \frac{(y - y_0)}{F_y^0} = \frac{(z - z_0)}{F_z^0}.$$

46.3. Первая квадратичная форма поверхности. Рассмотрим дифференциал $d\mathbf{r}$ векторного представления $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, поверхности S:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv.$$

Найдем квадрат длины вектора $d\mathbf{r}$:

$$(d\mathbf{r})^2 = (\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv)^2 = \mathbf{r}_u^2\,du^2 + 2\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\,du\,dv + \mathbf{r}_v^2\,dv^2.$$

Введем обозначения

$$g_{11} = \mathbf{r}_u^2, \quad g_{12} = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v, \quad g_{22} = \mathbf{r}_v^2. \tag{46.14}$$

Тогда

$$(d\mathbf{r})^2 = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2. \tag{46.15}$$

Квадратичная форма (46.15) называется *первой квадратичной формой поверхности* (есть еще вторая и третья квадратичные формы поверхности, но мы не будем их изучать в нашем курсе). Мы увидим, что, зная коэффициенты g_{11}, g_{12} и g_{22} первой квадратичной формы поверхности в каждой точке поверхности, можно решать ряд задач, например находить длины кривых на поверхности и вычислять площадь поверхности.

Лемма 1. *Первая квадратичная форма поверхности является положительно полуопределенной формой, а во всякой неособой точке поверхности — положительно определенной.*

$\triangleright$ Положительная полуопределенность квадратичной формы (46.15) очевидна, так как $(d\mathbf{r})^2 \geqslant 0$. Докажем ее положительную определенность в неособой точке.

Если точка поверхности неособая, то в ней векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ линейно независимы. Поэтому в этой точке равенство $d\mathbf{r} = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $du = dv = 0$, ибо $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv$. Следовательно, если в неособой точке поверхности $du^2 + dv^2 > 0$, то $(d\mathbf{r})^2 > 0$. Это и означает положительную определенность первой квадратичной формы поверхности. $\triangleleft$

Замечание. Докажем полезную для дальнейшего формулу, выражающую дискриминант первой квадратичной формы поверхности через длину векторного произведения векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$:

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}. \tag{46.16}$$

$\triangleright$ Для любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеем

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \widehat{\mathbf{ab}},$$

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \widehat{\mathbf{ab}}.$$

Возводя эти равенства в квадрат и сложив, получим тождество Лагранжа

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{ab})^2.$$

В частности, при $a = \mathbf{r}_u$, $b = \mathbf{r}_v$ будем иметь

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Формула (46.16) доказана. $\lhd$

Отметим, что поскольку в неособой точке $\mathbf{r}_u \neq 0$ и $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$, то в ней

$$g_{11} = \mathbf{r}_u^2 > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 > 0, \tag{46.17}$$

как и должно быть в соответствии с известным из алгебры критерием Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Пример. Если непрерывно дифференцируемая поверхность имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, то в силу формул (46.7) и (46.14) получим

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = f_x f_y, \quad g_{22} = 1 + f_y^2, \tag{46.18}$$

и потому первая квадратичная форма в этом случае имеет вид

$$d\mathbf{r}^2 = (1 + f_x^2)\, dx^2 + 2 f_x f_y \, dx\, dy + (1 + f_y^2)\, dy^2. \tag{46.19}$$

46.4. Длина кривых на поверхности. Пусть на непрерывно дифференцируемой поверхности $S = \{\mathbf{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{G}\}$ задана непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(u(t), v(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}$ и $s = s(t)$ — переменная длина дуги этой кривой. Мы знаем, что $\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$ (п. 17.3), или, что то же самое, $|d\mathbf{r}| = |ds|$. Поэтому в силу формулы (46.15)

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = g_{11}\, du^2 + 2 g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2, \tag{46.20}$$

где $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$. Таким образом, первая квадратичная форма поверхности равна квадрату дифференциала длины кривой на поверхности.

Если длина дуги s отсчитывается от начала рассматриваемой кривой, т. е. $\frac{ds}{dt} > 0$, то из (46.20) получим

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 g_{12} \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

и, следовательно, для длины S_Γ кривой Γ имеем формулу

$$S_\Gamma = \int_a^b \frac{ds}{dt}\, dt = \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 g_{12} \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt.$$

46.5. Площадь поверхности. Пусть $S = \{\mathbf{r}(u,v);\ (u,v) \in \overline{G}\}$ — непрерывно дифференцируемая поверхность, причем G — квадрируемая область на плоскости переменных u, v. Рассмотрим разбиение T_k этой плоскости на квадраты некоторого ранга k (k фиксировано, $k = 0, 1, 2, \ldots$). Обозначим через τ совокупность всех непустых, каким-либо образом перенумерованных пересечений замыкания $\overline{G}$ области G с квадратами ранга k (таких пересечений только конечное множество). Таким образом, если $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$, то для каждого $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$ существует такой квадрат $Q_i \in T_k$, что $X_i = \overline{G} \cap \cap Q_i \neq \varnothing$. Ясно, что τ является разбиением множества $\overline{G}$ и что элементы X_i, этого разбиения являются замкнутыми квадрируемыми множествами (в самом деле, X_i представляет собой пересечение двух замкнутых квадрируемых множеств $\overline{G}$ и Q_i, и поэтому замкнуто).

Пусть $\tau(\partial G)$ — совокупность тех элементов разбиения τ, которые не пересекаются с границей ∂G области G (см. определение (42.83) в п. 42.5). Очевидно, что каждое множество $X_i \in \tau(\partial G)$ является целым квадратом Q_i. Действительно, пусть $\overline{G} \cap Q_i = X_i \neq Q_i$; тогда в квадрате Q_i найдется точка, не принадлежащая $\overline{G}$. Поскольку же в квадрате Q_i заведомо есть точка из $\overline{G}$, ибо $\overline{G} \cap Q_i \neq \varnothing$, то в нем найдется и точка границы ∂G области G (см. замечание 8 в п. 42.1), что противоречит выбору множества X_i. Аналогичные рассуждения мы проводили при доказательстве теоремы 1 в п. 44.3.

Пусть Q_i — один из таких квадратов: $Q_i = X_i \in \tau(\partial G)$, с вершинами (u,v), $(u+h,v)$, $(u+h,v+h)$, $(u,v+h)$, $h > 0$, и, следовательно, h — длина его сторон. Тогда

$$\mathbf{r}(u+h,\ v) - \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_u h + o(h),$$
$$\mathbf{r}(u\,,v+h) - \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_v h + o(h), \quad h \to 0.$$

Обозначим $\Delta\sigma_i$ площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\mathbf{r}_u h$ и $\mathbf{r}_v h$ (рис. 173). Имеем

$$\Delta\sigma_i = |\mathbf{r}_u h \times \mathbf{r}_v h| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| h^2 = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\Big|_{M_i} \mu X_i. \tag{46.21}$$

Наряду с поверхностью S рассмотрим “чешуйчатую поверхность”, состоящую из всех параллелограммов, натянутых на векторы $\mathbf{r}_u h$

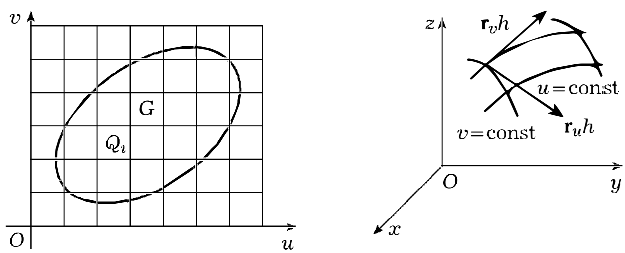

Рис. 173

и $\mathbf{r}_v h$, взятые в вершинах $M_i = (u, v)$ квадратов $Q_i = X_i \in \tau(\partial G)$, и определим площадь μS поверхности S как предел суммы площадей всех указанных параллелограммов, когда мелкость $|\tau|$ разбиений τ стремится к нулю: $|\tau| \to 0$ (это равносильно тому, что ранг $k \to +\infty$). Таким образом,

$$\mu S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial G)} \Delta\sigma_i. \tag{46.22}$$

В силу (46.21)

$$\sum_{X_i \in \tau(\partial G)} \Delta\sigma_i = \sum_{X_i \in \tau(\partial G)} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\Big|_{M_i} \mu X_i.$$

Отсюда видно, что эта сумма является неполной интегральной суммой от функции $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ на области G, и поскольку $\mu(\partial G) = 0$, то (см. теорему 4 в п. 42.5)

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial G)} \Delta\sigma_i = \iint_G |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv.$$

Интеграл в правой части равенства существует в силу непрерывности функции $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ на квадрируемом компакте $\overline{G}$.

В результате для площади μS поверхности S получилась формула

$$\mu S = \iint_G |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv. \tag{46.23}$$

Применив соотношение (46.16), ее можно записать в виде

$$\mu S = \iint_G \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv. \tag{46.24}$$

Выражение $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv$ называют иногда *элементом площади* поверхности и обозначают его dS, т. е.

$$dS = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv. \tag{46.25}$$

Таким образом,

$$\mu S = \iint_G dS.$$

Пример. Если поверхность S задана явным представлением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, то в силу формул (46.18) из (46.24) следует, что

$$\mu S = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy. \tag{46.26}$$

46.6. Ориентация поверхности. Прежде всего расширим понятие поверхности. В связи с этим поверхности в смысле определения (46.1) будем называть также и элементарными поверхностями.

Пусть задано конечное множество элементарных поверхностей, края которых состоят из конечных множеств замкнутых кривых (контуров). Операцией *склейки этих поверхностей* называется отождествление некоторых дуг этих контуров, при котором (кроме, быть может, конечного множества точек) отождествляются дуги, принадлежащие краям не более чем двух элементарных поверхностей.

Всякий результат склейки элементарных поверхностей называется поверхностью.

Пример 1. Сфера $x^2+y^2+z^2=1$ является результатом склейки по окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$, двух элементарных поверхностей без кратных точек, имеющих явное представление, — полусфер $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ и $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leqslant 1$.]

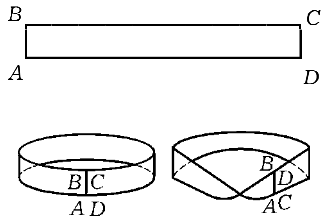

Рис. 174

Пример 2. Если у прямоугольника $ABCD$ (рис. 174) склеить отрезки AB и DC, то получится боковая поверхность цилиндра. Если же предварительно "перекрутить" прямоугольник $ABCD$ и склеить уже отрезки AB и CD, то получится поверхность, называемая *листом Мёбиуса.* Между двумя получившимися поверхностями имеется большая принципиальная разница: на боковой поверхности цилиндра можно выбрать непрерывную единичную нормаль, а на листе Мёбиуса нельзя. У листа Мёбиуса, в отличие от боковой поверхности цилиндра, есть только одна сторона (лист Мёбиуса нельзя покрасить двумя различными красками так, чтобы две части, окрашенные разными красками, нигде не соприкасались; для боковой поверхности цилиндра это, очевидно, возможно).

Элементарная гладкая поверхность называется *ориентированной*, если на ней задана непрерывная единичная нормаль. Сама эта нормаль называется *ориентацией поверхности.* Если гладкая поверхность S задана векторным представлением $S=\{\mathbf{r}(u,v);\ (u,v)\in\overline{G}\}$, то ее ориентацией являются векторы $\boldsymbol{\nu}=\dfrac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$ и $-\boldsymbol{\nu}$.

Поверхность S, ориентированная нормалью $\boldsymbol{\nu}$, будет обозначаться через S^+, а нормалью $-\boldsymbol{\nu}$ — через S^-.

Поверхность, полученная склейкой гладких элементарных поверхностей, называется *гладкой*, если у каждой точки поверхности найдется "окрестность", в которой существует единичная нормаль, непрерывная как функция параметров поверхности (в случае когда точка поверхности получена как результат отождествления точек краев элементарных поверхностей, "окрестность" значений параметров точки также образуется путем склейки частей окрестностей значений параметров точки на указанных элементарных поверхностях).

Гладкая поверхность называется *ориентируемой* (*двусторонней*), если у нее существует единичная нормаль, непрерывная на всей поверхности. Сама эта нормаль называется ориентацией поверхности.

Если у гладкой поверхности нет непрерывной на ней единичной нормали, то поверхность называется *неориентируемой* (*односторонней*).

Примером гладкой неориентируемой поверхности, полученной при помощи операции склейки, является лист Мёбиуса.

Результат склейки гладких элементарных поверхностей, краями которых являются кусочно гладкие контуры, называется *кусочно гладкой поверхностью.*

Примером кусочно гладкой поверхности, не являющейся гладкой, является поверхность куба, получающаяся, очевидно, склейкой его граней (гладких поверхностей) по их ребрам. Ясно, что на поверхности куба нет непрерывной единичной нормали в точках ребер она даже не существует. Поэтому для кусочно гладких поверхностей определение их ориентируемости вводится другим путем.

Рассмотрим сначала гладкую элементарную поверхность, краем которой является простой замкнутый контур. Его ориентация называется согласованной с ориентацией самой поверхности (т. е. с непрерывной единичной нормалью), если они согласованы по правилу штопора в случае правой системы координат и по правилу антиштопора — в случае левой системы координат.

Такое определение наглядно и удобно для конкретных приложений. Его математическая сущность состоит в том, что ориентация края гладкой поверхности согласована с ее ориентацией, если тройка векторов: касательный вектор к краю, нормальный к нему вектор, направленный в сторону поверхности (это понятие нетрудно определить) и ориентация поверхности (т. е. единичная непрерывная на ней нормаль), в точках края ориентированы так же, как координатный репер, т. е. преобразуются в него матрицей с положительным определителем.

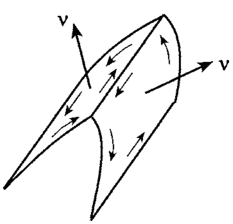

Рис. 175

Кусочно гладкая поверхность называется *ориентируемой* (*двусторонней*), если у элементарных гладких поверхностей, из которых она получена с помощью склейки, имеются такие ориентации, что согласованные с ними ориентации частей их краев, принадлежащих двум указанным элементарным поверхностям, противоположны (рис. 175). Если это невозможно для данной поверхности, то она называется *неориентируемой* (*односторонней*).

Можно показать, что в случае, когда кусочно гладкая поверхность является гладкой, два данных определения ее ориентации (с помощью непрерывной на ней единичной нормали и с помощью согласованных ориентаций составляющих ее элементарных поверхностей с ориентациями их краев) равносильны. Можно также показать, что как бы ни разбивать лист Мёбиуса на гладкие части, краями которых являются простые замкнутые контуры, эти контуры нельзя согласованно ориентировать. Таким образом, и в этом смысле лист Мёбиуса является неориентируемой поверхностью.

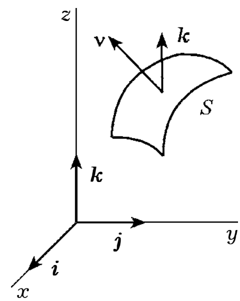

Рис. 176

Если носитель поверхности S является границей некоторой области в трехмерном пространстве, то нормаль к этой поверхности (там, где она, конечно, существует), направленная внутрь области, называется *внутренней*, а направленная вовне от области — *внешней*. Если эта поверхность S является кусочно гладкой, то она ориентируема, и ее внешняя и внутренняя единичные нормали являются ориентациями. Это наглядно видно на примере поверхности куба. Области, границы которых представляют собой кусочно гладкую поверхность, называются *областями с кусочно гладкой границей.*

Пример 3. Если гладкая поверхность S имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, то в силу формул (46.7) будем иметь

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}. \tag{46.27}$$

Отсюда следует, что вектор

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) \tag{46.28}$$

является ориентацией поверхности S (рис. 176). При этом

$$\cos\widehat{\boldsymbol{\nu}\mathbf{k}} = -\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0,$$

т. е. ориентация $\boldsymbol{\nu}$ образует острый угол с осью z. Это означает, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ направлен вверх от поверхности S. Поэтому поверхность S, ориентированная единичной нормалью $\boldsymbol{\nu}$, называется “верхней стороной” $\widehat{S}$ поверхности S, а ориентированная противоположной нормалью $-\boldsymbol{\nu}$ (направленной вниз) — ее “нижней стороной” $\check{S}$.

Обратим внимание на то, что если граница ∂G области G является простым замкнутым контуром, то его положительная ориентация на плоскости переменных x, y, на которой выбрана правая система координат, а следовательно, и порожденная ей ориентация края ∂S по- верхности S, согласованы с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ "по правилу штопора".

§ 47. Поверхностные интегралы

47.1. Определения поверхностных интегралов. Пусть

$$S = \{\mathbf{r}(u,v);\ (u,v) \in \overline{G}\} \tag{47.1}$$

— поверхность, G — квадрируемая область, $\mathbf{r}(u,v)$ — непрерывно дифференцируемая в ее замыкании $\overline{G}$ векторная функция, g_{11}, g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S, F — функция, заданная на поверхности S, т. е. $F = F(\mathbf{r}(u,v)) = F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in \overline{G}$.

Интегралом первого рода $\iint\limits_S F\,ds$ *по поверхности* S называется интеграл

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_G F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv \tag{47.2}$$

(под dS понимается элемент площади поверхности S; см. (46.25)).

Если подынтегральная функция в интеграле правой части равенства (47.2) непрерывна на замыкании $\overline{G}$ области G (т. е. если функция F непрерывна на поверхности S), то поверхностный интеграл $\iint\limits_S F\,dS$ существует как интеграл от непрерывной функции по квадрируемому компакту $\overline{G}$ (функция $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ непрерывна на множестве $\overline{G}$ в силу непрерывной дифференцируемости на нем векторной функции $\mathbf{r}(u,v)$). Напомним, что интегралы по области G и ее замыканию $\overline{G}$ совпадают (см. п. 42.3).

Пример 1. Если $F \equiv 1$ на поверхности S, то поверхностный интеграл (47.2) равен площади поверхности S:

$$\iint\limits_S dS = \iint\limits_G \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv = \mu S.$$

Пример 2. Если поверхность S задана явным представлением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{G}$, то (см (46.26))

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy.$$

Поверхностный интеграл первого рода по кусочно гладкой поверхности определяется как сумма интегралов по ее гладким частям.

Пусть теперь S — гладкая поверхность и

$$\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \tag{47.3}$$

— непрерывная единичная нормаль на ней. Ориентированную с помощью этой нормали поверхность обозначим S^+. Пусть, далее, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}(u, v))$ — непрерывная векторная функция, заданная на поверхности S, и P, Q, R — координаты вектора $\mathbf{a}$, т. е.

$$\mathbf{a} = (P, Q, R). \tag{47.4}$$

Таким образом, P, Q, R являются непрерывными числовыми функциями на поверхности S:

$$P = P(\mathbf{r}(u, v)), \quad Q = Q(\mathbf{r}(u, v)), \quad R = R(\mathbf{r}(u, v)), \quad (u, v) \in \overline{G}.$$

Поверхностным интегралом $\displaystyle\iint_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS}$ *второго рода по ориентированной поверхности* S^+ называется интеграл $\displaystyle\iint_S \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS$, т. е.

$$\iint_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{47.5}$$

Обозначение $\displaystyle\iint_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS}$ называется *векторной записью* поверхностного интеграла второго рода. Его *координатной записью* называется выражение

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Таким образом,

$$\iint_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} = \iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{47.6}$$

так как по определению левая и правая части этого равенства являются разными записями одной и той же величины.

Записав скалярное произведение $\mathbf{a}\boldsymbol{\nu}$ в координатном виде:

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\nu} \underset{\substack{(47.3)\\(47.4)}}{=} P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma,$$

получим

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \underset{(47.6)}{=} \iint_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} \underset{(47.5)}{=}$$

$$\underset{(47.5)}{=} \iint_S \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \tag{47.7}$$

В частности, взяв поочередно две функции из трех P, Q и R тождественно равными нулю, будем иметь

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz &= \iint\limits_{S} P\cos\alpha\,dS,\\ \iint\limits_{S^+} Q\,dz\,dx &= \iint\limits_{S} Q\cos\beta\,dS,\\ \iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy &= \iint\limits_{S} R\cos\gamma\,dS.\end{aligned} \tag{47.8}$$

Интуитивный смысл этих формул состоит в том, что элемент площади dS (см. (46.25)) данной поверхности, умноженный на косинус угла, который он составляет с некоторой координатной плоскостью, "приближенно" равен площади его проекции на рассматриваемую координатную плоскость, как если бы речь шла о площади плоской фигуры и ее проекции. На рис. 177 изображен случай, когда указанное проектирование производится на плоскость переменных x и y.

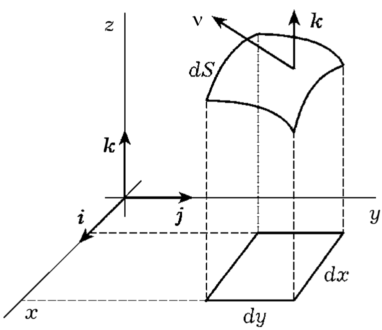

Рис. 177

В этом случае

$$dx\,dy \approx dS\cos\gamma,$$

где dS — элемент площади поверхности S, $dx\,dy$ — элемент площади проекции этой поверхности на плоскость переменных x, y, а γ — угол между dS и указанной плоскостью, очевидно, равный углу между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности S и единичным ортом $\mathbf{k}$ к оси z.

Если за непрерывную единичную нормаль на поверхности S взять вектор $-\boldsymbol{\nu}$ и обозначить через S^- поверхность S, ориентированную с помощью этой нормали, то согласно определению поверхностного интеграла второго рода получим

$$\iint\limits_{S^-} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} = \iint\limits_{S} \mathbf{a}(-\boldsymbol{\nu})\,dS. \tag{47.9}$$

Очевидно, что

$$\iint\limits_{S^-} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} \underset{(47.9)}{=} \iint\limits_{S} \mathbf{a}(-\boldsymbol{\nu})\,dS = -\iint\limits_{S} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS \underset{(47.5)}{=} -\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS}.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{S^-} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} = -\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS}, \tag{47.10}$$

т. е. при изменении ориентации поверхности интеграл второго рода меняет знак.

Если векторная функция $\mathbf{a}$ непрерывна на поверхности S, то интегралы $\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS}$ и $\iint\limits_{S^-} \mathbf{a}\,\mathbf{dS}$ существуют, так как в силу сказанного выше существуют интегралы, стоящие в правых частях равенств (47.5) и (47.9).

Замечание. Если поверхность кусочно гладкая (см. п. 46.5), то поверхностные интегралы первого и второго рода по ней определяются как суммы соответствующих интегралов по ее гладким частям.

47.2. Формулы для представления поверхностного интеграла второго рода в виде двойного интеграла. Пусть S — гладкая поверхность. Если она задана своим векторным представлением $S = \{\mathbf{r}(u,v);\ (u,v) \in \overline{G}\}$, то обычно через S^+ обозначается поверхность S, ориентированная с помощью вектора

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

Вспомнив, что $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \underset{(46.16)}{=} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$, получим

$$\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} \underset{(47.5)}{=} \iint\limits_{S} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS = \iint\limits_{G} \mathbf{a}\,\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv = \iint\limits_{G} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\,du\,dv, \tag{47.11}$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ — смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$.

Если $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, то формула (47.11) в координатной форме имеет вид

$$\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} = \iint\limits_{G} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}\,du\,dv, \tag{47.12}$$

где $P = P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $Q = Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $R = R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Если ориентированная поверхность S получена с помощью склейки из ориентированных поверхностей S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (см. п. 46.5), то по определению

$$\iint\limits_{S} \mathbf{a}\,d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i} \mathbf{a}\,d\mathbf{S}_i.$$

47.3. Некоторые специальные случаи поверхностных интегралов второго рода. Если поверхность S имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, то

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(здесь $x = u$, $y = v$), и потому для интеграла по верхней стороне $\widehat{S}$ (совпадающей в данном случае с S^+) поверхности S (см. пример в п. 46.6) в случае $P \equiv 0$ и $Q \equiv 0$ на S будем иметь

$$\iint\limits_{\widehat{S}} R\,dx\,dy \underset{(47.12)}{=} \iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))\,dx\,dy, \tag{47.13}$$

а для интеграла по нижней стороне $\check{S}$ (совпадающей здесь с S^-) поверхности S —

$$\iint\limits_{\check{S}} R\,dx\,dy = -\iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))\,dx\,dy. \tag{47.14}$$

При использовании координатной записи поверхностного интеграла второго рода (см. (47.6)) вместо $\iint\limits_{\widehat{S}} R\,dx\,dy$ иногда пишут просто $\iint\limits_{S} R\,dxdy$, а вместо $\iint\limits_{\check{S}} R\,dx\,dy$ соответственно $\iint\limits_{S} R\,dy\,dx$, т. е. в случае нижней стороны $\check{S}$ поверхности S дифференциалы dx и dy пишутся в обратном порядке.

Равенства (47.13) и (47.14) получены в предположении непрерывности функции R и гладкости поверхности S (т. е. непрерывной дифференцируемости на $\overline{G}$ функции f). Однако интегралы в правой части этих равенств имеют смысл, например, лишь при предположении непрерывности функций R и f. Поэтому естественно, если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\overline{G}$ области G, а функция $R = R(x, y, z)$ непрерывна на поверхности $S = \{z = f(x, y),\ (x, y) \in \overline{G}\}$, определить интегралы $\iint\limits_{\widehat{S}} R\,dx\,dy$ и $\iint\limits_{\check{S}} R\,dx\,dy$ равенствами

$$\begin{gathered} \iint\limits_{\widehat{S}} R\,dx\,dy = \iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))\,dx\,dy, \\ \iint\limits_{\check{S}} R\,dx\,dy = \iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))\,dx\,dy. \end{gathered} \tag{47.15}$$

В случае когда функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, а следовательно, ее график является гладкой поверхностью (в этом случае $x = u$, $y = v$, $|r_x \times r_y|^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2 \neq 0$), то, согласно доказанному выше, определение (47.15) равносильно для рассматриваемых здесь поверхностей определению (47.5).

Подчеркнем, что в сделанных здесь определениях определяются не в отдельности понятия верхней $\widehat{S}$ и нижней $\breve{S}$ стороны поверхности S, а лишь два интеграла, которые обозначаются соответственно символами $\iint\limits_{\widehat{S}}$ и $\iint\limits_{\breve{S}}$. По аналогии со случаем гладкой поверхности первый из них называется поверхностным интегралом по верхней, а второй — по нижней стороне поверхности S. В случае гладкой поверхности S эти интегралы совпадают с определенными раньше (см. (47.13) и (47.14)).

Нам потребуется еще понятие интеграла по определенного вида цилиндрическим поверхностям без предположения о гладкости этих поверхностей.

Если $\Gamma_0 = \{x(u), y(u);\ a \leqslant u \leqslant b\}$ — кривая на плоскости переменных x, y, то поверхность $S = \{x(u), y(u), v;\ a \leqslant u \leqslant b,\ 0 \leqslant v \leqslant h\}$ называется *цилиндрической поверхностью* с направляющей Γ_0 и образующей длины h, параллельной оси Oz (см. замечание 13 в п. 42.1).

Если Γ_0 — гладкая кривая, т. е. функции $x(u)$, $y(u)$ непрерывно дифференцируемы и $x_u^2 + y_u^2 > 0$ на отрезке $[a, b]$, а $\mathbf{r}(u, v) = x(u)\,\mathbf{i} + y(u)\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, то

$$\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, 0), \quad \mathbf{r}_v = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y_u\,\mathbf{i} - \mathbf{x}_u\,\mathbf{j} \neq 0, \quad (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,\mathbf{k} = 0.$$

Следовательно, если $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$, то $\boldsymbol{\nu}\,\mathbf{k} = 0$, т. е. единичная нормаль $\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ к поверхности S перпендикулярна к оси z, и поэтому $\cos\gamma = 0$. Отсюда

$$\iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S} R\cos\gamma\,dS = 0, \qquad \iint\limits_{S^-} R\,dx\,dy = -\iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy = 0.$$

В случае отсутствия предположения о гладкости кривой Γ_0 эти равенства примем за определение интегралов $\iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy$ и $\iint\limits_{S^-} R\,dx\,dy$ по цилиндрической поверхности S рассматриваемого вида или по поверхности S, являющейся частью такой цилиндрической поверхности:

$$\iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S^-} R\,dx\,dy \overset{\text{def}}{=} 0. \tag{47.16}$$

Аналогичным образом рассматриваются интегралы вида $\iint\limits_{S^\pm} P\,dy\,dz$ и $\iint\limits_{S^\pm} Q\,dz\,dx$.

В следующем пункте будет дано более общее определение поверхностного интеграла второго рода, для которого все рассмотренные выше интегралы будут являться частным случаем.

В заключении отметим, что в теории поверхностных интегралов понятие гладкой поверхности бывает удобно понимать в более общем смысле, чем это было определено в п. 46.1 (это делается по аналогии с расширением понятия гладкой кривой; см. п. 45.4*).

Поясним это на примере поверхности S, имеющей явное представление:

$$S = \{z = f(x, y);\ (x, y) \in \overline{G}\},$$

G — квадрируемая область, функция R непрерывна на поверхности S, т. е. непрерывна функция $R(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in \overline{G}$.

Пусть существует такое непрерывно дифференцируемое преобразование параметров

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \quad (u, v) \in \overline{D}, \tag{47.17}$$

D — квадрируемая область, что функция $z = f(x(u, v), y(u, v))$ является непрерывно дифференцируемой (функция f предполагается только непрерывной). Тогда поверхность S, задаваемая представлением

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = f(x(u, v),\, y(u, v)) \quad (u, v) \in \overline{D},$$

является непрерывно дифференцируемой, а если у нее нет особых точек, то в каждой ее точке существует единичная нормаль $\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$. Сделав в интеграле, стоящем в правой части равенства (47.15), замену переменной (47.17) и воспользовавшись формулой (47.12) (при $P = Q = 0$), получим

$$\iint\limits_{S} R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x(u, v),\, y(u, v),\, f(x(u, v), y(u, v))) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv \underset{\substack{(47.12)\\(47.8)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(47.12)\\(47.8)}}{=} \iint\limits_{S_1} R(x, y, z)\cos\gamma\,dS.$$

Таким образом, несмотря на то, что в этом случае исходное явное представление поверхности S не является, вообще говоря, дифференцируемым, для нее, какова бы ни была непрерывная на ней функ-

ция F, при надлежащем выборе параметров справедлива формула
$$\iint\limits_{S} F(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1} F(x,y,z)\cos\gamma\,dS. \tag{47.18}$$
Обычно в правой части этого равенства вместо S_1 пишут S, рассматривая S и S_1 как “одну и ту же поверхность” с разными параметризациями.

В результате преобразования параметров (47.17) из поверхности S получилась гладкая поверхность. Один из простейших примеров подобной ситуации дает полусфера, заданная как график функции $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 \leqslant 1$. Если сделать преобразование параметров $x = \cos\varphi\cos\psi$, $y = \sin\varphi\cos\psi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2/\pi$, то та же полусфера будет задаваться непрерывно дифференцируемым представлением
$$x = \cos\varphi\cos\psi, \quad y = \sin\varphi\cos\psi, \quad z = \sin\psi,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2/\pi,$$
и, следовательно, для нее справедлива формула (47.18).

Оказывается целесообразным следующим образом расширить понятие гладкой поверхности. Поверхность $\{M(u,v),\ (u,v) \in \overline{G}\}$ называется *гладкой*, если существует такое преобразование параметров
$$u = u(u_1,v_1)), \quad v = v(u_1,v_1), \quad (u_1,v_1) \in \overline{G}_1,$$
что поверхность $\{M(u(u_1,v_1),\ v(u_1,v_1));\ (u_1,v_1) \in \overline{G}_1\}$ является гладкой в старом смысле, т. е. в смысле определения, данного в п. 46.1. Поверхность, являющаяся объединением гладких в новом смысле поверхностей, называется, как и раньше, *кусочно гладкой.*

§ 48. Скалярные и векторные поля

48.1. Основные понятия. Действительную функцию $u(x,y,z)$, заданную на некотором множестве $E \subset R^3$, называют также *скалярным полем на этом множестве*, в отличие от векторных функций, называемых *векторными полями.*

Всякой дифференцируемой на области $G \subset R^3$ функции (или, что то же самое, дифференцируемому на G скалярному полю) $u(x,y,z)$ соответствует векторное поле ее градиентов
$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{48.1}$$

Если ввести символический вектор $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, то равенство (48.1) можно рассматривать как “формальное” произведение этого вектора на число
$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u.$$

Иначе говоря, ∇ — это оператор (векторнозначная функция), определенный на множестве дифференцируемых на области G функций.

Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) к поверхности уровня функции u, т. е. к поверхности, задаваемой неявно уравнением $u = \text{const}$, имеет вид (см. (46.13))

$$(x - x_0)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial u}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

где значения частных производных функции u берутся в точке (x_0, y_0, z_0).

Отсюда в силу геометрического смысла коэффициентов уравнения плоскости и из формулы (48.1) видно, что градиент ∇u перпендикулярен поверхности уровня функции u (т. е. касательной плоскости к этой поверхности уровня).

Если G — плоская область, $G \subset R^2_{xy}$, то градиент функции $u = u(x, y)$, определенный в G, имеет вид

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Поскольку уравнение касательной прямой к линии уровня $u = \text{const}$ функции u имеет вид (см. замечание в п. 40.1)

$$(x - x_0)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

то градиент ∇u функции u перпендикулярен ее линии уровня.

Если в области $G \subset R^3_{xyz}$ задано векторное поле $\mathbf{a}$ и существует скалярное в G поле $u(x, y, z)$, для которого векторное поле $\mathbf{a}$ является полем градиентов, т. е. $\mathbf{a} = \nabla u$, то функция u называется *потенциальной функцией* (или *потенциалом*) векторного поля $\mathbf{a}$.

Векторное поле, для которого существует потенциальная функция, называется *потенциальным полем.*

Если координаты вектора $\mathbf{a}$ обозначить P, Q, R, т. е. $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, и если $\mathbf{a} = \nabla u$, то

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Поэтому потенциальность непрерывного векторного поля $\mathbf{a}$ означает, что выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом:

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

В теории векторных полей имеются важные понятия *дивергенции* $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и *вихря* (или, что то же, *ротора*) $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ дифференцируемого в области G векторного поля $\mathbf{a} = (P, Q, R)$. Определим эти понятия формулами с помощью символического вектора ∇:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \mathbf{a} \tag{48.2}$$

— как "скалярное произведение" векторов ∇ и $\mathbf{a}$;

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{a} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{48.3}$$

— как "векторное произведение" этих же векторов.

В координатном виде эти определения записываются следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{48.4}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{48.5}$$

Если G — плоская область и, следовательно, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $R \equiv 0$ (рассматриваемые векторные поля лежат в тех же плоскостях или пространствах, в которых множество G является областью), то

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{48.6}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{48.7}$$

Определим еще понятия циркуляции и потока векторного поля $\mathbf{a}$.

Если Γ — кусочно гладкий замкнутый контур и векторное поле $\mathbf{a}$ задано на Γ, то криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} \tag{48.8}$$

называется также *циркуляцией векторного поля* $\mathbf{a}$ по этому контуру.

Если кусочно гладкая поверхность S ориентирована с помощью единичной нормали $\boldsymbol{\nu}$, то для векторного поля $\mathbf{a}$, заданного на поверхности S, поверхностный интеграл второго рода

$$\int\limits_{S^+} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \iint\limits_{S} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\, dS \tag{48.9}$$

называется также *потоком векторного поля через поверхность* S.

Если Γ — кусочно гладкая плоская кривая, а $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль к Γ, то для векторного поля $\mathbf{a}$, заданного на Γ, интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\, ds \tag{48.10}$$

называется *потоком векторного поля через контур* Γ.

48.2. Формула Гаусса–Остроградского. Пусть G — область в пространстве R^3_{xyz}. Предположим, что на плоскости R^2_{xy} существует такая квадрируемая область D, ограниченная спрямляемой кривой, что граница ∂G области G состоит из двух поверхностей S_1 и S_2, задаваемых явными представлениями соответственно $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, где функции φ и ψ непрерывны на замыкании $\overline{D}$ области D, $\varphi(x, y) < \psi(x, y)$, $(x, y) \in D$, и, быть может, поверхности S_0, являющейся частью цилиндрической поверхности, основанием которой является граница ∂D области D, а образующая параллельна оси Oz (см. п. 44.1):

$$\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_0. \tag{48.11}$$

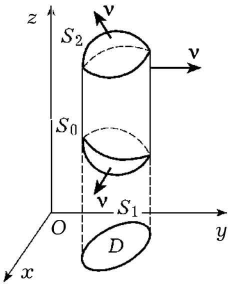

Рис. 178

В этом случае область G называется *элементарной относительно оси Oz* (рис. 178). Она имеет вид

$$G = \{(x, y, z)\colon\ (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}. \tag{48.12}$$

Мы уже встречались с областями такого типа при изучении вопроса о сведении кратного интеграла к повторному. Обозначим для краткости границу ∂G области G через S, тогда (см. (48.11))

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_0. \tag{48.13}$$

Пусть на S задана функция $F = F(x, y, z)$. Поверхностные интегралы второго рода $\iint\limits_{\check{S}_1} F(x, y, z)\,dx\,dy$ от функции F по нижней стороне поверхности S_1, $\iint\limits_{\widehat{S}_2} F(x, y, z)\,dx\,dy$ по верхней стороне поверхности S_2 и $\iint\limits_{S_0} F(x, y, z)\,dx\,dy$ по поверхности S_0 (см. п. 47.3) называются *поверхностными интегралами второго рода по внешним сторонам этих поверхностей*, а их сумма — *интегралом по внешней стороне поверхности S* и обозначается $\iint\limits_{S^+} F(x, y, z)\,dx\,dy$, т. е.

$$\iint\limits_{S^+} F(x, y, z)\,dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_{\check{S}_1} F(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{\widehat{S}_2} F(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0} F(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{48.14}$$

Аналогично определяется *поверхностный интеграл* $\iint\limits_{S^-} F(x, y, z)\,dx\,dy$

по внутренней стороне поверхности S:

$$\iint\limits_{S^-} F(x,y,z)\,dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_{\widehat{S}_1} F(x,y,z)\,dx\,dy + \iint\limits_{\breve{S}_2} F(x,y,z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0} F(x,y,z)\,dx\,dy. \quad (48.15)$$

Напомним (п. 47.3), что $\iint\limits_{S_0} F(x,y,z)\,dx\,dy = 0$ и, следовательно, это слагаемое можно было бы и не писать. Оно пишется для того, чтобы формулы (48.14) и (48.15) формально соответствовали формуле (48.13). Как будет видно из дальнейшего, это оказывается очень удобным.

Если поверхности S_1, S_2 и S_0 кусочно гладкие, то интеграл $\iint\limits_{S^+} F(x,y,z)\,dx\,dy$ представляет собой поверхностный интеграл по поверхности S, ориентированный с помощью внешней единичной нормали $\boldsymbol{\nu}$. В этом случае, если

$$\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \quad (48.16)$$

то

$$\iint\limits_{S^+} F(x,y,z)\,dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_{S} F(x,y,z)\cos\gamma\;dS. \quad (48.17)$$

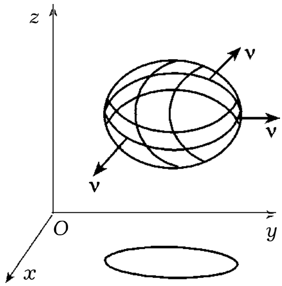

Рис. 179

Здесь термин "кусочно гладкая поверхность" понимается в смысле общего определения в п. 47.3.

Аналогично областям, элементарным относительно оси Oz, определяются области G, элементарные относительно осей Ox, Oy, и интегралы

$$\iint\limits_{S^+} F\,dy\,dz, \quad \iint\limits_{S^-} F\,dy\,dz, \quad \iint\limits_{S^+} F\,dz\,dx, \quad \iint\limits_{S^-} F\,dz\,dx \quad (48.18)$$

по внешней и внутренней сторонам поверхности S.

Области, элементарные относительно всех координатных осей, называются *элементарными* (рис. 179). Примерами элементарных областей являются пирамиды, параллелепипеды, вообще любые выпуклые многогранники, шары, эллипсоиды и т. п.

Для элементарных областей определены интегралы по внешней стороне S^+ их границы вида

$$\iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

и по внутренней стороне S^- их границы вида

$$\iint\limits_{S^-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Теорема 1. *Если функции* $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ *и* $R = R(x, y, z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ *на замыкании* $\overline{G}$ *элементарной области* G, *то имеет место формула*

$$\iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{48.19}$$

где интеграл в правой части равенства берется по внешней стороне поверхности S, *ограничивающей область* G.

Формула (48.19) называется *формулой Гаусса–Остроградского**).

Следствие. *Если при выполнении условий теоремы граница области* G *кусочно гладкая, то*

$$\iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS, \tag{48.20}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *и* $\cos\gamma$ — *направляющие косинусы внешней единичной нормали* $\boldsymbol{\nu}$ *к поверхности* S (см. (48.16)). *Введя обозначение*

$$\mathbf{a} = (P, Q, R), \tag{48.21}$$

формулу (48.20) *можно записать в виде*

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div}\mathbf{a}\ \ dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{48.22}$$

Таким образом, *интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля в направлении внешней нормали через поверхность, ограничивающую область.*

▷ Рассмотрим одно из слагаемых подынтегральной функции в левой части равенства (48.19), например последнее. В силу того, что область G элементарна относительно оси Oz, кратный интеграл $\iiint\limits_{G} \dfrac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$ можно заменить повторным. Сделав это и применив

*) К.Ф. Гаусс (1777–1855) — немецкий математик; М.В. Остроградский (1801–1861) — русский математик.

формулу Ньютона–Лейбница, получим

$$\iiint\limits_G \frac{\partial \bar{R}}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D [R(x,\,y,\,\psi(x,y)) - R(x,\,y,\,\varphi(x,y))]\,dx\,dy \underset{\substack{(47.15)\\(47.16)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(47.15)\\(47.16)}}{=} \iint\limits_{\widehat{S}_2} R\,dx\,dy + \iint\limits_{\check{S}_1} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy. \quad (48.23)$$

Аналогичным образом доказываются равенства

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz, \quad \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} Q\,dz\,dx. \quad (48.24)$$

Сложив равенства (48.23) и (48.24), получим формулу (48.19). $\lhd$

Формула (48.20) в случае кусочно гладкой границы элементарной области G следует из формулы (48.19) и соотношения (47.7).

Замечание. Тем же методом, как это делалось на плоскости в случае формулы Грина, формулу Гаусса–Остроградского можно распространить на случай областей, которые разбиваются на конечное множество элементарных областей.

Формулу Гаусса–Остроградского можно доказать и для любой области с кусочно гладкой границей, но это значительно сложнее.

48.3. Геометрическое определение дивергенции.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{a}(M)$ *— непрерывно дифференцируемое в области* $G \subset R^3$ *векторное поле,* $M_0 \in G$, $\{D\}$ *— семейство ограниченных областей с кусочно гладкими границами* ∂D, *содержащее области сколь угодно малого диаметра и такое, что* $M_0 \in D \subset \overline{D} \subset G$, *а* $\boldsymbol{\nu}$ *— внешняя нормаль на границе* S *области* D. *Тогда*

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = \lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \frac{\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS}{\mu D}. \quad (48.25)$$

Предел в правой части этого равенства означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждой рассматриваемой области D, для которой $\operatorname{diam} D < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS}{\mu D} - \operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) \right| < \varepsilon.$$

В качестве системы множеств $\{D\}$ можно взять, например, систему всех кубов, содержащих точку M_0.

▷ Применив к векторному полю $\mathbf{a}$ в области D формулу Гаусса–Остроградского, а затем интегральную теорему о среднем, получим

$$\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS = \iiint\limits_{D} \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\mathbf{a}(M)\mu D,$$

где $M \in D$ и, следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\boldsymbol{\nu}\,dS}{\mu D}. \tag{48.26}$$

Поскольку $M \in D$ и $M_0 \in D$, то $\lim\limits_{\operatorname{diam} D\to 0} M = M_0$, а следовательно, в силу непрерывности дивергенции $\lim\limits_{\operatorname{diam} D\to 0} \operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \operatorname{div}\mathbf{a}(M_0)$. Поэтому, перейдя к пределу при $\operatorname{diam} D \to 0$ в обеих частях равенства (48.26), получим формулу (48.25). ◁

Формула (48.25) дает геометрическое определение дивергенции в том смысле, что правая часть этой формулы записана через скалярное произведение векторов, объем области и площадь поверхности, которые не зависят от выбора координат в пространстве. Отсюда следует, что и дивергенция векторного поля не зависит от выбора координат.

Точки, в которых дивергенция векторного поля не равна нулю, называются *источниками* векторного поля.

48.4. Формула Стокса. Пусть в пространстве R^3 фиксированы правая или левая системы координат (x, y, z): правая, когда обход против часовой стрелки в плоскости переменных x и y согласован с направлением оси переменной z по правилу штопора, и левая, когда — по правилу антиштопора. Сказанное не является, конечно, математическим определением, однако придает наглядность изложению.

Пусть поверхность S является графиком функции $z = f(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемой на замыкании $\overline{G}$ области $G \subset R^2_{xy}$:

$$S = \{(x, y, z)\colon\ (x, y) \in \overline{G},\ z = f(x, y)\},$$

и границей области G является кусочно гладкий контур. Обозначим его через Γ_0, а его образ при отображении f, т. е. график сужения функции f на множество Γ_0, через Γ. Контур Γ является краем поверхности S. Очевидно, Γ_0 является проекцией, параллельной оси Oz контура Γ, на координатную плоскость переменных x, y.

Пусть

$$\Gamma_0^+ = \{x(t), y(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{48.27}$$

— положительно ориентированный на плоскости переменных x, y контур Γ_0. Ориентация контура Γ_0 в силу отображения f порождает ориентацию контура Г. Контур Г, ориентированный в соответствии с ориентацией контура Γ_0^+, обозначим Γ^+, т. е.

$$\Gamma^+ = \{x(t), y(t), f(x(t), y(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}; \tag{48.28}$$

Γ^+ называется *положительно ориентированным краем* поверхности S.

Через

$$\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) \tag{48.29}$$

обозначим единичную нормаль на поверхности S, составляющую острый угол с осью z (см. (46.28)) или, что то же самое, направленную соответственно (по "правилу штопора" в случае правой системы координат и по "правилу антиштопора" в случае левой) с ориентацией контура Γ^+ (рис. 180).

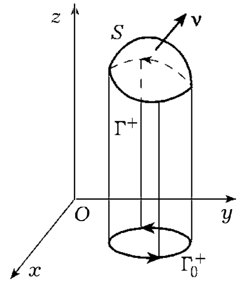

Рис. 180

В формулировке нижеследующей теоремы и при ее доказательстве будем использовать введенные обозначения и сделанные предположения без дополнительных пояснений.

Теорема 3. *Если векторное поле* $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ *непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности дважды непрерывно дифференцируемой поверхности* S, *то*

$$\iint\limits_S \boldsymbol{\nu}\operatorname{rot}\mathbf{a}\, dS = \iint\limits_{\Gamma^+} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}. \tag{48.30}$$

или, в координатной записи,

$$\int\limits_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \tag{48.31}$$

Формула (48.30) называется *формулой Стокса* *).

Она означает, что *поток вихря векторного поля через поверхность равен циркуляции этого векторного поля по краю поверхности, ориентированному согласованно с нормалью к поверхности.*

$\triangleright$ Рассмотрим интеграл от первого слагаемого подынтегральной функции левой части равенства (48.31). Согласно формуле, выражающей криволинейный интеграл через интеграл по параметру, имеем

$$\int\limits_{\Gamma^+} P(x, y, z)\,dx \underset{(48.28)}{=} \int\limits_a^b P(x(t),\ y(t),\ f(x(t), y(t)))x'(t)\,dt \underset{(48.27)}{=} \\ \underset{(48.27)}{=} \int\limits_{\Gamma_0^+} P(x, y, f(x, y))\,dx, \tag{48.32}$$

*) Дж. Стокс (1819–1903) — английский механик и математик.

т. е. рассматриваемый криволинейный интеграл от функции $P(x, y, z)$ по контуру Γ^+ равен криволинейному интегралу от функции $P(x, y, f(x, y))$ по проекции Γ_0^+ контура Γ.

Применив к получившемуся интегралу формулу Грина (45.81) (здесь $Q \equiv 0$) и вспомнив формулу (47.13), выражающую поверхностный интеграл через кратный, получим

$$\int\limits_{\Gamma^+} P(x, y, z)\,dx \underset{(48.32)}{=} \int\limits_{\Gamma_0^+} P(x, y, f(x, y))\,dx \underset{(45.81)}{=} -\iint\limits_G \frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial y}\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_G \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]\Bigg|_{z=f(x,y)} dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_G \frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial y}\,dx\,dy - \iint\limits_G \frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy \underset{\substack{(47.8)\\(47.13)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(47.8)\\(47.13)}}{=} -\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,dS - \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma\,dS. \qquad (48.33)$$

Напомним (см. (48.29) и (46.28)), что

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \qquad (48.34)$$

Отсюда следует, что

$$\cos\beta = -\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma.$$

Подставив это выражение для косинуса в (48.33), получим

$$\int\limits_{\Gamma^+} P\,dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS. \qquad (48.35)$$

Аналогично доказывается равенство

$$\int\limits_{\Gamma^+} Q\,dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\gamma\;dS = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS \qquad (48.36)$$

(в этом случае перед интегралами, стоящими в правой части формулы, аналогичной формуле (48.33), согласно формуле Грина не будет знаков минуса).

Несколько другой вид имеют преобразования интеграла $\int\limits_{\Gamma^+} R\,dz$:

$$\int\limits_{\Gamma^+} R(x, y, z)\,dz \underset{(48.28)}{=} \int\limits_a^b R(x(t),\, y(t),\, f(x(t), y(t)))\,z'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b R(x(t),\, y(t),\, f(x(t), y(t)))\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x}\cdot x'(t) + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y}\cdot y'(t)\Big]\, dt \underset{(48.27)}{=}$$

$$\underset{(48.27)}{=} \int_{\Gamma_0^+} R(x, y, f(x,y))\Big[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dy\Big] \underset{(45.81)}{=}$$

$$\underset{(45.81)}{=} \iint_G \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(R\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(R\,\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Big]dx\, dy =$$

$$= \iint_G \Big[\Big(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\frac{\partial f}{\partial y} + R\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \Big(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\frac{\partial f}{\partial x} -$$

$$- R\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\Big]dx\, dy = \iint_G \Big(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\, dx\, dy \underset{\substack{(47.8)\\(47.13)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(47.8)\\(47.13)}}{=} \iint_S \Big(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma\Big)\, dS \underset{(48.34)}{=}$$

$$\underset{(48.34)}{=} \iint_S \Big(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\Big)\, dS. \tag{48.37}$$

Сложив (48.35), (48.36) и (48.37), получим

$$\int_{\Gamma^+} P\, dx + Q\, dy + R\, dz =$$

$$= \iint_S \Big[\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big]\, dS,$$

а это является другой записью формулы (48.31). ◁

Замечание 1. Формулу Стокса можно доказать, предположив лишь, что функция $z = f(x,y)$ непрерывно дифференцируема (а не дважды непрерывно дифференцируема, как это было потребовано в формулировке теоремы 3), но это значительно сложнее. В приведенном доказательстве возникала (где?), а затем исчезала вторая производная $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$.

Замечание 2. Если S — ориентированная кусочно гладкая поверхность, получающаяся склейкой гладких ориентированных поверхностей S_i, $i = 1, 2, ..., k$, и если формула Стокса справедлива для всех поверхностей S_i, то она справедлива и для поверхности S:

$$\iint_S \boldsymbol{\nu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\, dS = \int_{\partial S} \mathbf{a}\, d\mathbf{r},$$

где ∂S — ориентированный край поверхности, ориентация которого порождается ориентациями ∂S_i, согласованными с нормалями $\boldsymbol{\nu}_i$, поверхностей S_i.

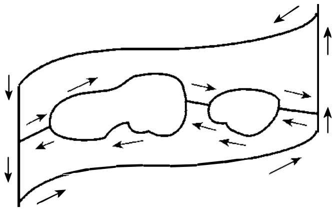

Рис. 181

Для доказательства достаточно написать формулы Стокса для каждой поверхности S_i:

$$\iint\limits_{S_i} \boldsymbol{\nu}_i \operatorname{rot} \mathbf{a} \, dS_i = \int\limits_{\partial S_i} \mathbf{a} \, d\mathbf{r},$$

$$i = 1, 2, ..., k,$$

и сложить получившиеся равенства (рис. 181).

Можно доказать, что теорема Стокса верна для любого непрерывно дифференцируемого векторного поля на любой ориентируемой кусочно гладкой поверхности, край которой состоит из конечного множества замкнутых кусочно гладких контуров, причем их ориентация выбирается согласованной с ориентацией $\boldsymbol{\nu}$ поверхности.

48.5. Геометрическое определение вихря. Пусть в области $G \subset R^3$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, $M_0 \in G$, $\boldsymbol{\nu}$ — произвольно фиксированный единичный вектор.

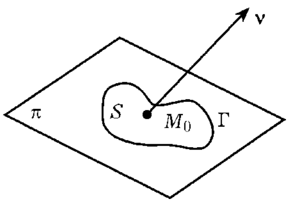

Рис. 182

Найдем формулу для проекции вихря $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ в точке M_0 на направление вектора $\boldsymbol{\nu}$, т. е. для величины $\boldsymbol{\nu} \operatorname{rot} \mathbf{a}$. Для этого проведем плоскость π через точку M_0 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\nu}$ (рис. 182). Возьмем на плоскости π какую-либо область $S \subset G$, содержащую точку M_0 и ограниченную кусочно гладким контуром Г. Контур Г, ориентированный согласованно (по правилу штопора) с направлением нормали $\boldsymbol{\nu}$, обозначим через Γ^+.

Теорема 4. *Имеет место формула*

$$\boldsymbol{\nu} \operatorname{rot} \mathbf{a}(M_0) = \lim_{\operatorname{diam} S \to 0} \frac{\int\limits_{\Gamma^+} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}}{\mu S}. \tag{48.38}$$

$\triangleright$ Применив к векторному полю $\mathbf{a}$ на поверхности S формулу Стокса, а затем интегральную теорему о среднем, получим

$$\int\limits_{\Gamma^+} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \iint\limits_S \boldsymbol{\nu} \operatorname{rot} \mathbf{a} \, dS = \boldsymbol{\nu} \operatorname{rot} \mathbf{a}\big|_M \mu S, \quad M \in S,$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{\nu}\operatorname{rot}\mathbf{a}\big|_M = \frac{\displaystyle\int\limits_{\Gamma^+}\mathbf{a}\,d\mathbf{r}}{\mu S}. \tag{48.39}$$

Поскольку $\lim\limits_{\operatorname{diam} S\to 0} M = M_0$, то в силу непрерывности функции $\boldsymbol{\nu}\operatorname{rot}\mathbf{a}$ имеем

$$\lim_{\operatorname{diam} S\to 0}\boldsymbol{\nu}\operatorname{rot}\mathbf{a}\big|_M = \boldsymbol{\nu}\operatorname{rot}\mathbf{a}\big|_{M_0}.$$

Поэтому, перейдя в обеих частях равенства (48.39) к пределу, получим формулу (48.38). $\triangleleft$

В правую часть равенства (48.38) входят скалярное произведение $\mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ и площадь множества S. И то, и другое не зависит от выбора системы координат. Кроме того, в правую часть равенства (48.38) входит криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\Gamma}\mathbf{a}\,d\mathbf{r}$, знак которого зависит от ориентации контура Γ. При изменении ориентации системы координат ориентация контура Γ, согласованная с направлением нормали $\boldsymbol{\nu}$, также меняется. Таким образом, правая часть равенства (48.38) не зависит от выбора системы координат, сохраняющей ориентацию (и меняет знак на противоположный при изменении ориентации системы координат).

Выбрав в качестве векторов $\boldsymbol{\nu}$ три единичных линейно независимых вектора, получим по формуле (48.38) три проекции ротора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на эти векторы. Этими своими проекциями ротор однозначно определяется. Поскольку они не зависят от выбора системы координат с одинаковой ориентацией, то и сам ротор не зависит от выбора таких координат. В силу сказанного выше из формулы (48.38) следует также, что при изменении ориентации системы координат на противоположную ротор меняет направление, что, впрочем, сразу видно и из формулы (48.3).

48.6. Соленоидальные векторные поля. Непрерывное в области $G \subset R^3$ векторное поле $\mathbf{a}$ называется *соленоидальным* в этой области, если для любой ограниченной области $D \subset G$ с кусочно гладкой границей $\partial D \subset G$ его поток через эту границу равен нулю:

$$\int\limits_{\partial D}\mathbf{a}\,\mathbf{d}\boldsymbol{S}. \tag{48.40}$$

Таким образом, соленоидальность векторного поля в некоторой области G означает не то, что равен нулю его поток через любую кусочно гладкую поверхность, лежащую в области G и являющуюся границей какой-то области D, а то что указанный поток равен нулю во всяком случае тогда, когда область D вместе со своей границей содержится в области G:

$$D \cup \partial D = \overline{D} \subset G.$$

Заметим, что если поток векторного поля через какую-либо поверхность равен нулю при некотором выборе ориентации этой поверхности, то он, очевидно, равен нулю и при противоположной ориентации (при изменении ориентации поверхности абсолютная величина потока не меняется, может только измениться его знак). Поэтому в формуле (48.40) не указана ориентация поверхности ∂D.

Теорема 5. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в некоторой области векторное поле* **a** *было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области его дивергенция равнялась нулю*:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0. \tag{48.41}$$

$\triangleright$ Необходимость. Пусть векторное поле **a** соленоидально в области G и $M \in G$. Поскольку точка M — внутренняя для G, то все достаточно малые по диаметру шары D с центром в этой точке содержатся вместе с их границами ∂D в области G (рис. 183). В силу соленоидальности поля **a** его поток через сферы ∂D, ограничивающие эти шары, равны нулю:

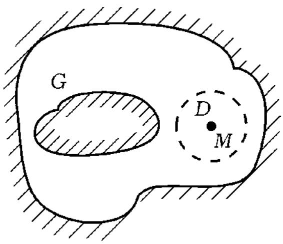

Рис. 183

$$\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = 0, \tag{48.42}$$

а следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) \underset{(48.25)}{=} \lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \frac{\displaystyle\int\limits_{\partial D} \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{\mu D} \underset{(48.42)}{=} 0.$$

Достаточность. Если выполняется условие (48.41), то для любой области $D \subset G$ с кусочно гладкой границей $\partial D \subset G$ в силу формулы Гаусса–Остроградского имеем

$$\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} \underset{\substack{(47.5)\\(48.22)}}{=} \iiint\limits_{D} \operatorname{div} \mathbf{a}\ dx\, dy\, dz \underset{(48.41)}{=} 0. \quad \triangleleft$$

Пример. Пусть $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{r} \neq 0$. Найдем его дивергенцию. Заметив, что $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{x}{r}$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{r^3 - 3xr\,\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Поэтому $\operatorname{div} \dfrac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ и, следовательно, векторное поле $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$ является, согласно теореме 5, соленоидальным в пространстве R^3 с выколотым началом координат. Поэтому его поток через любую кусочно гладкую поверхность, ограничивающую область, не содержащую начала координат, равен нулю.

48.7. Потенциальные векторные поля. Под областью G будем понимать либо область на плоскости R^2, либо область в пространстве R^3, кроме, конечно, тех случаев, когда будет оговорено что-либо определенное.

Пусть в области G задано непрерывное векторное поле $\mathbf{a}$.

Через $\overset{\frown}{AB}$ будем обозначать кусочно гладкую кривую, лежащую в области G, началом которой является точка A, а концом — точка B.

Напомним, что (п. 48.1) векторное поле $\mathbf{a}$ называется *потенциальным*, если у него существует потенциальная функция. Это свойство для непрерывных векторных полей равносильно тому, что циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру равна нулю, или, что то же самое, что интеграл $\displaystyle\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B. Начнем с доказательства этого утверждения. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Для того чтобы для любого кусочно гладкого замкнутого контура* Γ, *лежащего в области* G, *циркуляция по нему векторного поля* $\mathbf{a}$ *равнялась нулю, т. е.*

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0, \tag{48.43}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых точек $A \in G$ *и* $B \in G$ *интеграл* $\displaystyle\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ *не зависел от выбора кривой* $\overset{\frown}{AB}$, *соединяющей эти точки в области* G.

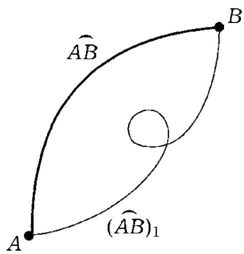

Рис. 184

▷ Если выполнено условие (48.43), $A \in G$, $B \in G$, а $\overset{\frown}{AB}$ и $(\overset{\frown}{AB})_1$ — кусочно гладкие кривые, соединяющие в G точки A и B, то, заметив, что кривая $\Gamma = \overset{\frown}{AB} \cup (\overset{\frown}{BA})_1$ является кусочно гладким замкнутым контуром (рис. 184), будем иметь

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} \underset{(45.15)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int\limits_{(\overset{\frown}{BA})_1} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} \underset{(48.43)}{=} 0,$$

откуда и следует, что

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}. \tag{48.44}$$

Если, наоборот, для любых точек $A \in G$, $B \in G$ и любых кусочно гладких кривых $\overset{\frown}{AB} \subset G$ и $(\overset{\frown}{AB})_1 \subset G$ выполняется условие (48.44), а Γ — кусочно гладкий замкнутый контур, лежащий в G, то, выбрав на нем какие-либо две точки $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$, получим $\Gamma = \overset{\frown}{AB} \cup (\overset{\frown}{BA})_1$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int\limits_{(\overset{\frown}{BA})_1} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0. \quad \lhd$$

Теорема 6. *Для того чтобы непрерывное векторное поле было потенциальным в области, необходимо и достаточно, чтобы его циркуляция по любому кусочно гладкому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равнялась нулю.*

$\rhd$ Пусть для определенности G — область в трехмерном пространстве. Если векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ потенциальное в G, то это означает, что существует потенциальная функция $u = u(M) = u(x, y, z)$, $M = (x, y, z) \in G$, т. е. такая функция u, что $\nabla u = \mathbf{a}$ в G, или, в координатной записи,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R, \tag{48.45}$$

иначе говоря, выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является дифференциалом функции $u = u(x, y, z)$.

Пусть $A \in G$, $B \in G$ и

$$\overset{\frown}{AB} = \{x(t),\ y(t),\ z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$$

— кусочно гладкая кривая, соединяющая в G точки A и B; тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \underset{(45.19)}{=}$$

$$\underset{(45.19)}{=} \int\limits_a^b \left[\frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial y} y'(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial z} z'(t)\right] dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt} u(x(t), y(t), z(t))\,dt =$$

$$= u(x(b), y(b), z(b)) - u(x(a), y(a), z(a)) = u(B) - u(A).$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ не зависит от выбора кривой $\overset{\frown}{AB}$, соединяющей точки A и B, а зависит только от самих этих точек. Следовательно, согласно лемме выполняется и условие (48.43).

Пусть теперь циркуляция векторного поля $\mathbf{a}$ по любому замкнутому контуру, лежащему в области G, равна нулю. Зафиксируем какую-либо точку $M_0 \in G$. Определим функцию $u(M)$ по формуле

$$u(M) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \quad M \in G, \tag{48.46}$$

где $\overset{\frown}{M_0M}$ — какая-либо кривая, соединяющая в G точки M_0 и M. Формула (48.46) определяет однозначную функцию в G, так как интеграл (48.46) не зависит от пути интегрирования, соединяющего в G точки M_0 и M (см. лемму). Покажем, что функция $u(M)$ является потенциальной функцией векторного поля $\mathbf{a}$. Для этого вычислим частные производные функции $u(M)$ в точке M.

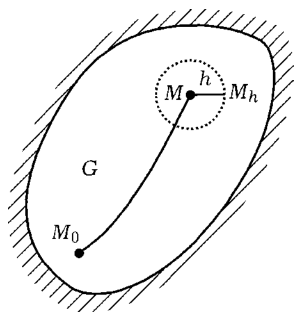

Рис. 185

Поскольку точка M внутренняя для области G, то существует такое число $\delta > 0$, что δ-окрестность точки M содержится в G (рис. 185). Если $0 < |h| < \delta$, то отрезок MM_h с концами в точках $M = (x, y, z)$ и $M_h = (x+h, y, z)$ лежит в области G, и, следовательно, по нему можно брать интеграл $\int\limits_{MM_h} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$. Поскольку отрезок MM_h параллелен оси x, то (см. формулу (45.14), в которой в рассматриваемом здесь случае $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, $s = x$)

$$\int\limits_{MM_h} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{MM_h} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds = \int\limits_{M\bar{M}_h} P(x, y, z)\,dx. \tag{48.47}$$

Поэтому

$$u(x+h, y, z) - u(x,\, y,\, z) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}\cup MM_h} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} - \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{M\bar{M}_h} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} \underset{(48.47)}{=}$$

$$\underset{(48.47)}{=} \int\limits_{MM_h} P(x, y, z)\,dx \underset{(45.19)}{=} \int\limits_0^h P(x+t,\, y,\, z)\,dt = P(x+\theta h,\, y,\, z)h,$$

$$0 < \theta < 1$$

(в конце, использовав непрерывность векторного поля $\mathbf{a}$ и, следовательно, непрерывность функции $P(x, y, z)$, мы применили интеграль-

ную теорему о среднем). Отсюда следует, что существует предел
$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y,z)-u(x,y,z)}{h}=P(x,y,z),$$
и, таким образом, в точке M имеет место равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$.

Аналогично доказываются равенства $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=R$, т. е. действительно функция $u(x,y,z)$ является потенциальной функцией для векторного поля $\mathbf{a}$. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в процессе доказательства теоремы мы получили полезную формулу для вычисления интеграла $\displaystyle\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ в случае, когда известна потенциальная функция $u(M)$ векторного поля $\mathbf{a}(M)$: $\displaystyle\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\mathbf{a}\,d\mathbf{r}=u(B)-u(A)$.

Эта формула является прямым обобщением формулы Ньютона–Лейбница для интегралов по отрезку.

Условие (48.43) потенциальности поля так же, как и существование потенциальной функции, трудно проверяемы. Докажем для одного класса областей более удобный для применения критерий потенциальности поля.

О п р е д е л е н и е 1. Множество $X\subset R^3$ называется *односвязным*, если для любого кусочно гладкого замкнутого контура, лежащего в X, существует кусочно гладкая ориентируемая поверхность S, краем которой он является и которая также лежит в X.

Рассматриваемые здесь поверхности S могут самопересекаться. В случае, когда множество X лежит на некоторой плоскости $R^2\subset R^3$, согласно сделанному определению поверхность S также помещается на той же плоскости.

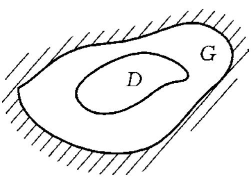

Рис. 186

Можно показать, что определение односвязности для п л о с к и х о б л а с т е й равносильно выполнению следующего условия: каков бы ни был кусочно гладкий простой замкнутый контур, лежащий а области G, ограниченная им конечная область D также содержится в G (рис. 186). Наглядно это означает, что плоская область односвязна тогда, когда она не имеет “дыр”.

Примерами односвязных областей являются выпуклые области, в частности, вся плоскость в плоском случае и все пространство в пространственном случае. В пространстве односвязной областью может быть и область с “дырами”, например, открытый шаровой слой, т. е.

множество точек, лежащих между двумя концентрическими сферами. Примером неодносвязной области на плоскости является плоское кольцо, а в пространстве — тор.

Теорема 7. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле было потенциальным в односвязной области* (*плоской или пространственной*), *необходимо и достаточно, чтобы его вихрь в этой области равнялся нулю.*

Таким образом, векторное поле $\mathbf{a}$ потенциально в односвязной области G тогда и только тогда, когда в G

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0. \tag{48.48}$$

Если G — трехмерная область и $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, то в координатной записи условие (48.48) имеет вид (см. (48.5))

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{48.49}$$

Если же G — плоская область, $\mathbf{a} = (P, Q)$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, то координатная запись условия (48.48) приобретает вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{48.50}$$

$\triangleright$ Если поле $\mathbf{a}$ потенциальное, т. е. у него существует потенциальная функция u, то (см. (48.45))

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{48.51}$$

В этом случае равенства (48.49) имеют место (даже и без условия односвязности области G), так как они означают равенство смешанных вторых производных потенциальной функции u, например,

$$\frac{\partial R}{\partial y} \underset{(48.51)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \underset{(48.51)}{=} \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Наоборот, если выполняется условие (48.48), или, что то же самое, условие (48.49), и Γ — кусочно гладкий замкнутый контур, лежащий в области G, то в силу ее односвязности существует кусочно гладкая ориентируемая поверхность $S \subset G$, для которой контур Γ является ее краем, а тогда по теореме Стокса

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot}\mathbf{a}\, \mathbf{dS} \underset{(48.48)}{=} 0,$$

т. е. выполняется условие потенциальности векторного поля $\mathbf{a}$ (см. теорему 6). $\triangleleft$

Замечание 2. При доказательстве необходимости условий теоремы не использовалась односвязность области, в которой задано векторное поле. Это означает, что потенциальное поле в любой области является безвихревым, т. е. его вихрь равен нулю во всех точках области.

Замечание 3. Условие потенциальности $\mathbf{a} = \nabla u$ непрерывного векторного поля $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ в некоторой области равносильно тому, что функция $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом функции $u = u(x, y, z)$ в указанной области. Поэтому теорема 7 может быть перефразирована следующим образом.

Если функции $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемы в односвязной области G, то для того, чтобы функция $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ была в G полным дифференциалом некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы в области G выполнялись условия (48.49).

Замечание 4. Если функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то теорема 7 дает ответ на вопрос: когда существует окрестность точки (x_0, y_0, z_0), в которой функция $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y, z)$? Действительно, поскольку открытый шар является односвязной областью, то согласно теореме 7 ответ на поставленный вопрос гласит: тогда и только тогда, когда у точки (x_0, y_0, z_0) существует окрестность, в которой выполняются условия (48.49), так как если существует какая-то окрестность, обладающая этим свойством, то существует и шаровая окрестность с тем же свойством.

Пример. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{r} \neq 0$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}|$, соленоидальность которого в пространстве R^3 с выколотым началом координат была доказана в п. 48.6. Заметив, что $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x} = -\dfrac{x}{r^3}$, нетрудно увидеть, что функция $u = -\dfrac{1}{r}$ является потенциалом векторного поля $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$:

$$\nabla\left(-\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Таким образом, рассматриваемое векторное поле является не только соленоидальным, но и потенциальным.

С физической точки зрения векторное поле $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$ представляет собой поле напряженностей единичного заряда.

§ 49. Интегралы, зависящие от параметра

49.1. Равномерная сходимость по параметру семейства функций. Пусть X — произвольное множество, $Y \subset R^n$, y_0 — либо точка пространства R^n, либо $y_0 = \infty$, причем любая окрестность y_0 пересекается с множеством Y (т. е. y_0 — конечная или бесконечно удаленная точка прикосновения множества Y). Пусть, далее, функция $f(x,y)$ задана на произведении $X \times Y$, а функция φ — на множестве X (рис. 187, на котором X — отрезок на оси x, Y — числовое множество на оси y, а y_0 — его предельная точка).

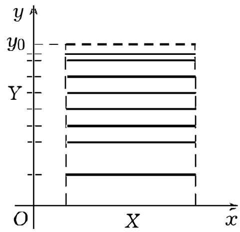

Рис. 187

При каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x,y)$ является функцией от x, поэтому функцию f иногда называют *семейством указанных функций от x с параметром y.*

Определение 1. Функции семейства $f(x,y)$ называются *равномерно стремящимися на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $x \in X$ и всех $y \in$ $\in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{49.1}$$

В этом случае будем писать

$$f(x,y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to y_0. \tag{49.2}$$

Здесь, как и обычно при предельном переходе, возможны случаи $y_0 \in Y$ и $y_0 \notin Y$.

Замечание 1. Если имеет место равномерная сходимость (49.2) и $\{y_n\}$ — такая последовательность точек $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0, \tag{49.3}$$

то последовательность функций

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x, y_n) \tag{49.4}$$

равномерно стремится на множестве X к функции φ при $n \to \infty$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ в силу условия (49.2) найдется такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для нее будет выполняться неравенство (49.1). Согласно же условию (49.3) существует такое n_0, что для всех $n > n_0$ будет иметь место включение

$$y_n \in U(y_0) \cap Y, \tag{49.5}$$

и, следовательно, для всех $x \in X$ при $n > n_0$ получим

$$|f_n(x) - \varphi(x)| \underset{(49.4)}{=} |f(x, y_n) - \varphi(x)| \underset{\substack{(49.5)\\(49.1)}}{<} \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad n \to \infty.$$

Лемма 1. *Для того чтобы имела место равномерная сходимость* (49.2), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{y\to y_0} \sup_X |f(x,y) - \varphi(x)| = 0. \tag{49.6}$$

$\triangleright$ 1. Если выполняется условие (49.2), то согласно определению для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани по $x \in X$, получим, что для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ имеет место неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (49.6).

2. Если же выполнено условие (49.6), то для произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

а следовательно, для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ — неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие (49.2). $\triangleleft$

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы имела место равномерная сходимость* (49.2), *необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $x \in X$ и всех $y' \in U(y_0) \cap Y$, $y'' \in U(y_0) \cap Y$ выполнялось неравенство*

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \varepsilon. \tag{49.7}$$

$\triangleright$ 1. Если выполняется условие (49.2), то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если $x \in X$, $y' \in U(y_0) \cap Y$ и $y'' \in U(y_0) \cap Y$, то

$$|f(x, y'') - f(x, y')| \leqslant |f(x, y'') - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие (49.7).

2. Если выполняется условие (49.7), то при любом фиксированном x функция $f(x, y)$ переменного y удовлетворяет критерию Коши существования предела функции, и потому существует $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) =$

$= \varphi(x)$. Переходя к пределу в неравенстве (49.7) при $y'' \to y_0$, получим, что для любого $x \in X$ и любого $y' \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - f(x, y')| \leqslant \varepsilon,$$

что равносильно выполнению условия (49.2). $\triangleleft$

Пример. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на конечном прямоугольнике

$$P = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

$$-\infty < a < b < +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty,$$

то при любом $y_0 \in [c, d]$ имеем

$$f(x, y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x, y_0), \quad y \to y_0.$$

Это сразу следует из того, что непрерывная на прямоугольнике P функция является и равномерно непрерывной на нем. В самом деле, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только $|x - x'| < \delta$, $|y - y'| < \delta$, $(x, y) \in P$, $(x', y') \in P$, то

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon,$$

откуда при $x' = x$ и $y' = y_0$ получим: если $|y - y_0| < \delta$, то для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

49.2. Свойства интегралов, зависящих от параметра. Пусть на множестве Y определены функции φ и ψ, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, $y \in Y \subset R^n$, а на множестве $\{(x, y)\colon\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y),\ y \in Y\}$ — функция $f(x, y)$.

Определение 2. Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx, \tag{49.8}$$

в частности, интегралы

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx, \tag{49.9}$$

называются интегралами, *зависящими от параметра y*.

Если $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то интеграл (49.8) называют также *интегралом от n параметров $y = (y_1, \ldots, y_n)$*.

Подстановка $x = \varphi(y) + [\psi(y) - \varphi(y)]t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, сводит интег-

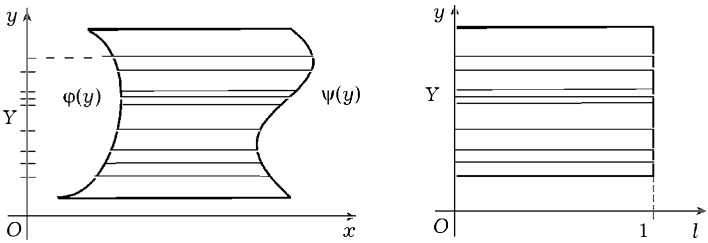

Рис. 188

рал вида (49.8) к интегралу вида (49.9) (рис. 188). Это было использовано при доказательстве леммы в п. 43.1.

Рассмотрим вопросы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, и о его пределе при стремлении параметра к некоторому значению. Нам уже известно (лемма из п. 49.1) следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[c,d]$, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, $-\infty < c \leqslant y \leqslant d < +\infty$. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве*

$$E = \{(x,y)\colon \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}, \tag{49.10}$$

то функция $\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$ *непрерывна на отрезке* $[c,d]$.

Таким образом, в этом случае для любой точки $y_0 \in [c,d]$ имеет место равенство

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)\,dx.$$

Теорема 3. *Если функция $f(x,y)$ определена на прямоугольнике*

$$\begin{gathered} P = \{(x,y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \ c \leqslant y \leqslant d\}, \\ -\infty < a < b < +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty, \end{gathered} \tag{49.11}$$

если она при любом фиксированном $y \in [c,d]$ непрерывна по x на отрезке $[a,b]$ и

$$f(x,y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to y_0 \in [c,d],$$

то

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

$\triangleright$ Пусть $y_n \to y_0$, $y_n \in [c,d]$ и $f_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x,y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда, согласно замечанию 1,

$$f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad n \to \infty.$$

Отсюда, в силу теоремы 8′ п. 31.4 о переходе к пределу под знаком интеграла, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x,y_n)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

т. е. указанный предел существует и не зависит от выбора указанной последовательности $\{y_n\}$, а это и означает, что

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \quad \lhd$$

Теорема 3, очевидно, представляет собой достаточное условие, при котором возможен предельный переход под знаком интеграла. Отметим, что в условиях теоремы 3 функция φ непрерывна на отрезке $[a,b]$, так как она является пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций f_n.

Рассмотрим интеграл от интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 4. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике P* (49.11), *то*

$$\int_c^d \Phi(y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{49.12}$$

$\rhd$ Равенство (49.12) следует из того, что оба повторных интеграла в этой формуле равны двойному интегралу $\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$ (см. п. 43.1). $\lhd$

Установим теперь правило дифференцирования интегралов, зависящих от параметров.

Теорема 5 (правило Лейбница). *Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике P* (49.11), *то*

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx. \tag{49.13}$$

$\rhd$ Применив формулу конечных приращений Лагранжа, найдем выражение для $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta y}$:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta y} \equiv \frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} \underset{(49.9)}{=} \frac{1}{\Delta y}\int_a^b [f(x,\,y+\Delta y)-f(x,y)]\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x,\,y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx, \tag{49.14}$$

$$0<\theta<1. \tag{49.15}$$

Нам надо оценить поведение разности $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta y} - \displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ при $\Delta y \to 0$. Имеем

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| \underset{(49.14)}{=} \left|\int_a^b \frac{\partial f(x,\, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f(x,\, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| dx. \quad (49.16)$$

Функция $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ по условию непрерывна на прямоугольнике P. Поскольку прямоугольник является компактом, то производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ равномерно непрерывна на P. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно определению равномерной непрерывности, существует такое $\delta > 0$, что при $|\Delta y| < \delta$, $y \in [c,d]$, $y + \Delta y \in [c,d]$, $x \in [a,b]$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (49.17)$$

Если $|\Delta y| < \delta$, то
$$|\theta\Delta y| \underset{(49.15)}{<} |\Delta y| < \delta, \quad (49.18)$$

поэтому для всех указанных Δy выполняется неравенство

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| \underset{(49.16)}{\leqslant}$$

$$\underset{(49.16)}{\leqslant} \int_a^b \left|\frac{\partial f(x,\, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| dx \underset{\substack{(49.17)\\(49.18)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon.$$

Это означает, что
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx,$$

т. е. производная $\dfrac{d\Phi}{dy}$ существует и имеет место формула (49.13). $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 2. Для интеграла
$$\Psi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx,$$

у которого функции φ и ψ дифференцируемы на отрезке $[c,d]$, а функции f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на множестве E (49.10), причем $E \subset P$, по правилу дифференцирования сложной функции

$$F(y,u,v) = \int\limits_u^v f(x,y)\,dx, \quad u = \varphi(y), \quad v = \psi(y),$$

имеем

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy} = \int\limits_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f(v,y)\,\frac{dv}{dy} - f(u,y)\,\frac{du}{dy},$$

откуда

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy + f(\psi(y),y)\,\frac{d\psi(y)}{dy} - f(\varphi(y),y)\,\frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

§ 50. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

50.1. Равномерно сходящиеся интегралы. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty, \quad y \in Y, \tag{50.1}$$

где Y — некоторое множество, и при любом фиксированном $y \in Y$ существует, вообще говоря, несобственный интеграл (50.1).

Здесь возможны следующие три случая:

1) a и b конечны, а функция f ограничена на множестве $(a,b) \times Y = \{(x,y)\colon\ a < x < b,\ y \in Y\}$;

2) a и b конечны, а функция f не ограничена на множестве $(a,b) \times Y$;

3) имеет место либо $a = -\infty$, либо $b = +\infty$, либо и то, и другое.

В первом случае при любом $y \in Y$ интеграл (50.1), зависящий от параметра, является интегралом Римана и называется также *собственным интегралом*, зависящим от параметра (интегралы, рассматривавшиеся в § 49, относятся к этому типу).

Интеграл (50.1), для которого возможен любой из трех вышеуказанных случаев, называется *несобственным интегралом, зависящим от параметра.*

Таким образом, собственный интеграл, зависящий от параметра, является частным случаем несобственного интеграла, зависящего от параметра. Однако существенным для нового понятия — понятия несобственного интеграла, зависящего от параметра — являются, конечно, случаи 2) и 3).

Определение 1. Если для любого $y \in Y$ интеграл (50.1) сходится, то он называется *сходящимся на множестве* Y.

Заметим, что сходящийся несобственный интеграл, зависящий от параметра, при некоторых, а иногда и при всех значениях параметра

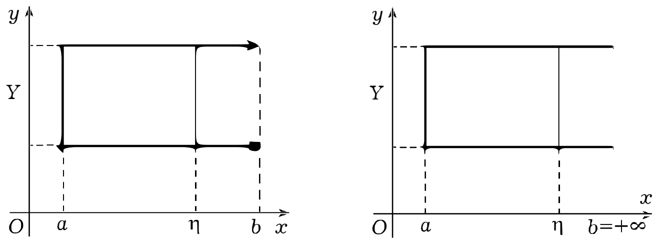

Рис. 189

может оказаться даже в вышеуказанном случае 2) собственным интегралом, т. е. интегралом Римана.

Рассмотрим подробно случаи (рис. 189):

1) $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) для каждого $y \in Y$ функция $f(x, y)$ интегрируема в смысле Римана по переменной x на любом отрезке $[a, \eta]$, где $a < \eta < b$.

Другие случаи несобственных интегралов, зависящих от параметра, рассматриваются аналогичным образом.

Сходимость интеграла (50.1) на множестве Y при выполнении условий 1) и 2) означает, что для любого $y \in Y$ существует конечный предел

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{50.2}$$

Поскольку

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^\eta f(x, y)\, dx + \int_\eta^b f(x, y)\, dx, \tag{50.3}$$

то в случае сходящегося на множестве Y интеграла для каждого $y \in Y$ имеем

$$\lim_{\eta \to b} \int_\eta^b f(x, y)\, dx = 0. \tag{50.4}$$

Определение 2. Если у сходящегося на множестве Y интеграла (50.1) стремление к пределу в формуле (50.4) происходит равномерно на множестве Y, т. е.

$$\int_\eta^b f(x, y)\, dx \underset{Y}{\rightrightarrows} 0, \quad \eta \to b, \quad a < \eta < b, \tag{50.5}$$

то интеграл (50.1) называется *равномерно сходящимся на множестве Y*.

Согласно лемме п. 49.1, условие (50.5) равносильно условию

$$\lim_{\eta\to b}\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{\eta}^{b} f(x,y)\,dx\right| = 0. \tag{50.6}$$

Вспомнив определение равномерной сходимости семейства функций по параметру (параметром здесь является переменная $\eta\in[a,b)$) на множестве Y (в данном случае множество, которое играет роль множества X в определении 1 п. 49.1, обозначено через Y) и заметив, что пересечение любой окрестности точки b с конечным или бесконечным полуинтервалом $[a,b)$ имеет вид интервала (η,b), условие (50.5) "на языке $\varepsilon-\delta$" можно сформулировать следующим образом.

Сходящийся на множестве Y интеграл (50.1) называется *равномерно сходящимся на этом множестве*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое η_ε, $a\leqslant\eta_\varepsilon<b$, что для всех $y\in Y$ и всех η, $\eta_\varepsilon<\eta<b$, выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{50.7}$$

В силу равенства (50.3) условие (50.5) можно записать в виде

$$\int\limits_{a}^{b} f(x,y)\,dx - \int\limits_{a}^{\eta} f(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows} 0, \quad \eta\to b,$$

откуда

$$\int\limits_{a}^{\eta} f(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows} \int\limits_{a}^{b} f(x,y)\,dx, \quad \eta\to b. \tag{50.8}$$

Если положить

$$\Phi(y,\eta) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{a}^{\eta} f(x,y)\,dx, \quad a\leqslant\eta<b, \tag{50.9}$$

и использовать обозначение (50.1), то условие (50.8) можно записать в виде

$$\Phi(y,\eta) \underset{Y}{\rightrightarrows} \Phi(y), \quad \eta\to b. \tag{50.10}$$

П р и м е р 1. Рассмотрим интеграл $\Phi(y)=\int\limits_{0}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$. В качестве множества Y возьмем числовую полуось $y\geqslant 0$ (при любом $y<0$ этот интеграл расходится; почему?). Легко убедиться, что рассматриваемый интеграл сходится на множестве Y. Он даже вычисляется: при $y=0$ он равен нулю, а при $y>0$ имеем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xy}\,d(xy) = e^{-xy}\Big|_{0}^{+\infty} = 1.$$

Для каждого $\alpha > 0$ он сходится равномерно на промежутке $[\alpha, +\infty)$.

Действительно, заметив, что $\int\limits_{\eta}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = e^{-\eta y}$, легко проверить, например, выполнение условия (50.6):

$$\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant\alpha}\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx\right| = \lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant\alpha} e^{-\eta y} = \lim_{\eta\to+\infty} e^{-\alpha\eta} = 0.$$

На всей же полуоси Y равномерной сходимости нет. В самом деле,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant 0}\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx\right| = \lim_{\eta\to+\infty}\sup_{y\geqslant 0} e^{-\eta y} = 1,$$

т. е. на множестве Y условие (50.6) не выполняется.

Пример 2. Рассмотрим более общий случай. Если функция f непрерывна и неотрицательна при $x \geqslant 0$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то для любого $\alpha > 0$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(y^\alpha x)\,dx$ не сходится равномерно на полуоси $y > 0$, но при любом $y_0 > 0$ сходится равномерно на полуоси $y \geqslant y_0$.

Действительно, для любого $\eta > 0$ имеем

$$\sup_{y>0}\int\limits_{\eta}^{+\infty} f(y^\alpha x)\,dx \underset{t=y^\alpha x}{=} \sup_{y>0}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{y^\alpha\eta}^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{0<y<1}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{y^\alpha\eta}^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant \sup_{0<y<1}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{\eta}^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty,$$

поэтому $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\sup\limits_{y>0}\int\limits_{\eta}^{+\infty} f(y^\alpha x)\,dx = +\infty$, т. е. условие (50.6) не выполняется, что и означает, что рассматриваемый интеграл не сходится равномерно для $y > 0$.

Если же $y \geqslant y_0 > 0$, то

$$\sup_{y\geqslant y_0}\int\limits_{\eta}^{+\infty} f(y^\alpha x)\,dx \underset{t=y^\alpha x}{=} \sup_{y\geqslant y_0}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{y^\alpha\eta}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{y_0^\alpha}\int\limits_{y_0^\alpha\eta}^{+\infty} f(t)\,dt,$$

а так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится, и, следовательно, $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_{y_0^\alpha\eta} f(t)\,dt = 0$, то из полученного неравенства имеем

$\lim\limits_{\eta\to+\infty}\sup\limits_{y\geqslant y_0}\int\limits_{\eta}^{+\infty} f(y^\alpha x)\,dx = 0$, т. е. при $y \geqslant y_0$ выполняется условие (50.6), а это и означает равномерную сходимость рассматриваемого интеграла при $y \geqslant y_0$.

В частности, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx^2}\,dx$ является интегралом указанного вида при $f(t) = e^{-t^2}$ и $\alpha = 1/2$. Поэтому этот интеграл не сходится равномерно для $y > 0$, но при любом $y_0 > 0$ он сходится равномерно для $y \geqslant y_0$.

Замечание 1. Отметим, что равномерная сходимость интеграла не сохраняется, вообще говоря, при замене переменной интегрирования, содержащей параметр. Так, в примере 2 сходящийся интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt > 0$, $f(t) \geqslant 0$, $0 < t < +\infty$, сходится равномерно, так как вовсе не зависит от параметра, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(y^\alpha x)\,dx$, получающийся из данного заменой переменной $t = y^\alpha x$, не сходится равномерно на множестве $y > 0$.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое η_ε, $a \leqslant \eta_\varepsilon < b$, что для всех $y \in Y$ и для всех η' и η'', $\eta_\varepsilon < \eta' < b$, $\eta_\varepsilon < \eta'' < b$, выполнялось неравенство* (рис. 190)

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

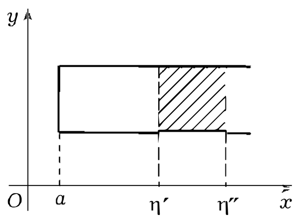

Рис. 190

$\triangleright$ Утверждение сразу следует из критерия Коши равномерной сходимости семейства функций, примененного к функции $\Phi(y,\eta)$ см. (50.9)), ибо

$$\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{\eta''} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{\eta'} f(x,y)\,dx = \Phi(y,\eta'') - \Phi(y,\eta'). \quad \triangleleft$$

Теорема 2 (признак Вейерштрасса). *Если существует такая функция $\varphi(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x < b$, что интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится и для* *любого* $x \in [a, b)$ *и любого* $y \in Y$ *выполняется неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x), \tag{50.11}$$

то интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ *равномерно сходится на множестве* Y.

$\triangleright$ Прежде всего заметим, что из неравенства (50.11) в силу признака сравнения для сходимости несобственных интегралов (см. п. 29.3) следует, что при всех $y \in Y$ интегралы $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ абсолютно, а поэтому и просто сходятся.

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$ следует, что существует такое число $\eta_0 \in [a, b)$, что для всех $\eta \in [\eta_0, b)$ выполняется неравенство $\int\limits_\eta^b \varphi(x)\, dx < \varepsilon$, а поэтому для всех $y \in Y$ и всех $\eta \in [\eta_0, b)$ будем иметь

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x, y)\, dx\right| \leqslant \int\limits_\eta^b |f(x, y)|\, dx \underset{(50.11)}{\leqslant} \int\limits_\eta^b \varphi(x)\, dx < \varepsilon. \tag{50.12}$$

Это и означает равномерную сходимость на множестве Y интеграла $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$. $\triangleleft$

Пример 3. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}$ равномерно сходится на всей числовой оси, так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$ сходится и для всех $x \in R$, $y \in R$ выполняется неравенство $\frac{1}{1 + x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$.

Замечание 2. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ (равномерно) сходится на множестве Y и $\eta_n \to b$, $a \leqslant \eta_n < b$, $\eta_0 = a$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность функций

$$\Phi_n(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^{\eta_n} f(x, y)\, dx \tag{50.13}$$

(равномерно) сходится на Y к функции (50.1) (см. замечание 1 в п. 49.1) и, следовательно, на множестве Y (равномерно) сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y)\,dx, \tag{50.14}$$

для которого последовательность (50.13) является последовательностью его частичных сумм $s_n(y)$:

$$s_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} f(x,y)\,dx = \int_{\eta_0}^{\eta_n} f(x,y)\,dx = \Phi_n(y),$$

ибо $\eta_0 = a$.

Представление несобственного интеграла, зависящего от параметра, в виде ряда (50.14) часто бывает удобным использовать для изучения этого интеграла, в чем мы убедимся уже в п. 50.2.

50.2. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Для единообразия терминологии будем полуполосу

$$P = \{(x,y)\colon -\infty < a \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant y \leqslant d\} \tag{50.15}$$

называть *бесконечным прямоугольником*, в отличие от обычного "полуоткрытого" прямоугольника

$$P = \{(x,y)\colon -\infty < a \leqslant x < b < +\infty,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

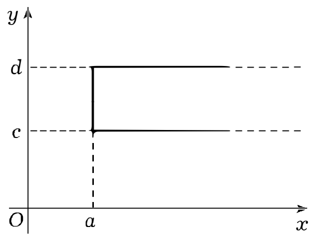

Рис. 191

который будет называться также и *конечным прямоугольником* (рис. 191). Здесь, как и выше, c и d — числа, т. е. $-\infty < c < +\infty$, $-\infty < d < +\infty$.

Теорема 3. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике P, а интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[c,d]$, то этот интеграл является непрерывной функцией переменной y на указанном отрезке.*

Следствие. *В условиях теоремы*

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx, \quad y_0 \in [c,d].$$

$\triangleright$ Согласно формуле (50.14) интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ является суммой равномерно сходящегося на отрезке $[c,d]$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x,y)\,dx$, члены которого, согласно теореме 2 п. 49.2, непрерывны на этом отрезке, поэтому сам интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ также является непрерывной на $[c,d]$ функцией (теорема 7 из п. 31.4), т. е. для любого $y \in [c,d]$ имеет место равенство

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx. \quad \lhd$$

Следствие вытекает из того, что в силу непрерывности функции f выполняется равенство

$$\int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx.$$

Теорема 4. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике P, а интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[c,d]$, то*

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{50.16}$$

$\rhd$ Прежде всего, поскольку интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, согласно теореме 3, является непрерывной на отрезке $[c,d]$ функцией, то интеграл, стоящий в левой части равенства (50.16), существует.

Для доказательства формулы (50.16) снова используем разложение (50.14), заметив, что в условиях теоремы каждый член ряда (50.14) в силу теоремы 2 п. 49.2 является непрерывной функцией. Применив теорему о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда непрерывных на отрезке функций (см. теорему 8 в п. 31.4) и теорему 4 из п. 49.2 об интегрировании собственных интегралов, зависящих от параметра, получим

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \underset{(50.14)}{=} \int\limits_c^d \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x,y)\,dx\Bigg)\,dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^d dy\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x,y)\,dx \underset{(49.12)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{50.17}$$

В силу определения суммы ряда как предела его частичных сумм будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n}dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\eta_{k-1}}^{\eta_k}dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{\eta_n}dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy, \qquad (50.18)$$

причем этот предел в силу (50.17) существует и равен интегралу

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Вспомнив теперь, что в качестве последовательности $\{\eta_n\}$ можно взять любую последовательность такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n = b$, $a \leqslant \eta_n < b$, $n = 1, 2, \ldots$, согласно определению несобственного интеграла окончательно получим

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{\eta_n}dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (50.19)$$

Из (50.17)–(50.19) следует (50.16). $\lhd$

Теорема 5 (правило Лейбница). *Если функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны на конечном или бесконечном прямоугольнике P, интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[c,d]$, то функция $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx. \qquad (50.20)$$

$\rhd$ Согласно формуле (50.14) имеем

$$\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x,y)\,dx, \qquad (50.21)$$

$$\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx, \qquad (50.22)$$

причем рад (50.21) сходится, а ряд (50.22) равномерно сходится на отрезке $[c, d]$. В силу теоремы 5 п. 49.2 каждый член рада (50.21) дифференцируем, и для его производной справедлива формула

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx. \tag{50.23}$$

Поэтому из теоремы о почленном дифференцировании рядов (теорема 9 из п. 31.4) следует, что сумма ряда (50.21), т. е. интеграл $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, является дифференцируемой на отрезке $[c, d]$ функцией, и для его производной имеет место формула (50.20):

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \underset{(50.21)}{=} \frac{d}{dy}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x,y)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dy}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x,y)\,dx \underset{(50.23)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx. \quad \triangleleft$$

50.3. Интегралы Эйлера. Интеграл

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx, \tag{50.24}$$

зависящий от параметра s, называется *гамма-функцией*, а интеграл

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{50.25}$$

зависящий от двух параметров p и q, называется *бета-функцией.* Гамма-функция и бета-функция называются *эйлеровыми интегралами.*

Разобьем интеграл (50.24) на два интеграла:

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx, \tag{50.26}$$

и заметим, что

$$x^{s-1}e^{-x} \sim x^{s-1} \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$x^{s-1}e^{-x} = x^{s-1}e^{-x/2}e^{-x/2} = o(e^{-x/2}) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^1 x^{s-1}\,dx$ сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x/2}\,dx$ сходится, то в силу равенства (50.26) формула (50.24) для определения гамма-функции $\Gamma(s)$ имеет смысл только при $s > 0$. Иначе говоря, если $s > 0$, то интеграл (50.24) сходится; если же $s \leqslant 0$, то он расходится.

Аналогично,

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx =$$
$$= \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int\limits_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad (50.27)$$

где

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1} \quad \text{при} \quad x \to 0,$$
$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1} \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^{1/2} x^{p-1}\,dx$ сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leqslant 0$, а интеграл $\int\limits_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}\,dx$ сходится при $q > 0$ и расходится при $q \leqslant 0$, то в силу равенства (50.27) формула (50.25) для определения бета-функции $B(p,q)$ имеет смысл только при $p > 0$ и $q > 0$, т. е. при этих значениях параметров интеграл (50.25) сходится, а если хотя бы одно из условий $p > 0$ и $q > 0$ не выполняется, то интеграл (50.25) расходится.

50.4*. Интеграл Дирихле. Рассмотрим на примере интеграла

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \quad (50.28)$$

метод вычисления определенных интегралов с помощью интегралов, зависящих от параметра.

Можно показать, что первообразная для функции $\dfrac{\sin \alpha x}{x}$ не выражается через элементарные функции и тем самым интеграл (50.28) нельзя вычислить с помощью формулы Ньютона–Лейбница.

Интеграл (50.28) сходится при всех значениях α. В самом деле, если $\alpha = 0$, то, очевидно, $I(0) = 0$. Если же $\alpha \neq 0$, то, сделав замену переменной $t = \alpha x$ при $\alpha > 0$ и $t = -\alpha x$ при $\alpha < 0$, получим

$$I(\alpha) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = I(1), & \text{если} \quad \alpha > 0, \\ \displaystyle-\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = -I(1), & \text{если} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Интеграл же $I(1)$ сходится (см. п. 29.6), поэтому сходится и интеграл $I(\alpha)$.

Интеграл (50.28) называют *интегралом Дирихле* или *разрывным множителем Дирихле* (поскольку этот интеграл как функция параметра α, $-\infty < \alpha < +\infty$, имеет разрыв при $\alpha = 0$).

Если формально продифференцировать по правилу Лейбница интеграл (50.28), то получится расходящийся интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos\alpha x\,dx$. Поэтому для вычисления интеграла $I(\alpha)$ рассмотрим более общий интеграл

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

Продифференцировав по правилу Лейбница интеграл $I(\alpha,\beta)$ по параметру α, получим интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx, \tag{50.29}$$

который при любом фиксированном $\beta > 0$ равномерно сходится относительно параметра α, $-\infty < \alpha < +\infty$. Следовательно, к интегралу $I(\alpha,\beta)$ при $\beta > 0$ можно применить правило Лейбница дифференцирования по параметру α. Заметив, что интеграл (50.29) вычисляется, например, двукратным интегрированием по частям (см. п. 22.4), причем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

получим $\dfrac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$. Отсюда при $\beta > 0$ можно найти $I(\alpha,\beta)$:

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{\alpha}\frac{\beta\,dt}{t^2+\beta^2} + C(\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} + C(\beta).$$

Но $I(0,\beta) = 0$, следовательно, $C(\beta) = 0$. Итак,

$$I(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}, \quad \beta > 0.$$

Нас, однако, интересует значение интеграла $I(\alpha,\beta)$ при $\beta = 0$. Покажем, что здесь возможен предельный переход под знаком интеграла при $\beta \to +0$. Зафиксируем произвольно число $b > 0$ и покажем, что интеграл $I(\alpha,\beta)$ при любом фиксированном $\alpha \neq 0$ равномерно сходится по параметру β на отрезке $[0,b]$. В самом деле, вычислив по частям интеграл по полуинтервалу $[\eta,+\infty)$, $\eta > 0$, от функции $e^{-\beta x}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$, получим

$$\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = -\frac{1}{x}\,e^{-\beta x}\,\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_{\eta}^{+\infty} - \\ -\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x}\,\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{dx}{x^2}.$$

Зададим произвольно $\varepsilon>0$ и выберем η_ε так, чтобы при $\eta>\eta_\varepsilon$ выполнялись неравенства

$$\left|\frac{1}{\eta}\,e^{-\eta\beta}\frac{\alpha\cos\alpha\eta+\beta\sin\alpha\eta}{\alpha^2+\beta^2}\right| \leqslant \frac{|\alpha|+b}{\alpha^2}\,\frac{1}{\eta} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{dx}{x^2}\right| \leqslant \frac{|\alpha|+b}{\alpha^2}\int\limits_{\eta}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $\eta>\eta_\varepsilon$ для всех $\beta\in[0,b]$ получим

$$\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную сходимость интеграла $I(\alpha,\beta)$ по параметру β на отрезке $[0,b]$. Теперь, в силу следствия теоремы 3 п. 50.2

$$I(\alpha)=I(\alpha,0)=\lim_{\beta\to+0} I(\alpha,\beta)=\lim_{\beta\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha.$$

Таким образом,

$$I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\begin{cases}\ \ \pi/2, & \text{если}\quad \alpha>0,\\ \ \ 0, & \text{если}\quad \alpha=0,\\ -\pi/2, & \text{если}\quad \alpha<0.\end{cases}$$

Отсюда между прочим следует, что $\operatorname{sign}x=\dfrac{2}{\pi}\,I(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}\,dt$, т. е. функция $\operatorname{sign}x$ может быть задана не только словесным описании, но и аналитическим выражением.

ГЛАВА 6

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 51. Тригонометрические ряды Фурье

51.1. Основные понятия. В этом параграфе будут изучаться ряды вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{51.1}$$

$$a_n \in R, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n \in R, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

называемые *тригонометрическими рядами*, т. е. ряды, членами которых являются функции системы

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \sin nx, \ \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{51.2}$$

(называемой *тригонометрической системой* или *системой простых гармоник*), умноженные на постоянные a_n, b_n, называемые *коэффициентами тригонометрического ряда* (51.1).

Лемма 1. *Функции тригонометрической системы* (51.2) *имеют следующие свойства*:

$$\begin{gathered}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots; \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots; \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots; \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{gathered} \tag{51.3}$$

$\triangleright$ Действительно, например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n+m)x + \cos (n-m)x] \, dx =$$

$$= \frac{\sin (n+m)x}{2(n+m)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin (n-m)x}{2(n-m)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n \neq m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \pi + \frac{\sin 2nx}{4n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Аналогично доказываются другие равенства (51.3). $\triangleleft$

Прежде всего возникает вопрос, как найти коэффициенты тригонометрического ряда (51.1), если известна его сумма. Ответ на него легко дать, когда ряд (51.1) сходится равномерно на всей числовой оси.

Т е о р е м а 1. *Если тригонометрический ряд* (51.1) *равномерно сходится на всей числовой оси и f — его сумма, т. е.*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{51.4}$$

то

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{51.5}$$

$\triangleright$ Поскольку ряд, стоящий в правой части равенства (51.4), равномерно сходится, то его можно почленно интегрировать (теорема 8 из п. 31.4) на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому, проинтегрировав обе части равенства (51.4), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx\Big)\,dx =$$
$$= a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 2\pi a_0.$$

Отсюда сразу следует первая формула (51.5).

Если обе части равенства (51.4) умножить на $\cos mx$ или на $\sin mx$, $m \in \boldsymbol{N}$, то, поскольку эти функции ограничены на числовой оси, в правой части будут снова стоять ряды, равномерно сходящиеся на всей числовой оси (см. замечание 3 в п. 31.2). Для доказательства оставшихся формул (51.5) достаточно проинтегрировать обе части каждого из получившихся равенств и воспользоваться формулами (51.3). Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\Big(a_0\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\cos mx + b_n \sin nx \cos mx\Big)\,dx =$$
$$= a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx +$$
$$+ b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx \underset{(51.3)}{=} \pi a_m.$$

Отсюда $a_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos mx\,dx.$ $\triangleleft$

Замечание 1. Напомним (см. п. 29.5), что функция f называется абсолютно интегрируемой на некотором конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, если существует конечное число точек x_j, $j = 0, 1, ..., k$, расширенной числовой прямой $\overline{R}$ таких, что:

1) $a = x_0 < x_1 < ... < x_j < ... < x_k = b$;

2) функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset \subset (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, 2, ..., k$;

3) интегралы $\displaystyle\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$ абсолютно сходятся, $j = 1, 2, ..., k$.

При выполнении этих условий

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx. \qquad (51.6)$$

Всякое множество $\{x_0, x_1, ..., x_k\}$ указанных точек называется *правильным разбиением* промежутка интегрирования абсолютно интегрируемой функции f. Отметим, что интеграл (51.6) не зависит от выбора правильного разбиения промежутка интегрирования.

Замечание 2. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то из неравенств $|f(x)\cos nx| \leqslant |f(x)|$, $|f(x)\sin nx| \leqslant \leqslant |f(x)|$ следует, что интегралы

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, ...,$$

также абсолютно (см. замечание из п. 29.5), а следовательно, и просто сходятся. Таким образом, формулы (51.5) имеют смысл для любой абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции.

Определение 1. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то тригонометрический ряд (51.1), коэффициенты которого заданы формулами (51.5), называется *тригонометрическим рядом Фурье* (или, короче, *рядом Фурье*) *функции* f, его коэффициенты (51.5) — *коэффициентами Фурье функции* f (по тригонометрической системе функций (51.2)), а частичные суммы порядка n ряда Фурье — *суммами Фурье порядка* n *функции* f.

Если ряд (50.1) является рядом Фурье функции f, то пишут

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Используя введенные термины, теорему 1 можно перефразировать следующим образом.

Теорема 1. *Равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

З а м е ч а н и е 3. Если у интегрируемой (в собственном или не собственном смысле) функции изменить ее значения на конечном множестве точек, то она останется интегрируемой, и значение интеграла от нее по указанному промежутку не изменится. Поэтому две абсолютно интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, отличающиеся друг от друга лишь на конечном множестве точек, имеют одинаковые ряды Фурье.

З а м е ч а н и е 4. Напомним еще, что число $T > 0$ называется периодом функции f, если для любого числа x, принадлежащего области определения $X \subset R$ функции f, числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат X и для всякого $x \in X$ выполняется условие $f(x + T) = f(x)$. Функция, имеющая период T, называется *T-периодической.*

Если функция f определена, например, на отрезке $[-\pi, \pi]$, то при $f(-\pi) \neq f(\pi)$ ее нельзя продолжить на всю числовую ось так, чтобы получилась 2π-периодическая функция, а ее сужение на полуинтервале $[-\pi, \pi)$ можно продолжить указанным образом: следует положить

$$f^*(x + 2\pi k) \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \quad x \in [-\pi, \pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Функция f^*, очевидно, 2π-периодическая и на отрезке $[-\pi, \pi]$ отличается от функции f, быть может, только в одной точке $x = \pi$. Поэтому функция f и функция f^*, рассматриваемая только на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеют один и тот же ряд Фурье.

З а м е ч а н и е 5. Если функция f является T-периодической, интегрируемой на отрезке $[0, T]$ (в собственном или несобственном смысле), то для любого числа a имеет место равенство (рис. 192)

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

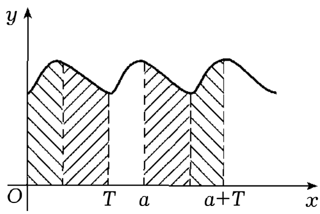

Рис. 192

В частности, для коэффициентов Фурье 2π-периодической функции, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, справедливы формулы

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

51.2. Приближение функций ступенчатыми функциями. Для изучения сходимости рядов Фурье полезно предварительно рассмотреть способ приближения абсолютно интегрируемых функций так называемыми ступенчатыми функциями (их определение будет дано ниже).

Определение 2. Пусть на множестве $X \subset R^n$ задана функция f. Замыкание множества всех точек $x \in X$, в которых функция f не равна 0, называется *носителем функции* f и обозначается $\operatorname{supp} f$ *):

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Определение 3. Если у функции f, определенной на всем пространстве R^n, ее носителем является компакт, лежащий в открытом множестве G (в частности, на интервале (a, b) числовой прямой R), то f называется *финитной* на множестве G функцией (соответственно финитной на интервале (a, b) функцией).

Если функция финитна на пространстве R^n (в частности, на R), то для краткости будем называть ее *финитной*, опуская указание, где именно она финитна.

Если функция f финитна на интервале (a, b), т. е. $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$, то множество $\operatorname{supp} f$ является компактом, а следовательно, замкнутым множеством, лежащим на интервале (a, b). Поскольку точки a и b ему не принадлежат, то они не являются его точками прикосновения. Поэтому у них существуют окрестности, не содержащие точек множества $\operatorname{supp} f$. Во всех точках этих окрестностей функция f, очевидно, равна нулю (рис. 193).

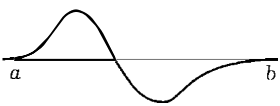

Рис. 193

Определение 4. Для всякого множества $X \subset R^n$ функция, равная 1 в точках этого множества и равная 0 вне его, называется *характеристической функцией множества* X и обозначается $\chi_X(x)$.

Таким образом,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X. \end{cases}$$

В дальнейшем в этом параграфе мы будем рассматривать только функции одной переменной.

Определение 5. Всякая линейная комбинация конечного множества характеристических функций попарно непересекающихся конечных полуинтервалов вида $[a, b)$ называется *ступенчатой функцией*.

Таким образом, если φ — ступенчатая функция, то существуют такая конечная система попарно непересекающихся конечных полуинтервалов $[a_j, b_j)$ и такие числа α_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, что

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_j(x), \tag{51.7}$$

где χ_j — характеристическая функция полуинтервала $[a_j, b_j)$.

*) От латинского слова supportus — опора.

Очевидно, что ступенчатая функция является финитной функцией, ибо замыкание объединения конечного множества конечных промежутков является компактом.

Замечание 1. Ступенчатая функция интегрируема на всей числовой оси, причем, если она задана формулой (51.7), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{a_j}^{b_j} dx = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (b_j - a_j). \quad (51.8)$$

Теорема 2. *Если функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном промежутке с концами в точках a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая финитная функция φ с носителем в интервале (a, b):*

$$\operatorname{supp} \varphi \subset (a, b), \quad (51.9)$$

что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon. \quad (51.10)$$

$\triangleright$ Пусть сначала функция f интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости функции f и согласно определению несобственного интеграла существуют такие точки ξ и η, что $a < \xi < \eta < b$ и

$$\int_a^\xi |f(x)|\,dx + \int_\eta^b |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (51.11)$$

Пусть τ — некоторое разбиение отрезка $[\xi, \eta]$, $|\tau|$ — его мелкость и s_τ — нижняя сумма Дарбу функции f, соответствующая разбиению τ; тогда

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \int_\xi^\eta f(x)\,dx.$$

Отсюда в силу определения предела следует, что существует такое разбиение $\tau_0 = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ отрезка $[\xi, \eta]$, что

$$0 \leqslant \int_\xi^\eta f(x)\,dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (51.12)$$

Положим

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, ..., i_0; \quad (51.13)$$

тогда

$$s_{\tau_0} = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_0} m_i (x_i - x_{i-1}). \quad (51.14)$$

Это выражение напоминает формулу для значения интеграла от

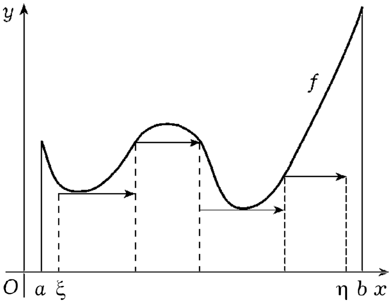

Рис. 194

ступенчатой функции (51.8). Построим соответствующую ступенчатую функцию. Положим

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} m_i, & \text{если } x_{i-1} \leqslant x < x_i, \\ & \qquad i = 1, 2, ..., i_0, \\ 0, & \text{если } x < \xi \text{ или } x \geqslant \eta \end{cases} \tag{51.15}$$

(рис. 194). Очевидно, что φ — ступенчатая финитная на интервале (a, b) функция. Действительно, если χ_i — характеристическая функция полуинтервала $[x_{i-1}, x_i)$, то

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \chi_i(x); \tag{51.16}$$

при этом

$$\operatorname{supp} \varphi \subset [\xi, \eta] \subset (a, b). \tag{51.17}$$

Сравнив выражение (51.14) для суммы Дарбу s_{τ_0} со значением интеграла от функции (51.16) (см.(51.8)), убедимся, что они равны:

$$\int_\xi^\eta \varphi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{i_0} m_i (x_i - x_{i-1}) = s_{\tau_0}. \tag{51.18}$$

Следовательно,

$$\int_\xi^\eta [f(x) - \varphi(x)]\, dx = \int_\xi^\eta f(x)\, dx - \int_\xi^\eta \varphi(x)\, dx \underset{(51.18)}{=} \int_\xi^\eta f(x)\, dx - s_{\tau_0} \underset{(51.12)}{<} \frac{\varepsilon}{2}. \tag{51.19}$$

Отметим, что при всех $x \in [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, ..., i_0$, выполняются неравенства $m_i \underset{(51.13)}{\leqslant} f(x)$, поэтому $\varphi(x) \underset{(51.15)}{\leqslant} f(x)$ для всех $x \in \in [\xi, \eta)$ и

$$f(x) - \varphi(x) = |f(x) - \varphi(x)| \geqslant 0. \tag{51.20}$$

Теперь из (51.11) и (51.19) имеем

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx \underset{(51.17)}{=}$$

$$\underset{(51.17)}{=} \int_a^\xi |f(x)|\, dx + \int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\, dx + \int_\eta^b |f(x)|\, dx \underset{\substack{(51.11)\\(51.19)\\(51.20)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В общем случае абсолютно интегрируемой функции, когда правильное разбиение $\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ промежутка интегрирования функции f (замечание 1 из п. 51.1) содержит точки, отличные от точек a и b, утверждение теоремы следует из того, что в силу доказанного оно справедливо для каждого промежутка с концами в точках x_{i-1} и x_i этого разбиения, $i = 1, 2, ..., k$. $\lhd$

Положив $\varepsilon = 1/n$ и обозначив соответствующую этому ε (в силу приведенной выше конструкции) ступенчатую функцию через φ_n, получим такую последовательность таких ступенчатых функций $\{\varphi_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\,dx = 0, \quad \operatorname{supp}\varphi_n \subset (a, b), \quad n = 1, 2, ... \tag{51.21}$$

Замечание 2. Заметим, что из определения ступенчатой функции φ, построенной при доказательстве теоремы 2 (см. (51.15)), следует, что если для всех $x \in [\xi, \eta]$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c, \tag{51.22}$$

то выполняется и неравенство

$$|\varphi(x)| \leqslant c. \tag{51.23}$$

Действительно, если $-c \leqslant f(x) \leqslant c$, то для любой точки $x \in \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., i_0$, будем иметь

$$-c \leqslant m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \leqslant c.$$

Поэтому (см. (51.15)) для всех $x \in [x_{i-1}, x_i)$ имеет место неравенство $-c \leqslant \varphi(x) \leqslant c$, т. е. $|\varphi(x)| \leqslant c$ на всех полуинтервалах $[x_{i-1}, x_i)$, а следовательно, и на отрезке $[\xi, \eta]$ (заметим, что $\varphi(\eta) = 0$).

51.3. Теорема Римана. Стремление коэффициентов Фурье к нулю. Вернемся снова к изучению рядов Фурье абсолютно интегрируемых функций и покажем, что последовательность их коэффициентов Фурье стремится к нулю. Докажем даже более сильное утверждение, принадлежащее Б. Риману.

Теорема 3 (Риман). *Если функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0. \tag{51.24}$$

Следствие. *Коэффициенты Фурье a_n и b_n абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции стремятся к нулю при $n \to \infty$:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{51.25}$$

▷ Доказательство теоремы разобьем на три этапа.

1. Если функция f является характеристической функцией χ полуинтервала $[\xi, \eta) \subset (a, b)$ и $\lambda \neq 0$, то

$$\left|\int_a^b \chi(x) \cos \lambda x \, dx\right| = \left|\int_\xi^\eta \cos \lambda x \, dx\right| = \frac{\sin \lambda\eta - \sin \lambda\xi}{\lambda} \leqslant \frac{2}{|\lambda|}.$$

Отсюда

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \chi(x) \cos \lambda x \, dx = 0. \tag{51.26}$$

Аналогично,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \chi(x) \sin \lambda x \, dx = 0. \tag{51.27}$$

2. Если функция f является ступенчатой функцией φ, носитель которой лежит на интервале (a, b), то она является конечной линейной комбинацией характеристических функций χ_i, $i = 1, 2, ..., k$, некоторых полуинтервалов $[x_{i-1}, x_i)$, лежащих вместе со своими концами в интервале (a, b):

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_i(x).$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos \lambda x \, dx = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \chi_i(x) \cos \lambda x \, dx \underset{(51.26)}{=} 0. \tag{51.28}$$

Аналогично,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx \underset{(51.27)}{=} 0. \tag{51.29}$$

3. Пусть f — произвольная абсолютно интегрируемая на промежутке с концами a и b функция. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 2 существует такая ступенчатая функция φ, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{51.30}$$

В силу равенства (51.28) для этой функции φ существует такое λ_ε, что для всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b \varphi(x) \cos \lambda x \, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{51.31}$$

Поскольку $f(x) = [f(x) - \varphi(x)] + \varphi(x)$ и $|\cos \lambda x| \leqslant 1$, то при $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$

будем иметь

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\cos\lambda x\,dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. Аналогично доказывается равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$. $\triangleleft$

Отметим, что рассматриваемые в теореме 3 пределы дают примеры тех случаев, когда пределы от интегралов не равняются интегралам от пределов подынтегральных функций. Так, например, в случае функции f, равной постоянной, не равной нулю, и конечного промежутка (a,b) подынтегральные выражения в интегралах (51.24) вообще не имеют предела при $\lambda\to\infty$, а пределы интегралов, как доказано выше, существуют.

51.4. Интеграл Дирихле. Принцип локализации. Займемся теперь изучением сходимости рядов Фурье. Пусть функция f имеет период 2π и абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ (или, как говорят, абсолютно интегрируема на периоде) и

$$f\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx. \qquad (51.32)$$

Сумму Фурье порядка n для функции f будем обозначать $S_n(x;f)$, или, короче, $S_n(x)$. Найдем для этой суммы выражение, удобное для ее изучения:

$$S_n(x)=S_n(x;f)=a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx \underset{(51.5)}{=}$$

$$\underset{(51.5)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt + \frac{\sin kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt\right]f(t)\,dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]f(t)\,dt. \qquad (51.33)$$

Функция

$$D_n(t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right),\quad n=0,1,2,\ldots, \qquad (51.34)$$

называется *ядром Дирихле порядка n*.

Используя обозначение (51.34), из (51.33) получим

$$S_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt. \tag{51.35}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется *интегралом Дирихле.*

Лемма 2. *Ядро Дирихле* D_n:

1) *является четной непрерывной периода* 2π *функцией*;

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1;$ (51.36)

3) $$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}, & \text{если} \quad t \neq 2\pi m, \\ \dfrac{1}{\pi}\left(n+\dfrac{1}{2}\right), & \text{если} \quad t = 2\pi m, \end{cases} \tag{51.37}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$\triangleright$ Свойство 1) очевидным образом следует из формулы (51.34). Формула $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$ получается из (51.34) интегрированием обеих частей этого равенства по отрезку $[-\pi, \pi]$, а формула $2\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$ получается из предыдущей в силу четности ядра Дирихле. Докажем свойство 3). Пусть $t \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; тогда

$$D_n(t) \underset{(51.34)}{=} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) = \frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right] = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}.$$

Если же $t = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то

$$D_n(2\pi m) \underset{(51.34)}{=} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right). \ \triangleleft$$

Нас будет интересовать предел сумм Фурье функции f, т. е. согласно формуле (51.35), предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt. \tag{51.38}$$

Отметим, что для нахождения этого предела нельзя, вообще говоря, перейти к пределу при $n \to \infty$ в подынтегральном выражении хотя бы уже потому, что оно, вообще говоря, не имеет этого предела (см. (51.37)).

Для того чтобы найти предел (51.38), докажем для сумм Фурье $S_n(x; f)$ справедливость одной асимптотической формулы.

Лемма 3. *Если функция f 2π-периодическая и абсолютно интегрируема на периоде, то*

$$S_n(x; f) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\, dt, \tag{51.39}$$

$$S_n(x; f) = \int_{0}^{\pi} D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)]\, dt. \tag{51.40}$$

Следствие. *Для любого δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, и любого $x \in [-\pi, \pi]$ имеет место асимптотическая формула*

$$S_n(x; f) = \int_{0}^{\delta} D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)]\, dt + o(1), \quad n \to \infty. \tag{51.41}$$

$\triangleright$ 1. Докажем формулу (51.39):

$$S_n(x; f) \underset{(51.35)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\, dt \underset{u=t-x}{=} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u)\, du \underset{\text{п. } 51.1}{=} \\ \underset{\text{п. } 51.1}{=} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\, du.$$

2. Для доказательства формулы (51.40) разобьем в формуле (51.39) промежуток интегрирования на отрезки $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$, а затем сделаем в первом интеграле замену переменного $t = -u$:

$$S_n(x; f) \underset{(51.39)}{=} \\ \underset{(51.39)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\, dt = \int_{-\pi}^{0} D_n(t) f(x+t)\, dt + \int_{0}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\, dt = \\ = \int_{0}^{\pi} D_n(-u) f(x-u)\, du + \int_{0}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\, dt = \\ = \int_{0}^{\pi} D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)]\, dt$$

(мы воспользовались тем, что $D_n(-u) = D_n(u)$, см. лемму 2, и обозначили u через t). $\triangleleft$

Докажем теперь следствие, т. е. формулу (51.41).

$\triangleright$ Зафиксируем произвольно δ, лишь бы выполнялись неравенства $0 < \delta \leqslant \pi$, а затем разобьем промежуток интегрирования в формуле (51.40) на отрезки $[0, \delta]$ и $[\delta, \pi]$. Тогда, использовав выражение (51.37) для ядра Дирихле, получим

$$S_n(x; f) \underset{(51.40)}{\underset{(51.37)}{=}} \int_0^\delta D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]\,dt + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \quad (51.42)$$

Функция $\frac{1}{\sin(t/2)}$ непрерывна на отрезке $[\delta, \pi]$, а функции $f(x+t)$ и $f(x-t)$ как функции переменной t абсолютно интегрируемы на этом отрезке. Поэтому и функция $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin(t/2)}$ абсолютно интегрируема на отрезке $[\delta, \pi]$ (см. замечание в п. 29.5), и, следовательно, согласно теореме Римана (теорема 3 из п. 51.3) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0. \quad (51.43)$$

Формулы (51.42) и (51.43) означают, что имеет место асимптотическое равенство (51.41). $\lhd$

Отметим, что в формуле (51.41) бесконечно малая $o(1)$ зависит от числа δ и от точки x (см. (51.43)).

Теорема 4 (принцип локализации). *Если f является 2π-периодической и абсолютно интегрируемой на периоде функцией, то существование предела последовательности ее сумм Фурье $S_n(x; f)$, $n = 1, 2, \ldots$, в любой точке $x \in R$ равносильно существованию предела*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]\,dt, \quad (51.44)$$

где δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, произвольно фиксировано. При этом если указанные пределы существуют, то они равны.

Таким образом, несмотря на то, что коэффициенты ряда Фурье функции определяются с помощью ее значений на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ (как говорят, на всем периоде), сходимость ее ряда Фурье в любой точке $x \in [-\pi, \pi]$, а в случае сходимости этого ряда его — сумма, зависят только от поведения функции в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки x.

$\rhd$ Действительно, из формулы (51.41) следует, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x; f)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\delta D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt$ одновременно существуют или нет, а если существуют, то они равны. Предел же указанного интеграла зависит лишь от значений функции на отрезке $[x-\delta,\ x+\delta]$. $\triangleleft$

51.5. Сходимость ряда Фурье в точке. Займемся теперь более детальным изучением поведения сумм Фурье $S_n(x; f)$ в зависимости от поведения функции в окрестности точки x. Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 4. *Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[0, \pi]$, то интегралы*

$$\int\limits_0^\pi \frac{|f(t)|}{t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\pi \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{51.45}$$

одновременно сходятся или расходятся.

$\triangleright$ Поскольку функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[0, \pi]$, то существует такое η, $0 < \eta \leqslant \pi$, что, каково бы ни было ξ, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[\xi, \eta]$ (см. замечание 1 в п. 51.1). Для исследования сходимости интегралов

$$\int\limits_0^\eta \frac{|f(t)|}{t}\,dt, \qquad \int\limits_0^\eta \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{51.46}$$

можно применить признак сравнения (см. п. 29.3).

Поскольку

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t} = 1,$$

то подынтегральные функции в интегралах (51.46) эквивалентны при $t \to 0$:

$$\frac{|f(t)|}{t} \sim \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad t \to 0.$$

Отсюда следует, что интегралы (51.46) одновременно сходятся или расходятся.

Интегралы (51.45) отличаются от интегралов (51.46) на заведомо сходящиеся интегралы

$$\int\limits_\eta^\pi \frac{|f(t)|}{t}\,dt, \qquad \int\limits_\eta^\pi \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

(их сходимость, см. замечание в п. 29.5, следует из того, что если абсолютно интегрируемую на некотором отрезке функцию умножить на функцию, интегрируемую по Риману на этом отрезке, то получится снова абсолютно интегрируемая функция; в рассматриваемом случае абсолютно интегрируемая функция f умножается даже на непрерывные на отрезке $[\eta, \pi]$ соответственно функции $\frac{1}{t}$ и $\frac{1}{2\sin(t/2)}$).

Поэтому каждый из интегралов (51.47) сходится или расходится одновременно с соответствующим интегралом (51.46). $\lhd$

Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x и эта точка является точкой разрыва первого рода функции f, т. е. существуют конечные пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$, то под *правосторонней* $f'_+(x)$ и соответственно *левосторонней* $f'_-(x)$ *производными* функции f в точке x будем понимать

$$f'_+(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}, \quad f'_-(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to+0} \frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}.$$

Функция f называется *кусочно дифференцируемой на отрезке* $[a,b]$, если существует такое его разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$, что на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) функция f дифференцируема, а в точках x_{i-1} и x_i существуют конечные односторонние производные $f'_+(x_{i-1})$ и $f'_-(x_i)$ (а следовательно, и односторонние пределы $f(x_{i-1}+0)$, $f(x_i-0)$), $i=1,2,\ldots,i_\tau$.

Если положить

$$f_i(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x_{i-1}+0) & \text{при} \quad x = x_{i-1}, \\ f(x) & \text{при} \quad x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_i - 0) & \text{при} \quad x = x_i, \end{cases}$$

то функции f_i в рассматриваемом случае будут дифференцируемыми соответственно на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\ldots,i_\tau$. Отсюда следует их непрерывность, а поэтому и интегрируемость по Риману на этих отрезках. В свою очередь это влечет за собой интегрируемость функции f на отрезке $[a,b]$ (значения функций $f_i(x)$ отличаются от значений функции $f(x)$ не более чем в двух точках), причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i_\tau} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx.$$

Введем еще обозначение

$$f_x^*(t) \overset{\text{def}}{=} f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0). \tag{51.48}$$

Очевидно, что если функция f периодическая и абсолютно интегрируемая на периоде, то при любом фиксированном x функция $f_x^*(t)$ как функция переменного t будет также периодической с тем же периодом и абсолютно интегрируемой на периоде.

Теорема 5 (признак Дини*)). *Пусть функция f — 2π-периодическая и абсолютно интегрируемая на периоде. Тогда если x является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода*

*) У. Дини (1845–1918) — итальянский математик.

функции f и интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{t}\,dt$ *абсолютно сходится, т.е.*

$$\int\limits_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt < +\infty, \tag{51.49}$$

то ряд Фурье функций f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

в частности, в точке непрерывности — к значению $f(x)$ функции f в этой точке.

Следствие 1. *Если f — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция и в точке x существуют конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Следствие 2. *Ряд Фурье кусочно дифференцируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции f сходится в каждой точке интервала $(-\pi,\pi)$ к значению $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ — к значению*

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Отсюда следует, что *ряд Фурье непрерывной кусочно дифференцируемой и 2π-периодической функции сходится во всех точках числовой оси к самой функции.*

$\triangleright$ Использовав представление сумм Фурье функции f в виде (51.40) и воспользовавшись свойствами ядра Дирихле (лемма 2 п. 51.4), будем иметь

$$S_n(x;f) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \underset{\substack{(51.40)\\(51.36)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(51.40)\\(51.36)}}{=} \int\limits_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,2\int\limits_0^\pi D_n(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\,dt \underset{\substack{(51.37)\\(51.48)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(51.37)\\(51.48)}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{51.50}$$

Поскольку по условию теоремы интеграл (51.49) сходится, то согласно лемме 4 сходится и интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin(t/2)}$, т. е. функция $\frac{f_x^*(t)}{2\sin(t/2)}$

абсолютно интегрируема на отрезке $[0, \pi]$, а тогда, согласно теореме Римана (теорема 3 п. 51.3),

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt = 0.$$

Поэтому из (51.50) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \lhd \tag{51.51}$$

Докажем следствие 1.

$\rhd$ Пусть в некоторой фиксированной точке x существуют односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, а функция f абсолютно интегрируемая на периоде. Так как

$$\lim_{t \to +0} \frac{f_x^*(t)}{t} = \lim_{t \to +0} \left[\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} - \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t}\right] = \\ = f'_+(x) - f'_-(x)$$

и, следовательно, рассматриваемый предел конечен, то функция $f_x^*(t)/t$, $t > 0$, ограничена в некоторой окрестности нуля. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t} \, dt$ существует даже в смысле Римана, а интеграл $\int\limits_\delta^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{t} \, dt$ абсолютно сходится как интеграл от произведения абсолютно интегрируемой на отрезке $[\delta, \pi]$ функции $f_x^*(t)$ на непрерывную на этом отрезке функцию $1/t$. Следовательно, абсолютно сходится интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{t} \, dt$, откуда, согласно теореме 5, для любой точки $x \in R$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \lhd$$

Докажем теперь следствие 2.

$\rhd$ Если функция f кусочно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то после ее периодического продолжения с полуинтервала $[-\pi, \pi)$ на всю числовую ось она будет удовлетворять условиям следствия 1 (при этом она будет интегрируема даже по Риману на отрезке $[-\pi, \pi]$), и, следовательно, для всех точек $x \in (-\pi, \pi)$ будет иметь место равенство (51.51). Что же касается точек $x = \pm\pi$, то, например, для $x = \pi$, заметив, что в силу периодичности функции f имеет место равенство $f(\pi + 0) = f(-\pi + 0)$, получим

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) \underset{(51.51)}{=} \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}. \lhd$$

Замечание. В достаточных условиях сходимости рядов Фурье, сформулированных в следствиях теоремы 5, присутствуют некоторые дифференциальные свойства функции. Это не случайно, так как если функция f только кусочно непрерывна или даже, более того, непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то может случиться, что ее ряд Фурье в некоторых точках расходится *).

При разложении функций в ряд Фурье полезно иметь в виду, что из формул (51.5) для коэффициентов Фурье непосредственно следует (докажите это), что для нечетной функции все коэффициенты при косинусах и свободный член, а для четной — все коэффициенты при синусах равны нулю.

В качестве примера рассмотрим разложение в ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sh} x$. Эта функция непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, поэтому, согласно следствию 2 теоремы 5, ее ряд Фурье сходится во всех точках числовой оси, причем его сумма является, как и сумма всякого сходящегося тригонометрического ряда, 2π-периодической функцией. При этом в точках интервала $(-\pi, \pi)$ он сходится к значению функции $\operatorname{sh} x$, а на его концах $x = -\pi$ и $x = \pi$ — к числу $\dfrac{\operatorname{sh}(-\pi) + \operatorname{sh}\pi}{2} = 0$. Таким образом, не имея фактического разложения функции в ряд Фурье, можно получить его сумму. Графики функции $f(x) = \operatorname{sh} x$ и суммы $s(x)$ ее ряда Фурье изображены на рис. 195.

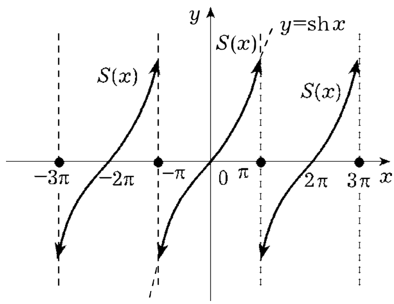

Рис. 195

Найдем теперь ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sh} x$. Поскольку она нечетная, то в ее ряд Фурье будут входить только члены с синусами, т. е.

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдем коэффициенты Фурье b_n, $n = 1, 2, \ldots$ (для вычисления получающихся интегралов можно, например, применить метод интегрирования по частям; см. п. 22.4):

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx \, dx = (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh}\pi}{\pi(1 + n^2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh}\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

---

*) Соответствующие примеры функций можно найти, например, в книге: *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды — М.: Физматгиз, 1961.

Отметим, в частности, что полученный ряд сходится на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, но заведомо не равномерно, так как его члены являются непрерывными функциями, а его сумма имеет разрывы на концах этого отрезка.

51.6. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Пусть функция f имеет период 2π, абсолютно интегрируема на периоде и $S_n(x) = S_n(x; f)$ — ее суммы Фурье, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Положим

$$\sigma_n(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}, \tag{51.52}$$

$$\Phi_n(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_n(x)}{n+1}. \tag{51.53}$$

($D_k(x), k = 1, 2, \ldots, n,$ — как всегда, ядра Дирихле). Сумма $\sigma_n(x)$ называется *суммой Фейера**) *порядка* n, а $\Phi_n(x)$ — *ядром Фейера*, $n = 0, 1, \ldots$

Так как

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\, dt \tag{51.54}$$

(см. лемму 3 в п. 51.4), то из формул (51.52) и (51.53) следует, что

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t)\, dt. \tag{51.55}$$

Лемма 5. *Ядра Фейера имеют следующие свойства*:

1) *они являются непрерывными, четными, 2π-периодическими функциями*;

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = 2\int_0^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = 1; \tag{51.56}$$

3) $$\Phi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \dfrac{n+1}{2} t}{2\pi(n+1)\sin^2 \dfrac{t}{2}}, & \textit{если} \quad t \neq 2\pi m, \\ \dfrac{n+1}{2\pi}, & \textit{если} \quad t = 2\pi m, \end{cases} \tag{51.57}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Следствие 1. *Ядра Фейера неотрицательны*:

$$\Phi_n(t) \geqslant 0, \quad t \in R. \tag{51.58}$$

---

*) Л. Фейер — венгерский математик.

Следствие 2. *При любом δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\delta\leqslant|\tau|\leqslant\pi} \Phi_n(t) = 0. \tag{51.59}$$

$\triangleright$ Свойства 1) и 2) вытекают из соответствующих свойств ядер Дирихле. Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \underset{(51.53)}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = 1.$$

Отсюда в силу четности ядер Фейера следует второе равенство (51.56).

Докажем свойство 3). Если $t = 2\pi m$, $m = 0, \pm1, \pm2, ...$, то, вспомнив, что $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, получим

$$\Phi_n(2\pi m) \underset{(51.53)}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(2\pi m) \underset{(51.37)}{=} \frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2\pi}.$$

Если же $t \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm1, \pm2, ...$, то

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) \underset{(51.37)}{=}$$

$$\underset{(51.37)}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{4\pi\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}[\cos kt - \cos(k+1)t] =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)t}{4(n+1)\pi\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\pi(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}. \quad \triangleleft$$

Следствие 1 вытекает из формулы (51.57).

Докажем следствие 2.

$\triangleright$ При любом δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, имеем

$$0 \underset{(51.58)}{\leqslant} \max_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \Phi_n(t) \underset{(51.57)}{=} \max_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\pi\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{2(n+1)\pi\sin^2\frac{\delta}{2}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда сразу следует учловие (51.59). $\triangleleft$

Примерный вид графика ядра Фейера изображен на рис. 196. Образно говоря, ядра Фейера представляют собой такие неотрицательные функции, существенные значения которых при возрастании n все больше и больше сосредотачиваются в окрестности нуля в том смысле, что при любом δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, их значения вне δ-окрестности нуля равномерно стремятся к нулю (см. (51.59)), а интегралы от этих функций все время сохраняют постоянное значение (см. (51.56)).

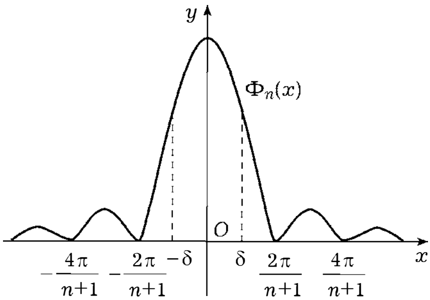

Рис. 196

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимает на концах одинаковые значения, $f(-\pi) = f(\pi)$; тогда ее периодическое продолжение с периодом 2π непрерывно на всей действительной оси. В силу непрерывности функции f абсолютная величина ее значений на отрезке $[-\pi, \pi]$ ограничена сверху некоторой постоянной $c > 0$: $|f(x)| \leqslant c$, $x \in [-\pi, \pi]$. Очевидно, что и абсолютные величины всех значений указанного ее периодического продолжения (которое будем обозначать той же буквой f) ограничены той же постоянной c:

$$|f(x)| \leqslant c, \quad x \in R. \tag{51.60}$$

Функция f будучи непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, равномерно непрерывна на нем. Поскольку при периодическом продолжении значения функции периодически повторяются, то периодическое продолжение функции f равномерно непрерывно на всей числовой оси.

Действительно, функция f непрерывна на отрезке $[0, 4\pi]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, как только $|x_2 - x_1| < \delta$, $x_1 \in [0, 4\pi]$, $x_2 \in [0, 4\pi]$, выполняется неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \tag{51.61}$$

Если теперь $\delta_0 = \min\{\delta, 2\pi\}$, а x_1' и x_2' — произвольные точки числовой оси такие, что $|x_2' - x_1'| < \delta_0$, то найдется такая пара точек $x_1 \in [0, 4\pi]$ и $x_2 \in [0, 4\pi]$, что

$$f(x_1) = f(x_1'), \quad f(x_2) = f(x_2'), \tag{51.62}$$

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1'. \tag{51.63}$$

(Если, например, $x_1' < x_2'$, то достаточно подобрать целое n так, чтобы $x_1' - 2\pi n \in [0, 2\pi]$, и положить $x_1 = x_1' - 2\pi n$, $x_2 = x_2' - 2\pi n$.)

Поэтому если $x_1' \in R, x_2' \in R$ и $|x_2' - x_1'| < \delta_0$, то

$$|x_2 - x_1| \underset{(51.63)}{=} |x_2' - x_1'| < \delta_0 \leqslant \delta,$$

а поэтому

$$|f(x_2') - f(x_1')| \underset{(51.62)}{=} |f(x_2) - f(x_1)| \underset{(51.61)}{<} \varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность функции f на всей числовой оси R.

Теорема 6 (Фейер). *Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимает на его концах равные значения, $f(-\pi) = f(\pi)$, то последовательность ее сумм Фейера равномерно сходится на этом отрезке к самой функции.*

Следствие. *Если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, принимающей одинаковые значения на его концах, сходится в некоторой точке, то он сходится в ней к значению функции.*

$\triangleright$ Зафиксируем точку $x \in [-\pi, \pi]$ и зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Используя лемму 5, будем иметь

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \underset{\substack{(51.55)\\(51.56)}}{=} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t)\,dt - f(x)\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)[f(x+t) - f(x)]\,dt\right| \underset{(51.58)}{\leqslant} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|\,dt. \quad (51.64)$$

Функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимает на его концах одинаковые значения, поэтому ее 2π-периодическое продолжение равномерно непрерывно на всей действительной оси.

Отсюда явствует, что для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ что для любого t при условии $|t| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (51.65)$$

Представим интеграл, стоящий в правой части неравенства (51.64), в виде суммы следующих трех интегралов:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|\,dt = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}, \quad (51.66)$$

и оценим каждый из них. Имеем

$$\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|\,dt \underset{(51.65)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)\,dt \underset{(51.58)}{<} \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \underset{(51.56)}{=} \frac{\varepsilon}{3}. \quad (51.67)$$

Два других интеграла в (51.66) оцениваются одинаковыми способами:

$$\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|\,dt \leqslant \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)[|f(x+t)| + |f(x)|]\,dt \underset{(51.60)}{\leqslant}$$

$$\underset{(51.60)}{\leqslant} 2c\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \leqslant 2c \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi_n(t) \int_{\delta}^{\pi} dt < 2c\pi \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi_n(t) \to 0$$

при $n \to \infty$ согласно (51.59). Аналогично,

$$\int_{-\pi}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|\,dt \to 0$$

при $n \to \infty$. Поэтому существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняются неравенства

$$\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t)| - |f(x)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{51.68}$$

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{51.69}$$

Из (51.64)–(51.69) следует, что при $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

и поскольку выбор n_0 не зависел от выбора точки $x \in [-\pi, \pi]$, то это означает, что последовательность сумм Фейера $\{\sigma_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции f. $\lhd$

Докажем следствие.

$\rhd$ Известно, что если числовая последовательность сходится, то последовательность средних арифметических ее членов сходится к тому же пределу (см. п. 30.9). Поэтому если при некотором $x \in \in [-\pi, \pi]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x) = A$, а так как согласно теореме Фейера $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$, то $A = f(x)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$. $\lhd$

З а м е ч а н и е. Как уже отмечалось выше (см. п. 51.5), существуют непрерывные 2π-периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках. Однако если из частичных сумм этих рядов составить средние арифметические, т. е. суммы Фейера, то полученная последовательность согласно теореме 6 будет сходиться, и даже равномерно на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, к рассматриваемой функции. Этот пример показывает, в частности, полезность изучения не только сходящихся, но и расходящихся рядов.

51.7. Приближение непрерывных функций многочленами. Рассмотрим сначала вопрос о приближении функций тригонометрическими многочленами.

О п р е д е л е н и е 6. Функции вида

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

называются *тригонометрическими многочленами* (*полиномами*). Если $A_n^2 + B_n^2 > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, или $n = 0$, то $T(x)$ называется *тригонометрическим многочленом порядка* n *).

Очевидно, что суммы Фурье и суммы Фейера абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции являются примерами тригонометрических многочленов.

Теорема 7 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимает на его концах одинаковые значения, т. е. $f(-\pi) = f(\pi)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что для всех точек $x \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

$\rhd$ В силу теоремы 6 в качестве требуемого тригонометрического многочлена $T(x)$ можно взять сумму Фейера с соответствующего порядка. $\lhd$

Теорема 7 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен $P(x)$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{51.70}$$

$\rhd$ Отобразим линейно отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{51.71}$$

Положим

$$f^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Продолжим заданную так на отрезке $[0, \pi]$ функцию f^* четным образом:

$$f^*(t) = f^*(-t), \quad t \in [-\pi, 0].$$

Так как по условиям теоремы функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция f^* непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, и в силу ее четности $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$. Поэтому, согласно теореме 7, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(t)$, что

$$|f^*(t) - T(t)| < \varepsilon/2, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi. \tag{51.72}$$

Тригонометрический многочлен $T(t)$, являясь конечной линейной комбинацией синусов и косинусов кратных дуг, раскладывается в степенной ряд:

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

---

*) Получающуюся при $n = 0$ сумму, у которой верхний предел суммирования оказывается меньше нижнего, принято считать равной нулю.

сходящийся на всей числовой оси и, следовательно, равномерно сходящийся на любом конечном отрезке (п. 32.1), в частности на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому для выбранного $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что если
$$P(t) = \sum_{n=0}^{n_\varepsilon} c_n t^n,$$
то алгебраический многочлен $P(t)$ удовлетворяет неравенству
$$|T(x) - P(t)| < \varepsilon/2, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi. \tag{51.73}$$

Из (51.72) и (51.73) вытекает, что
$$|f^*(t) - P(t)| \leqslant |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{51.74}$$
Найдя t из равенства (51.71),
$$t = \pi\,\frac{x-a}{b-a}, \tag{51.75}$$
и заметив, что $f^*\Bigl(\pi\,\dfrac{x-a}{b-a}\Bigr) = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, получим, подставив (51.75) в (51.74),
$$\left|f(x) - P\Bigl(\pi\,\frac{x-a}{b-a}\Bigr)\right| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$
где, очевидно, $P\Bigl(\pi\,\dfrac{x-a}{b-a}\Bigr)$ — алгебраический многочлен от x. Искомый многочлен найден. $\lhd$

Отметим, что всякое измерение может быть сделано лишь с определенной точностью, поэтому практически принципиально невозможно установить, что любой нарисованный график непрерывной функции не является графиком многочлена.

Замечание. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то согласно теореме Вейерштрасса (см. теорему 7) существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$, равномерно сходящаяся на отрезке $[a, b]$ к функции f:
$$P_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x) \tag{51.76}$$
(чтобы получить такую последовательность, достаточно обозначить через $P_n(x)$ многочлен, удовлетворяющий условию (51.70) при $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$), и, таким образом, функция f оказывается представимой в виде суммы равномерно сходящегося на отрезке $[a, b]$ ряда
$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)]. \tag{51.77}$$
Очевидно и обратное: всякая функция, являющаяся пределом равномерно сходящейся на некотором отрезке последовательности многочленов, является непрерывной на этом отрезке (теорема 7 из п. 31.4).

Иначе говоря, условие (51.76), или, что то же самое, условие (51.77), является необходимым и достаточным для того, чтобы функция была непрерывной. Тем самым, всякая непрерывная на отрезке функция может быть записана с помощью формулы вида (51.77).

§ 52. Функциональные пространства

52.1. Метрические пространства. Одним из основных свойств n-мерных евклидовых пространств является то, что в них для любых двух точек x и y определено расстояние $\rho(x,y)$, удовлетворяющее трем условиям:

1) $\rho(x,y) \geqslant 0$, причем $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

2) для любых точек x и y имеет место равенство $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) для любых трех точек x, y и z выполняется неравенство (называемое неравенством треугольника)

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z). \tag{52.1}$$

Иногда удается определить функцию, удовлетворяющую этим условиям на парах элементов некоторого множества, которое не является евклидовым пространством. Подобное множество называется метрическим пространством.

Определение 1. Если для произвольной упорядоченной пары (x,y) элементов x и y множества X определена функция $\rho(x,y)$, удовлетворяющая условиям 1)–3), то множество X называется *метрическим пространством.*

Функция $\rho(x,y)$ называется *расстоянием* или *метрикой.* Элементы метрического пространства называются его *точками.*

Пример 1. Числовая прямая R является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x,y)=|x-y|$, $x\in R$, $y\in R$.

Пример 2. Множество всех комплексных чисел C является метрическим пространством с расстоянием $\rho(z,w)=|z-w|$, $z\in C$, $w\in C$.

Пример 3. Арифметическое точечное евклидово пространство R^n является метрическим пространством с расстоянием

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2},\quad x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n,\quad y=(y_1,\dots,y_n)\in R^n.$$

Пример 4. Множество $B(X)$ всех действительных ограниченных на некотором множестве X функций образует метрическое пространство*) с расстоянием

$$\rho(\varphi,\psi)=\sup_{x\in X}|\varphi(x)-\psi(x)|,\quad \varphi\in B(X),\quad \psi\in B(X). \tag{52.2}$$

*) B — первая буква английского слова boundedness — ограниченность.

$\triangleright$ Действительно, выполнение в этом случае условий 1) и 2) для расстояния (52.2) очевидно. Докажем, что расстояние (52.2) удовлетворяет и третьему условию (52.1). Для любых трех функций φ, ψ и ω, принадлежащих множеству $B(X)$, и любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \omega(x)| = |[\varphi(x) - \psi(x)] + [\psi(x) - \omega(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \omega(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |\varphi(x) - \psi(x)| + \sup_{x \in X} |\psi(x) - \omega(x)|.$$

Перейдя в левой части этого неравенства к верхней грани, получим

$$\sup_{x \in X} |\varphi(x) - \omega(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |\varphi(x) - \psi(x)| + \sup_{x \in X} |\psi(x) - \omega(x)|,$$

т. е. согласно (52.2)

$$\rho(\varphi, \omega) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \omega). \quad \triangleleft$$

В случае $X = [a, b]$ множество $B(X)$ вместо $B([a, b])$ будет обозначаться $B[a, b]$.

П р и м е р 5. Множество $CL[a, b]$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций является метрическим пространством *) с расстоянием

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx. \tag{52.3}$$

$\triangleright$ Очевидно, $\rho(\varphi, \psi) \geqslant 0$. Если $\rho(\varphi, \psi) = 0$, т. е.

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx = 0,$$

то (поскольку $|\varphi(x) - \psi(x)|$ является неотрицательной непрерывной функцией) то для всех $x \in [a, b]$ выполняется равенство (см. свойство 8° в п. 24.1) $|\varphi(x) - \psi(x)| = 0$. Это означает, что для всех точек $x \in [a, b]$ имеет место равенство $\varphi(x) = \psi(x)$.

Если $\varphi \in CL[a, b]$, $\psi \in CL[a, b]$ и $\omega \in CL[a, b]$, то, интегрируя по отрезку $[a, b]$ неравенство

$$|\varphi(x) - \omega(x)| \leqslant |\varphi(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \omega(x)|,$$

получим

$$\int_a^b |\varphi(x) - \omega(x)|\, dx \leqslant \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx + \int_a^b |\psi(x) - \omega(x)|\, dx,$$

т. е. в силу (52.3)

$$\rho(\varphi, \omega) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \omega). \quad \triangleleft$$

---

*) Обозначение $CL[a, b]$ происходит от первых букв латинского слова continuum — непрерывность — и фамилии французского математика А. Лебега (1875–1941).

Заметим, что множество всех интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$ функций уже не будет образовывать метрического пространства, если попытаться и в этом случае задать расстояние между функциями по формуле (52.3), так как из равенства $\int\limits_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|dx = 0$ уже не будет следовать равенство $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех точек $x \in [a,b]$.

Метрические пространства, элементами которых являются функции, называются *функциональными метрическими пространствами*. Примерами таких пространств являются пространства $B(X)$ и $CL[a,b]$.

Всякое подмножество метрического пространства является также метрическим пространством с тем же самым расстоянием и называется *подпространством* исходного пространства.

Например, множество рациональных чисел Q, будучи подмножеством действительных чисел R, является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x,y) = |x-y|$, $x \in Q$, $y \in Q$.

Если X и Y — метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y и отображение $f\colon X \to Y$ является биекцией, т. е. взаимно однозначно отображает множество X на множество Y и сохраняет расстояние (для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется равенство $\rho_Y(f(x), f(x')) = \rho_X(x, x')$), то отображение f называется *изометрией* или *изометрическим отображением* X на Y, а метрические пространства X и Y — *изометрическими*.

Например, если на геометрической плоскости, на которой, как обычно, расстоянием между двумя ее точками A и B является длина отрезка с концами в точках A и B ($\rho(A,B) = |AB|$), задать прямоугольную декартову систему координат и каждой геометрической точке A сопоставить ее координаты (x,y), то получим отображение $f(A) = (x,y)$ геометрической плоскости на арифметическую плоскость, т. е. на множество упорядоченных пар действительных чисел, на котором расстояние между точками (x,y) и (x',y') определяется по формуле

$$\rho((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Можно показать, что f является изометрическим отображением геометрической плоскости на арифметическую и что, следовательно, эти плоскости изометричны.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется *сходящейся к точке* x этого пространства, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Рассмотрим, что означает сходимость последовательности функций в пространстве $B(X)$ (см. пример 4). Если $\varphi_n \in B(X)$, $\varphi \in B(X)$

и в смысле метрики пространства $B(X)$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$, то в силу (52.2) это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|=0,$$

а это означает, что последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве X сходится к функции φ. Таким образом, сходимость в пространстве $B(X)$ означает равномерную сходимость.

Опишем еще сходимость в пространстве $CL[a,b]$ (пример 5). Последовательность функций $\varphi_n\in CL[a,b]$ сходится к функции $\varphi\in CL[a,b]$ в пространстве $CL[a,b]$, если

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx=0.$$

Мы уже встречались с подобного рода сходимостью в п. 51.2, правда, в случае, когда функции φ_n были ступенчатыми и поэтому, вообще говоря, разрывными.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ и $m>n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

Лемма 1. *Если последовательность точек метрического пространства сходится, то она является фундаментальной последовательностью.*

$\triangleright$ Если в метрическом пространстве $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, то согласно определению 2 для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x_n,x)<\varepsilon/2$. Поэтому если $n>n_\varepsilon$ и $m>n_\varepsilon$, то

$$\rho(x_n,x_m)\underset{(52.1)}{\leqslant}\rho(x_n,x)+\rho(x,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. $\triangleleft$

Определение 4. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая его фундаментальная последовательность сходится.

Пространства действительных чисел, комплексных чисел, евклидово пространство R^n являются примерами полных пространств, поскольку для них имеет место критерий Коши сходимости последовательностей (условие, что последовательность удовлетворяет условию Коши, совпадает с условием фундаментальности последовательности).

Множество рациональных чисел является примером неполного пространства. В самом деле, пусть, например, числа $x_n\in Q$, $n=$

$= 1, 2, \ldots$, являются соответственно нижними десятичными приближениями порядка n числа $\sqrt{2}$. Тогда поскольку в пространстве действительных чисел R последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\sqrt{2}$, то она фундаментальная в R, а следовательно, и в Q. В силу же того, что предел сходящейся в R последовательности единствен, и того, что $\sqrt{2} \notin Q$, последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела в Q.

Примером полного функционального метрического пространства является пространство $B(X)$ (пример 4). Действительно, сходимость в пространстве $B(X)$ означает равномерную сходимость. Отсюда согласно критерию Коши равномерной сходимости (теорема 1 из п. 31.2) вытекает, что всякая фундаментальная в пространстве $B(X)$ последовательность равномерно сходится, а так как предел равномерно сходящейся последовательности ограниченных функций также является ограниченной функцией, то этот предел принадлежит пространству $B(X)$, что и означает полноту пространства $B(X)$.

Теперь заметим, что совершенно аналогично теореме $7'$ п. 31.4 доказывается, что если все функции последовательности, равномерно сходящейся на некотором множестве Х $\subset R^n$ (в теореме $7'$ было $X \subset R$), непрерывны в некоторой точке этого пространства, то и предельная функция непрерывна в этой точке. Из этого следует, что предел равномерно сходящейся на множестве $X \subset R^n$ последовательности непрерывных на нем функций также является непрерывной на этом множестве функцией.

Пусть множество X представляет собой компакт, лежащий в пространстве R^n. Обозначим через $C(X)$ пространство всех непрерывных на X функций. Если $f \in C(X)$, то функция f ограничена (теорема 1 из п. 35.1), следовательно, $C(X) \subset B(X)$. Множество $C(X)$, будучи подмножеством метрического пространства $B(X)$, само является метрическим пространством, а так как согласно сказанному выше предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также является непрерывной функцией, то пространство $C(X)$ является полным подпространством полного пространства $B(X)$.

С помощью понятия расстояния в любом метрическом пространстве совершенно аналогично случаю n-мерного пространства R^n вводятся понятия ε-окрестности, открытого множества, точки прикосновения, предельной, изолированной и граничной точек множества, замыкания множества и замкнутого множества. Переносятся на случай произвольных метрических пространств и все утверждения, сделанные в § 33, при доказательстве которых использовались лишь три свойства расстояния. Мы сохраним принятые в § 33 обозначения: $U(x)$ для окрестности точки x и $\overline{E}$ для замыкания множества E, лежащего в рассматриваемом метрическом пространстве.

Определение 5. Подмножество E метрического пространства X называется *плотным в пространстве* X, если его замыкание $\overline{E}$ совпадает со всем пространством X: $\overline{E}=X$.

Определение 6. Полное метрическое пространство X^* называется *пополнением* метрического пространства X, если X плотно в нем: $\overline{X}=X^*$.

Прежде чем рассматривать вопрос о пополнении метрических пространств, докажем одну простую лемму.

Лемма 2. *Для любых четырех точек x, y, u, v метрического пространства X имеет место неравенство* (*называемое неравенством четырехугольника*)

$$|\rho(x,y)-\rho(u,v)|\leqslant\rho(x,u)+\rho(y,v). \tag{52.4}$$

$\triangleright$ В самом деле, применив дважды неравенство треугольника, получим

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,u)+\rho(u,y)\leqslant\rho(x,u)+\rho(u,v)+\rho(v,y).$$

Отсюда

$$\rho(x,y)-\rho(u,v)\leqslant\rho(x,u)+\rho(v,y).$$

Аналогично,

$$\rho(u,v)-\rho(x,y)\leqslant\rho(x,u)+\rho(v,y).$$

Из последних двух неравенств следует неравенство (52.4). $\triangleleft$

Теорема 1. *Для всякого метрического пространства существует его пополнение.*

$\triangleright$ Пусть дано метрическое пространство X. Построение его пополнения, которое обозначим через X^*, разобьем на несколько шагов.

1. Конструкция X^*. Последовательности $x_n\in X$, $y_n\in X$, $n=1,2,\ldots$, называются *эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0. \tag{52.5}$$

В этом случае будем писать $\{x_n\}\sim\{y_n\}$.

Рассмотрим множество X^*, состоящее из классов x^* эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей пространства X:

$$X^*=\{x^*\},\quad x^*=\{\{x_n\}\},$$

где $\{x_n\}$ — фундаментальные в пространстве X последовательности, причем если $\{x_n\}\in x^*\in X^*$ и $\{y_n\}\in y^*\in X^*$, то $\{x_n\}\sim\{y_n\}$ в том и только том случае, если $x^*=y^*$.

2. Определение расстояния в X^*. Пусть $x^*\in X^*$, $y^*\in X^*$, $\{x_n\}\in x^*$, $\{y_n\}\in y^*$. Положим

$$\rho^*(x^*,y^*)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n). \tag{52.6}$$

Покажем, что это определение корректно, т.е. что указанный предел существует и не зависит от выбора указанных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ соответственно в классах x^* и y^*.

Применив неравенство (52.4) к точкам x_m, y_m, x_n, y_n, получим

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n). \qquad (52.7)$$

Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ по условию фундаментальные, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $m > n_\varepsilon$ и $n > n_\varepsilon$ из (52.7) имеем

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ фундаментальная, и потому, согласно критерию Коши, сходится. Таким образом, предел (52.6) действительно всегда существует.

Если $\{x'_n\} \in x^*$ и $\{y'_n\} \in y^*$, то в силу доказанного существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$. Из неравенства четырехугольника (52.4), примененного к точкам x'_n, y'_n, x_n, y_n, следует, что

$$|\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x'_n, x_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

Согласно же определению (52.5) для эквивалентных последовательностей $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ и $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y'_n) = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} |\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| = 0$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

т. е. действительно значение функции $\rho^*(x^*, y^*)$ не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$.

3. Проверка свойств расстояния для функции ρ^*. Пусть $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$. Из неравенств $\rho(x_n, y_n) \geqslant 0$, $n = 1, 2, ...$, предельным переходом при $n \to \infty$ получим в силу (52.6) неравенство $\rho^*(x^*, y^*) \geqslant 0$. Условие $\rho^*(x^*, y^*) = 0$ в силу того же определения (52.6) равносильно условию $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, что согласно определению (52.5) эквивалентных последовательностей означает, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, т. е. принадлежат одному и тому же классу. Иначе говоря, $x^* = y^*$.

Далее,

$$\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, x_n) = \rho^*(y^*, x^*).$$

Наконец, если еще $\{z_n\} \in z^* \in X^*$, то, перейдя к пределу в неравенстве

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n), \quad n = 1, 2, ...,$$

получим $\rho(x^*, y^*) \leqslant \rho(x^*, z^*) + \rho(z^*, y^*)$.

Таким образом, функция ρ^* действительно является метрикой на множестве X^*.

4. Изометричность вложения X в X^*. Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ точку $x^* \in X^*$, содержащую стационарную последовательность $\{x, x, ..., x, ...\}$ (очевидно, она является фундаментальной), и обозначим это соответствие символом f, т. е. $f(x) = x^*$. Покажем, что для любых $x \in X$ и $y \in X$ выполняется условие $\rho^*(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$.

Действительно, если $x^* = f(x)$, $y^* = f(y)$, то $\{x, x, ..., x, ...\} \in x^*$, $\{y, y, ..., y, ...\} \in y^*$. Поэтому в формуле (52.6) в качестве последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$ можно взять последовательность $x_n = x$, $y_n = y$, $n = 1, 2, ...$; тогда

$$\rho^*(x^*, y^*) \underset{(52.6)}{=} \lim_{n\to\infty} \rho(x, y) = \rho(x, y).$$

Из этого равенства следует, в частности, что если $x^* = f(x)$, $y^* = f(y)$, то при $x \neq y$ и $x^* \neq y^*$.

Итак, отображение f изометрично отображает пространство X на множество $f(X)$. Заменим в пространстве X^* точку $x^* = f(x)$ *точкой* x пространства X и получившееся пространство снова обозначим X^* (иначе говоря, отождествим точки $x^* = f(x) \in X^*$ и $x \in X$); тогда получим, что множество X является подмножеством метрического пространства X^*.

5. Плотность X в X^*. Пусть $x^* \in X$ и $\{x_n\} \in x^*$. Рассматривая x_n, $n = 1, 2, ...$, как точки пространства X^* (см. 4), покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

В формуле (52.6) расстояния $\rho^*(x_n, x^*)$ возьмем для точки $x_n \in X^*$ стационарную последовательность $\{x_n, x_n, ..., x_n, ...\}$, для точки x^* — данную последовательность $\{x_n\}$, в которой для удобства индекс n заменим на m; получим $\{x_m\} \in x^*$, тогда

$$\rho^*(x_n, x^*) \underset{(52.6)}{=} \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m). \tag{52.8}$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ имеет место неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Перейдя в нем к пределу при $m \to \infty$, в силу (52.8) при любом $n > n_\varepsilon$ получим $\rho^*(x_n, x^*) \leqslant \varepsilon$. Это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x_n, x^*) = 0, \quad \{x_n\} \in x^*, \tag{52.9}$$

т. е. что произвольно выбранная точка $x^* \in X^*$ является пределом последовательности $\{x_n\}$ точек пространства X (и именно любой последовательности $\{x_n\} \in x^*$). Следовательно, подпространство X плотно в X^*.

6. Полнота пространства X^*. Пусть $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность в пространстве X^*. В силу плотности пространства X в X^* (см. 5) для любого натурального n существует такая точка $x_n \in X$, что
$$\rho^*(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}. \tag{52.10}$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. В самом деле,
$$\rho(x_m, x_n) = \rho^*(x_m, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \rho^*(x_m, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_n) \underset{(52.10)}{<} \frac{1}{m} + \rho^*(x_m^*, x_n^*) + \frac{1}{n}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно фиксировано. Тогда в силу фундаментальности последовательности $\{x_n^*\}$ и равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $m > n_\varepsilon$, $n > n_\varepsilon$ выполняются неравенства
$$\rho^*(x_m^*, x_n^*) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Поэтому при $m > n_\varepsilon$, и $n > n_\varepsilon$ имеем
$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
Это и означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Пусть x^* — такая точка пространства X^*, что $\{x_n\} \in x^*$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = x^*$. Действительно,
$$\rho^*(x_n^*, x^*) \leqslant \rho^*(x_n^*, x_n) + \rho(x_n, x^*) \underset{(52.10)}{<} \frac{1}{n} + \rho(x_n, x^*).$$
Отсюда в силу (52.9) получим
$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x_n^*, x^*) = 0,$$
т. е. последовательность $\{x_n^*\}$ сходящаяся.

Итак, X — полное пространство. $\lhd$

Замечание. Наличие полноты метрического пространства является важным обстоятельством при решении многих задач, в частности тех, которые решаются методом последовательных приближений. Если в результате n-го шага отыскания приближенного решения получается элемент x_n, принадлежащий некоторому пространству X, то обычно при последующих шагах получаются в конце концов все более и более точные приближения искомого решения, т. е. элементы x_n "сближаются друг с другом", точнее, образуют фундаментальную последовательность. Если пространство X полное, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу x, который и является, как правило, точным решением задачи.

Нетрудно привести пример элементарной задачи подобного типа, не имеющей решения в силу неудачного выбора пространства, в котором ищется решение. Рассмотрим в пространстве $C[-1, 1]$ непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций подмножество, состоящее из всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-1,1]$ функций. Обозначим это подмножество $CD[-1,1]$. Оно, будучи подмножеством метрического пространства $C[-1,1]$, в свою очередь является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(f,g) = \max_{[-1,1]} |f(x) - g(x)|, \quad f \in CD[-1,1], \quad g \in CD[-1,1].$$

Рассмотрим задачу отыскания в пространстве $CD[-1,1]$ функции f, график которой проходит через точки $M_1 = (-1,1)$, $O = (0,0)$, $M_2 = (1,1)$ и имеет наименьшую длину. Поскольку отрезок прямой является кратчайшим путем, соединяющим две точки, то в классе всех спрямляемых кривых, проходящих через точки M_1, O, M_2, график функции $y = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, является кратчайшей кривой наименьшей длины. Однако функция $y = |x|$ не является непрерывно дифференцируемой и поэтому не принадлежит пространству $CD[-1,1]$. Вместе с тем в пространстве $CD[-1,1]$, очевидно, существуют функции, которые сколь угодно близки в смысле метрики $C[-1,1]$ к функции $y = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, и длины графиков которых также сколь угодно близки к длине графика этой функции. Графики таких функций можно получить, делая достаточно малые закругления около вершины угла графика функции $y = |x|$ (рис. 197). Уменьшая раз за разом эти закругления, получим последовательность функций $\{f_n\}$, сходящуюся в пространстве $C[-1,1]$ к функции $y = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Из сходимости этой последовательности следует ее фундаментальность в пространстве $C[-1,1]$, а поэтому и в его подпространстве $CD[-1,1]$.

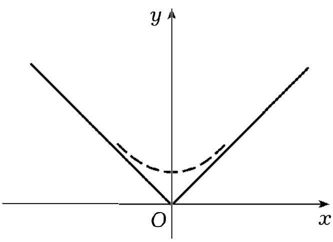

Рис. 197

Поскольку предел последовательности в метрическом пространстве единствен и в случае последовательности $\{f_n\}$ он не принадлежит $CD[-1,1]$, то эта последовательность не имеет предела в пространстве $CD[-1,1]$, а поставленная задача не имеет решения.

Отметим еще, что теорема 1 важна тем, что она показывает, что если в некотором метрическом пространстве X при решении какой-то задачи получилась фундаментальная последовательность приближенных решений, то всегда можно указать такое метрическое пространство $X^* \supset X$ (быть может, $X^* = X$), в котором эта последовательность сходится к некоторому элементу $x^* \in X^*$, а это, как уже отмечалось, обычно означает, что x^* является точным решением. Таким образом, теорема 1 показывает, что в рассматриваемом случае всегда существует пространство, в котором решение задачи существует.

Для числовых функций (принимающих, вообще говоря, значения из множества комплексных чисел $\mathbb{C}$), определенных на метрических пространствах, естественным образом определяется понятие непрерывности.

Определение 7. Если X — метрическое пространство, то функция $f\colon X \to C$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Подобным же образом вводится понятие непрерывности функций нескольких переменных: например, если X и Y — метрические пространства, то функция $f: X \times Y \to C$ называется *непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, если для любых последовательностей $x_n \in X$, $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0).$$

52.2. Линейные пространства. Напомним некоторые основные понятия линейной алгебры, необходимые для дальнейшего.

Определение 8. Множество X называется *линейным* (*комплексным* или *действительным*) *пространством*, если для любой пары его элементов $x \in X, y \in Y$ и любой пары чисел λ, μ (соответственно комплексных или действительных) определена линейная операция $\lambda x + \mu y$, обладающая естественными свойствами (см. курс линейной алгебры).

Подмножество Y линейного пространства X называется его *подпространством*, если из того, что элементы x и y содержатся в подмножестве Y, следует, что и любая их линейная комбинация содержится в нем:

$$\lambda x + \mu y \in Y.$$

Как известно, конечная система $x_1, \ldots, x_n$ элементов линейного пространства называется *линейно независимой*, если их линейная комбинация обращается в нуль только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю.

Определение 9. Система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — произвольное множество, называемое в этом случае множеством индексов), называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 10. Если X — линейное пространство, а $E \subset X$, то множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов множества E называется его *линейной оболочкой* и обозначается через $L(E)$.

Элементы линейного пространства часто называют *векторами*.

Если x_0 и a — заданные элементы линейного пространства X, то множество всех точек x этого пространства вида $x = x_0 + at$, $-\infty < t < +\infty$, называется *прямой*, проходящей через точку x_0 в направлении вектора a.

Функции, заданные на линейных пространствах, часто называют *функционалами.* В частности, этот термин употребляется обычно тогда, когда элементами рассматриваемого пространства являются функции.

52.3. Нормированные и полунормированные пространства. Рассмотрим теперь пространства, являющиеся обобщением конечномерных векторных пространств.

Определение 11. Линейное пространство X называется *нормированным*, если на нем задана такая действительная функция $||x||$, называемая *нормой*, что:

1°) $||x|| \geqslant 0$ для всех $x \in X$;

2°) (однородность) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ для всех $x \in X$ и всех чисел λ (комплексных или действительных);

3°) (неравенство треугольника) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$;

4°) если $||x|| = 0$, то $x = 0$.

Если в качестве чисел берутся комплексные числа, то линейное нормированное пространство называется *комплексным*, а если только действительные, то *действительным.*

Если для функции $||x||$ выполняются условия 1°)–3°), то эта функция называется *полунормой*, а линейное пространство X — *полунормированным.* Согласно этому определению норма пространства является, конечно, и полунормой. Норма (полунорма) $||\cdot||$ пространства X обозначается также $||\cdot||_X$.

Из свойства 2°) полунормы следует, что $||0|| = 0$. Действительно,

$$||0|| = ||0 \cdot x|| = 0 \cdot ||x|| = 0, \quad x \in X. \tag{52.11}$$

Для полунормы (нормы) справедливо неравенство

$$|\, ||x|| - ||y||\, | \leqslant ||x - y|| \tag{52.12}$$

(здесь x и y — произвольные элементы пространства X).

▷ В самом деле,

$$||x|| = ||(x - y) + y|| \underset{3^\circ)}{\leqslant} ||(x - y)|| + ||y||,$$

поэтому

$$||x|| - ||y|| \leqslant ||x - y||, \tag{52.13}$$

а так как x и y равноправны, то и

$$||y|| - ||x|| \leqslant ||y - x|| = ||x - y||. \tag{52.14}$$

Из (52.13) и (52.14) непосредственно следует (52.12). ◁

Пример 1. В линейном пространстве действительных чисел R функция $||x|| \overset{\text{def}}{=} |x|$, $x \in R$, является нормой.

Пример 2. В линейном пространстве комплексных чисел C функция $||z|| \overset{\text{def}}{=} |z|$, $z \in C$, является нормой.

Пример 3. В n-мерном действительном арифметическом векторном пространстве R^n длина вектора

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad x = (x_1, ..., x_n),$$

является нормой: $|x| = \|x\|$, а $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}$, где $1 \leqslant m < n$, является полунормой, но не нормой.

Пример 4. Определим n-мерное комплексное арифметическое векторное пространство C^n. Его элементами z по определению являются конечные упорядоченные совокупности $(z_1, ..., z_n)$ из n комплексных чисел: $z_k \in C$, $k = 1, 2, ..., n$. Если $z = (z_1, ..., z_n) \in C^n$ и $w = (w_1, ..., w_n) \in C^n$, а $\lambda \in C$, $\mu \in C$, то

$$\lambda z + \mu w \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda z_1 + \mu w_1, ..., \lambda z_n + \mu w_n).$$

В силу этого определения множество C^n является линейным пространством. Длина $|z|$ вектора $z \in C^n$ определяется по формуле

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}.$$

Длина $|z|$ вектора $z \in C^n$ является нормой в пространстве C^n: $|z| = \|z\|$.

Проверка того, что функционалы $\|\cdot\|$ (см. п. 52.2) в примерах 1–4 действительно являются нормами, проводится без труда и предоставляется читателю.

Пример 5. В линейном метрическом пространстве $B(X)$ действительных ограниченных функций, определенных на некотором множестве X, функционал

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_X |f(x)|, \quad f \in B(X), \tag{52.15}$$

является нормой.

Эта норма называется обычно *равномерной нормой функции.*

Если f — ограниченная на множестве X функция, то для любого $x \in X$ имеем

$$0 \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\| < +\infty.$$

Поэтому если $\|f\| = 0$,

$$\|\lambda f\| = \sup_X |\lambda f(x)| = \sup_X |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_X |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|,$$

т. е. для функции $\|\cdot\|$ выполняется условие однородности (см. определение 11).

Если теперь g — также ограниченная на множестве X функция, то для любого $x \in X$ имеем

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant \sup_X |f(x)| + \sup_X |g(x)| \underset{(52.15)}{=} \|f\|+\|g\|.$$

Перейдя снова в левой части неравенства к верхней грани, получим

$$\|f+g\| \underset{(52.15)}{=} \sup_X |f(x)+g(x)| \leqslant \|f\|+\|g\|,$$

т. е. для функции $\|\cdot\|$ выполняется неравенство треугольника.

Пример 6. В линейном пространстве абсолютно интегрируемых на интервале (a, b) (конечном или бесконечном), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функций f функционал

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{52.16}$$

является полунормой. Это полунормированное пространство обозначается $RL = RL(a, b)$ *).

Свойства полунормы для функционала (52.16) легко проверяются. Покажем, что этот функционал не является нормой. Выберем произвольно точку x_0 так, чтобы $a < x_0 < b$, и положим

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для всех} \quad x \neq x_0, \\ 1 & \text{для} \quad x = x_0. \end{cases} \tag{52.17}$$

Тогда, очевидно, $\|f\| \underset{\substack{(52.16)\\(52.17)}}{=} 0$, и вместе с тем функция f не является нулем пространства $RL(a, b)$.

Пример 7. В линейном пространстве $CL(a, b)$ непрерывных на интервале (a, b) функций f, принадлежащих пространству $RL(a, b)$, функционал (52.16) является уже нормой. Действительно, если функция f непрерывна на интервале (a, b) и хотя бы в одной точке $x_0 \in$ $\in (a, b)$ имеет место неравенство $f(x_0) \neq 0$, то $\int_a^b |f(x)|\,dx > 0$. Это следует из свойства 8° определенного интеграла из п. 24.1 и из определения несобственного интеграла в п. 29.1. Поэтому, если $\|f\| = 0$, то $f = 0$.

Пример 8. Пусть X — компакт в R^n. Обозначим через $C(X)$ линейное пространство непрерывных на X функций. В этом пространстве функционал

$$\|f\| = \max_{x \in X})|f(x)|, \quad f \in C(X),$$

*) Обозначение RL происходит от первых букв фамилий математиков Б. Римана и А. Лебега.

является нормой (он совпадает с нормой (52.15)).

Лемма 3. *Если* $\|\cdot\|$ *является нормой в пространстве* X, *то функция*

$$\rho(x,y) \overset{\text{def}}{=} \|x-y\| \tag{52.18}$$

является метрикой в X.

$\triangleright$ Действительно, для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место неравенство $\rho(x,y) = \|x-y\| \geqslant 0$, причем если $\rho(x,y)=0$, т. е. $\|x-y\|=0$, то $x-y \underset{4^\circ)}{=} 0$, и, следовательно, $x=y$. Далее,

$$\rho(x,y) \underset{(52.18)}{=} \|x-y\| \underset{2^\circ)}{=} \|y-x\| \underset{(52.18)}{=} \rho(y,x).$$

Наконец, для любых трех точек x, y и z пространства X имеем

$$\rho(x,y) \underset{(52.18)}{=} \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \underset{3^\circ)}{\leqslant} \|(x-z)\| + \|(z-y)\| \underset{(52.18)}{=} \\ \underset{(52.18)}{=} \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Таким образом, функция (52.18) удовлетворяет всем свойствам расстояния. $\triangleleft$

Итак, всякое нормированное пространство является и метрическим пространством с метрикой (52.18). Очевидно, что в примерах 1, 2, 3, 5 и 7 метрики, порожденные указанными там нормами, совпадают с метриками этих пространств, рассмотренными в п. 52.1.

Определение 12. Если $\|\cdot\|$ — полунорма (в частности, норма) в линейном пространстве X, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots, x \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - - x\| = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся к точке* x по данной полунорме (соответственно по норме). В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или $x_n \to x$ при $n \to \infty$ и говорят, что точка x является *пределом последовательности* x_n.

В полунормированном пространстве из условия $\|x-y\|=0$ не следует, вообще говоря, что $x=y$. Поэтому у “сходящейся” в полунормированном пространстве последовательности может быть несколько разных пределов.

Лемма 4. *Если* X — *полунормированное пространство*, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \tag{52.19}$$

то равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y, \tag{52.20}$$

возможно тогда и только тогда, когда

$$\|x-y\| = 0. \tag{52.21}$$

Следствие. *В нормированном пространстве у последовательности может существовать только единственный предел.*

$\triangleright$ Доказательство леммы. Если имеют место равенства (52.19) и (52.20), то, заметив, что

$$||x-y|| \leqslant ||x-x_n|| + ||x_n-y||,$$

и перейдя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, в силу равенства

$$\lim_{n\to\infty} ||x-x_n|| \underset{(52.19)}{=} 0 \underset{(52.20)}{=} \lim_{n\to\infty} ||x_n-y||$$

получим $||x-y|| = 0$.

Наоборот, если выполнены условия (52.19) и (52.21), то

$$||x_n-y|| \leqslant ||x_n-x|| + ||x-y|| \underset{(52.21)}{=} ||x_n-x||,$$

а так как $\lim\limits_{n\to\infty} ||x-x_n|| \underset{(52.19)}{=} 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n-y|| = 0$, т. е. выполнено условие (52.20).

Если X — нормированное пространство, то равенство (52.21) равносильно равенству $x = y$ (свойство 4°) нормы). $\triangleleft$

Наглядно неединственность предела в полунормированных пространствах можно проиллюстрировать на примере пространства $RL[a,b]$, где (a,b) — конечный интервал: последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$, $a < x < b$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится по полунорме этого пространства, и ее пределами являются, например, функции $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a,b]$ и функция g: $g(x) = 0$ при $a < x < b$, $x \neq x_0 \in (a,b)$, и $g(x_0) = 1$.

Определение 13. Подмножество E полунормированного (нормированного) пространства X называется *ограниченным*, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$||x|| \leqslant c,$$

иначе говоря, если множество полунорм элементов из E является ограниченным числовым множеством.

Лемма 5. *В полунормированном пространстве последовательность, имеющая предел, ограничена.*

$\triangleright$ Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Для $\varepsilon = 1$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $||x_n - x|| < 1$, поэтому

$$||x_n|| = ||(x_n - x) + x|| \leqslant ||(x_n - x)|| + ||x|| < 1 + ||x||.$$

Положим $c = \max\{||x_1||, \ldots, ||x_0||, 1 + ||x||\}$, тогда очевидно, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ будет выполняться неравенство $||x_n|| \leqslant c$. $\triangleleft$

Определение 14. Числовая функция $f\colon X \to R$ (или $f\colon X \to C$) называется *непрерывной по полунорме* в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

имеет место
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Аналогично определяется непрерывность функции $f(x,y)$ двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$, когда X и Y — полунормированные пространства: функция $f\colon X \times Y \to \boldsymbol{R}$ (или $f\colon X \times Y \to \boldsymbol{C}$) называется *непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, если для любых последовательностей $x_n \in X, y_n \in Y, n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, имеет место
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0).$$

Пример 9. Полунорма является непрерывной функцией во всех точках полунормированного пространства.

▷ В самом деле, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ (см. определение 12), то в силу неравенства $|\|x_n\| - \|x_0\|| \underset{(52.12)}{\leqslant} \|x_n - x_0\|$ получим $\lim\limits_{n\to\infty} |\|x_n\| - \|x_0\|| = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$. Это и означает непрерывность полунормы. ◁

Определение 15. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством* *).

Полнота понимается здесь в смысле метрики (52.18), порожденной нормой пространства.

Примерами банаховых пространств являются пространства $B(X)$ (пример 5), а если X — компакт в $\boldsymbol{R}^n$, то и пространство $C(X)$ (пример 8).

Имеет место аналогичная теореме 1 о пополнении метрического пространства теорема о включении всякого нормированного пространства в банахово, причем так, что исходное пространство плотно в этом банаховом пространстве.

Теорема 2. *Всякое нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.*

Это банахово пространство по аналогии со случаем метрических пространств называется *пополнением* исходного нормированного пространства.

▷ Пусть X — нормированное пространство и X^* — его пополнение как метрического пространства в смысле метрики, порожденной нормой (см. теорему 1 в п. 52.1). Определим в пространстве X^* линейную операцию и норму с помощью предельного перехода следующим образом. Если $x^* \in X^*$, $y^* \in X$, а λ и μ — числа (действительные или комплексные в зависимости от того, какое рассматривается пространство X, действительное или комплексное), то, поскольку множество X плотно в пространстве X^*, т. е. $\overline{X} = X^*$, существуют такие

*) С. Банах (1895–1945) — польский математик.

последовательности $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y^*. \tag{52.22}$$

Положим

$$\lambda x^* + \mu y^* \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n), \tag{52.23}$$

$$\|x^*\| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \|x_n\|. \tag{52.24}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что эти определения имеют смысл, т. е. что написанные пределы существуют, что они не зависят от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, удовлетворяющих условиям (52.22), что в силу определения (52.23) пространство X^* является линейным и что функция (52.24) обладает всеми свойствами нормы (см. определение 11).

Например, поскольку в силу условий (52.22) последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то они являются фундаментальными. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \quad \|y_n - y_m\| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\|(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x_m + \mu y_m)\| \leqslant |\lambda|\, \|x_n - x_m\| + |\mu|\, \|y_n - y_m\| < \\ < (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon,$$

а так как число ε произвольно, λ и μ фиксированы, то это означает, что последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ фундаментальная и потому (в силу полноты пространства X^*) сходящаяся. Таким образом, предел (52.23) существует.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} y'_n = y^*$, то

$$\|x'_n - x_n\| \leqslant \|x'_n - x^*\| + \|x^* - x_n\| \to 0,$$

$$\|y'_n - y_n\| \leqslant \|y_n - y^*\| + \|y^* - y_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$\|(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x'_n + \mu y'_n)\| \leqslant |\lambda|\, \|x_n - x'_n\| + |\mu|\, \|y_n - y'_n\| \to 0$$

при $n \to \infty$, откуда следует, что действительно предел (52.23) не зависит от выбора последовательностей, удовлетворяющих условиям (52.22).

Докажем корректность определения нормы $\|x^*\|$, $x^* \in X^*$. Условие $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^*(x_n, x^*) = 0$ (ρ^* — метрика в пространстве X^*), поэтому числовая последовательность $\{\rho^*(x_n, x^*)\}$, будучи сходящейся, является фундаментальной, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняются неравенства $\rho^*(x_n, x_m) < \varepsilon$. Поскольку $x_n \in X$, $x_m \in X$, то в силу формулы (52.18) это означает, что $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, а так как $|\|x_n\| - \|x_m\|| \underset{(52.12)}{\leqslant} \|x_n - x_m\|$, то для всех $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ справедливо неравенство $|\|x_n\| - \|x_m\|| < \varepsilon$. Таким образом, числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ является фундаментальной, а следовательно, и сходящейся, т. е. существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \overset{\mathrm{def}}{=} \|x^*\|$.

Далее, если $\{x'_n\}$ — другая последовательность точек пространства X, имеющая своим пределом также точку $x^* \in X^*$, то

$$|\|x'_n\| - \|x_n\|| \underset{(52.12)}{\leqslant} \|x'_n - x_n\| \underset{(52.18)}{=}$$
$$\underset{(52.18)}{=} \rho(x'_n, x_n) \leqslant \rho^*(x'_n, x^*) + \rho^*(x^*, x_n) \to 0$$

при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x'_n\|$. $\triangleleft$

52.4. Гильбертовы пространства. Рассмотрим пространства, являющиеся обобщением n-мерных векторных арифметических евклидовых пространств (см. п. 33.1). В основном будут рассматриваться действительные линейные пространства, случай комплексных линейных пространств будет специально оговариваться.

Определение 16. Пусть X — линейное пространство. Числовая функция, обычно обозначаемая (x, y), $x \in X$, $y \in X$, заданная на множестве упорядоченных пар точек пространства X, называется *скалярным произведением*, если для любых точек $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ и любых чисел $\lambda \in R$, $\mu \in R$ выполняются следующие условия:

1°) (коммутативность) $(x, y) = (y, x)$;

2°) (линейность) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, y) + \mu(y, z)$;

3°) $(x, x) \geqslant 0$;

4°) если $(x, x) = 0$, то $x = 0$.

Функция (x, y), удовлетворяющая условиям 1°)–3°), называется *почти скалярным произведением.* Очевидно, что скалярное произведение является и почти скалярным.

Лемма 6. *Если (x, y) — почти скалярное произведение в линейном пространстве X, то для любых $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство*

$$(x, y) \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \tag{52.25}$$

Это неравенство называется *неравенством Коши–Буняковского**).

*) В.Я. Буняковский (1804–1899) — русский математик.

С л е д с т в и е 1. *Для любых точек* $x \in X$ *и* $y \in X$ *имеет место неравенство* (*называемое неравенством треугольника*)

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}. \tag{52.26}$$

С л е д с т в и е 2. *Если* (x,y) — *почти скалярное* (*в частности, скалярное*) *произведение в линейном пространстве* X, *то функция*

$$||x|| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x,x)} \tag{52.27}$$

является полунормой (*соответственно нормой*) *в этом пространстве, и неравенство Коши–Буняковского* (52.25) *можно записать в виде*

$$(x,y) \leqslant ||x||\,||y||. \tag{52.28}$$

$\triangleright$ Докажем лемму. В силу свойства 3°) почти скалярного произведения для любого действительного числа t имеем

$$(tx+y, tx+y) \geqslant 0.$$

Применив свойства 1°) и 2°) почти скалярного произведения, получим

$$t^2(x,x) + 2t(x,y) + (y,y) \geqslant 0.$$

Если $(x,x) = 0$, то $2t(x,y) + (y,y) \geqslant 0$. Поскольку это неравенство выполняется для любого действительного t, то $(x,y) = 0$ $\Big($в самом деле, если бы было $(x,y) \neq 0$, то на числа t налагалось бы ограничение $t \geqslant -\dfrac{(y,y)}{2(x,y)}\Big)$. Следовательно, неравенство (52.25) имеет место: обе его части обращаются в нуль.

Если же $(x,x) \neq 0$, то дискриминант получившегося квадратного относительно t трехчлена неположителен, т. е.

$$(x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leqslant 0.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$$

(оно также называется неравенством Коши–Буняковского), из которого очевидным образом вытекает неравенство (52.25).

Докажем теперь неравенство (52.26):

$$(x+y,\ x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \underset{(52.25)}{\leqslant}$$

$$\underset{(52.25)}{\leqslant} (x,x) + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + (y,y) = \left(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\right)^2.$$

Свойства полунормы (соответственно нормы) для функции $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ проверяются непосредственно. Например,

$$||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \sqrt{(x,x)} = |\lambda| \, ||x||,$$

$$||x+y|| = \sqrt{(x+y,\ x+y)} \underset{(52.26)}{\leqslant} \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)} = ||x|| + ||y||. \quad \triangleleft$$

Если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то по аналогии с конечномерным случаем косинус угла $\varphi = \widehat{xy}$ между векторами $x \in X$ и $y \in X$ линейного пространства X со скалярным произведением определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{||x|| \, ||y||},$$

а сам угол φ определяется этим значением косинуса.

Таким образом, в этом случае

$$(x,y) = ||x|| ||y|| \cos\varphi.$$

Если $e \in X$, $||e|| = 1$, то вектор $x = (x,e)e$ называется проекцией вектора x на прямую $y = te$, $-\infty < t < +\infty$, а число

$$(x,e) = ||x|| \cos\widehat{xe}$$

— величиной этой проекции.

Пример 1. Множество действительных чисел R является пространством со скалярным произведением, если под скалярным произведением (x,y) чисел x и y понимать их обычное произведение: $(x,y) = xy$.

Пример 2. В арифметическом действительном линейном n-мерном пространстве R^n функция

$$(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, ..., x_n), \quad y = (y_1, ..., y_n),$$
$$x_i \in R, \quad y_i \in R, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

является скалярным произведением.

Конечномерное линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Пример 3. Обозначим через $RL_2 = RL_2(a,b)$ множество функций f, заданных на некотором конечном или бесконечном интервале (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, для каждой из которых существует правильное разбиение (п. 51.1) этого интервала и интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ сходится.

Легко проверить, что множество $RL_2(a,b)$ является линейным пространством. Докажем, что функционал

$$(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f \in RL_2(a,b), \quad g \in RL_2(a,b) \qquad (52.29)$$

является почти скалярным произведением.

Прежде всего, если $f \in RL_2(a,b)$ и $g \in RL_2(a,b)$, то в силу числового неравенства

$$|\alpha\beta| \leqslant \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}, \quad \alpha \in \boldsymbol{R}, \quad \beta \in \boldsymbol{R},$$

для любой точки $x \in (a,b)$, в которой определены функции f и g, выполняется неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,(f^2(x)+g^2(x)),$$

а поэтому, согласно признаку сравнения для сходимости интегралов, из конечности интегралов $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g^2(x)\,dx$ следует сходимость (и даже абсолютная) интеграла $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$. Таким образом, определение (52.29) имеет смысл. Свойства почти скалярного произведения следуют в этом случае из свойств интеграла. Аналогично тому, как это было сделано в примере 6 п. 52.3 для пространства $RL(a,b)$, нетрудно показать, что полунорма

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}, \quad f \in RL_2(a,b), \tag{52.30}$$

не является нормой на пространстве $RL_2(a,b)$ и, следовательно, почти скалярное произведение (52.29) не есть скалярное произведение в этом пространстве. Действительно, для функции f, равной тождественно нулю на всей числовой оси, кроме одной точки x_0, $a < x_0 < b$, в которой $f(x_0)=1$, будем иметь $\|f\|^2 = (f,f) = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$, а вместе с тем функция f не является нулем в пространстве $RL_2(a,b)$.

Отметим, что неравенство Коши–Буняковского в пространстве $RL_2(a,b)$ имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{52.31}$$

Почти скалярное произведение (52.29) на подпространстве $CL_2(a,b)$ пространства $RL_2(a,b)$, состоящем из непрерывных на интервале (a,b) функций f, для которых сходится интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, является уже скалярным произведением, а полунорма (52.30) — нормой (это доказывается аналогично тому, как это делалось в примере 7 п. 52.3 для пространства $CL(a,b)$).

Зафиксируем теперь некоторый конечный или бесконечный интервал (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и рассмотрим на множестве всех заданных на этом интервале функций функционал

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |f(x)|. \tag{52.32}$$

Как мы знаем (пример 5 из п. 52.3), этот функционал на пространстве $B(a,b)$ всех ограниченных на интервале (a,b) функций является нормой, а для любой неограниченной на (a,b) функции f, очевидно, $\|f\|_\infty = +\infty$.

Для функций f, для которых $\|f\|_\infty < +\infty$, т. е. для функций $f \in B(a,b)$, норма $\|f\|_\infty$, как мы знаем, называется равномерной нормой (см. пример 5 в п. 52.3). Сходимость по равномерной норме является равномерной сходимостью (см. п. 52.1).

Рассмотрим далее множество функций, заданных на интервале (a,b), для каждой из которых существует правильное разбиение, и на этом множестве функционалы

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{52.33}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}. \tag{52.34}$$

Выше было показано, что функционал (52.33) является полунормой в пространстве $RL(a,b)$ и нормой в $CL(a,b)$ (см. примеры 6 и 7 в п. 52.3). Заметим, что пространства $RL(a,b)$ и $CL(a,b)$ обозначаются так же: соответственно $RL_1(a,b)$ и $CL_1(a,b)$.

Функционал (52.34) является полунормой в пространстве $RL_2(a,b)$ и нормой в $CL_2(a,b)$ (пример 3 в этом пункте). Если же функция f не принадлежит пространству $RL_1(a,b)$, но для нее существует правильное разбиение интервала (a,b), то $\|f\|_1 = +\infty$, а если не принадлежит $RL_2(a,b)$, то $\|f\|_2 = +\infty$.

Сходимость последовательности функций по полунорме (52.33) называется *сходимостью в среднем*, а сходимость по полунорме (52.34) — *сходимостью в смысле среднего квадратичного.*

В дальнейшем, когда речь будет идти о функционалах (52.33) и (52.34), всегда будет предполагаться, что рассматриваются функции, для которых существуют правильные разбиения интервала (a,b), и это не будет специально оговариваться.

Нижеследующая лемма устанавливает соотношения между функционалами $\|f\|_\infty$, $\|f\|_1$ и $\|f\|_2$.

Л е м м а 7. *Если функция f задана на конечном интервале (a,b), то*

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2, \tag{52.35}$$

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty. \tag{52.36}$$

Следствие. *Если последовательность функций равномерно сходится на конечном интервале к некоторой функции, то она сходится к этой функции на том же интервале и в смысле среднего квадратичного, а если последовательность функций сходится на конечном интервале в смысле среднего квадратичного к некоторой функции, то она сходится и в среднем к той же функции.*

$\triangleright$ Докажем неравенство (52.35). Пусть $f \in RL_2(a, b)$. Поскольку $1 \in RL_2(a, b)$, то в силу неравенства Коши–Буняковского (см. (52.31) при $g(x) \equiv 1$) получим

$$\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)| \cdot 1\, dx \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\, dx} \sqrt{\int\limits_a^b dx} = \sqrt{b-a}\|f\|_2.$$

Если же $f \notin RL_2(a, b)$, то $\|f\|_2 = +\infty$, и неравенство (52.35) очевидно. Докажем теперь неравенства (52.36). Пусть $f \in B(a, b)$; тогда

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\, dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b \Big[\sup_{(a,b)} |f(x)|\Big]^2 dx} = \sqrt{\int\limits_a^b \|f\|_\infty^2\, dx} = \\ = \|f\|_\infty \sqrt{\int\limits_a^b dx} = \sqrt{b-a}\|f\|_\infty.$$

Если же $f \notin B(a, b)$, то $\|f\|_\infty = +\infty$, и неравенство (52.36) очевидно. $\triangleleft$

Следствие непосредственно вытекает из неравенства

$$\|f_n - f\|_1 \underset{(52.35)}{\leqslant} \sqrt{b-a}\, \|f_n - f\|_2 \underset{(52.36)}{\leqslant} (b-a)\, \|f\|_\infty.$$

Замечание 1. В лемме 7 является существенным условием то, что рассматриваемый промежуток ограничен. Для неограниченных промежутков полунорма $\|f\|_1$ не оценивается через полунорму $\|f\|_2$, которая в свою очередь не оценивается через норму $\|f\|_\infty$. Не имеет места и аналог следствия из леммы: последовательность функций может равномерно сходиться на бесконечном промежутке и не сходиться на нем ни в среднем, ни в смысле среднего квадратичного или сходиться в смысле среднего квадратичного, но не сходиться в среднем.

Замечание 2. Можно рассматривать и пространства функций, заданных не на интервалах, а на промежутках других типов, например на отрезках: пространства $RL[a, b]$, $RL_2[a, b]$, $CL[a, b]$, $CL_2[a, b]$.

Если (a, b) — конечный интервал, то отображение, при котором каждой функции, заданной на отрезке $[a, b]$, ставится в соответствие ее сужение на интервал (a, b), отображает пространства $RL[a, b]$,

$RL_2[a,b]$ соответственно на пространства $RL(a,b)$, $RL_2(a,b)$ (т. е. является сюръекцией) и сохраняет полунорму, так как значение интеграла от a до b некоторой функции не зависит от значений этой функции или от их отсутствия в точках $x=a$ и $x=b$. При сужении на интервал (a,b) непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций уже не получится отображений пространств $CL[a,b]$, $CL_2[a,b]$ соответственно на пространства $CL(a,b)$, $CL_2(a,b)$, а только в эти пространства (не каждую функцию, непрерывную на интервале (a,b), можно продолжить с сохранением непрерывности на отрезок $[a,b]$), но зато эти отображения являются взаимно однозначными (т. е. инъекциями), так как они сохраняют значение норм.

В полунормированном пространстве можно рассматривать не только конечные суммы его элементов, но и бесконечные, т. е. ряды, членами которых являются элементы данного пространства X. При этом сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x\in X, n=1,2,\ldots$, определяется естественным образом как предел частичных сумм этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} x_n. \tag{52.37}$$

Лемма 8. *Почти скалярное произведение непрерывно по порождаемой им полунорме.*

Следствие 1. *Если в линейном пространстве X с почти скалярным произведением сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, то для любого элемента $y\in X$ справедливо равенство*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y), \tag{52.38}$$

т. е. сходящийся в пространстве X ряд можно почленно умножить в смысле почти скалярного произведения на элемент этого пространства (в результате чего из ряда, сходящегося в смысле полунормы, порожденной почти скалярным произведением пространства X, получится сходящийся числовой ряд).

Следствие 2. *Если (a,b) — конечный интервал, $f_n(x)\in RL_2(a,b)$, $n=1,2,\ldots$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится в пространстве $RL_2(a,b)$, то*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx, \tag{52.39}$$

т. е. ряды функций, принадлежащих пространству $RL_2(a,b)$, сходящиеся в смысле среднего квадратичного, можно почленно интегрировать.

$\triangleright$ Пусть X — линейное пространство с почти скалярным произведением, $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$, $y \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$; тогда

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| =$$
$$= |(x_n - x,\ y_n) + (x,\ y_n - y)| \leqslant |(x_n - x,\ y_n)| + |(x,\ y_n - y)| \underset{(52.28)}{\leqslant}$$
$$\underset{(52.28)}{\leqslant} \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \to 0$$

при $n \to \infty$, ибо последовательность $\{y_n\}$ ограничена, поскольку она сходящаяся (см. лемму 5) и $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y) = \big(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\big). \tag{52.40}$$

Лемма доказана. $\triangleleft$

$\triangleright$ Докажем следствие 1. Если $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = s$, то

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\Big) = (s, y) = \big(\lim_{m\to\infty} s_m, y\big) \underset{(52.40)}{=} \lim_{m\to\infty} (s_m, y) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{m} x_n, y\Big) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (x_n, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y). \quad \triangleleft$$

$\triangleright$ Докажем теперь следствие 2. Применим формулу (52.38) к ряду элементов пространства $RL_2(a,b)$, взяв за элемент y, на который почленно умножается данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in RL_2(a,b)$, $n = 1, 2, \ldots$, функцию, тождественно равную единице (в силу конечности интервала (a,b) очевидно, что $1 \in RL_2(a,b)$):

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)\cdot 1\,dx \underset{(52.29)}{=} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n, 1\Big) \underset{(52.38)}{=}$$
$$\underset{(52.38)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, 1) \underset{(52.29)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \quad \triangleleft$$

З а м е ч а н и е 3. В случае когда интервал (a,b) конечный, то из равномерной сходимости на нем последовательности функций пространства $RL_2(a,b)$ следует ее сходимость в смысле среднего квадратичного (следствие леммы 7). Поэтому если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in RL_2(a,b)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на конечном интервале (a, b), то этот ряд можно почленно интегрировать (следствие 2 леммы 8). При несколько более сильных ограничениях (непрерывность членов ряда и равномерная сходимость ряда на отрезке $[a, b]$ это утверждение было доказано раньше другим методом (см. теорему 8 в п. 31.4).

Как мы видели, скалярное произведение (x, y) порождает норму $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, а норма — метрику $\rho(x,y) = \|x - y\|$. Таким образом, всякое линейное пространство со скалярным произведением является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}. \tag{52.41}$$

Определение 17. Полное линейное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством.*

Здесь полнота пространства понимается в смысле метрики (52.41), порожденной скалярным произведением.

Всякое конечномерное линейное пространство полно (см. п. 52.1), а поэтому является гильбертовым. В этом случае, как это уже отмечалось выше (см. пример 2), оно называется обычно евклидовым.

Теорема 3. *Всякое линейное пространство со скалярным произведением содержится и плотно в некотором гильбертовом пространстве.*

Это гильбертово пространство называется *пополнением* исходного пространства со скалярным произведением.

$\triangleright$ Если X — линейное пространство со скалярным произведением, то обозначим через X^* его пополнение как метрического пространства (см. теорему 1 в п. 52.1). Линейную операцию определим в пространстве X по формуле (52.23) п. 52.3. Скалярное произведение элементов пространства X^* также определим с помощью предельного перехода следующим образом. Пусть $x^* \in X^*$, $y^* \in X^*$; поскольку $\overline{X} = X^*$, то существуют такие последовательности $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$. Положим

$$(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n). \tag{52.42}$$

Легко проверить, что при заданных элементах x^* и y^* определение (52.42) имеет смысл. Это явствует из того, что числовая последовательность $\{(x_n, y_n)\}$ является фундаментальной (и, следовательно, сходящейся), что вытекает из неравенства

$$|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| \leqslant |(x_n - x_m,\ y_n)| + |(x_m,\ y_n - y_m)| \leqslant \\ \leqslant \|x_n - x_m\|\,\|y_n\| + \|x_m\|\,\|y_n - y_m\|.$$

Предел (52.42) не зависит от выбора последовательностей $x'_n \to x^*$, $y'_n \to y^*$, $n = 1, 2, \ldots$ Это ясно в силу неравенства

$$|(x_n, y_n) - (x'_n, y'_n)| \leqslant \|x_n - x'_n\| \, \|y_n\| + \|x_n\| \, \|y_n - y'_n\|.$$

Наконец то, что функционал (x^*, y^*) на пространстве X^* удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, получается предельным переходом из свойств скалярного произведения (x, y) в пространстве X. $\lhd$

З а м е ч а н и е 4*. Для содержательности понятий скалярного и почти скалярного произведений в комплексных пространствах необходимо изменить определяющие их аксиомы, так как единственная функция в комплексном линейном пространстве, удовлетворяющая аксиомам 1–3 почти скалярного произведения, тождественно равна нулю. Действительно, если для любого элемента x пространства и любого комплексного числа λ справедливо равенство $(\lambda x, \lambda x) \underset{1^\circ),\,2^\circ)}{=} \underset{1^\circ),\,2^\circ)}{=} \lambda^2 (x, x)$, в частности, при $\lambda = i$ равенство $(ix, ix) = -(x, x)$, то поскольку $(ix, ix) \underset{3^\circ)}{\geqslant} 0$ и $(x, x) \underset{3^\circ)}{\geqslant} 0$, то $(x, x) = 0$. Отсюда в силу неравенства Коши–Буняковского (52.25) для любых элементов x и y пространства имеем $(x, y) = 0$.

Для комплексных линейных пространств определения скалярного и почти скалярного произведений отличаются только первым условием определения 16 этих произведений в действительных линейных пространствах: вместо выполнения условий коммутативности $(x, y) = (y, x)$ требуется, чтобы для всех элементов x и y рассматриваемого линейного пространства выполнялось равенство

$$(x, y) = \overline{(y, x)},$$

где черта над числом обозначает, как всегда, число, сопряженное стоящему под чертой комплексному числу.

Из этого свойства следует, что для любого комплексного числа λ имеет место равенство

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y).$$

В самом деле,

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} \underset{2^\circ)}{=} \overline{\lambda(y, x)} = \overline{\lambda}\,\overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y).$$

В n-мерном комплексном арифметическом пространстве (см. пример 4 в п. 52.3) скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^n,$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in C^n.$$

Из этой формулы следует, что скалярное произведение на n-мерном действительном арифметическом пространстве R^n (см. пример 2) является сужением на это пространство скалярного произведения комплексного пространства C^n.

Для комплексных линейных пространств сохраняются многие свойства действительных пространств. Например, для скалярного и почти скалярного (в частности, для скалярного) произведений в комплексном линейном пространстве остается верным неравенство Коши–Буняковского (52.25); каждое комплексное линейное пространство со скалярным произведением можно дополнить, превратив его в полное пространство, в котором исходное пространство будет плотным множеством.

Докажем для примера неравенство Коши–Буняковского для почти скалярного произведения в комплексном линейном пространстве.

Пусть X — комплексное пространство, $x \in X$, $y \in X$ и λ — произвольно фиксированное комплексное число. Согласно свойству 3°) определения 16 почти скалярного произведения имеем $(x+\lambda y,\ x+\lambda y) \geqslant 0$ и, следовательно,

$$(x,x)+\lambda(y,x)+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda\overline{\lambda}(y,y) \geqslant 0.$$

Если $(x,x)=(y,y)=0$, то $\lambda(y,x)+\overline{\lambda}(x,y) \geqslant 0$. Выбрав $\lambda=-(x,y)$, получим $-2|(x,y)|^2 \geqslant 0$, что возможно лишь тогда, когда $(x,y)=0$. В этом случае неравенство Коши–Буняковского выполняется очевидным образом, так как обе его части обращаются в нуль.

Если же $(y,y) \neq 0$, то, выбрав $\lambda = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$, будем иметь

$$(x,x)-\frac{(x,y)}{(y,y)}\,(y,x)-\frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}\,(x,y)+\frac{(x,y)\,\overline{(x,y)}}{(y,y)^2}\,(y,y) \geqslant 0,$$

или

$$(x,x)(y,y)-(x,y)\overline{(x,y)}-\overline{(x,y)}(x,y)+(x,y)\overline{(x,y)} \geqslant 0.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$(x,x)(y,y)-(x,y)\overline{(x,y)} \geqslant 0,$$

т. е. имеет место неравенство Коши–Буняковского

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$

Случай, когда $(y,y)=0$, но $(x,x) \neq 0$, не нуждаются в специальном доказательстве, так как легко сводится к уже рассмотренному.

52.5. Фактор-пространства. Пусть для элементов некоторого множества X определено понятие их эквивалентности (иногда говорят “операции отождествления элементов”):

$$x \sim y, \quad x, y \in X,$$

обладающее следующими свойствами.

1°. Каждый элемент эквивалентен сам себе: $x \sim x$, $x \in X$.

2°. Соотношение эквивалентности коммутативно: если $x \sim y$, то $y \sim x$, $x, y \in X$.

3°. Соотношение эквивалентности ассоциативно: если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$, $x, y, z \in X$.

Множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов (отождествленные эквивалентные элементы), называется *фактор-множеством множества* X, соответствующим заданной эквивалентности его элементов. Элементы фактор-множества называются обычно *классами эквивалентности*. Переход от множества X к фактор-множеству называется *факторизацией* множества X.

Образно говоря, факторизация множества представляет собой отождествление эквивалентных элементов.

Мы уже встречались с подобной конструкцией при доказательстве теоремы о пополнении метрического пространства (см. теорему 1 в п. 52.1).

Пусть X — линейное пространство, X_0 — его подпространство, а элементы $x, y \in X$ называются эквивалентными, если

$$x - y \in X_0. \tag{52.43}$$

В этом случае фактор-множество, соответствующее эквивалентности (52.43), называется *фактор-пространством пространства* X *по подпространству* X_0 и обозначается X/X_0.

Лемма 11. *Фактор-пространство линейного пространства X по его подпространству X_0 является линейным пространством.*

$\triangleright$ Пусть $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ — элементы фактор-пространства X/X_0, т. е. классы эквивалентности (52.43), $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, λ, μ — числа (действительные или комплексные в зависимости от того, какие рассматриваются линейные пространства) и C — класс эквивалентности, содержащий элемент $\lambda a_0 + \mu b_0$. Положим

$$\lambda A + \mu B = C. \tag{52.44}$$

Это определение корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора элементов в классах эквивалентности. В самом деле, если $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, то $a_1 \sim a_0$, $b_1 \sim b_0$. Согласно определению (52.43) это означает, что $a_1 - a_0 \in X_0$ и $b_1 - b_0 \in X_0$. Поскольку X_0 является подпространством пространства X, то $\lambda(a_1 - a_0) + \mu(b_1 - b_0) \in X_0$, а поэтому

$$(\lambda a_1 + \mu b_1) - (\lambda a_0 + \mu b_0) = \lambda(a_1 - a_0) + \mu(b_1 - b_0) \in X_0$$

и, таким образом, $\lambda a_1 + \mu b_1 \sim \lambda a_0 + \mu b_0$, т. е. элемент $\lambda a_1 + \mu b_1$ принадлежит тому же классу эквивалентности C, что и элемент $\lambda a_0 + \mu b_0$.

Операция $\lambda A + \mu B$, определенная равенством (52.44) для элементов фактор-пространства X/X_0, удовлетворяет аксиомам линейного пространства, так как этим аксиомам удовлетворяет линейная операция $\lambda a + \mu b$ над элементами пространства X, $a, b \in X$.

Отметим, что нулевым элементом фактор-пространства X/X_0 (нулевым классом) является подпространство X_0, которое состоит, очевидно, из всех элементов пространства X, эквивалентных его нулю. Действительно, поскольку X_0 — подпространство, то оно содержит нуль: $0 \in X$, а условие $x \sim 0$ согласно определению (52.44) равносильно условию $x = x - 0 \in X_0$.

Если A — какой-либо класс эквивалентности и $a \in A$, то в силу определения (52.44) сумма $A + X_0$ является классом эквивалентности, содержащим элемент $a + 0 = a$, т. е. классом A. Это и доказывает, что $A + X_0 = A$. ◁

Если X — линейное полунормированное пространство, то множество

$$X_0 = \{x \in X\colon \|x\| = 0\} \tag{52.45}$$

является его подпространством.

В самом деле, если $x, y \in X_0$, то для любых чисел λ, μ имеем

$$0 \leqslant \|\lambda x + \mu y\| \leqslant |\lambda|\,\|x\| + |\mu|\,\|y\| = 0. \tag{52.46}$$

Из этого следует, что $\|\lambda x + \mu y\| = 0$. А это и означает, что $\lambda x + \mu y \in$ $\in X_0$.

Из равенства $\|x\| = 0$, которое можно переписать в виде $\|x - 0\| =$ $= 0$, следует, что $x \sim 0$. Таким образом, подпространство X_0 состоит из всех элементов пространства X, эквивалентных нулю:

$$X_) = \{x \in X :\ \ x \sim 0\},$$

и поэтому, согласно сказанному выше, является нулем фактор-пространства $X \backslash X_0$.

Лемма 12. *Если X — полунормированное линейное пространство и $X_0 = \{x \in X\colon \|x\| = 0\}$, то фактор-пространство X/X_0 является нормированным линейным пространством.*

▷ Пусть $A = \{a\} \in X/X_0$ и $a_0 \in A$. Положим

$$\|A\| = \|a\|. \tag{52.47}$$

Это определение не зависит от выбора элементов в классах эквивалентности. Действительно, если $a_1 \in A$ и, следовательно, $a_1 - a_0 \in X_0$, т. е. $\|a_1 - a_0\| \underset{(52.45)}{=} 0$, то в силу свойства полунормы

$$|\,\|a_1\| - \|a_0\|\,| \leqslant \|a_1 - a_0\| = 0,$$

и потому

$$\|a_1\| = \|a_0\|. \tag{52.48}$$

То, что функция $\|A\|$, $A \in X/X_0$, удовлетворяет аксиомам полунормы, следует из того, что им удовлетворяет полунорма $\|a\|$, $a \in X$, пространства X. Покажем, что полунорма $\|A\|$ является в действительности нормой, т. е. что из равенства $\|A\| = 0$ следует, что $A = 0$.

Пусть $\|A\| = 0$ и $a \in A$. Поскольку $\|a - 0\| = \|a\| = \|A\| = 0$, то элемент a эквивалентен нулю: $a \sim 0$, и, следовательно, нуль входит в класс A. Это означает, что A является нулевым классом: $A = 0$. $\triangleleft$

Если X — линейное пространство с почти скалярным произведением, то множество $X_0 = \{x \in X\colon (x,x) = 0\}$ является его подпространством.

Это следует из того, что функция $\sqrt{(x,x)} = \|x\|$ является полунормой и $X_0 = \{x \in X\colon \|x\| = 0\}$.

Лемма 13. *Если X — линейное пространство с почти скалярным произведением и $X_0 = \{x \in X\colon (x,x) = 0\}$, то фактор-пространство X/X_0 является линейным пространством со скалярным произведением.*

$\triangleright$ Пусть, как всегда, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Если $a_0 \in A \in X/X_0$, $b \in B \in \in X/X_0$, то положим

$$(A,B) = (a_0,b_0). \tag{52.49}$$

Покажем, что это определение не зависит от выбора элементов в классах эквивалентности.

Пусть $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, тогда $\|a_1 - a_0\| = \|b_1 - b_0\| \underset{(52.45)}{=} 0$, а поэтому

$$|(a_1,b_1) - (a_0,b_0)| = |(a_1,b_1) - (a_0,b_1) + (a_0,b_1) - (a_0,b_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |(a_1 - a_0,\ b_1)| + |(a_0,\ b_1 - b_0)| \leqslant \|a_1 - a_0\|\,\|b_1\| + \|a_0\|\,\|b_1 - b_0\| = 0$$

и, следовательно,

$$(a_1,b_1) = (a_0,b_0).$$

Функция (A,B) обладает свойствами $1^\circ)$–$3^\circ)$ скалярного произведения (см. определение 16 в п. 52.4), так как этими свойствами обладает почти скалярное произведение (a,b) в пространстве X. Тем самым функция $(A,\,B)$ также является почти скалярным произведением. Покажем, что она в действительности представляет собой скалярное произведение, т. е. что из условия

$$(A,A) = 0 \tag{52.50}$$

следует, что $A = 0$.

В самом деле, почти скалярному произведению (a,b) в пространстве X соответствует полунорма

$$\|a\| = \sqrt{(a,a)}, \quad a \in X \tag{52.51}$$

(см. следствие 2 леммы 6 в п. 52.4), которая согласно лемме 12 порождает в фактор-пространстве X/X_0 норму

$$\|A\| = \|a\|, \quad a \in A \in X/X_0. \tag{52.52}$$

Но

$$(A,A) \underset{(52.49)}{=} (a,a) \underset{(52.51)}{=} \|a\|^2 \underset{(52.52)}{=} \|A\|^2.$$

Поэтому из условия (52.50) следует, что норма $\|A\| = 0$, а поэтому $A = 0$. $\triangleleft$

52.6. Пространство L_2. Займемся изучением вопроса о полноте функциональных пространств.

Теорема 4. *Пространство $CL_2[a,b]$ не является гильбертовым.*

$\triangleright$ Приведем пример фундаментальной, но не сходящейся в пространстве $CL_2[-1,1]$ последовательности. Пусть (рис. 198)

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/n, \\ nx, & \text{если} \quad -1/n < x < 1/n, \\ 1, & \text{если} \quad 1/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{52.53}$$

Функции f_n, очевидно, непрерывны. Покажем, что они образуют в пространстве $CL_2[-1,1]$ фундаментальную последовательность. Считая, например, что $m > n$, получим

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2\,dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f_m(x)|]^2\,dx \underset{(52.53)}{\leqslant} 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n}.$$

Очевидно, что если задано $\varepsilon > 0$, то достаточно выбрать $n_\varepsilon > 8/\varepsilon^2$, чтобы при $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполнялось неравенство $\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon$, а это и означает фундаментальность последовательности $\{f_n\}$.

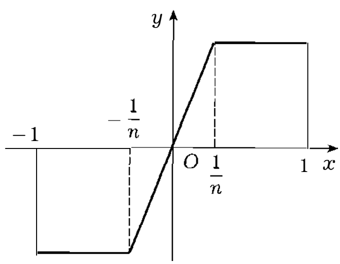

Рис. 198

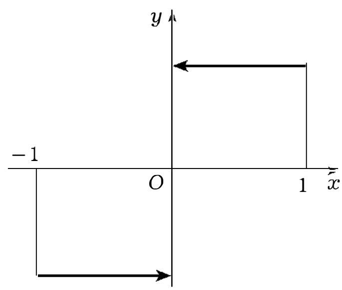

Рис. 199

В каждой точке отрезка $[-1,1]$ эта последовательность сходится к функции (рис. 199)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f и по полунорме пространства $RL_2[-1,1]$:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx = \int\limits_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f(x)|]^2\, dx \leqslant \frac{8}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0. \tag{52.54}$$

Функция f разрывна и, следовательно, не принадлежит пространству $CL_2[-1,1]$. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ не может одновременно сходиться в пространстве $RL_2[-1,1]$ еще и к непрерывной функции. Допустим противное: пусть существует такая непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция g, что
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_2 = 0. \tag{52.55}$$

Поскольку
$$\|f - g\|_2 = \|(f - f_n) + (f_n - g)\|_2 \leqslant \|f - f_n\|_2 + \|f_n - g\|_2 \underset{\substack{(52.54)\\(52.55)}}{\to} 0$$

при $n \to \infty$ и разность $f - g$ не зависит от n, то $\|f - g\|_2 = 0$ (это равенство следует, конечно, и из леммы 4 п. 52.3), т. е.
$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2\, dx = 0.$$

Но
$$0 \leqslant \int\limits_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|^2\, dx \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2\, dx,$$
$$0 \leqslant \int\limits_{0}^{1} |f(x) - g(x)|^2\, dx \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2\, dx.$$

Следовательно,
$$\int\limits_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|^2\, dx = 0, \quad \int\limits_{0}^{1} |f(x) - g(x)|^2\, dx = 0. \tag{52.56}$$

Функции f и g непрерывны на полуинтервалах $[-1,0)$ и $(0,1]$, поэтому равенства (52.56) возможны только в том случае, если
$$f(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in [-1,0) \cup (0,1],$$

но тогда
$$\lim_{x\to -0} g(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to +0} g(x),$$

т. е. функция g не непрерывна в точке $x = 0$.

Итак, последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций является фундаментальной в пространстве $CL_2[-1, 1]$, но не имеет в нем предела. Это и означает, что пространство $CL_2[-1, 1]$ неполное. $\triangleleft$

Пространство CL_2, как и всякое пространство со скалярным произведением, можно пополнить до гильбертова пространства. Прежде чем приступить к изучению этого пополнения, установим плотность пространства непрерывных и финитных на интервале (a, b) функций в пространстве $RL_2(a, b)$ по полунорме последнего. Здесь плотность понимается в смысле следующего определения (оно необходимо, так как пространство $RL_2(a, b)$ не является метрическим).

Определение 18. Подмножество Y полунормированного пространства X называется ***плотным в пространстве X по его полунорме***, если для любого элемента $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $y \in Y$, что $||x - y|| < \varepsilon$.

Очевидно, что в случае, когда полунорма является нормой, понятие плотности подмножества в пространстве в смысле определения 18 совпадает с понятием его плотности в смысле метрики, порожденной нормой рассматриваемого пространства.

Лемма 14. *Пусть f — функция с интегрируемым на интервале (a, b) квадратом: $f \in RL_2(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая функция с носителем на этом интервале: $\operatorname{supp} \varphi \subset (a, b)$, что*

$$||f - \varphi||_2 < \varepsilon.$$

Иначе говоря, множество ступенчатых функций плотно в пространстве интегрируемых в квадрате функций.

$\triangleright$ Пусть функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$ (общий случай абсолютно интегрируемой функции легко сводится к этому случаю; см. п. 51.1). Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу сходимости интеграла $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ для этого ε существуют такие ξ и η, $a < \xi < \eta < b$, что

$$\int\limits_a^{\xi} f^2(x)\,dx + \int\limits_{\eta}^{b} f^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{52.57}$$

На отрезке $[\xi, \eta]$ функция f интегрируема по Риману, следовательно, она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant c, \quad \xi \leqslant x \leqslant \eta. \tag{52.58}$$

Согласно теореме 2 п. 51.2, примененной к интервалу (ξ, η), для функции f существует ступенчатая функция φ, удовлетворяющая следующим условиям (см. еще там же замечание 2):

$$\operatorname{supp}\varphi \subset (\xi, \eta), \tag{52.59}$$

$$|\varphi(x)| \leqslant c, \quad \xi \leqslant x \leqslant \eta, \tag{52.60}$$

$$\int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon^2}{4c}. \tag{52.61}$$

Поэтому

$$\|f - \varphi\|_2^2 = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2\, dx =$$

$$= \int_a^\xi f^2(x)\, dx + \int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|^2\, dx + \int_\eta^b f^2(x)\, dx \underset{(52.57)}{<}$$

$$\underset{(52.57)}{<} \frac{\varepsilon^2}{2} + \int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\, [|f(x)| + |\varphi(x)|]\, dx \underset{\substack{(52.58)\\(52.60)}}{\leqslant}$$

$$\underset{\substack{(52.58)\\(52.60)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon^2}{2} + 2c\int_\xi^\eta |f(x) - g(x)|\, dx \underset{(52.61)}{<} \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2. \tag{52.62}$$

Из выполнения условий (52.59) и (52.62) следует утверждение леммы (рис. 200). ◁

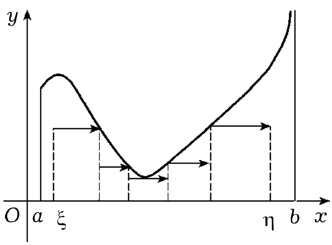

Рис. 200

Лемма 15. *Если φ — ступенчатая функция*, $\operatorname{supp}\varphi \subset (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая непрерывная и финитная на интервале* (a, b) *функция* g, *что*

$$\|\varphi - g\|_2 < \varepsilon. \tag{52.63}$$

▷ Поскольку всякая ступенчатая функция с носителем, лежащим в интервале (a, b), является линейной комбинацией характеристических функций конечных полуоткрытых промежутков типа $[\xi, \eta)$, то лемму достаточно доказать для характеристической функции χ произвольно фиксированного полуинтервала $[\xi, \eta)$, $a < \xi < \eta < b$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие

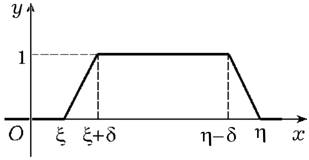

Рис. 201

$$\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon^2}{2}, \frac{\eta - \varepsilon}{2}\right\},$$

и рассмотрим непрерывную кусочно линейную функцию g, график которой изображен на рис. 201 жирной линией. Эта функция g финитна на интервале (a, b), так как

$$\operatorname{supp} g(x) = [\xi, \eta] \subset (a, b),$$

и для нее во всех точках $x \in R$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \chi(x) - g(x) \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\|\chi - g\|_2^2 = \int_\xi^\eta |\chi(x) - g(x)|^2\, dx =$$

$$= \int_\xi^{\xi+\delta} (\chi(x) - g(x))^2\, dx + \int_{\eta-\delta}^\eta (\chi(x) - g(x))^2\, dx \leqslant \int_\xi^{\xi+\delta} dx + \int_{\eta-\delta}^\eta dx = 2\delta < \varepsilon^2,$$

т. е. для функции $\varphi = \chi$ выполняется условие (52.63). $\lhd$

Обозначим через $\overset{\circ}{C}L_2$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, подмножество полунормированного пространства $RL_2(a, b)$, состоящее из непрерывных и финитных на конечном или бесконечном интервале (a, b) функций.

Ясно, что любая непрерывная финитная на конечном или бесконечном интервале (a, b) функция принадлежит пространству $RL_2(a, b)$, так как в силу непрерывности и финитности функции интеграл от ее квадрата всегда конечен.

Примером непрерывной финитной на интервале функции является функция, построенная при доказательстве леммы 15.

Напомним (см. определение 3 в п. 51.2), что финитная на интервале функция определена на всей числовой оси.

В случае, когда a и b — конечные числа, ***функцией, финитной на отрезке*** $[a, b]$, называется функция, финитная на интервале (a, b). Согласно этому определению подмножество пространства $RL_2[a, b]$, состоящее из непрерывных финитных на отрезке $[a, b]$ функций (оно обозначается $\overset{\circ}{C}L_2[a, b]$), совпадает с множеством $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$:

$$\overset{\circ}{C}L_2[a, b] = \overset{\circ}{C}L_2(a, b).$$

Теорема 5. *Множество $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ непрерывных финитных на интервале (a, b) функций плотно в пространстве $RL_2(a, b)$ функций с интегрируемым на этом интервале квадратом, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.*

$\rhd$ Пусть $f \in RL_2(a, b)$ и произвольно фиксировано $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 14 существует такая финитная на интервале (a, b) ступенчатая функция φ, что

$$\|f - \varphi\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{52.64}$$

Для этой функции φ, согласно лемме 15, существует такая непрерывная и финитная на интервале (a, b) функция g, т. е. функ-

ция $g \in \overset{\circ}{C}L_2(a,b)$, что
$$\|\varphi - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{52.65}$$
Поэтому
$$\|f-g\|_2 \leqslant \|f-\varphi\|_2 + \|\varphi - g\|_2 \underset{\substack{(52.64)\\(52.65)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что множество $\overset{\circ}{C}L_2(a,b)$ плотно в пространстве $RL_2(a,b)$. $\lhd$

В силу очевидного включения
$$\overset{\circ}{C}L_2(a,b) \subset CL_2(a,b) \subset RL_2(a,b) \tag{52.66}$$
множество $CL_2(a,b)$ непрерывных на интервале (a,b) функций, интеграл от квадрата которых сходится, также плотно в пространстве $RL_2(a,b)$. В самом деле, всегда, если множество A, лежащее в некотором полунормированном пространстве X, плотно в этом пространстве, то и любое множество B такое, что $A \subset B \subset X$, также плотно в X.

Все сказанное справедливо для любого конечного или бесконечного промежутка. В частности, и в случае отрезка множество всех непрерывных на нем функций плотно в пространстве $RL_2[a,b]$.

При использовании пространства RL_2 неудобным является то обстоятельство, что в нем определено почти скалярное, а не скалярное произведение.

Поэтому целесообразно перейти от пространства RL_2 к его фактор-пространству по подпространству функций, интеграл от квадрата которых равен нулю. Обозначим это подпространство RL_2^0:
$$RL_2^0 = \{f \in RL_2 \colon \|f\|_2 = 0\},$$
и положим
$$\widetilde{RL_2} = RL_2/RL_2^0. \tag{52.67}$$

Элементами пространства $\widetilde{RL_2}$ являются классы эквивалентных функций пространства RL_2. Функции $f, g \in RL_2$ называются *эквивалентными*, если $\|f-g\|_2 = 0$ (см. п. 52.5). Скалярное произведение в пространстве $\widetilde{RL_2}$ определяется по формуле (см. там же)
$$(F,G) = (f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f \in F \in \widetilde{RL_2}, \quad g \in G \in \widetilde{RL_2}. \tag{52.68}$$

Замечание 1. Если в классе $F \in \widetilde{RL_2}(a,b)$ эквивалентных функций имеется непрерывная функция $f \in F$, то такая функция единственна. Это следует из того, что если функции f и f_1 непрерывны и эквивалентны, т. е. если $\|f - f_1\|_2 = 0$, что в интегральной записи означает
$$\int\limits_a^b (f(x) - f_1(x))^2\,dx = 0,$$

то (независимо от того, является написанный интеграл собственным или несобственным) отсюда вытекает, что $f(x) = f_1(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Из этого замечания следует, что отображение, ставящее в соответствие каждой функции из $F \in CL_2(a, b)$, т. е. каждой непрерывной с интегрируемым на (a, b) квадратом функции, содержащий ее класс эквивалентных функций $F \in \widetilde{RL_2}(a, b)$, является взаимно однозначным отображением пространства $CL_2(a, b)$ в пространство $\widetilde{RL_2}(a, b)$, т. е. инъекцией $CL_2(a, b)$ в $\widetilde{RL_2}(a, b)$. При этом, согласно данным выше определениям, линейные операции с функциями и скалярное произведение функций пространства $CL_2(a, b)$ совпадают соответственно с линейными операциями и скалярным произведением, примененными к содержащим рассматриваемые функции классам, т. е. к образам этих функций при указанной выше инъекции. Отождествив каждую функцию $f \in CL_2(a, b)$ с содержащим ее классом эквивалентных функций, множество $CL_2(a, b)$ можно рассматривать как подмножество пространства $\widetilde{RL_2}(a, b)$:

$$CL_2(a, b) \subset \widetilde{RL_2}(a, b).$$

Поскольку множество $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ непрерывных финитных на интервале (a, b) функций является подмножеством множества $CL_2(a, b)$, то

$$\overset{\circ}{C}L_2(a, b) \subset CL_2(a, b) \subset \widetilde{RL_2}(a, b). \tag{52.69}$$

Лемма 16. *Пространство* $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ *плотно в пространстве* $\widetilde{RL_2}(a, b)$.

Следствие. *Пространство* $CL_2(a, b)$ *плотно в пространстве* $\widetilde{RL_2}(a, b)$.

▷ Пусть произвольно заданы элемент $f \in \widetilde{RL_2}(a, b)$ и число $\varepsilon > 0$. Выберем какую-либо функцию $f \in F$, и, следовательно, $f \in RL_2(a, b)$. Согласно теореме 5 найдется такая функция $g \in \overset{\circ}{C}L_2(a, b)$, что

$$\|f - g\|_{RL_2} < \varepsilon.$$

Отождествив, как это было сделано выше, функцию g с ее классом эквивалентности, получим

$$\|F - g\|_{\widetilde{RL_2}} < \varepsilon.$$

Это и означает плотность пространства $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ в пространстве $\widetilde{RL_2}(a, b)$.

Следствие непосредственно вытекает из включений (52.69). ◁

Замечание 2. Если X, Y и Z — полунормированные пространства, $X \subset Y \subset Z$, X плотно в Y, а Y плотно в Z, то X плотно в Z.

$\triangleright$ В самом деле, если $z \in Z$ и $\varepsilon > 0$, то в силу плотности Y в Z существует такой элемент $y \in Y$, что $||z - y|| < \frac{\varepsilon}{2}$, а в силу плотности X в Y существует такое $x \in X$, что $||y - x|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому

$$||z - x|| < ||z - y|| + ||y - x|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \triangleleft$$

Определение 19. Гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства $\widetilde{RL_2}(a, b)$, называется *лебеговым пространством* $L_2 = L_2(a, b)$ ("эль два").

Теорема 6. *Пространство* $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ *непрерывных финитных на интервале* (a, b) *функций,* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *плотно в гильбертовом пространстве* $L_2(a, b)$.

Следствие. *Гильбертово пространство* $L_2(a, b)$ *является пополнением пространств* $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ *и* $CL_2(a, b)$ *на конечном или бесконечном промежутке с концами в точках* a *и* b.

$\triangleright$ Действительно, поскольку пространство $L_2(a, b)$ является пополнением пространства $\widetilde{RL_2}(a, b)$, то $\widetilde{RL_2}(a, b)$ плотно в $L_2(a, b)$, а по лемме пространство $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ плотно в $\widetilde{RL_2}(a, b)$, следовательно, согласно замечанию 2 пространство $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ плотно в $L_2(a, b)$.

Следствие непосредственно вытекает из доказанной плотности пространства $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ в пространстве $L_2(a, b)$ и включений

$$\overset{\circ}{C}L_2(a, b) \subset CL_2(a, b) \subset L_2(a, b). \quad \triangleleft$$

Замечание 3. Из следствия теоремы 6 следует, что можно сразу определить пространство $L_2(a, b)$ как пополнение пространства $CL_2(a, b)$, вовсе не рассматривая пространство $RL_2(a, b)$. Но тогда можно было бы сказать лишь, что пространство $L_2(a, b)$ состоит из непрерывных функций и классов фундаментальных (в смысле метрики пространства CL_2) эквивалентных последовательностей непрерывных функций. Тем самым осталось бы невыясненным, что все функции, квадраты которых абсолютно интегрируемы на промежутке (a, b), т. е. функции из пространства $RL_2(a, b)$, а точнее, классы таких эквивалентных функций, т. е. элементы пространства $\widetilde{RL_2}(a, b)$, можно рассматривать как элементы пространства $L_2(a, b)$. Например, без дополнительных рассуждений было бы не ясно, что класс функций, эквивалентных разрывной и неограниченной функции $f(x) = \frac{1}{x^{1/3}} \in RL_2[-1, 1]$, можно рассматривать как элемент пространства $L_2[-1, 1]$, каковым этот класс является согласно определению пространства $L_2[-1, 1]$ как пополнения пространства $\widetilde{RL_2}[-1, 1]$.

Заметим, что существует такое понятие интеграла (интеграл Лебега) и основанного на нем понятия эквивалентности функций, для которых все элементы пространства $L_2(a,b)$ оказываются классами эквивалентных функций, интегрируемых в квадрате в смысле указанного интеграла. Рассмотрение этого вопроса не входит в задачу настоящего учебника.

Замечание 4. Иногда для краткости вместо $f \in RL_2(a,b)$ пишут $f \in L_2(a,b)$, понимая под этим, что у функции f ее квадрат f^2 интегрируем на рассматриваемом промежутке.

52.7. Пространство L_1. Пространство $CL = CL(a,b)$ непрерывных и абсолютно интегрируемых на интервале (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функций является, как мы знаем, нормированным пространством. Аналогично тому, как была доказана теорема 4 в п. 52.6, нетрудно показать, что это пространство не является полным ни для конечного, ни для бесконечного интервала (a,b). Как всякое нормированное пространство оно может быть дополнено до банахова пространства.

По аналогии со случаем пространства $L_2(a,b)$ можно показать, что пополнение пространства $CL(a,b)$ можно получить и как пополнение фактор-пространства $\widetilde{RL_2}(a,b) = RL(a,b)/RL(a,b)$ пространства абсолютно интегрируемых функций $RL(a,b)$ по его подпространству $RL(a,b)$ функций, интеграл от абсолютной величины которых равен нулю.

Имеет место следующее утверждение, аналогичное лемме 11.

Лемма 17. *Если* φ *— ступенчатая функция,* $\operatorname{supp}\varphi \subset (a,b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая непрерывная и финитная на интервале* (a,b) *функция* g, *что*

$$\|\varphi - g\|_1 < \varepsilon.$$

$\triangleright$ Эта лемма доказывается по той же схеме, что и лемма 15. Всякая ступенчатая функция является линейной комбинацией характеристических функций полуинтервалов вида $[\xi,\eta)$. Поэтому лемму достаточно доказать для случая, когда функция φ является характеристической функцией полуинтервала $[\xi,\eta) \subset (a,b)$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмем $\delta < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\eta-\xi}{2}\right\}$. Тогда для функции g, конструкция которой описана при доказательстве леммы 15 (см. рис. 201), получим

$$\|\varphi - g\|_1 = \int\limits_a^b |\varphi(x) - g(x)|\,dx = \int\limits_{\xi}^{\xi+\delta} |\varphi(x) - g(x)|\,dx + \\ + \int\limits_{\eta-\delta}^{\eta} |\varphi(x) - g(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{\xi}^{\xi+\delta} dx + \int\limits_{\eta-\delta}^{\eta} dx = 2\delta < \varepsilon. \ \triangleleft$$

Подпространство непрерывных и финитных на интервале (a,b) функций пространства $CL(a,b)$ обозначим $\overset{\circ}{C}L = \overset{\circ}{C}L(a,b)$.

Теорема 7. *Множество $\overset{\circ}{C}L(a, b)$ непрерывных и финитных на некотором интервале $(a, b), -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функций плотно в полунормированном пространстве $RL(a, b)$ абсолютно интегрируемых на этом интервале функций.*

$\triangleright$ Пусть $f \in RL(a, b)$ и произвольно фиксировано $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 2 п. 51.2 существует такая ступенчатая функция $\varphi, \operatorname{supp} \varphi \subset \subset (a, b)$, что $\|f - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, а согласно лемме 17 для функции φ существует такая непрерывная и финитная на интервале (a, b) функция g, что $\|\varphi - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому

$$\|f - g\|_1 \leqslant \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает плотность множества $\overset{\circ}{C}L(a, b)$ в пространстве $RL(a, b)$. $\triangleleft$

Произведем теперь факторизацию пространства $RL(a, b)$ (по аналогии с пространством $RL_2(a, b)$) следующим образом.

Пусть

$$RL^0(a, b) = \{f \in RL^0(a, b) \colon \|f\|_1 = 0\},$$
$$\widetilde{RL}(a, b) = RL(a, b)/RL^0(a, b). \tag{52.70}$$

Согласно лемме 12 пространство $\widetilde{RL}(a, b)$ является уже не полунормированным, а нормированным пространством. Его элементы суть классы эквивалентных абсолютно интегрируемых функций. Здесь абсолютно интегрируемые функции называются *эквивалентными*, если

$$\|f - g\|_1 = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0.$$

В каждом классе эквивалентности $F = \{f\} \in \widetilde{RL}$, если имеется непрерывная функция, то она единственна. Отождествление такой функции с классом эквивалентности, в котором она содержится, позволяет рассматривать пространство непрерывных функций $CL(a, b)$ и пространство непрерывных функций $\overset{\circ}{C}L(a, b)$ как подпространства пространства $\widetilde{RL}(a, b)$:

$$\overset{\circ}{C}L(a, b) \subset CL(a, b) \subset \widetilde{RL}(a, b). \tag{52.71}$$

Из теоремы 7 сразу следует, что пространство $\overset{\circ}{C}L(a, b)$, а следовательно, и пространство $CL(a, b)$, плотны в пространстве $\widetilde{RL}(a, b)$. Действительно, если $F \in \widetilde{RL}, f \in F$ и задано $\varepsilon > 0$, то по теореме 7 существует такая функция $g \in \overset{\circ}{C}L(a, b)$, что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ в пространстве RL, а поэтому

$$\|F - g\| < \varepsilon \quad \text{в} \quad \widetilde{RL}.$$

Определение 20. *Лебеговым пространством* $L(a,b)$ (его обозначают также $L_1(a,b)$) называется пополнение фактор-пространства $\widetilde{RL}(a,b) = RL(a,b)/RL^0(a,b)$.

Теорема 8. *Лебегово пространство* $L(a,b)$ *является пополнениями пространств* $CL(a,b)$ *и* $\overset{\circ}{C}L(a,b)$.

Это явствует из включений (52.71) и из того, что пространство $\overset{\circ}{C}L(a,b)$ плотно в пространстве $\widetilde{RL}(a,b)$, которое в свою очередь, согласно определению 20, плотно в пространстве $L(a,b)$.

Из сказанного следует, что имеют место включения

$$\overset{\circ}{C}L(a,b) \subset CL(a,b) \subset \widetilde{RL}(a,b) \subset L(a,b). \tag{52.72}$$

Замечание. Пространство $\widetilde{RL} = \widetilde{RL}(a,b)$ часто называют *пространством абсолютно интегрируемых функций*, хотя точнее было бы называть его пространством классов эквивалентных абсолютно интегрируемых функций. В этом смысле и говорят, что все абсолютно интегрируемые функции принадлежат пространству $L(a,b)$.

В случае конечного отрезка $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, всякая непрерывная и финитная на интервале (a,b) функция, очевидно, непрерывна и на отрезке $[a,b]$, а сужение на интервал (a,b) всякой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции абсолютно интегрируемо на интервале (a,b), поэтому (обозначения см. в замечании 2 п. 52.4)

$$\overset{\circ}{C}L(a,b) \subset CL[a,b] \subset \widetilde{RL}(a,b).$$

Отсюда в силу теоремы 8 следует, что пополнение $L[a,b] = L_1[a,b]$ пространства $CL[a,b]$ совпадает с пополнением $L(a,b)$ пространства $\overset{\circ}{C}L(a,b)$:

$$L[a,b] = L(a,b).$$

Аналогично показывается, что пополнение $L_2[a,b]$ пространства $CL_2[a,b]$ совпадает с пополнением $L_2(a,b)$ пространства $\overset{\circ}{C}L_2(a,b)$:

$$L_2[a,b] = L_2(a,b).$$

Таким образом, в результате пополнения в рассматриваемых метриках пространств функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ или на интервале (a,b), мы приходим к одному и тому же пространству.

§ 53. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

53.1. Ортогональные системы. Пусть X — линейное пространство со скалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются *ортогональными*, если $(x,y) = 0$. В этом случае пишут $x \perp y$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество, которое будем называть множеством индексов. Система $\{x_\alpha\colon\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$, $x_\alpha \in X$, называется *ортогональной*, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{A}$. Если, кроме того, для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ выполняется условие

$$(x_\alpha, x_\alpha) = 1,$$

то система $\{x_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *ортонормированной.*

Лемма 1. *Если $\{x_\alpha\ \ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — ортогональная система в пространстве со скалярным произведением и для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ выполняется неравенство $x_\alpha \neq 0$, то эта система является линейно независимой системой.*

$\triangleright$ Надо показать, что, каково бы ни было конечное подмножество элементов системы $\{x_\alpha\colon\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$, его элементы линейно независимы (определение 9 из п. 52.2). Пусть $x_{\alpha_i} \in \{x_\alpha\colon\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и существуют числа λ_i, $i = 1, 2, ..., n$, такие, что

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + ... + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0. \tag{53.1}$$

Умножив это равенство скалярно на элемент x_{α_k} (k фиксировано, $k = 1, 2, ..., n$), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_k}) = 0.$$

Поскольку при $i \neq k$ выполняется равенство $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_k}) = 0$, то

$$\lambda_k (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0.$$

По условию $x_{\alpha_k} \neq 0$, следовательно, и $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, поэтому $\lambda_k = 0$. Таким образом, из равенства (53.1) следует, что все числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ равны нулю, а это и означает линейную независимость элементов $x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_n}$. $\triangleleft$

Пример 1. Тригонометрическая система

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad ..., \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad ...$$

ортогональна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad ..., \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad ...$$

ортонормирована (см. п. 51.1).

Пример 2. Многочлены

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, ...,$$

называемые *многочленами Лежандра*, образуют ортогональную систему в пространстве $L_2[-1, 1]$.

Докажем это. Заметив, что

$$\left.\frac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}\right|_{x=\pm 1}=0, \quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

и выполнив последовательно интегрирование по частям в написанном интеграле, получим при $0 \leqslant m \leqslant n-1$

$$\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = \\ = x^m \left.\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\right|_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} x^{m-1}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx = \ldots \\ \ldots = (-1)^m m!\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\,dx = (-1)^m m!\left.\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\right|_{-1}^{1} = 0, \tag{53.2}$$

ибо $0 \leqslant n-m-1 \leqslant n-1$.

Поскольку любой многочлен $Q_m(x)$ степени не выше m, $m=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1$, является линейной комбинацией степеней $1, x, x^2, \ldots, x^m$, то из равенства (53.2) следует, что

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)P_n(x)\,dx = 0, \quad m=0,1,\ldots,n-1.$$

В частности,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

Аналогичными рассуждениями доказывается, что

$$||P_n||_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Выбор коэффициентов $\dfrac{1}{2^n\,n!}$ у производных $\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ в полиномах Лежандра объясняется тем, что при таком выборе для всех $n=0,1,2,\ldots$ выполняется условие $P_n(1)=1$.

Линейное пространство многочленов степени не выше n обозначим $\mathcal{P}_n$. Очевидно, что $\mathcal{P}_n = L(1, x, x^2, \ldots, x^n)$, т. е. пространство $\mathcal{P}_n$ является линейной оболочкой системы степенных функций 1, x, x^2, ..., x^n.

Поскольку степень нулевого многочлена равна $-\infty$ (см. п. 3.2), то она меньше любого неотрицательного целого числа, а поэтому нулевой многочлен принадлежит любому пространству $\mathcal{P}_n$, $n=0,1,2,\ldots$

Лемма 2. *Пространство $\mathcal{P}_n$ имеет размерность $n+1$, и всякая система $\{Q_0(x), Q_1(x), ..., Q_n(x)\}$ из $n+1$ многочленов*

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} q_{mk} x^k$$

таких, что многочлен $Q_m(x)$ имеет степень m, т. е. что $q_{mm} \neq 0$, $m = 0, 1, ..., n$, образует базис в пространстве $\mathcal{P}_n$.

Следствие 1. *Многочлены Лежандра*

$$P_0(x),\ P_1(x),\ ...,\ P_n(x) \tag{53.3}$$

образуют базис в пространстве $\mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше чем n.

Следствие 2. *Любой многочлен степени не выше чем n является линейной комбинацией многочленов Лежандра* (53.3) *также степеней не выше чем n.*

$\triangleright$ Докажем, что степени $1, x, x^2, ..., x^n$ линейно независимы: если на каком-то промежутке

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \lambda_n x^n = 0, \tag{53.4}$$

то, продифференцировав последовательно n раз равенство (53.4), получим

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \lambda_n x^n = 0,$$

$$1 \cdot \lambda_1 + 2\lambda_2 x + ... + (n-1)\lambda_{n-1} x^{n-2} + n\lambda_n x^{n-1} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(n-1)!\,\lambda_{n-1} + n(n-1)\dots 2\lambda_n x = 0,$$

$$n!\,\lambda_n = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $\lambda_n = 0$. Подставив это значение λ_n в предпоследнее равенство, будем иметь $\lambda_{n-1} = 0$. Продолжив этот процесс, получим

$$\lambda_{n-2} = \lambda_{n-3} = ... = \lambda_1 = \lambda_0 = 0,$$

что и означает линейную независимость степеней $1, x, x^2, ..., x^n$. Следовательно, эти степени образуют базис в их линейной оболочке $\mathcal{P}_n = L(1, x, x^2, ..., x^n)$, являющейся в силу этого $(n+1)$-мерным пространством.

Теперь заметим, что любая система $n+1$ многочленов, степени которых различны и не превосходят n, т. е. система многочленов $Q_0(x), Q_1(x), ..., Q_n(x)$, где многочлен $Q_k(x)$ имеет степень, равную k, $k = 0, 1, ..., n$, образует базис в пространстве $\mathcal{P}_n$. Действительно, если $Q_k(x) = \sum\limits_{m=0}^{k} a_{km} x^m$, то по условию $a_{kk} \neq 0$. Таким образом, многочлены $Q_k(x)$ выражаются через элементы базиса $1, x, x^2, \ldots, x^n$ с помощью треугольной матрицы, диагональные элементы a_{kk} которой не равны нулю, и, следовательно, с помощью невырожденной матрицы. Поэтому многочлены $Q_k(x), k = 0, 1, \ldots, n$, также образуют базис в пространстве $\mathcal{P}_n$, т. е. они линейно независимы, и каждый многочлен степени не выше n является их линейной комбинацией.

Многочлены Лежандра (53.3) удовлетворяют условиям леммы 2, ибо

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,(2n(2n-1)\ldots(n+1)x^n + \ldots)$$

имеет степень n. Поэтому многочлены Лежандра образуют базис в пространстве $\mathcal{P}_n$. Отсюда следует, что любой многочлен степени не выше n является линейной комбинацией многочленов Лежандра (53.3) степеней не выше n. $\lhd$

53.2. Полные системы.

Определение 1. Пусть X — полунормированное пространство. Система $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ его элементов называется *полной* в нем, если линейная оболочка этой системы плотна в нем (определение 18 из п. 52.6) по его полунорме.

Иначе говоря, полнота системы $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в пространстве X означает, что для любого элемента $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ этой системы и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n})\| < \varepsilon.$$

Из этого определения следует, что если две системы $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и $\{x_\beta;\ \beta \in \mathfrak{A}\}$ элементов полунормированного пространства имеют одинаковые линейные оболочки, то они одновременно полны или неполны в нем.

Пример 1. Тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\quad \ldots$$

полна в пространстве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих на его концах одинаковые значения.

Это является просто перефразировкой теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими многочленами (см. теорему 7 в п 51.7).

Пример 2. Система степенных функций

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

полна в пространстве непрерывных на отрезке функций при любом выборе этого отрезка.

Это есть перефразировка теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами (см. теорему 8 в п. 51.7), т. е. линейными комбинациями степенных функций.

Пример 3. Система многочленов Лежандра

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

полна в пространстве непрерывных на отрезке функций при любом выборе этого отрезка.

Согласно примеру 2 множество многочленов образует плотное множество в пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Каждый же многочлен является линейной комбинацией многочленов Лежандра (см. следствие 2 леммы 2 в п. 53.1), поэтому множество линейных комбинаций многочленов Лежандра также плотно в $C[a,b]$.

Определение 2. Полунормированное пространство X называется *вложенным в полунормированное пространство* Y, если:

1) $X \subset Y$;

2) существует такая постоянная $c > 0$, называемая *константой вложения*, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X. \tag{53.5}$$

В этом случае пишут $X \hookrightarrow Y$.

Отметим, что если X_1 и Y_1 являются соответственно подпространствами пространств X и Y, причем $X_1 \subset Y_1$, то из вложения $X \hookrightarrow Y$ следует, очевидно, вложение $X_1 \hookrightarrow Y_1$ с той же константой вложения.

Вложение пространств обладает, как это легко видеть, свойством транзитивности: если $X \hookrightarrow Y$ и $Y \hookrightarrow Z$, то $X \hookrightarrow Z$.

Пример 4. Если полунормы в пространствах X и Y совпадают, то вложение $X \hookrightarrow Y$ равносильно включению $X \subset Y$. В этом случае константа вложения равна единице: $c = 1$.

Примерами таких вложений являются следующие включения нормированных пространств:

$$\overset{\circ}{C}[a,b] \subset C[a,b] \subset B[a,b], \quad \overset{\circ}{C}L_1[a,b] \subset CL_1[a,b] \subset L_1[a,b],$$
$$\overset{\circ}{C}L_2[a,b] \subset CL_2[a,b] \subset L_2[a,b].$$

Примером подобных вложений в полунормированные пространства являются включения

$$CL_1[a,b] \subset RL_1[a,b], \quad CL_2[a,b] \subset RL_2[a,b].$$

Пример 5. Из неравенства

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$$

(см. лемму 7 в п. 52.4) следует, что имеет место вложение для полунормированных пространств

$$RL_2[a,b] \hookrightarrow RL_1[a,b],$$

а следовательно, и для их подпространств

$$CL_2[a,b] \hookrightarrow CL_1[a,b], \tag{53.6}$$

которые являются уже нормированными пространствами.

В первом вложении $RL_2[a,b] \hookrightarrow RL_1[a,b]$ пространство $X = RL_2[a,b]$ и пространство $Y = RL_1[a,b]$ не совпадают как множества: имеет место строгое включение $X \subset Y$, а во втором вложении $CL_2[a,b] \hookrightarrow$ $\hookrightarrow CL_1[a,b]$ пространства $X = CL_2[a,b]$ и $Y = CL_1[a,b]$ совпадают как множества: $X = Y$, так как они состоят из одних и тех же функций, а именно функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, однако эти функции нормируются разными способами в пространствах $CL_2[a,b]$ и $CL_1[a,b]$.

Пример 6. Из неравенства

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$$

(см. снова лемму 7 в п. 32.4) следует, что справедливо вложение

$$C[a,b] \hookrightarrow CL_2[a,b], \tag{53.7}$$

а так как $CL_2[a,b] \hookrightarrow CL_1[a,b]$ (см. (53.6)), то по транзитивности и вложение

$$C[a,b] \hookrightarrow CL_1[a,b]. \tag{53.8}$$

Во всех этих вложениях пространства X и Y, где $X \subset Y$, совпадают как множества, но различаются их нормами.

Во вложениях, рассмотренных в примерах 5 и 6, число $\sqrt{b-a}$ является константой всех вложений, кроме вложения (53.8), где константа вложения равна $b-a$.

Отметим, что если пространство X вложено в пространство Y, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ по полунорме пространства X, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ также и по полунорме пространства Y. Действительно, из неравенства (53.5) следует, что

$$0 \leqslant \|x_n - x\|_Y \leqslant c\|x_n - x\|_X \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_Y = 0$.

Описанное свойство вложения называют его *непрерывностью.*

Лемма 3. *Если X и Y — полунормированные пространства, пространство X плотно в пространстве Y и вложено в него: $X \hookrightarrow Y$, то всякая полная в пространстве X система является полной и в пространстве Y.*

$\triangleright$ Пусть система $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ полна в пространстве X, $y \in Y$ и задано $\varepsilon > 0$. Поскольку множество X плотно в пространстве Y, то существует такой элемент $x \in X$, что

$$\|y - x\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{53.9}$$

В силу же полноты системы $\{x_\alpha;\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ в пространстве X существуют конечные множества $x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n}$ элементов системы $\{x_\alpha;\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ и чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ такие, что

$$\|x-(\lambda_1 x_{\alpha_1}+\ldots+\lambda_n x_{\alpha_n})\|_X<\frac{\varepsilon}{2c}, \tag{53.10}$$

где c — константа вложения $X\hookrightarrow Y$. Поэтому

$$\|y-(\lambda_1 x_{\alpha_1}+\ldots+\lambda_n x_{\alpha_n})\|_Y\leqslant \\ \leqslant \|y-x\|_Y+\|x-(\lambda_1 x_{\alpha_1}+\ldots+\lambda_n x_{\alpha_n})\|_Y \underset{\substack{(53.5)\\(53.9)}}{\leqslant} \\ \underset{\substack{(53.5)\\(53.9)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2}+c\,\|x-(\lambda_1 x_{\alpha_1}+\ldots+\lambda_n x_{\alpha_n})\|_X \underset{(53.10)}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad \lhd$$

Пример 7. Система степеней $\{1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots\}$ полна в пространствах $L_1[a,b]$ и $L_2[a,b]$ для любого отрезка $[a,b]$.

В самом деле, система степеней x^n, $n=0,1,2,\ldots$, полна в пространстве $C[a,b]$ (пример 2), имеют место вложения $C[a,b]\hookrightarrow CL_1[a,b]$, $C[a,b]\hookrightarrow CL_2[a,b]$ (см. (53.7) и (53.8)), а множества $CL_1[a,b]$ и $CL_2[a,b]$ плотны соответственно в пространствах $L_1[a,b]$ и $L_2[a,b]$, так как эти пространства являются их пополнениями (см. следствие теоремы 6 в п. 52.6 и теорему 8 в п. 52.7). Поэтому согласно лемме 3 система степеней x^n, $n=0,1,2,\ldots$, полна в пространствах $L_1[a,b]$ и $L_2[a,b]$.

Пример 8. Система многочленов Лежандра $P_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$, полна в пространствах $L_1[a,b]$ и $L_2[a,b]$.

Это следует из того, что линейная оболочка многочленов Лежандра $P_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$, совпадает с линейной оболочкой системы степеней x^n, $n=0,1,2,\ldots$ (см. пример 3), которая плотна в указанных пространствах (пример 7).

Пример 9. Система тригонометрических функций

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots\}$$

полна в пространствах $L_1[-\pi,\pi]$ и $L_2[-\pi,\pi]$.

Согласно теореме Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими многочленами (см. теорему 7 в п. 51.7) тригонометрическая система полна в пространстве непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций, принимающих на его концах одинаковые значения: $f(-\pi)=f(\pi)$. Обозначим это пространство $\widetilde{C}[-\pi,\pi]$. Поскольку непрерывная финитная на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция обращается на его концах в нуль и тем самым принимает одинаковые значения: $f(-\pi)=f(\pi)=0$, то $\overset{\circ}{C}[-\pi,\pi]\subset\widetilde{C}[-\pi,\pi]$.

Ясно, что пространство $\widetilde{C}[-\pi,\pi]$ содержится в пространстве $C[-\pi,\pi]$ всех непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций. Вспомнив еще, что имеют место вложения (53.7) и (53.8), получим

$$\mathring{C}[-\pi,\pi] \hookrightarrow \widetilde{C}[-\pi,\pi] \hookrightarrow C[-\pi,\pi] \hookrightarrow L_1[-\pi,\pi],$$
$$\mathring{C}[-\pi,\pi] \hookrightarrow \widetilde{C}[-\pi,\pi] \hookrightarrow C[-\pi,\pi] \hookrightarrow L_2[-\pi,\pi].$$

Множество $\mathring{C}[-\pi,\pi]$ плотно в пространствах $L_1[-\pi,\pi]$ и $L_2[-\pi,\pi]$ (п. 52.6 и п. 52.7), поэтому в них плотно и множество $\widetilde{C}[-\pi,\pi]$.

Кроме того, пространство $\widetilde{C}[-\pi,\pi]$ вложено в пространства $L_1[-\pi,\pi]$ и $L_2[-\pi,\pi]$, так как в них вложено объемлющее пространство $C[-\pi,\pi]$.

Таким образом, для тригонометрической системы и пространств $X=\widetilde{C}[-\pi,\pi]$ и $Y=L_1[-\pi,\pi]$ соответственно $Y=L_2[-\pi,\pi]$ и выполнены все условия леммы 3; следовательно, тригонометрическая система полна в пространствах $L_1[-\pi,\pi]$ и $L_2[-\pi,\pi]$.

Обратим внимание на то, что пространство $L_1[-\pi,\pi]$ содержит все абсолютно интегрируемые на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции (см. замечание в п. 52.7), соответственно пространство $L_2[-\pi,\pi]$ содержит все функции, квадраты которых интегрируемы на отрезке $[-\pi,\pi]$ (см. замечание 4 в п. 52.6), в числе этих функций имеются и такие, что $f(-\pi)\neq f(\pi)$. Тем не менее, тригонометрические многочлены плотны в пространствах $L_1[-\pi,\pi]$ и $L_2[-\pi,\pi]$, хотя для них $T(-\pi)=T(\pi)$. Очевидно, что в равномерной норме тригонометрические многочлены не плотны в пространстве $C[-\pi,\pi]$ непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций.

Из сопоставления приведенных здесь примеров и примеров из п. 53.1 получаются примеры двух ортогональных полных систем: тригонометрической системы функций в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ и системы полиномов Лежандра в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$.

53.3. Ряды Фурье. Пусть X — линейное пространство со скалярным произведением,

$$\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\} \tag{53.11}$$

— некоторая ортогональная система его элементов.

Будем всегда предполагать, что $e_n \neq 0$, $n=1,2,...$

Если $x\in X$ и элемент x раскладывается в ряд:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{53.12}$$

то для коэффициентов a_n этого ряда имеют место формулы

$$a_n=\frac{(x,e_n)}{(e_n,e_n)}, \quad n=1,2,... \tag{53.13}$$

$\triangleright$ Действительно, умножив обе части равенства (53.12) на элемент e_m, в силу равенства (52.38) и условия ортогональности системы (53.11):

$$(e_n, e_m) = 0, \quad n \neq m, \tag{53.14}$$

получим

$$(x, e_m) \underset{(53.12)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,\ e_m\right) \underset{(52.38)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e_n,\ e_m) \underset{(53.14)}{=} a_m (e_m, e_n).$$

Найдя отсюда a_m, получим формулу (53.13). $\triangleleft$

Из доказанного следует, что если существует разложение элемента $x \in X$ в ряд (53.12), то оно единственно, так как его коэффициенты однозначно определяются формулами (53.13).

Определение 3. Если $x \in X$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{53.15}$$

с коэффициентами a_n, задаваемыми формулами (53.13), называется *рядом Фурье*, сами эти коэффициенты — *коэффициентами Фурье*, а частичные суммы ряда (53.15)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{53.16}$$

— *суммами Фурье* соответственно порядков n элемента x по заданной ортогональной системе (53.11).

В этом случае пишут

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Если $||e|| = 1$, то

$$a_n \underset{(53.13)}{=} (x_n, e_n) = ||x|| \cos \widehat{xe_n},$$

т. е. в этом случае коэффициент Фурье a_n равен величине проекции вектора x на прямую $y = te_n, -\infty < t < +\infty$.

Нашей ближайшей задачей является выяснение условий, при которых ряд Фурье элемента x сходится, и условий, когда сумма его равна x. Предварительно установим некоторые свойства рядов Фурье по ортогональным системам.

Лемма 4. *Элемент*

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \quad \lambda_k \in R, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{53.17}$$

является суммой Фурье порядка n элемента $x \in X$ тогда и только тогда, когда

$$(x - \sigma_n,\ e_m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{53.18}$$

С л е д с т в и е. *Для любого элемента* σ_n *вида* (53.17) *имеет место равенство*

$$(x - s_n,\ \sigma_n) = 0, \tag{53.19}$$

т. е. элемент $x - s_n$ *ортогонален линейной оболочке* $L(e_1, ..., e_n)$ *элементов* $(e_1, ..., e_n)$: $x - s_n \perp L(e_1, ..., e_n)$.

$\triangleright$ Имеем

$$(x - \sigma_n, e_m) = (x, e_m) - (\sigma_n, e_m) \underset{(53.17)}{=} (x, e_m) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, e_m\Big) =$$

$$= (x, e_m) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_k, e_m) \underset{(53.14)}{=} (x, e_m) - \lambda_m (e_m, e_m).$$

Поэтому условие (53.18) равносильно условию

$$(x, e_m) - \lambda_m (e_m,\ e_m) = 0.$$

А это означает согласно (53.13), что числа

$$\lambda_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)}, \quad m = 1, 2, ..., n,$$

являются коэффициентами Фурье элемента x.

Докажем следствие: согласно (53.18) $(x - s_n,\ e_k) = 0$, $k = 1, 2, ...$ $..., n$, поэтому

$$(x - s_n,\ \sigma_n) \underset{(53.17)}{=} \Big(x - s_n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x - s_n,\ e_k) \underset{(53.18)}{=} 0. \quad \triangleleft$$

Если вектор x не принадлежит линейной оболочке $L(e_1, ..., e_n)$ векторов $(e_1, ..., e_n)$, то геометрический смысл леммы 4 состоит в том, что вектор $x - s_n$, $s_n \in L(e_1, ..., e_n)$, является единственным перпендикуляром к подпространству $L(e_1, ...$ $..., e_n)$, проходящим через точку $x \notin$ $\notin L(e_1, ..., e_n)$ (рис. 202).

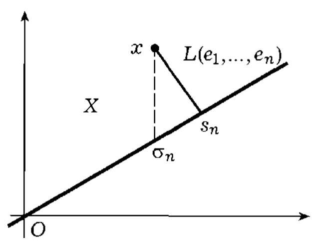

Рис. 202

Т е о р е м а 1 (минимальное свойство сумм Фурье). *Если* s_n — *сумма Фурье порядка* n *элемента* $x \in X$, *то для любого элемента* σ_n *вида* (53.17) *имеет место неравенство*

$$\|x - s_n\| \leqslant \|x - \sigma_n\|,$$

и элемент s_n *является единственным элементом вида* (53.17), *удовлетворяющим этому условию.*

Таким образом,

$$\|x - s_n\| = \min_{\sigma_n} \|x - \sigma_n\|,$$

и если $\|x - s_n\| = \|x - \sigma_n\|$, *то* $\sigma_n = s_n$.

С л е д с т в и е. *Последовательность* $\{\|x - s_n\|\}$ *является убывающей последовательностью.*

$\triangleright$ Для любого элемента σ_n вида (53.17) имеем

$$\begin{aligned}\|x-\sigma_n\|^2 = (x-\sigma_n,\ x-\sigma_n) &= \\ &= ((x-s_n)+(s_n-\sigma_n),\ (x-s_n)+(s_n-\sigma_n)) = \\ &= (x-s_n,\ x-s_n)+(s_n-\sigma_n,\ x-s_n)+(x-s_n,\ s_n-\sigma_n)+ \\ &+ (s_n-\sigma_n,\ s_n-\sigma_n) = \|x-s_n\|^2+\|s_n-\sigma_n\|^2, \end{aligned} \tag{53.20}$$

ибо $s_n - \sigma_n \in L(e_1, ..., e_n)$, и поэтому

$$(s_n-\sigma_n,\ x-s_n) = (x-s_n,\ s_n-\sigma_n) \underset{(53.19)}{=} 0.$$

Поскольку $\|s_n - \sigma_n\|^2 \geqslant 0$, то из равенства (53.20) следует, что

$$\|x-\sigma_n\| \geqslant \|x-s_n\|.$$

Кроме того, если $\|x - \sigma_n\| = \|x - s_n\|$, то из (53.20) вытекает, что $\|s_n - \sigma_n\| = 0$. Поэтому в силу свойства нормы в этом случае имеем $\sigma_n = s_n$. Теорема доказана.

$\triangleright$ Докажем следствие. Заметив, что всякая линейная комбинация σ_n элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ может также рассматриваться и как линейная комбинация σ_{n+1} элементов $e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}$ с коэффициентом при e_{n+1}, равным нулю, получим в силу минимального свойства сумм Фурье:

$$\|x-s_{n+1}\| \leqslant \|x-s_n\|. \quad \triangleleft$$

Теорема 1 означает, что сумма Фурье s_n элемента x является его наилучшим приближением в пространстве $L(e_1, ..., e_n)$, т. е. в линейной оболочке элементов $e_1, ..., e_n$.

Геометрический смысл теоремы 1 состоит в том, что перпендикуляр $x - s_n$ к подпространству $L(e_1, ..., e_n)$, проходящий через точку $x \notin L(e_1, ..., e_n)$, имеет минимальную длину (норму) по сравнению с длинами всех векторов, соединяющих точки $\sigma_n \in L(e_1, ..., e_n)$ с точкой x (см. рис. 201).

Л е м м а 5. *Для любого элемента* $x \in X$ *имеют место равенства*

$$\|x-s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\,\|e_k\|^2, \quad n = 1, 2, ... \tag{53.21}$$

$\triangleright$ В самом деле, заметив, что из формул (53.13) следует

$$(x, e_n) = a_n(e_n, e_n), \quad n = 1, 2, ...,$$

получим

$$\|x-s_n\|^2 = (x-s_n,\ x-s_n) \underset{(53.16)}{=} \Big(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\ x - \sum_{m=1}^{n} a_m e_m\Big) =$$

$$= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(e_k, x) - \sum_{m=1}^{n} a_m(x, e_m) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_k a_m(e_k, e_m) \underset{(53.14)}{=}$$

$$\underset{(53.14)}{=} (x, x) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(x, e_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k^2(e_k, e_k) \underset{(53.13)}{=}$$

$$\underset{(53.13)}{=} (x, x) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2(e_k, e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2(e_k, e_k) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2. \lhd$$

Теорема 2. *Для любого элемента $x \in X$ для его коэффициентов Фурье по любой ортогональной системе* (53.11) *выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2, \tag{53.22}$$

в частности, для ортонормированной системы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Неравенство (53.22) называется *неравенством Бесселя**).

Следствие. *Если для ортогональной системы* (53.11) *существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство*

$$\|e_n\| \geqslant c, \tag{53.23}$$

то для любого элемента $x \in X$ коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

$\rhd$ Поскольку $\|x - s_n\|^2 \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то из равенства (53.21) следует, что

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Перейдя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$ (это возможно, так как $a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0$ и, следовательно, последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2$ возрастает), получим

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда сразу следует (53.22).

Докажем следствие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty} c^2 a_n^2 \underset{(53.23)}{\leqslant} \frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 a_n^2 \underset{(53.22)}{\leqslant} \frac{1}{c^2}\|x\|^2.$$

*) Ф.В. Бессель (1784–1846) — немецкий астроном.

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, и, следовательно, его общий член стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 0$, а это равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\lhd$

Теорема 3. *Если X — гильбертово пространство и $\{e_n\}$ — ортогональная в нем система, то для любого элемента $x \in X$ его ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ по этой системе сходится; при этом, если сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ равна x_0, т. е.*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

то при любом $n = 1, 2, \ldots$ элементы $x - x_0$ и e_n ортогональны:

$$(x - x_0,\, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$\rhd$ Пусть $x \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ и

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k; \tag{53.24}$$

тогда

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \Big\|^2 = \Big(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k,\, \sum_{j=n+1}^{n+p} a_j e_j \Big) \underset{(53.12)}{=}$$

$$\underset{(53.12)}{=} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2, \tag{53.25}$$

а так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2$ сходится (см. (53.22)), то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $p = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon^2. \tag{53.26}$$

Поэтому для указанных n и p справедливо также неравенство

$$\|s_{n+p} - s_n\| \underset{\substack{(53.25)\\(53.26)}}{<} \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм рассматриваемого ряда фундаментальная, а поскольку пространство X гильбертово и поэтому полное, то эта последовательность сходится, т. е. существует такой элемент $x_0 \in X$, что

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n. \tag{53.27}$$

Покажем, что $x - x_0$ и e_k, $k = 1, 2, \ldots$, ортогональны.

Для доказательства равенства $(x - x_0,\ e_k) = 0$ выберем $n > k$. Тогда, согласно лемме 4, получим $(x - s_n, e_k) = 0$. Перейдя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, в силу (53.27) и непрерывности скалярного произведения будем иметь $(x - x_0,\ e_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ $\triangleleft$

Теорема 4. *Пусть X — пространство со скалярным произведением и $\{e_n\}$ — ортогональная в нем система.*

Для того чтобы ряд Фурье элемента $x \in X$ по системе $\{e_n\}$ сходился к самому элементу x, необходимо и достаточно, чтобы для этого элемента выполнялось равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2, \tag{53.28}$$

где a_n — коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{e_n\}$.

Иначе говоря, для того чтобы ряд Фурье некоторого элемента сходился к этому элементу, необходимо и достаточно, чтобы для него неравенство Бесселя (53.21) превратилось в равенство (53.28). Это равенство называется *равенством Парсеваля**). В случае, когда система $\{e_n\}$ ортонормирована, оно имеет вид

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{53.29}$$

и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на случай бесконечномерного пространства.

$\triangleright$ В силу равенства

$$\|x - s_n\|^2 \underset{(53.21)}{=} \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2;$$

поэтому условие $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - s_n\| = 0$, равносильно условию

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2. \quad \triangleleft$$

Теорема 5. *Для того чтобы в линейном пространстве со скалярным произведением каждый элемент был суммой своего ряда Фурье по заданной ортогональной системе $\{e_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы эта система была полной.*

---

*) М.А. Парсеваль (1755–1836) — французский математик.

С л е д с т в и е 1. *Для того чтобы ортогональная система была полной в линейном пространстве со скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента пространства выполнялось равенство Парсеваля относительно этой системы.*

С л е д с т в и е 2. *Если все коэффициенты Фурье некоторого элемента пространства со скалярным произведением по полной ортогональной системе равны нулю, то и сам этот элемент равен нулю.*

$\triangleright$ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть для каждого элемента $x \in X$ его ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ сходится к самому x. Тогда каковы бы ни были $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, в силу определения сходимости ряда в пространстве X существует такой номер n, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

т. е. в любой близости от наперед заданного элемента x находится некоторая конечная линейная комбинация элементов системы $\{e_n\}$, что и означает полноту этой системы в пространстве X.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть система $\{e_n\}$ полная в пространстве X. Тогда для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное n_0 и такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n_0}$, что

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n e_n \right\| < \varepsilon. \tag{53.30}$$

В силу же минимального свойства сумм Фурье $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ элемента x по системе $\{e_n\}$ имеем

$$\|x - s_{n_0}\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n e_n \right\|. \tag{53.31}$$

Поэтому

$$\|x - s_{n_0}\| \underset{\substack{(53.30)\\(53.31)}}{<} \varepsilon, \tag{53.32}$$

а так как числовая последовательность $\|x - s_n\|$, $n = 1, 2, ...$, убывает (следствие теоремы 1) и, следовательно, при $n > n_0$ выполняются неравенства

$$\|x - s_n\| \leqslant \|x - s_{n_0}\|, \tag{53.33}$$

то при $n > n_0$

$$\|x - s_n\| \underset{\substack{(53.30)\\(53.31)}}{<} \varepsilon.$$

Это и означает, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n = x$. $\triangleleft$

Следствие 1 из теоремы 5 непосредственно вытекает из самой этой теоремы и теоремы 4.

$\triangleright$ Докажем следствие 2. Если $\{e_n\}$ — полная ортогональная система в пространстве X, то согласно теореме 5 для любого элемента $x \in X$ его ряд Фурье сходится к самому этому элементу, т. е. имеет место равенство $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Поэтому если все $a_n = 0$, то и $x = 0$. $\triangleleft$

Замечание. Если $\{e_n\}$ — полная ортогональная система в пространстве X со скалярным произведением, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то для любого его элемента x, согласно теореме 5, имеет место разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

причем, в силу выполнения условия (53.13) это разложение единственно.

Таким образом, понятие полной ортогональной системы является естественным обобщением понятия *ортогонального базиса* конечномерного пространства на случай линейного пространства со скалярным произведением.

Определение 4. Ортогональная система $\{e_n\}$ называется *замкнутой* в пространстве со скалярным произведением, если в этом пространстве не существует элемента, не равного нулю и ортогонального всем e_n, $n = 1, 2, \ldots$

Теорема 6. *В гильбертовом пространстве ортогональная система замкнута тогда и только тогда, когда она полна.*

$\triangleright$ Пусть сначала ортогональная система $\{e_n\}$ замкнутая, x — произвольно фиксированный элемент пространства X и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ — ряд Фурье этого элемента. Поскольку пространство X полное, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, согласно теореме 2, сходится. Обозначим его сумму через x_0, т. е. $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. В силу той же теоремы 2 разность $x - x_0$ ортогональна всем $\{e_n\}$, т. е. $x - x_0 \perp e_n$, $n = 1, 2, \ldots$; отсюда в силу замкнутости системы $\{e_n\}$ следует, что $x - x_0 = 0$, т. е. что $x = x_0$, и потому

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n. \tag{53.34}$$

Поскольку элемент x был выбран произвольно в пространстве X, то согласно теореме 5 из равенства (53.34) вытекает, что система $\{e_n\}$ полная.

Пусть теперь система $\{e_n\}$ полная. Если $x \in X$ и для всех $n = 1, 2, ...$ имеет место ортогональность $x \perp e_n$, т. е. $(x, e_n) = 0$, то все коэффициенты Фурье $a_n = \dfrac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}$, $n = 1, 2, ...$, элемента x по системе $\{e_n\}$ равны нулю, и, следовательно, согласно следствию 2 из теоремы 5 сам элемент x также равен нулю: $x = 0$. Это и означает замкнутость системы $\{e_n\}$. $\triangleleft$

П р и м е р. Пусть $X = L_2[-\pi, \pi]$ — гильбертово пространство. Согласно п. 53.2 тригонометрическая система $1, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx, ...$ является полной ортогональной системой в этом пространстве.

Поэтому в силу теоремы 5 любой элемент $F \in L_2[-\pi, \pi]$ раскладывается в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье по тригонометрической системе:

$$F = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{53.35}$$

т. е. если $s_n = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — частичная сумма этого ряда, то

$$\lim_{n\to\infty} \|F - s_n\| = 0.$$

Выполняется равенство Парсеваля, имеющее в данном случае вид

$$\|F\|^2 = \pi\Bigl(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\Bigr). \tag{53.36}$$

Тем самым для элемента пространства $L_2[-\pi, \pi]$ имеется аналитическая формула для вычисления его нормы.

Согласно критерию Коши сходимость ряда (53.35) равносильна тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $p \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon.$$

Поскольку разность

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

является непрерывной функцией, то ее норма в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ выражается с помощью интеграла

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos kx + b_k \sin kx\Bigr)^2 dx.$$

Таким образом, получено однозначное а н а л и т и ч е с к о е о п и с а н и е элементов пространства $L_2[-\pi, \pi]$ в виде тригонометрических рядов (53.35), удовлетворяющих условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и $p \geqslant 1$ выполняется

неравенство
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\cos kx+b_k\,\sin kx\Big)^2\,dx<\varepsilon^2.$$

Отметим, что до сих пор пространство $L_2[-\pi,\pi]$ рассматривалось, например, как пополнение пространства $CL_2[-\pi,\pi]$ (см. п. 52.6) и тем самым состояло из непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций и некоторых дополнительных элементов, представляющих собой классы эквивалентных фундаментальных последовательностей непрерывных функций (см. теорему 1 в п. 52.1). Теперь же получено аналитическое описание элементов пространства $L_2[-\pi,\pi]$ и их норм с помощью формул (53.35) и (53.36).

Если f — функция с интегрируемым на отрезке квадратом и, следовательно, $f\in F\in\widetilde{RL_2}[-\pi,\pi]$, то
$$a_0=\frac{(F,1)}{(1,1)}=\frac{(f,1)}{(1,1)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$
$$a_n=\frac{(F,\,\cos nx)}{(\cos nx,\,\cos nx)}=\frac{(f,\,\cos nx)}{(\cos nx,\,\cos nx)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad(53.37)$$
$$b_n=\frac{(F,\,\sin nx)}{(\sin nx,\,\sin nx)}=\frac{(f,\,\sin nx)}{(\sin nx,\,\sin nx)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,...,$$
т. е. получается обычный тригонометрический ряд Фурье функции f (см. определение 1 в п. 51.1). Если $S_n(x;f)$ — сумма Фурье порядка n функции f, то равенство (53.35) в данном случае означает, что
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x;f)]^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|_2^2=0,\qquad(53.38)$$
т. е. *тригонометрический ряд Фурье каждой функции* $f\in L_2[-\pi,\pi]$ *сходится к ней на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *в смысле среднего квадратичного.*

Равенство Парсеваля (53.28) в силу формул (53.36)–(53.38) запишется в этом случае в виде
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2.\qquad(53.39)$$

Если функция f_1 эквивалентна функции f, т. е. $\|f-f_1\|_2=0$, и, следовательно, они принадлежат одному и тому же классу $F\in\widetilde{RL_2}$, то ряд Фурье функции f_1 будет тот же самый, что и у функции f, так как в силу (53.37) их ряды Фурье совпадают с рядом Фурье указанного элемента $F\in\widetilde{RL_2}[-\pi,\pi]\in L_2[-\pi,\pi]$.

Если все коэффициенты Фурье функции f равны нулю, то она эквивалентна нулю (см. следствие 2 теоремы 5), т. е. $\|f\|_2=0$, а если она, кроме того, и непрерывна, то она тождественно равна нулю, так как полунорма $\|f\|_2$ пространства $RL_2[-\pi, \pi]$ является нормой на пространстве $CL_2[-\pi, \pi]$.

Поскольку многочлены Лежандра образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2[-1, 1]$ (см. пп. 53.1 и 53.2), то для них имеют место аналогичные утверждения.

53.4. Дифференцирование тригонометрических рядов Фурье и порядок убывания их коэффициентов. Покажем, что ряд Фурье производной при определенных условиях получается из ряда Фурье самой функции почленным дифференцированием.

Теорема 7. *Пусть функция f непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную на отрезке $[-\pi, \pi]$, причем $f(-\pi) = f(\pi)$.*

Если

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{53.40}$$

то

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx. \tag{53.41}$$

▷ Пусть

$$f' \sim \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx; \tag{53.42}$$

тогда

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, df(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = nb_n.$$

Аналогично,

$$\beta_n = -na_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, ряд (53.42) совпадает с рядом (53.41), т. е. действительно ряд Фурье для производной f' получается из ряда Фурье (53.40) самой функции f его почленным дифференцированием и при этом без каких-либо предположений о сходимости ряда Фурье производной, т. е. ряда (53.41). ◁

Теорема 7 позволяет доказать важное свойство рядов Фурье, состоящее в том, что чем “глаже” функция, тем быстрее стремятся к нулю ее коэффициенты Фурье, и, более того, установить порядок их убывания относительно $\frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ (см. замечание 1 в п. 9.2) в зависимости от того, сколько раз дифференцируема рассматриваемая функция.

Теорема 8. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ $k-1$ непрерывных производных и кусочно непрерывную производную порядка k, $k \geqslant 1$, причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$.*

Если

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{53.43}$$

то

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{53.44}$$

где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ сходится и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

$\triangleright$ Если

$$f^{(k)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx, \tag{53.45}$$

то последовательным применением теоремы 7 (т. е. дифференцируя последовательно k раз ряд (53.43) и сравнивая коэффициенты получившегося в результате тригонометрического ряда с коэффициентами ряда (53.45)) получим, что в зависимости от четности числа k выполняются либо равенства

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \quad \beta_n = \pm n^k b_n, \tag{53.46}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \quad \beta_n = \pm n^k a_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{53.47}$$

Отсюда следует, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются либо равенства

$$|a_n| \underset{(53.46)}{=} \frac{|\alpha_n|}{n^k}, \quad |b_n| \underset{(53.46)}{=} \frac{|\beta_n|}{n^k}, \tag{53.48}$$

либо

$$|a_n| \underset{(53.47)}{=} \frac{|\beta_n|}{n^k}, \quad |b_n| \underset{(53.47)}{=} \frac{|\alpha_n|}{n^k}. \tag{53.49}$$

Положим

$$\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}. \tag{53.50}$$

Тогда, очевидно,

$$|\alpha_n| \leqslant \varepsilon_n, \quad |\beta_n| \leqslant \varepsilon_n. \tag{53.51}$$

Поэтому из (53.48) и (53.49) следует, что

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{53.52}$$

причем, поскольку функция $f^{(k)}$, будучи кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, интегрируема на нем в квадрате, то согласно равенству Парсеваля (53.39)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 \underset{(53.50)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \underset{(53.39)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^{(k)}(x)]^2 \, dx < +\infty$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ сходится. Все утверждения теоремы 8 доказаны. $\triangleleft$

53.5. Скорость сходимости тригонометрических рядов. Выясним теперь, как зависит от гладкости функции "скорость" сходимости к ней ряда Фурье, т. е., говоря более точно, как зависит от того, сколько раз дифференцируема функция, порядок убывания остатков ее ряда Фурье.

Теорема 9. *Если функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ $k-1$ непрерывных производных и кусочно непрерывную k-ю производную, $k \geqslant 1$, причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, ..., k-1$, то ряд Фурье функции f сходится абсолютно и равномерно на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции f и*

$$|f(x) - S_n(x, f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \tag{53.53}$$

где $\{\eta_n\}$ — бесконечно малая числовая последовательность, а $S_n(x; f)$, как обычно, есть сумма Фурье порядка n функции f. Иначе говоря,

$$f(x) = S_n(x; f) + o(n^{-k+1/2}), \quad n \to \infty. \tag{53.54}$$

$\triangleright$ Пусть

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{53.55}$$

и $S_n(x; f)$ — сумма Фурье порядка n функции f. В силу непрерывности функции f и заведомо кусочной непрерывности ее первой производной, согласно следствию 2 теоремы 4 (признак Дини) п. 51.5, имеем

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Поэтому, если

$$r_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \tag{53.56}$$

— остаток ряда Фурье (53.55), то

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x; f). \tag{53.57}$$

Оценим остаток $r_n(x)$. При его оценке будет использовано неравенство Коши–Шварца для числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2},$$

$$u_n, v_n \in R, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{53.58}$$

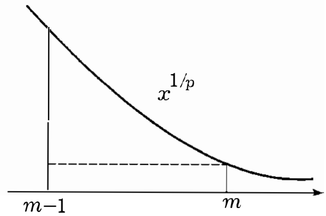

Рис. 203

(оно получатся предельным переходом из неравенства Коши–Шварца для конечных сумм) и неравенство

$$\frac{1}{m^p} \leqslant \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^p}, \quad p > 0, \tag{53.59}$$

которое получается интегрированием неравенства (рис. 203)

$$\frac{1}{m^p} \leqslant \frac{1}{x^p}, \quad m - 1 \leqslant x \leqslant m,$$

по отрезку $[m-1,\ m]$.

Имеем

$$|r_n(x)| = \Big|\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m \cos mx| + |b_m \sin mx| \underset{(53.44)}{\leqslant} 2\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \underset{(53.58)}{\leqslant}$$

$$\underset{(53.58)}{\leqslant} 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}} \underset{(53.59)}{\leqslant} 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}} =$$

$$= 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}\sqrt{\int\limits_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}}} = \frac{2}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}\sqrt{\frac{1}{n^{2k-1}}} = \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}}, \tag{53.60}$$

где

$$\eta_n = \frac{2}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}. \tag{53.61}$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ (см. теорему 8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2 = 0,$$

а поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n \underset{(53.61)}{=} 0. \tag{53.62}$$

Из (53.60) и (53.62) в силу равенства (53.57) следует утверждение (53.53). Элементы последовательности η_n не зависят от x, поэтому из неравенства (53.53) и выполнения условия (53.62) следует равномерная сходимость ряда Фурье функции f.

Наконец, цепочка неравенств (53.60) содержит в себе неравенство

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m \cos mx| + |b_m \sin mx| \underset{\substack{(53.60)\\(53.61)}}{\leqslant} \eta_n n^{-k+1/2}, \tag{53.63}$$

из которого следует, что остатки ряда, составленного из абсолютных величин членов ряда (53.55), стремятся к нулю, а поэтому ряд (53.55) абсолютно сходится. $\lhd$

53.6*. Ряды Фурье функций с произвольным периодом. Теория ряда Фурье 2π-периодических функций переносится на функции с произвольным периодом $2l$, $l>0$. Для этого достаточно линейно отобразить отрезок $[-l,l]$ на отрезок $[-\pi,\pi]$:

$$y = \frac{\pi}{l}\,x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi, \tag{53.64}$$

и тогда вопрос об определении ряда Фурье для $2l$-периодической функции сведется к вопросу о ряде Фурье 2π-периодической функции в следующем смысле. Если функция $f(x)$ имеет период $2l$ и абсолютно интегрируема на периоде, т. е. абсолютно интегрируема на отрезке $[-l,l]$, то после замены переменного $x = \dfrac{l}{\pi}\,y$, обратной к отображению (53.64), получится 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция $f\Bigl(\dfrac{l}{\pi}\,y\Bigr)$. Выполнив в ее ряде Фурье замену переменного (53.64), т. е. вернувшись к исходной переменной, получим ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{53.65}$$

называемый *рядом Фурье заданной $2l$-периодической функции* $f(x)$.

Формулы для коэффициентов ряда (53.65) с помощью той же замены переменного (53.64) следуют из формул для коэффициентов Фурье 2π-периодической функции:

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

С помощью замены переменного (53.64) доказанные выше теоремы для рядов Фурье 2π-периодических функций переносятся на ряды Фурье $2l$-периодических функций.

53.7*. Запись рядов Фурье в комплексной форме. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{53.66}$$

то, представив $\cos nx$ и $\sin nx$ по формулам Эйлера:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

и сделав подстановку в ряд (53.66), получим

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx}.$$

Если ввести обозначения

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{53.67}$$

то получим запись ряда Фурье в комплексной форме

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

где для коэффициентов c_n имеют место формулы

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx,$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \sin nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\, dx,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Объединив получившиеся формулы в одну, получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Очевидно, что из формул (53.67) следует, что коэффициенты c_n и c_{-n} являются сопряженными комплексными числами: $c_{-n} = \overline{c_n}$.

§ 54. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

54.1. Представление функций интегралом Фурье. Пусть функция f задана на всей числовой прямой R и абсолютно интегрируема на ней. Сопоставим функции f интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\, dy, \qquad (54.1)$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\, dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\, dt. \qquad (54.2)$$

Интеграл (54.1) аналогичен ряду Фурье периодической функции: суммирование заменено интегрированием. Функции $a(y)$ и $b(y)$ в подынтегральном выражении аналогичны коэффициентам Фурье.

Подставив (54.2) в подынтегральное выражение интеграла (54.1), будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos xy\cos yt + \sin xy \sin yt)\, dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\, dt. \qquad (54.3)$$

Определение 1. Интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\, dt \qquad (54.4)$$

называется *интегралом Фурье функции* f.

Подобно тому, как при определенных условиях периодическая функция раскладывается в ряд Фурье, функция, определенная на всей числовой оси, представляется своим интегралом Фурье. Прежде чем это доказывать, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, а функция $\varphi(x,y)$ непрерывна и ограничена в полосе*

$$\Pi = \{(x,y)\colon -\infty < x < +\infty,\ -\infty < c \leqslant y \leqslant d < +\infty\}, \qquad (54.5)$$

то:

1) *функция*

$$\Phi(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\, dx \qquad (54.6)$$

непрерывна на отрезке $[c,d]$;

2) *справедливо равенство*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\, dy. \qquad (54.7)$$

$\triangleright$ В силу ограниченности функции $\varphi(x,y)$ в полосе П (см. (54.5)) существует такая постоянная $M > 0$, что для всех точек $(x,y) \in \Pi$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x,y)| \leqslant M \tag{54.8}$$

и, следовательно,

$$|f(x)\varphi(x,y)| \leqslant M|f(x)|. \tag{54.9}$$

Согласно условию леммы функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл (54.6) так же, как и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x,y)|\, dx, \tag{54.10}$$

равномерно сходятся на отрезке $[c,d]$. Следовательно, функция $\Phi(y)$ определена на отрезке $[c,d]$. Докажем ее непрерывность. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости интеграла (54.10) вытекает существование такого η_ε, что для всех $y \in [c,d]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{|x|>\eta_\varepsilon} |f(x)\varphi(x,y)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{54.11}$$

Функция $\varphi(x,y)$, будучи непрерывной функцией на конечном прямоугольнике

$$\Pi_\varepsilon \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x,y)\colon\ -\eta_\varepsilon \leqslant x \leqslant \eta_\varepsilon,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

равномерно непрерывна на нем. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для всех Δy, для которых $|\Delta y| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|\varphi(x,\ y+\Delta y) - \varphi(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx}, \tag{54.12}$$

$$(x,y) \in \Pi_\varepsilon, \quad (x,\ y+\Delta y) \in \Pi_\varepsilon.$$

Теперь при произвольно фиксированных $y \in [c,d]$ и $y + \Delta y \in [c,d]$ при выполнении условия

$$|\Delta y| < \delta \tag{54.13}$$

будем иметь

$$|\Phi(y+\Delta y) - \Phi(y)| \underset{(54.6)}{\leqslant} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)[\varphi(x,\ y+\Delta y) - \varphi(x,y)]|\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\eta_\varepsilon}^{\eta_\varepsilon} |f(x)|\, |\varphi(x,\ y+\Delta y) - \varphi(x,y)|\, dx +$$

$$+ \int\limits_{|x|\geqslant\eta_\varepsilon} |f(x)|\, |\varphi(x,\ y+\Delta y) - \varphi(x,y)|\, dx \underset{\substack{(54.13)\\(54.12)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx} \times$$

$$\times \int\limits_{-\eta_\varepsilon}^{\eta_\varepsilon} |f(x)|\,dx + \int\limits_{|x|\geqslant\eta_\varepsilon} |f(x)|\,[|\varphi(x,\ y+\Delta y)| + |\varphi(x,y)|]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx + \int\limits_{|x|\geqslant\eta_\varepsilon} |f(x)\varphi(x,\ y+\Delta y)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x|\geqslant\eta_\varepsilon} |f(x)\varphi(x,y)|\,dx \underset{(54.11)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это и означает, что функция $\Phi(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$.

Докажем теперь формулу (54.7). Прежде всего заметим, что в силу доказанной непрерывности функции (54.6) интеграл в левой части равенства (54.7) существует как интеграл от функции $\Phi(y)$ по отрезку, на котором она непрерывна. Существование интеграла в правой части равенства (54.7) следует из того, что функция

$$\Psi(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)\int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy$$

является произведением абсолютно интегрируемой на числовой оси R функции $f(x)$ на ограниченную непрерывную функцию $\int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy$ (см. замечание в п. 29.5). Здесь непрерывность собственного интеграла $\int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy$ по параметру x на любом конечном отрезке, а поэтому и на всей числовой оси следует из теоремы 2 п. 49.2, а его ограниченность — из ограниченности функции φ:

$$\left|\int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy\right| \leqslant \int\limits_c^d |\varphi(x,y)|\,dy \underset{(54.8)}{\leqslant} M(d-c).$$

Далее, в силу теоремы 7 из п. 52.7 для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная финитная функция f_ε, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{54.14}$$

Для этой функции f_ε, согласно теореме 4 п. 49.2, справедлива формула

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x,y)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy \tag{54.15}$$

(здесь в силу финитности функции f_ε можно бесконечные пределы заменить конечными, поэтому здесь и применима теорема 4 из п. 49.2). Покажем, что предел левой части равенства (54.13) при $\varepsilon \to 0$ равен

$\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\,dx$, а правой — $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy$. Для этого оценим отклонения левой и правой частей равенства (54.15) от их предполагаемых предельных значений. Имеем

$$\left|\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x,y)\,dx - \int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\,|\varphi(x,y)|\,dx \underset{(54.8)}{\leqslant} M\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\,dx =$$

$$= M(d-c)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\,dx \underset{(54.14)}{<} M(d-c)\varepsilon. \quad (54.16)$$

Соответственно для правой части

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\,dx \int\limits_c^d |\varphi(x,y)|\,dy \underset{(54.8)}{\leqslant}$$

$$\underset{(54.8)}{\leqslant} M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\,dx \int\limits_c^d dy \underset{(54.14)}{\leqslant} M(d-c)\varepsilon. \quad (54.17)$$

Положив в равенстве (54.15) $\varepsilon \to 0$, получим в силу (54.16) и (54.17) равенство (54.7). $\triangleleft$

Т е о р е м а 1. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси R, то в каждой точке $x \in R$, в которой существуют $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, имеет место равенство*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \quad (54.18)$$

$\triangleright$ Зафиксируем произвольно точку $x \in R$, в которой существуют $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ (а следовательно, существуют и $f(x+0)$, $f(x-0)$), и положим

$$S(\eta) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\eta} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \quad \eta > 0. \quad (54.19)$$

Функция $S(\eta)$ является для интеграла Фурье аналогом частичной суммы ряда Фурье периодической функции.

Поскольку функция $\cos y(x-y)$ непрерывна и ограничена на всей плоскости переменных y и t, то согласно формуле (54.7) в интеграле (54.19) можно поменять порядок интегрирования. Проделав это, получим

$$S(\eta) \underset{\substack{(54.19)\\(54.7)}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\int\limits_{0}^{\eta}\cos y(x-t)\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt \underset{u=t-x}{=}$$

$$\underset{u=t-x}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\frac{\sin\eta u}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt. \qquad (54.20)$$

Формула (54.20) по своему виду напоминает соответствующую формулу для частных сумм ряда Фурье (см. формулу (51.40)). Поэтому естественно провести дальнейшие рассуждения по той же схеме, которая применялась в рядах Фурье при доказательстве формулы (51.51), учитывая, конечно, специфику рассматриваемого случая.

Вспомнив, что (см. п. 50.4)

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}, \quad \eta>0, \qquad (54.21)$$

преобразуем разность между $S(\eta)$ и $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ следующим образом:

$$S(\eta) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \underset{\substack{(54.20)\\(54.21)}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt -$$

$$- \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt = \qquad (54.22)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}[f(x+t)-f(x+0)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}[f(x-t)-f(x-0)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt.$$

Получившиеся интегралы представим в виде сумм интегралов по промежуткам $[0,1]$ и $[1,+\infty]$:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} = \int\limits_{0}^{1} + \int\limits_{1}^{+\infty}, \qquad (54.23)$$

и исследуем каждый из получившихся интегралов отдельно.

Так как в силу условий теоремы существует конечный предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = f'_+(x),$$

и так как функция $f(x+t)-f(x+0)$ абсолютно интегрируема по переменному t на отрезке $[0,1]$ (напомним, что x фиксировано), то и функция $\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ абсолютно интегрируема на этом отрезке. Поэтому по теореме Римана (п. 51.3, теорема 3)

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt=0. \tag{54.24}$$

Для соответствующего интеграла по промежутку $[1,+\infty)$ имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(x+t)}{t}\sin\eta t\,dt-\frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt. \tag{54.25}$$

Поскольку при $t\geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\frac{|f(x+t)|}{t}\leqslant|f(x+t)|,$$

то в силу абсолютной интегрируемости функции f на всей числовой оси будем иметь

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{|f(x+t)|}{t}\,dt\leqslant\int\limits_1^{+\infty}|f(x+t)|\,dt\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)|\,dt\underset{u=x+t}{=}$$
$$\underset{u=x+t}{=}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|\,du<+\infty,$$

т. е. функция $\dfrac{f(x+t)}{t}$ абсолютно интегрируема на промежутке $[1,+\infty)$, и поэтому снова по теореме Римана получим

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(x+t)}{t}\sin\eta t\,dt=0. \tag{54.26}$$

Наконец, из сходимости интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt\underset{\eta t=u}{=}\frac{f(x+0)}{\pi}\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_\eta^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=0. \tag{54.27}$$

В результате из полученных равенств (54.24)–(54.27) вытекает, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}[f(x,t)-f(x+0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=0. \tag{54.28}$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}[f(x-t)-f(x-0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=0. \tag{54.29}$$

Таким образом, для интеграла Фурье (54.3) функции f имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt \underset{(54.19)}{=} \lim_{\eta\to+\infty} S(\eta) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \quad \triangleleft$$

П р и м е р. Представим интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Поскольку функция f четная, то (см. 54.2)) $b(y) = 0$. Найдем функцию $a(y)$:

$$a(y) \underset{(54.2)}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos yt\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \cos yt\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{\sin y}{y}.$$

Согласно (54.1) и теореме 1 имеем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\cos xy\,dy = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < 1, \\ 1/2, & \text{если} \quad |x| = 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, с помощью теоремы 1 удалось вычислить значение интеграла, стоящего в левой части полученного равенства. В частности, при $x = 1$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\sin y\cos y}{y}\,dy = \frac{1}{2},$$

или, полагая $t = 2y$,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что эта формула была использована при доказательстве теоремы 1. Ранее она была получена другим способом (см. п. 50.4*).

54.2. Главное значение интеграла. Введем новое понятие — понятие *интеграла в смысле главного значения* по действительной оси, который обозначается *)

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{54.30}$$

Будем рассматривать функции действительного аргумента, принимающие, вообще говоря, комплексные значения,

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad x \in R, \quad u(x) \in R, \quad v(x) \in R.$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть функция f интегрируема (в собственном или несобственном смысле) на любом отрезке $[a, b]$ числовой

*) Главное значение — по-французски valeur principale.

оси R (такие функции называются *локально интегрируемыми*); тогда

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)\,dx. \tag{54.31}$$

Отличие интеграла (54.30) от несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{54.32}$$

состоит в том, что интеграл (54.32) является пределом интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при произвольном стремлении $a \to -\infty$ и $b \to +\infty$, а интеграл (54.30) — предел тех же интегралов, но лишь в случае $a = -b$ и $b \to +\infty$.

Если существует несобственный интеграл (54.32), то, очевидно, существует и интеграл в смысле главного значения (54.30). Однако может случиться, что несобственный интеграл (54.32) не существует, а интеграл в смысле главного значения (54.30) существует.

Например, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ не существует, а интеграл v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ существует и равен нулю, ибо для любого $b > 0$ имеет место равенство $\int\limits_{-b}^{b} x\,dx = 0$. Вообще, если функция f — нечетная и локально интегрируемая, то интеграл v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует и равен нулю, так как в силу нечетности функции f для каждого $b > 0$ имеет место равенство $\int\limits_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$.

Заметим, что для интегралов (собственных, несобственных или в смысле главного значения) от комплекснозначных функций справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx, \quad a \leqslant b, \tag{54.33}$$

так как для собственных интегралов оно доказано в п. 24.1, а для других получается предельным переходом.

54.3. Преобразование Фурье. Если функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси и в каждой ее точке имеет односторонние производные, то согласно теореме 1

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt. \tag{54.34}$$

Отсюда в силу четности косинуса следует, что и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt. \tag{54.35}$$

Функция

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt \tag{54.36}$$

непрерывна (а следовательно, и интегрируема по Риману) на любом отрезке $[-\eta, \eta]$, $\eta > 0$, как равномерно сходящийся интеграл от непрерывной по обеим переменным t и y функции $f(t)\sin y(x-t)$ (x фиксировано): равномерная сходимость интеграла (54.36) следует из признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов, так как

$$|f(t) \sin y(x-t)| \leqslant |f(t)|,$$

а функция f по условию абсолютно интегрируема на всей числовой оси. (Заметим, что непрерывность функции (54.36), конечно, сразу следует и из леммы 1 п. 54.1.)

В силу нечетности синуса функция $\Phi(y)$ также нечетна, поэтому

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\, dy \underset{(54.36)}{=} \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt = 0. \tag{54.37}$$

Вспомнив, что $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$ (см. п. 32.4), получим для рассматриваемой функции

$$f(x) \underset{\substack{(54.35)\\(54.37)}}{=} \text{v.p.} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt \right] =$$

$$= \text{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos y(x-t) + i \sin y(x-t)]\, dt =$$

$$= \text{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)}\, dt. \tag{54.38}$$

Перепишем получившееся равенство в виде

$$f(x) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt\Big)e^{iyx}\,dy. \tag{54.39}$$

Определение 3. Отображение F, ставящее в соответствие абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции f функцию, обозначаемую Ff или $\widehat{f}$ и задаваемую равенством

$$(Ff)(y) = \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt, \tag{54.40}$$

называется *преобразованием Фурье*, а отображение F^{-1}, ставящее в соответствие абсолютно интегрируемой на всей оси функции f функцию $F^{-1}f$, задаваемую равенством

$$(F^{-1}f)(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}\,dt, \tag{54.41}$$

— *обратным преобразованием Фурье.*

В формулах (54.40), (54.41) функция f может принимать и комплексные значения.

Заметим, что если функция принимает только действительные значения, то как ее преобразование Фурье, так и обратное преобразование Фурье принимают, вообще говоря, комплексные значения (определение интеграла от функции, принимающей комплексные значения, см. в п. 29.7).

Функция Ff называется *образом Фурье функции* f.

При сделанном в определении 3 предположении об абсолютной интегрируемости функции f оба интеграла (54.40) и (54.41) сходятся, и даже абсолютно. Действительно, поскольку

$$|e^{-iyt}| = |e^{iyt}| = 1,$$

то

$$|f(t)e^{-iyt}| = |f(t)e^{iyt}| = |f(t)|, \tag{54.42}$$

а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ по условию сходится.

Лемма 2. *Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси и в каждой точке $x \in R$ у нее существуют производные справа и слева. Если преобразование Фурье Ff функции f также абсолютно интегрируемо, то*

$$F^{-1}Ff = f,$$

а если абсолютно интегрируемо обратное преобразование Фурье $F^{-1}f$, то

$$FF^{-1}f = f.$$

Отметим, что в случае, когда преобразование Фурье абсолютно интегрируемо, интеграл в смысле главного значения в формуле (54.39) превращается в обычный интеграл.

$\triangleright$ Равенство (54.39), записанное в обозначениях преобразования Фурье F и обратного преобразования Фурье F^{-1}, имеет вид

$$f = F^{-1}(Ff). \tag{54.43}$$

Докажем, что и

$$F(F^{-1}f) = f. \tag{54.44}$$

В силу четности косинуса из формулы (54.35) следует, что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt,$$

а в силу нечетности синуса из формулы (51.37) — что

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(t-x)\,dt = 0.$$

Отсюда по аналогии с (54.38) получим

$$f(x) = \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\cos y(t-x) + i\sin y(t-x)]\,dt =$$

$$= \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(t-x)}\,dt =$$

$$= \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}\,dt\right)e^{-iyx}\,dy.$$

В случае абсолютной сходимости обратного преобразования Фурье $F^{-1}f$ функции f интеграл в смысле главного значения превращается в этой формуле в обычный интеграл, а поэтому ее можно записать в виде $FF^{-1}f = f$. $\triangleleft$

Формулы (54.43) и (54.44) показывают, что отображения F и F^{-1} являются взаимно обратными отображениями. Это и оправдывает их обозначения символами прямой и обратной функций.

Лемма 3. *Прямое и обратное преобразования Фурье являются линейными отображениями пространства абсолютно интегрируемых на всей числовой оси функций.*

Это означает, что для любых функций f_1 и f_2 из указанных множеств функций и для всех чисел $\lambda_1 \in C$ и $\lambda_2 \in C$ выполняются соотношения

$$F(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 F f_1 + \lambda_2 F f_2, \tag{54.45}$$

$$F^{-1}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 F^{-1} f_1 + \lambda_2 F^{-1} f_2. \tag{54.46}$$

$\triangleright$ Равенства (54.45) и (54.46) сразу следуют из формул (54.40) и (54.41) в силу линейности интеграла. $\triangleleft$

54.4. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций. Будем рассматривать абсолютно интегрируемые на всей числовой оси R функции, принимающие, вообще говоря, комплексные значения. Для таких функций определено преобразование Фурье (54.40).

Теорема 2. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси R, то ее преобразование Фурье Ff является ограниченной непрерывной на R функцией, стремящейся к нулю, когда ее аргумент стремится к бесконечности; при этом для любого $y \in R$ выполняется неравенство*

$$|(Ff)(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{54.47}$$

Следствие. *Если последовательность абсолютно интегрируемых функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в среднем на числовой оси R к абсолютно интегрируемой функции, то последовательность преобразований Фурье Ff_n функций f_n сходится равномерно на всей числовой оси R к преобразованию Фурье Ff функции f.*

В символической записи:

$$f_n \to f \quad \text{в} \quad RL_1(R) \Longrightarrow Ff_n \underset{R}{\rightrightarrows} Ff.$$

$\triangleright$ Пусть функция f абсолютно интегрируема на числовой оси R. Так как $|e^{-ixy}| = 1$ (см. п. 54.3), то

$$|(Ff)(y)| =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-ixy}|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx,$$

т. е. неравенство (54.47) доказано. Оно показывает, что на числовой оси преобразование Фурье Ff функции f ограничено константой

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Докажем теперь, что Ff является непрерывной функцией и что

$$\lim_{y\to\infty} (Ff)(y) = 0. \tag{54.48}$$

Пусть сначала функция f принимает только действительные значения; тогда

$$(Ff)(y) \underset{(54.40)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos yx - i \sin yx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos yx\, dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin yx\, dx.$$

Каждый из получившихся в правой части интегралов в силу леммы 1 п. 54.1 является непрерывной функцией (так как функция f абсолютно интегрируема, а функции $\cos yx$ и $\sin yx$ ограничены и непрерывны), которая согласно теореме Римана (теорема 3 п. 51.3) стремится к нулю при $y \to \infty$. Поэтому теми же свойствами обладает и функция Ff.

Если функция f комплекснозначная, т. е. $f(x) = u(x) + iv(x)$, $u(x) \in \boldsymbol{R}$, $v(x) \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}$, то в силу линейности преобразования Фурье $Ff = Fu + iFv$. Отсюда следует, что функция Ff непрерывна и стремится к нулю, когда ее аргумент стремится к бесконечности, так как этими свойствами, согласно доказанному выше, обладают функции Fu и Fv. $\lhd$

Следствие вытекает из неравенства

$$|(Ff_n)(y) - (Ff)(y)| \underset{(54.45)}{=}$$

$$\underset{(54.45)}{=} |(F(f_n - f))(y)| \underset{(54.47)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx. \quad (54.49)$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$ по условию (последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем на числовой оси к функции f), поэтому и левая его часть стремится к нулю. При этом, так как правая часть неравенства (54.49) не зависит от y, то стремление разности $(Ff_n)(y) - (Ff)(y)$ к нулю происходит равномерно на $\boldsymbol{R}$, а это и означает равномерную сходимость на $\boldsymbol{R}$ последовательности функций $\{Ff_n\}$ к функции Ff.

Теорема 3. *Если*:

1) *функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на числовой оси*;

2) *ее производная f' кусочно непрерывна на любом конечном отрезке и также абсолютно интегрируема на числовой оси*;
то

$$(Ff')(y) = iy(Ff)(y). \quad (54.50)$$

Следствие. *Если функция f и все ее производные до порядка n включительно абсолютно интегрируемы на числовой оси, $n \geqslant 1$, производная порядка $n-1$ непрерывна, а производная порядка n кусочно непрерывна на любом отрезке, то*

$$|(Ff)(y)| \leqslant \frac{c}{|y|^n}, \quad -\infty < y < +\infty, \quad (54.51)$$

где

$$c = \sup_{-\infty < y < +\infty} |(Ff^{(n)})(y)| < +\infty. \quad (54.52)$$

$\rhd$ Известно, что из абсолютной сходимости интеграла следует его сходимость. Поэтому из абсолютной интегрируемости функции f

и ее производной f' на числовой оси следует сходимость интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,dx$. Покажем, что отсюда следует, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0. \tag{54.53}$$

Действительно, из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,dx$ следует, например, существование конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty}\int\limits_0^x f'(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} f'(t)\,dt,$$

а тогда из формулы Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\,dt$$

следует и существование конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Этот предел не может быть не равным нулю, так как тогда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ не мог бы быть конечным (почему?). Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Теперь, проинтегрировав по частям, получим

$$(Ff')(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,df(x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-ixy}f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx \underset{(54.53)}{=} iy(Ff)(y).$$

Таким образом, дифференцированию функции f соответствует умножение ее преобразования Фурье $(Ff)(y)$ на iy, т. е. формула (54.50) доказана.

Если функция f имеет $n \geqslant 1$ абсолютно интегрируемых на числовой оси производных, то ее n-кратное дифференцирование соответствует умножению ее преобразования Фурье на $(iy)^n$:

$$(Ff^{(n)})(y) = (iy)^n(Ff)(y). \tag{54.54}$$

Производная $f^{(n)}$ по условию следствия абсолютно интегрируема на всей числовой оси R. Следовательно, согласно теореме 2 ее образ Фурье $Ff^{(n)}$ является ограниченной на этой оси функцией, т. е.

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in R} |Ff^{(n)}(y)| < +\infty.$$

Таким образом, для всех $y \in R$ выполняется неравенство

$$|(Ff^{(n)})(y)| \leqslant c. \tag{54.55}$$

Поэтому

$$|(Ff)(y)| \underset{(54.54)}{=} \frac{|(Ff^{(n)})(y)|}{|(iy)^n|} \underset{(54.55)}{\leqslant} \frac{c}{|y|^n}.$$

В силу определения производной комплекснозначной функции (см. п. 10.9) и линейности преобразования Фурье все проведенные выше рассуждения справедливы не только для функций f, принимающих действительные значения, но и для комплекснозначных функций. ◁

Теорема 3 показывает, что дифференцирование функции приводит к умножению ее образа Фурье на множитель iy. Тем самым операции дифференцирования при преобразовании Фурье соответствует алгебраическая операция — умножение функции на ее аргумент и на i. На этом свойстве преобразования Фурье основываются его многочисленные применения в математике.

Из формулы (54.51) следует, что чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция, тем, вообще говоря, быстрее стремится к нулю ее преобразование Фурье при стремлении аргумента к бесконечности $\Bigl($причем, если имеется n указанных производных, то не медленнее, чем $\dfrac{c}{|y|^n}\Bigr)$.

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функции $f(x)$, $xf(x), \ldots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, то преобразование Фурье функции $f(x)$ является n раз дифференцируемой на всей числовой оси функцией и*

$$(Ff)^{(n)} = (-i)^n F(x^n f). \tag{54.56}$$

▷ Продифференцировав формально по параметру y интеграл

$$(Ff)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx, \tag{54.57}$$

будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}(f(x)e^{-ixy})\, dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixy}\, dx. \tag{54.58}$$

Поскольку $|xf(x)e^{-ixy}| = |xf(x)|$ и интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\, dx$ по условию теоремы сходится, то согласно признаку Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра, интеграл (54.58) равномерно сходится.

По условию теоремы интеграл (54.57) сходится, поэтому для его дифференцирования по параметру y, согласно доказанному, можно применить правило Лейбница (см. теорему 5 п. 50.2), т. е. интеграл (54.58) является производной интеграла (54.57). Поэтому

$$(Ff)'(y) \underset{(54.58)}{=} -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixy}\,dx = -iF(xf(x)).$$

Таким образом, производная $(Ff)'$ преобразования Фурье Ff функции f равна произведению $-i$ на преобразование Фурье функции $f(x)$, умноженной на x. Произведя n раз дифференцирование преобразования Фурье Ff функции f, получим, что производная $(Ff)^{(n)}$ порядка n будет равна произведению $(-i)^n$ на преобразование Фурье функции $f(x)$, умноженной на x^n.

Так же, как и в предыдущей теореме, все проведенные рассуждения справедливы не только для функций, принимающих лишь действительные значения, но и для комплекснозначных функций. $\triangleleft$

§ 55. Обобщенные функции

55.1. Пространства D и D'. *Обобщенными функциями* называются линейные непрерывные числовые функции, заданные на некотором линейном функциональном пространстве (называемом *пространством основных функций*), в котором определено понятие сходимости последовательности функций.

Числовые функции, заданные на множестве функций, называются обычно, как это уже отмечалось выше, *функционалами*.

Линейность функционала f, заданного на некотором пространстве X основных функций, означает, что для любых функций $\varphi_1 \in X$, $\varphi_2 \in X$ и любых чисел λ_1, λ_2 имеет место равенство

$$f(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 f(\varphi_1) + \lambda_2 f(\varphi_2), \tag{55.1}$$

а непрерывность — что из сходимости последовательности функций $\varphi_n \in X$, $n = 1, 2, ...$, в пространстве X к функции $\varphi \in X$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = f(\varphi).$$

В качестве примера возьмем за пространство основных функций пространство $RL_2(a, b)$ функций с интегрируемым квадратом на интервале (a, b). Зафиксируем некоторую функцию $f \in RL_2(a, b)$ и рассмотрим порожденный ею функционал, определяемый формулой

$$f(\varphi) \overset{\text{def}}{=} (f, \varphi), \quad \varphi \in RL_2(a, b),$$

где (f, φ) — почти скалярное произведение в пространстве $RL_2(a, b)$.

Функционал $f(\varphi) = (f, \varphi)$ является линейным и непрерывным, т. е. представляет собой обобщенную функцию, заданную на $RL_2(a, b)$.

По аналогии с рассмотренным примером для любой обобщенной функции f, заданной на некотором пространстве основных функций X, будем ее значение в точке $\varphi \in X$ обозначать не только посредством $f(\varphi)$, но и посредством (f, φ).

Линейная комбинация для обобщенных функций определяется по общему правилу как для любых числовых функций: если f_1 и f_2 — обобщенные функции, а λ_1 и λ_2 — числа, то обобщенная функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ определяется равенством

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,\ \varphi) \overset{\text{def}}{=} \lambda_1 (f_1, \varphi) + \lambda_2 (f_2, \varphi), \tag{55.2}$$

где φ — произвольная функция из пространства основных функций.

Определение 1. Обозначим через D пространство, состоящее из всех финитных (вообще говоря, комплекснозначных) бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси функций (рис. 204). При этом последовательность $\varphi_n \in D, n = 1, 2, \ldots$, назовем *сходящейся к функции* $\varphi \in D$, если существует отрезок $[a, b]$, содержащий носители всех функций φ и φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, и такой, что для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность производных $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к производной $\varphi^{(k)}$:

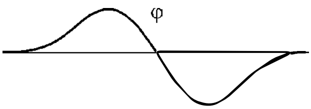

Рис. 204

$$\varphi_n^{(k)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}, \quad n \to \infty.$$

Пространство D является, очевидно, линейным пространством: если $\varphi_1 \in D$ и $\varphi_2 \in D$, то для любых чисел λ_1 и λ_2 имеет место

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \in D.$$

Здесь и в дальнейшем в этом параграфе под функциями φ можно понимать либо функции, принимающие только действительные значения, т. е. φ: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, и тогда числа λ также действительные, либо функции, принимающие и комплексные значения, т. е. φ: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$, тогда числа λ также могут быть комплексными.

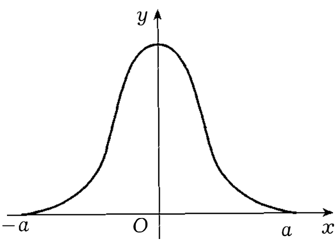

Рис. 205

Пример 1. Если $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, то $\varphi \in D$.

Пример 2. Пусть (рис. 205)

$$\varphi_a \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-a^2/(a^2 - x^2)}, & \text{если} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{если} \quad |x| \geqslant a. \end{cases} \tag{55.3}$$

Тогда $\varphi_a \in D$. В самом деле, односторонние производные всех порядков справа в точке $x=-a$ и слева в точке $x=a$ равны нулю (см. пример в п. 32.3):

$$\varphi_{a_+}^{(n)}(-a)=\varphi_{a_-}^{(n)}(a)=0.$$

Очевидным образом $\varphi_{a_-}^{(n)}(-a)=\varphi_{a_-}^{(n)}(a)=0$, так как вне отрезка $[-a,a]$ функция φ_a — тождественный нуль. Поэтому функция φ_a бесконечно дифференцируема на всей числовой оси, причем из $\operatorname{supp}\varphi_a=[-a,a]$ следует, что функция φ_a финитная, а поэтому $\varphi_a\in D$.

Определение 2. Всякий линейный непрерывный функционал f, заданный на пространстве D, т. е. $f\colon D\to \boldsymbol{R}$ (или, более общо, $f\colon D\to \boldsymbol{C}$), называется *обобщенной функцией на* D.

Множество всех обобщенных функций в этом случае обозначается D'. Значение обобщенной функции $f\in D'$ на основной функции $f\in D$, согласно сделанному выше замечанию, обозначатся (f,φ).

Пример 3. Функция f, заданная на всей числовой оси и абсолютно интегрируемая на любом конечном отрезке (такие функции, как мы знаем, называются локально абсолютно интегрируемыми; см. п. 54.2), порождает обобщенную функцию, значение которой на любой основной функции $\varphi\in D$ задается формулой

$$(f,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in D. \tag{55.4}$$

Это определение корректно в том смысле, что интеграл, стоящий в правой части равенства, существует. Действительно, для каждой функции $\varphi\in D$ существует отрезок $[a,b]$, содержащий носитель функции φ. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{55.5}$$

Функция φ, будучи непрерывной на отрезке $[a,b]$, ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $c>0$, что для всех $x\in[a,b]$ имеет место неравенство $|\varphi(x)|\leqslant c$, а следовательно, и неравенство $|f(x)\varphi(x)|\leqslant c|f(x)|$.

По условию функция f локально абсолютно интегрируема, поэтому интеграл $\int\limits_a^b|f(x)|\,dx$ конечен, а тогда по признаку сравнения конечен и интеграл $\int\limits_a^b|f(x)\varphi(x)|\,dx$. Это означает абсолютную сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Исходя из свойств интеграла, нетрудно проверить, что функционал, заданный формулой (55.4), является линейным и непрерывным на D.

Таким образом, всякую локально абсолютно интегрируемую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию. Иначе говоря, каждая обычная локально абсолютно интегрируемая функция является и обобщенной функцией.

Пример 4. Рассмотрим на D функционал, обозначаемый символом δ и задаваемый формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D. \tag{55.6}$$

Этот функционал называется *δ-функцией* или *функцией Дирака*. Его линейность и непрерывность на пространстве D легко проверяются. Докажем, что δ-функцию нельзя представить в виде (55.4) ни при какой локально абсолютно интегрируемой функции f.

Действительно, если существует такая локально абсолютно интегрируемая функция f, что для любой функции $\varphi \in D$ имеет место равенство

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \tag{55.7}$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0),$$

то для функции φ_a (см. (55.3)) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_a(x)\,dx = \varphi_a(0) \underset{(55.3)}{=} \frac{1}{e}. \tag{55.8}$$

В силу локальной абсолютной интегрируемости функции f

$$\lim_{a\to 0} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0 \tag{55.9}$$

(почему?). Заметив, далее, что

$$\varphi_a(x) = e^{-a^2/(a^2-x^2)} \leqslant \frac{1}{e}, \quad x \in (-a, a), \tag{55.10}$$

получим

$$\frac{1}{e} \underset{(55.8)}{=} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_a(x)\,dx \right| \underset{(55.3)}{\leqslant} \int_{-a}^{a} |f(x)||\varphi_a(x)|\,dx \underset{(55.10)}{\leqslant}$$

$$\underset{(55.10)}{\leqslant} \frac{1}{e} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \underset{(55.9)}{\to} 0 \quad \text{при} \quad a \to 0,$$

что противоречит тому, что левая часть равна положительной постоянной $\frac{1}{e}$. Итак, δ-функция не представима в виде (55.7). В этом смысле δ-функция является примером обобщенной функции, не являющейся обычной. По аналогии с формулой (55.4) иногда вместо (δ, φ) пишут $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx$, и, таким образом, согласно определению (55.6) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

55.2. Дифференцирование обобщенных функций. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на всей числовой оси, и, следовательно, ее производная f', будучи непрерывной, является локально абсолютно интегрируемой функцией. Выберем произвольно основную функцию $\varphi \in D$. Для нее существует такой отрезок $[a, b]$, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$. Отсюда, в частности, следует, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Использовав эти равенства при интегрировании по частям, получим

$$(f', \varphi) \underset{(55.4)}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,df(x) =$$

$$= f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi'). \quad (55.11)$$

Равенство $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$, являющееся для обычных функций утверждением, требующим доказательства (которое и было приведено выше), для обобщенных функций принимается за определение.

Определение 3. *Производной f' обобщенной функции f* называется функционал, задаваемый формулой

$$(f', \varphi) \overset{\text{def}}{=} -(f, \varphi'), \quad \varphi \in D. \quad (55.12)$$

Правая часть этого равенства имеет смысл, ибо из того, что $\varphi \in D$, следует, что $\varphi' \in D$.

Свойством (55.12) обладает обычная производная f' любой непрерывно дифференцируемой на R функции f, поэтому эта обычная производная f' является производной функции и в смысле обобщенных функций, т. е. в смысле определения 3.

В силу этого определения любая обобщенная функция $f \in D'$ имеет производную f', являющуюся также обобщенной функцией: $f' \in D'$ (линейность и непрерывность функционала f' легко проверяются). В частности, в смысле обобщенных функций любая обычная локально абсолютно интегрируемая функция имеет производную. Этот интересный факт является следствием того, что при сделанном выше обобщении понятия производной было взято за основу сохранение лишь одного свойства производной, а именно свойства, выражаемого формулой интегрирования по частям. Поэтому для обычных функций их производная в обобщенном смысле не сводится, вообще говоря, к обычной производной.

Производные высших порядков 2, 3, 4, ... определяются для обобщенных функций по индукции согласно формуле

$$f^{(n+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n)})', \quad n = 1, 2, \ldots \tag{55.13}$$

Из формул (55.12) и (35.13) следует, что любая обобщенная функция f бесконечно дифференцируема, причем

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^{(n)}(f, \varphi^{(n)}), \quad \varphi \in D, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{55.14}$$

Пример 1. Найдем n-ю производную δ-функции:

$$(\delta^{(n)}, \varphi) \underset{(55.14)}{=} (-1)^n(\delta, \varphi^{(n)}) \underset{(55.6)}{=} (-1)^n\varphi^{(n)}(0).$$

Пример 2. Пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases} \tag{55.15}$$

Функция $\theta(x)$ называется *функцией Хевисайда* *) (рис. 206).

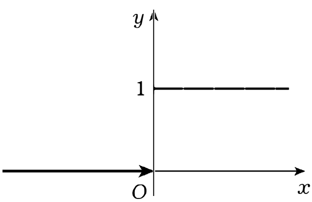

Рис. 206

При $x = 0$, являясь разрывной, она не имеет конечной производной в обычном смысле, но функция $\theta(x)$, будучи, очевидно, локально абсолютно интегрируемой, может рассматриваться как обобщенная функция и потому имеет производную в смысле определения 3.

Найдем эту производную:

$$(\theta', \varphi) \underset{(55.12)}{=} -(\theta, \varphi') \underset{(55.4)}{=} -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)\,dx \underset{(55.15)}{=}$$

$$\underset{(55.15)}{=} -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(+\infty) + \varphi(0) = \varphi(0) \underset{(55.6)}{=} (\delta, \varphi), \quad \varphi \in D,$$

ибо $\varphi(+\infty) = 0$. Поскольку полученное равенство имеет место для любой основной функции $\varphi \in D$, то из него следует, что

$$\theta' = \delta. \tag{55.16}$$

*) О. Хевисайд (1850–1925) — английский физик.

В смысле обычной производной при любом $x \neq 0$ имеет место $\theta'(x) = 0$, а при $x = 0$ производная функции $\theta(x)$ бесконечна: $\theta'(0) = +\infty$. Поэтому, согласно равенству (55.16), иногда говорят, что функция δ равна всюду на числовой оси нулю, кроме точки $x = 0$, где она равна $+\infty$. Хотя это высказывание не является логически строгим, так как функция Дирака δ не есть обычная функция, и поэтому нельзя говорить о ее значениях в отдельных точках, оно бывает иногда удобным при правдоподобных рассуждениях.

Определение 4. Последовательность обобщенных функций $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *сходящейся к обобщенной функции* $f \in D'$, если для любой основной функции $\varphi \in D$ выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} (f_n,\ \varphi) = (f,\ \varphi). \tag{55.17}$$

Пример 3. В пространстве обобщенных функций D' имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \sin nx = 0.$$

Действительно, каждая функция φ пространства основных функций D, очевидно, абсолютно интегрируема на всей числовой оси, поэтому, согласно теореме Римана (см. п. 51.3, теорему 3), имеем

$$\lim_{n \to \infty} (\sin nx,\ \varphi) \underset{(55.4)}{=} \lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin nx\, dx = 0.$$

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ *в* D', *то для любого натурального* k *имеет место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}. \tag{55.18}$$

Следствие. *Если* $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *в* D', *то для любого натурального* k *имеет место равенство*

$$f^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}. \tag{55.19}$$

Иначе говоря, сходящиеся ряды обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз. Следовательно, в смысле обобщенных производных можно сколько угодно раз почленно дифференцировать сходящиеся в среднем ряды и обычных (локально абсолютно интегрируемых) функций. В результате будут получаться верные равенства.

Докажем теорему.

$\triangleright$ Если $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$, то для любой основной функции $\varphi \in D$ и любого $k = 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$(f_n^{(k)}, \varphi) - (f^{(k)}, \varphi) \underset{(55.14)}{=} (-1)^k[(f_n, \varphi^{(k)}) - (f, \varphi^{(k)})] \underset{(55.17)}{\to} 0$$

при $n \to \infty$, ибо $\varphi^{(k)} \in D$. Таким образом, имеет место (55.18). $\lhd$

Для получения формулы (55.19) достаточно применить доказанную теорему к частичным суммам заданного ряда.

55.3. Пространство S. Для перенесения понятия преобразования Фурье на случай обобщенных функций целесообразно ввести другое основное пространство функций, которое будет обозначаться S.

Определение 5. Пространство S состоит из комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси функций, стремящихся к нулю со всеми своими производными быстрее любой степени функции x^{-1} при стремлении аргумента x к бесконечности.

Иначе говоря, для любой функции $\varphi \in S$ и любых неотрицательных целых k и m имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty} x^k \varphi^{(m)}(x) = 0. \tag{55.20}$$

Последовательность $\varphi_n \in S$, $n = 1,2,\ldots$, называется *сходящейся в S к функции $\varphi \in S$*, если для любых неотрицательных целых k и m последовательность $x^k\varphi_n^{(m)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится к функции $x^k\varphi^{(m)}(x)$ на всей числовой оси R:

$$x^k\varphi_n^{(m)}(x) \underset{R}{\rightrightarrows} x^k\varphi^{(m)}(x), \quad n \to \infty. \tag{55.21}$$

Лемма 1. *Условие* (55.20) *для бесконечно дифференцируемой на всей числовой оси функции φ равносильно следующему условию*:

для любых неотрицательных целых k и m существует такая постоянная $c_{k,m}$, что

$$\sup_R |x^k\varphi^{(m)}(x)| = c_{k,m} < +\infty. \tag{55.22}$$

$\rhd$ Если выполняется условие (55.22), то, заменив k на $k+1$, получим

$$|x^{k+1}\varphi^{(m)}(x)| \leqslant c_{k+1,m}, \quad x \in R,$$

и потому

$$|x^k\varphi^{(m)}(x)| \leqslant \frac{c_{k+1,m}}{|x|} \to 0, \quad x \to \infty,$$

т. е. выполняется условие (55.20).

Наоборот, если выполнено условие (55.20), то функция $x^k\varphi^{(m)}(x)$, имея конечный предел в бесконечно удаленной точке ∞, будет ограничена на некоторой ее окрестности $U(\infty) = \{x\colon |x| > a > 0\}$. Будучи же непрерывной, функция $x^k\varphi^{(m)}(x)$ ограничена и на отрезке $[-a, a] = R\backslash U(\infty)$. Таким образом, функция $x^k\varphi^{(m)}(x)$ ограничена на всей числовой прямой R, и, следовательно, для нее существует постоянная $c_{k,m}$, удовлетворяющая условию (55.22). $\lhd$

Заметим теперь, что если $\varphi \in S$, то для любого неотрицательного целого k функция $x^k\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Это следует из того, что функция $x^k\varphi(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени функции x^{-1}.

$\triangleright$ В самом деле, если $\varphi \in S$, то

$$|x^k\varphi(x)| \underset{(55.22)}{\leqslant} c_{k,0}, \quad x^2|x^k\varphi(x)| = |x^{k+2}\varphi(x)| \underset{(55.22)}{\leqslant} c_{k+2,0}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$(1+x^2)|x^k\varphi(x)| \leqslant c_{k,0} + c_{k+2,0}$$

и, следовательно,

$$|x^k\varphi(x)| \leqslant \frac{c_{k,0}+c_{k+2,0}}{(1+x^2)},$$

а поскольку интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \tag{55.23}$$

сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x^k\varphi(x)|\,dx$. $\triangleleft$

В силу абсолютной интегрируемости функции $x^k\varphi(x)$, $\varphi \in S$, на всей числовой оси для нее определено как прямое преобразование Фурье $Fx^k\varphi(x)$, так и обратное $F^{-1}x^k\varphi(x)$ (см. п. 54.3).

Теорема 2. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают пространство S линейно, непрерывно и взаимно однозначно на себя.*

Иначе говоря, как преобразование Фурье, так и обратное преобразование Фурье являются линейной биекцией S на S.

$\triangleright$ Прежде всего, отметим, что линейность и взаимная однозначность (инъективность) преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье уже доказаны раньше (см. п. 54.3).

Покажем, что преобразование Фурье F отображает S в S. Для этого сначала заметим, что при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ функция $x^k\varphi(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на R, а следовательно, функция $F(x^k\varphi(x))$ бесконечно дифференцируема на всей числовой оси (см. теорему 4 в п. 54.4).

Докажем, что если $\varphi(x) \in S$, то и $(F\varphi)(y) \in S$. Для этого, согласно лемме, достаточно доказать, что при любых целых неотрицательных k и m функции $y^m(F\varphi)^{(k)}(y)$ ограничены на всей числовой оси.

Оценим эти функции:

$$|y^m(F\varphi)^{(k)}(y)| \underset{(54.56)}{=} |y^mF(x^k\varphi(x))| \underset{(54.54)}{=} |F(x^k\varphi(x))^{(m)}| \underset{(54.40)}{=}$$

$$\underset{(54.40)}{=} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x^k\varphi(x))^{(m)}e^{-ixy}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|(x^k\varphi(x))^{(m)}|\,dx. \tag{55.24}$$

Заметим теперь, что в силу условия (55.22)

$$c \overset{\text{def}}{=} \sup_{R} |(1+x^2)(x^k\varphi(x))^{(m)}| \underset{(55.22)}{<} +\infty, \tag{55.25}$$

так как, согласно формуле Лейбница для производной m-го порядка от произведения, $(x^k\varphi(x))^{(m)}$ представляет собой конечную сумму вида $\sum\limits_{p,q} \lambda_{p,q} x^p \varphi^{(q)}(x)$, где $\lambda_{p,q}$ — некоторые числовые коэффициенты, а каждое слагаемое этой суммы, согласно условию (55.22), ограничено на R. Поэтому, умножив и разделив подынтегральное выражение в интеграле, стоящем в правой части неравенства (55.24), на $1+x^2$, а затем заменив функцию $(1+x^2)|(x^k\varphi(x))^{(m)}|$ ее верхней гранью c, будем иметь

$$|y^m (F\varphi)^{(k)}(y)| \underset{(55.24)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{R} |(1+x^2)(x^k\varphi(x))^{(m)}| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \underset{\substack{(55.23)\\(55.25)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(55.23)\\(55.25)}}{=} c\sqrt{\frac{\pi}{2}} < +\infty. \tag{55.26}$$

Это, согласно лемме, означает, что $F\varphi \in S$. Итак,

$$F(S) \subset S. \tag{55.27}$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}(S) \subset S. \tag{55.28}$$

Докажем, что преобразование Фурье F отображает пространство S на себя. Если $\psi \in S$, то положим

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} F^{-1}\psi.$$

Согласно доказанному $\varphi \in S$ и $F\varphi = F(F^{-1}\psi) \underset{(55.44)}{=} \psi$.

Итак, F — биекция пространства S на S.

Аналогично доказывается, что и обратное отображение F^{-1} отображает пространство S на себя.

В заключение покажем, что преобразование Фурье F непрерывно на S. Сначала докажем, что отображение F непрерывно в нуле, т. е. что, если

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \quad \text{в} \quad S, \tag{55.29}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} F\varphi_n = F(0) = 0 \quad \text{в} \quad S \tag{55.30}$$

(в силу линейности F имеет место $F(0) = 0$, ибо $F(0) = F(0\cdot 0) = 0\cdot F(0) = 0$).

Из неравенства (55.26) для любых неотрицательных целых k и m имеем

$$|y^m (F\varphi_n)^{(k)}(y)| \leqslant c_n \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{55.31}$$

где

$$c_n \underset{(55.25)}{=} \sup_R |(1+x^2)(x^k \varphi_n(x))^{(m)}|. \tag{55.32}$$

Из условия (55.29) явствует согласно определению (55.21), что

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Поэтому из (55.31) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_R |y^m (F\varphi_n)^{(k)}(y)| = 0,$$

т. е. для любых неотрицательных целых k и m имеет место

$$y^m (F\varphi_n)^{(k)}(y)| \underset{R}{\rightrightarrows} 0;$$

а это, согласно тому же определению (55.21), означает, что в пространстве S $\lim\limits_{n\to\infty} F\varphi_n = 0$.

Если теперь

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi, \tag{55.33}$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n - \varphi) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} (F\varphi_n - F\varphi) \underset{(54.45)}{=} \lim_{n\to\infty} F(\varphi_n - \varphi) \underset{\substack{(55.29)\\(55.30)}}{=} 0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} F\varphi_n = F\varphi. \tag{55.34}$$

Выполнение условий (55.33), (55.34) и означает непрерывность F на S.

Аналогично доказывается и непрерывность F^{-1} на S. $\triangleleft$

Отметим, что в отличие от пространства S пространство D не обладает свойством инвариантности относительно преобразования Фурье F: существуют такие функции $\varphi \in D$, что $F\varphi \notin D$. Этим обстоятельством и объясняется, что при изучении преобразования Фурье мы в качестве основного пространства функций взяли пространство S, а не D.

55.4. Преобразование Фурье обобщенных функций.

Определение 6. Всякий линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве S, называется *обобщенной функцией* (на S).

Множество всех таких обобщенных функций обозначается S'. Пространство S является в этом случае пространством основных функций. По аналогии со случаем пространства D и D' значение обобщенной функции $f \in S'$ на функции $\varphi \in S$ обозначается (f, φ).

Последовательность обобщенных функций $f_n \in S'$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *сходящейся к обобщенной функции* $f \in S'$, если для любой основной функции $\varphi \in S$ справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi). \tag{55.35}$$

Пример 1. Функция Дирака, т. е. δ-функция, определяется в случае основного пространства S по аналогии со случаем основного пространства D:

$$(\delta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0), \quad \varphi \in S.$$

Пример 2. Всякая локально абсолютно интегрируемая функция f, для которой существует окрестность бесконечности $U(\infty)$ и числа $k \geqslant 0$ и $A > 0$ такие, что для любой точки $x \in U(\infty)$ справедлива оценка

$$|f(x)| \leqslant A|x|^k, \tag{55.36}$$

порождает обобщенную функцию f согласно формуле

$$(f, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx. \tag{55.37}$$

Этот интеграл сходится, ибо функция $f(x)\varphi(x)$ стремится к нулю в силу (55.20) и (55.36) быстрее любой степени x^{-1} при $x \to \infty$.

Функции $f(x)$, удовлетворяющие условию (55.36), называются *функциями медленного роста* (*на бесконечности*); к ним относятся, например, все многочлены. Поэтому и пространство S' также называют пространством обобщенных функций медленного роста. Поскольку $D \subset S$, то $S' \subset D'$ (в том смысле, что всякую обобщенную функцию из S' можно рассматривать и как обобщенную функцию из D', понимая под этим ее сужение на множестве $D \subset S$), т. е. обобщенные функции медленного роста составляют подмножество множества обобщенных функций D'.

Пример 3. Всякая абсолютно интегрируемая на числовой оси R функция f также порождает обобщенную функцию $f \in S'$ согласно той же формуле (55.37). Это вытекает из того, что любая функция $\varphi \in S$ ограничена (см. (55.22)): $|\varphi(x)| \leqslant c_{0,0}$. Поэтому $|f(x)\varphi(x)| \leqslant$ $\leqslant c_{0,0}|f(x)|$, $x \in R$, и, следовательно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$ сходится.

Линейность и непрерывность функционала, определяемого формулой (55.37) на пространстве S, в рассмотренных случаях легко проверяется.

Для обобщенной функции $f \in S'$ ее производная определяется также формулой $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$, только в ней, в отличие от случая (55.12), функции φ принадлежат более широкому, чем D классу S.

Полагая $f^{(n+1)} \overset{\text{def}}{=} (f^{(n)})'$, $n = 1, 2, \ldots$, как и для обобщенных функций из пространства D', получим

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad f \in S', \quad \varphi \in S, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Определение 7. Для обобщенной функции $f \in S'$ ее *преобразованием Фурье* Ff и *обратным преобразованием Фурье* $F^{-1}f$ называются функционалы на S, определяемые соответственно формулами

$$(Ff, \varphi) \overset{\text{def}}{=} (f, F\varphi), \quad \varphi \in S, \tag{55.38}$$

$$(F^{-1}f, \varphi) \overset{\text{def}}{=} (f, F^{-1}\varphi), \quad \varphi \in S. \tag{55.39}$$

Эти определения имеют смысл, так как если $\varphi \in S$, то согласно теореме 2 $F\varphi \in S$ и $F^{-1}\varphi \in S$.

Можно показать, что соотношения (55.38) и (55.39) выполняются, когда f является обычной абсолютно интегрируемой на числовой оси R функцией: они означают просто перемену порядка интегрирования. Например, формула (55.38) с точностью до констант имеет в этом случае вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx.$$

В силу примера 2 преобразование Фурье оказывается теперь определенным для более широкого класса и обычных функций, чем это было раньше, в частности, преобразование Фурье определено для многочленов и вообще для всех функций медленного роста на бесконечности.

Пример 3. Найдем преобразование Фурье единицы, т. е. функции $f(x) = 1$, $x \in R$, рассматриваемой как обобщенная функция (она является, очевидно, функцией медленного роста: $1 \in S'$).

Имеем

$$(F1, \varphi) \underset{(55.38)}{=} (1, F\varphi) \underset{(55.5)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-iy(x-t)}\, dx \right]_{t=0} \underset{(54.38)}{=}$$

$$\underset{(54.38)}{=} \sqrt{2\pi}\, [\varphi(t)]_{t=0} = \sqrt{2\pi}\, \varphi(0) = \sqrt{2\pi}\, (\delta, \varphi), \quad \varphi \in S$$

(мы воспользовались здесь соотношением (54.38), т. е., что то же самое, соотношением $F^{-1}(F\varphi) = \varphi$). Таким образом,

$$F \cdot 1 = \sqrt{2\pi}\delta.$$

Пример 4. Найдем $F\delta$:

$$(F\delta,\ \varphi) = (\delta,\ F\varphi) = (F\varphi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ixy}\,dx\big|_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \underset{(55.6)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi\right), \quad \varphi \in S.$$

Отсюда следует, что $F\delta = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Теорема 3. *Преобразование Фурье F отображает пространство S' линейно, непрерывно и взаимно однозначно на себя.*

Эта теорема является прямым следствием теоремы 2 об отображении пространства S с помощью прямого и обратного преобразований Фурье линейно, непрерывно и взаимно однозначно на себя, так как доказательство соответствующих свойств преобразования Фурье обобщенных функций сводится с помощью формул (55.38) и (55.39) к аналогичным свойствам преобразования Фурье основных функций. Убедимся в этом.

$\triangleright$ Прежде всего, если $f \in S'$, то Ff является линейным функционалом на S: если $\varphi_1 \in S$, $\varphi_2 \in S$, $\lambda_1 \in \boldsymbol{C}$, $\lambda_2 \in \boldsymbol{C}$, то

$$(Ff,\ \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \underset{(55.38)}{=}$$
$$\underset{(55.38)}{=} (f,\ F(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)) \underset{(54.45)}{=} (f,\ \lambda_1 F\varphi_1 + \lambda_2 F\varphi_2) \underset{(55.1)}{=}$$
$$\underset{(55.1)}{=} \lambda_1(f,\ F\varphi_1) + \lambda_2(f,\ F\varphi_2) \underset{(55.38)}{=} \lambda_1(Ff,\ \varphi_1) + \lambda_2(Ff,\ \varphi_2).$$

Далее, Ff является непрерывным функционалом: если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в S, то

$$\lim_{n\to\infty}(Ff,\ \varphi_n) \underset{(55.38)}{=} \lim_{n\to\infty}(f,\ F\varphi_n) \underset{\substack{(55.33)\\(55.34)}}{=} (f,\ F\varphi) \underset{(55.38)}{=} (Ff,\ \varphi).$$

Таким образом, преобразование Фурье обобщенной функции из пространства S' является снова обобщенной функцией из этого пространства:

$$F(S') \subset S'. \tag{55.40}$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}(S') \subset S'. \tag{55.41}$$

Покажем теперь, что для любой функции $f \in S'$ имеют место равенства

$$F^{-1}(Ff) = F(F^{-1}f) = f. \tag{55.42}$$

В самом деле, например,

$$(F^{-1}(Ff),\,\varphi)\underset{(55.39)}{=}(Ff,\,F^{-1}\varphi)\underset{\substack{(55.28)\\(55.38)}}{=}(f,\,F(F^{-1}\varphi))\underset{(54.44)}{=}(f,\,\varphi),\quad \varphi\in S.$$

Из соотношений (55.42) сразу следует взаимно однозначность (инъективность) отображений F и F^{-1}. Например, если $f_1\in S'$, $f_2\in S'$ и $Ff_1=Ff_2$, то, применив к обеим частям этого равенства преобразование F^{-1}, в силу (55.42) получим $f_1=f_2$.

Из соотношений (55.42) следует также, что преобразование Фурье F отображает пространство S' не только в S', но и на S' (т. е. F — биекция). Действительно, если $\psi\in S'$, то для элемента $\varphi\overset{\mathrm{def}}{=}F^{-1}\psi$ будем иметь $F\varphi=F(F^{-1}\psi)\underset{(55.42)}{=}\psi$, т. е. в любой элемент ψ пространства S' при отображении F отображается некоторый элемент φ из S'.

Наконец, покажем, что отображение F непрерывно на S': если $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ в S' (см. (55.35)), то

$$\lim_{n\to\infty}(Ff_n,\,\varphi)\underset{(55.38)}{=}\lim_{n\to\infty}(f_n,\,F\varphi)\underset{\substack{(55.27)\\(55.35)}}{=}(f,\,F\varphi)\underset{(55.38)}{=}(Ff,\,\varphi),\quad \varphi\in S,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}Ff_n=Ff$ в S', а это и означает непрерывность преобразования Фурье на S'. $\lhd$

Аналогично теореме 3 доказывается, что и обратное преобразование Фурье также отображает линейно, непрерывно и взаимно однозначно пространство обобщенных функций S' на себя.

КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Математический анализ в широком смысле этого слова состоит из дифференциального и интегрального исчислений функций действительной и комплексной переменной, теории рядов, теории дифференциальных (обыкновенных и с частными производными) и интегральных уравнений, а также вариационного исчисления. Основой математического анализа являются дифференциальное и интегральное исчисления, в которых изучаются числовые функции с помощью понятий производной и интеграла. Эти понятия вводятся при помощи предельного перехода, который предполагает представление о бесконечности.

Отдельные идеи и методы, получившие в дальнейшем свое развитие в математическом анализе, зародились еще в античной математике. Это относится, прежде всего, к понятию бесконечности и близкому к нему представлению о непрерывном и дискретном изменении величин.

В середине V века до Р. Х. древнегреческий философ и математик Анаксагор сознавал возможность бесконечного убывания и бесконечного возрастания непрерывных величин. Он говорил: “В малом не существует наименьшего, но всегда есть меньшее, так и для большого постоянно имеется большее”.

Естественно при использовании понятия бесконечности древние математики наталкивались на серьезные логические трудности. Хорошо известен, например, парадокс Зенона (около 490–430 до Р.Х.), состоящий в том, чти Архимед никогда не сможет догнать черепаху, так как когда Архиллес пробежит половину пути, отделяющего его от черепахи, та удалится от него за это время на некоторое расстояние. Когда он пробежит половину этого расстояния, черепаха снова удалится от него, и так далее до бесконечности. Получившееся кажущееся противоречие в этом рассуждении связано с тем, что в то время еще не было осознано понятие бесконечной суммы: не было понято, что такая сумма может иметь конечное значение. Этот парадокс можно рассматривать как одну из первых попыток изучения бесконечных сумм. Подобная ситуация, когда возникающие математические понятия и математические модели казались современникам противоречивыми, а затем в результате более глубокого их изучения и четкого анализа после правильного их понимания оказывались лишенными каких-либо противоречий, типична для всего развития математики.

Одна из попыток преодоления трудностей, связанных с понятием бесконечности, была предпринята школой древнегреческого философа Демокрита (около 460–370 лет до Р.Х.), в которой была создана атомистическая теория. Согласно этой теории тела рассматривались состоящими из огромного, но конечного числа мельчайших частей, “неделимых атомов”. Для нахождения площадей и объемов применялась интеграционная идея: их вычисление проводилось путем суммирования площадей (соответственно объемов) геометрических атомов. Этот метод и то, что получилось в результате его развития, стало называться *методом неделимых*.

В качестве примера применения метода неделимых рассмотрим вывод с его помощью формулы для площади круга. Пусть задан круг радиуса r и, следовательно, ограниченный окружностью длины $C = 2\pi r$. Круг рассматривается как объединение “очень большого числа” треугольников с общей вершиной в центре O круга и бесконечно малыми основаниями, лежащими на окружности.

Длины оснований этих треугольников обозначают ΔC, и их сумма считается равной длине окружности: $\sum \Delta C = C = 2\pi r$. Высота треугольников принимается равной радиусу r. Сумма площадей треугольников полагается равной площади S круга:

$$S = \sum \frac{1}{2}\, r\, \Delta C = \frac{r}{2} \sum \Delta C = \frac{r\,C}{2} = \pi r^2.$$

Логическая несостоятельность этого метода вывода формулы для площади круга состоит, очевидно, в том, что на самом деле круг не является объединением треугольников в обычном смысле этого слова, а лишь для таких треугольников справедлива использованная в приведенном рассуждении формула для их площади.

То, что подобные доказательства не выдерживают требований логики, было, конечно, ясно и математикам античного периода. Чтобы избежать трудностей, возникающих при использовании понятий, так или иначе связанных с понятием бесконечности, математики Древней Греции отказались от их использования: во всех известных трудах периода расцвета древнегреческой математики не были введены ни термины для переменных, ни для бесконечно малых величин. В этом смысле античную математику можно назвать математикой конечных величин, ограниченных фигур и тел. Хотя надо отметить, что на интуитивном уровне понятия очень малых и бесконечно малых величин продолжали использоваться, уж во всяком случае с эвристическими целями. Методы решения задач, основанные на использовании бесконечно малых величин, получили в последствии название *инфинитезимальных методов.*

В IV веке до Р.Х. греческим математиком Евдоксом (около 408–355 лет до Р.Х.) была построена теория отношении величин. Она была изложена в “Началах” Евклида (около 365–300 лет до Р.Х.), и ее можно рассматривать как первую теорию действительных чисел. На основании этой теории был разработан метод доказательства формул для площадей плоских фигур и объемов тел, получивший название *метода исчерпывания.* Он основан на аппроксимации фигур и тел, у которых ищутся площади и объемы, ступенчатыми фигурами и телами, составленными из простейших фигур или тел (прямоугольников, параллелепипедов, цилиндров и т. п.).

Суть метода исчерпывания состоит в следующем. Для искомой величины A строятся две такие последовательности чисел x_n и y_n (равные, например, известным площадям фигур или соответственно тел, вписанных и описанных около данных фигур или тел), что $x_n < A < y_n$, и разность $y_n - x_n$, а поэтому и разности $A - x_n$, $y_n - A$ будут сколь угодно малыми при достаточно больших номерах $n = 1, 2, \ldots$ Затем каким-либо образом, например, с помощью инфинитезимального метода, находится предполагаемое значение B искомой величины, которое также при любых номерах n находится между числами x_n и y_n, $x_n < B < y_n$. В заключение методом от противного доказывается, что $A = B$.

Это делается следующим образом. В случае $A < B$, т. е. когда $B - A > 0$, при достаточно больших номерах n выполняется неравенство $y_n - A < B - A$ и, следовательно, неравенство $y_n < B$, а в случае $A > B$, т. е. когда $A - B > 0$, при достаточно больших номерах n имеет место неравенство $A - x_n < A - B$, а поэтому и неравенство $x_n > B$. Неравенства $y_n < B$ и $x_n > B$ противоречат выбору чисел x_n и y_n. Это означает, что $A = B$.

Метод исчерпывания можно рассматривать как первое приближение к понятию предельного перехода, а вычисление площадей и объемов (соответственно фигур и тел) при помощи вписанных в них и описанных около них фигур и тел с современной точки зрения представляет собой зарождение идеи применения нижних и верхних интегральных сумм для вычисления площадей и объемов.

В античной математике зародились и первые идеи дифференциального исчисления. Еще Архимед (287–212 гг. до Р.Х.) при построении касательной и спирали, названной впоследствии его именем, использовал, как теперь его называют, *бесконечно малый характеристический треугольник* в полярных координатах, сторонами которого являются бесконечно малые приращения координат точки на спирали и соответствующее бесконечно малое приращение длины дуги.

Возвращаясь к бесконечным суммам, следует заметить, что тот же Архимед рассматривал бесконечные суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и находил их значения. Архимеду же принадлежат лучшие результаты того периода по нахождению площадей плоских фигур и объемов пространственных тел, причем он применял не только метод исчерпывания, но и разработал ряд новых методов.

Описание движения планет солнечной системы древнегреческим астрономом Птолемеем (около 100–178 гг. до Р.Х.) с помощью эпициклов высших порядков можно рассматривать как первую попытку разложить периодическое движение (периодическую функцию) на простые гармоники (частичные суммы ряда Фурье). Фактически он уже использовал понятие тригонометрических функций как отрезков в круге, и им была составлена первая таблица синусов, вычисленная через $30'$.

После гибели античной культуры достижения древних математиков были забыты на много веков. В средние века преобладала элементарная математика. Однако уже в XIV веке наметилось некоторое оживление в развитии математики: в работах отдельных ученых появились новые идеи, развитие которых привело в XVII веке к открытию и началу осмысления основных понятий математического анализа: функция, предел, непрерывность, производная, интеграл. Понятие производной возникло в задачах на построение касательных к кривым, на отыскание минимальных и максимальных значений переменных величин и на нахождение мгновенной скорости движения, а понятие интеграла — в задачах на вычисление площадей плоских фигур и поверхностей, объемов тел, на нахождение пути, пройденного телом, по его мгновенным скоростям, на вычисление масс тел и их моментов инерции. Осмысление понятия переменной величины привело к понятию функции.

В мрачные времена XIV века, когда в Европе пылали костры инквизиции, когда началась Столетняя война между Францией и Англией и рыцари сражались в битвах при Креси и Пуатье, когда Россия еще находилась под гнетом татаро-могольского ига и только-что родился князь Дмитрии Донской, французский монах Н. Оресм (1323(?)–1382) в своей тихой келье размышлял о бесконечных суммах. Он построил геометрический пример, показывающий, что сумма бесконечного числа слагаемых может быть конечной $\Big($в современной аналитической записи он получил равенство $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1\Big)$. Кроме того, он в современной терминологии доказал расходимость гармонического ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а следовательно, показал, что стремление к нулю членов ряда не обеспечивает его сходимости. Он изучал не только суммы членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий (встречавшиеся, как это было отмечено выше, еще у античных математиков), но и более сложные сходящиеся бесконечные ряды. Тем самым были сделаны первые принципиальные шаги по изучению бесконечных сумм — числовых рядов.

Н. Оресм вплотную подошел к понятию переменной величины, которую он характеризовал кинематически. У него появилось понятие мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Им, в частности, было установленно, что путь, пройденный телом при равноускоренном движении, равен пути, пройденному телом при равномерном движении со скоростью, равной среднеарифметическому значению начальной и конечной мгновенных скоростей.

Шотландский математик Дж. Непер (1550–1617) открыл новую функциональную зависимость — логарифмическую — и составил первые логарифмические таблицы тригонометрических функций. Он жил в жестокий век в нищей стране, опустошаемой релгиозными войнами и междоусобицами феодалов. Непера окружали невежественные и суеверные подданные, считавшие его слугой дьявола.

В эпоху Возрождения искусство, литература и наука стали бурно развиваться, пробудился интерес к античной культуре, многие достижения которой в дальнейшем были безвозвратно утерены и забыты. Далеко не сразу были найдены и сохранившиеся научные сочинения древних ученых, так что, в частности, математикам не редко приходилось заново переоткрывать то, что уже было известно в древние времена.

Поскольку Италия была центром Возрождения, то неудивительно, что именно в трудах итальянских математиков этой эпохи (Р. Бомбелли (1530–1572), Г. Галилея (1564–1642), Б. Кавальери (1598–1647), Э. Торичелли (1608–1647) и др.) был достигнут значительный прогресс в развитии математики. Но, конечно, в это время работало много выдающихся математиков не только в Италии; достаточно назвать немецкого астронома и математика И. Кеплера (1571–1830), французских математиков Р. Декарта (1596–1650), П. Ферма (1601–1665), Ж. Роберваля (1602–1675), Б. Паскаля (1623–1662), английских — Дж. Валлиса (1616–1703), И. Барроу (1630–1677) и голландского ученого Х. Гюйгенса (1629–1695).

В XVI веке у итальянских математиков при решении алгебраических уравнений появились комплексные числа. В “Алгебре” Бомбелли в 1579 г. было дано описание правил действий с ними (но только в 1799 г. немецкий математик К. Гаусс (1777–1855) дал их геометрическую интерпретацию на плоскости).

У Галилея при изучении закона падения тел в пустоте более отчетливо, чем у Оресма. проявляются инфинитезимальные рассуждения, однако задуманное им сочинение о неделимых так и не было написано.

И. Кеплер широко использовал в своих исследованиях инфинитезимальный метод, не утруждая себя его логической правомерностью.

Он рассматривал круг как объединение бесконечного множества треугольников с общей вершиной в центре круга и бесконечно малыми основаниями, шар — как объединение бесконечного множества пирамид с общей вершиной в центре шара. Он вообще представлял себе тела как объединение бесконечного множества "туник" — неделимых поверхностей. Используя такой подход, он в своем сочинении "Стереометрия винных бочек" вычислил объемы тел вращения, получающихся при вращении кривых второго порядка вокруг прямой, лежащей с ними в одной плоскости. Важно заметить, что таким же образом Кеплер вывел свой второй закон движения планет вокруг Солнца: время прохождения планетой участка ее орбиты пропорционально площади эллиптического сектора, образованного радиусами с началом в фокусе эллипса, в котором находится Солнце, и концами в начальной и конечной точках пути, пройденного планетой.

Существенную роль для развитии математики сыграла предложенная французским математиком Ф. Виетом (1540–1603) символика, в которой употреблялись заглавные буквы латинского алфавита для обозначения входящих в уравнение параметров.

Р. Декарт упростил эту символику и придал ей практически современный вид. Все это позволило заменить словесные рассуждения преобразованием формул, что существенно упростило изложение математических текстов.

С именем Декарта связано также создание аналитической геометрии: он открыл и разработал аналитический метод координат изучения геометрических объектов. Кроме того, Декарт ввел в математику одно из основных понятий — понятие переменной величины, изучал уравнения алгебраических кривых, главным образом второго порядка.

Одновременно с Декартом и независимо от него к построению аналитической геометрии пришел П. Ферма. Однако его рукопись осталась мало известной и поэтому не оказала существенного влияния на дальнейшее развитие математики.

Интересно отметить, что Декарт на интуитивном уровне представлял себе касательную как секущую, проходящую через две бесконечно близкие точки кривой. Однако он считал, что в точках перегиба кривой касательной нет. Это является хорошим примером того, что отсутствие четкого математического определения может привести к неверным выводам. Ферма же понимал, что касательная (у гладких кривых) существует и в точках перегиба. Более того, он указал способ нахождения точек перегиба как точек, в которых угол, образованный касательной с осью абсцисс, достигает экстремума.

Вскоре после выхода в свет сочинения Р. Декарта "Геометрия", в котором был изложен координатный метод, Ферма послал ее автору свое небольшое сочинение "Метод отыскания максимумов и минимумов". В нем был впервые изложен аналитический метод нахождения экстремумов функций (раньше задачи на экстремум решалась геометрическим путем). Ферма фактически владел понятием производной для алгебраических многочленов и степенной функции с дробным показателем. После соответствующей доработки метод Ферма нахождения экстремумов вошел в дифференциальное исчисление. Поэтому вполне справедливо, что необходимое условие экстремума для дифференцируемой функции — равенство нулю ее производной — носит имя Ферма.

П. Ферма рассматривал также случаи, когда функции задавались неявно алгебраическими уравнениями (т. е. равенством нулю алгебраического многочлена от двух переменных), а также некоторые случаи иррациональных функций с помощью преобразования их в рациональные.

Существенное развитие метода неделимых после Кеплера было осуществлено Б. Кавальери. Свои исследования он изложил в сочинении “Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного”. Он рассматривал линию как результат движения точки, плоскость — как результат движения линии, пространство — как результат движения плоскости. Первоначально, чтобы получить площадь фигуры, он складывал длины ее параллельных сечений, но когда Э. Торичелли указал ему, что таким образом можно доказать, что любой треугольник делится высотой на два равновеликих по площади треугольника, Кавальери заменил отрезки сечений “нитями”, т. е. фигурами весьма малой ширины, и сформулировал свое кредо следующим образом: “Независимо от того, состоит непрерывное из неделимых или не состоит, совокупности неделимых сравнимы между собой и величины их стоят в определенном отношении друг к другу”. С помощью своих методов Кавальери доказал, что если площади плоских сечений на одинаковом уровне двух тел одинаковой высоты равны, то равны и объемы тел. Это утверждение стало называться *принципом Кавальери*.

Дальнейшее развитие метод неделимых получил в работах Э. Торичелли, Ж. Роберваля и Дж. Валлиса. Торичелли, например, вычислил объем неограниченного тела вращения, образованного вращением гиперболы (неограниченные плоские фигуры конечной площади встречались еще у Оресма), Роберваль нашел, в частности, величину площади одной арки циклоиды, т. е. кривой, описываемой точкой окружности, катящейся по прямой, а Валлис арифметизировал метод неделимых, благодаря чему ему удалось вычислить площади фигур, описываемые с помощью графиков некоторых иррациональных функций как с положительными, так и отрицательными рациональными показателями.

Существенное продвижение в изучении свойств циклоиды принадлежит Гюйгенсу. Он доказал, что материальная точка, свободно скользящая по дуге циклоиды, обращенной выпуклостью вниз и имеющей вертикальную ось симметрии, имеет постоянный период колебания. Гюйгенс показал также, что нормали к циклоиде касаются другой циклоиды, конгруентной первой, и получающейся из нее параллельным переносом. Поэтому нерастяжимая гибкая нить, намотанная на вторую циклоиду и закрепленная в конце ее дуги, при разматывании в натянутом состоянии описывает первую циклоиду. На этом свойстве циклоиды основано устройство циклоидального маятника.

Таким образом, Гюйгенс пришел к понятию развертывающих кривых (они впоследствии стали называться *эвольвентами*), которые получаются путем развертывания данных кривых (их назвали *эволютами*), к понятиям центра и радиуса кривизны кривой и построил довольно общую их теорию. Он показал, что центр кривизны, рассматриваемый как точка пересечения бесконечно близких нормалей, лежит на эволюте, и, таким образом, эволюта является геометрическим местом центров кривизны.

В XVII веке для вычисления площадей и объемов наряду с методом неделимых свое дальнейшее развитие получил и перспективный метод, который с современной точки зрения естественно назвать *методом интегральных сумм*. Его сущность состоит в аппроксимации фигур и тел, у которых ищется их площадь или обьем, более простыми фигурами (соответственно телами). Более простыми в том смысле, что величина их площади или объема уже известна. Истоки этого метода, как мы видели, восходят еще к античному периоду развития математики. Однако в рассматриваемый период в развитии и совершенствовании этого метода был достигнут существенный прогресс.

Развитие метода интегральных сумм связано прежде всего с именами Ферма и Паскаля. Так, Ферма для нахождения площадей фигур, ограниченных частями парабол $y = x^{p/q}$ или гипербол $y = x^{-p/q}$, $p, q \in \boldsymbol{N}$, и прямолинейными отрезками, аппроксимировал эти фигуры ступенчатыми фигурами, составленными из бесконечного числа прямоугольников, вертикальными сторонами которых являются ординаты кривых в точках, абсциссы которых образуют геометрическую прогрессию. Подобными приемами Ферма удалось вычислить площадь между кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, называемой *версьерой*, и ее асимптотой, а также площадь декартова листа, описываемого уравнением $x^3 + y^3 - xy = 0$.

Б. Паскаль известен в математике благодаря своим блестящим работам по геометрии, алгебре, теории чисел и теории вероятностей. Он впервые точно сформулировал и применил для доказательств теорем метод математической индукции. Его вклад в создание математического анализа состоял в разработке итегральних методов в геометрической форме, которые он применял для вычисления объемов тел, площадей плоских фигур и поверхностей. Он понимал правомерность замены в рассматриваемых вопросах бесконечно малых величин им эквивалентными (в современной терминологии). Паскаль систематически применял в своих исследованиях бесконечно малый характеристический треугольник, образованный дифференциалами абсциссы, ординаты точки кривой и дифференциалом длины ее дуги. С помощью развитых им методов Паскаль вычислил величины площадей криволинейных трапеций для синусов, косинусов и их степеней.

Конечно, наряду с упомянутыми учеными большую роль в создании базы, на основе которой стало возможно открытие и бурное развитие дифференциального и интегрального исчислений, сыграли многие другие математики, имена которых даже перечислить здесь не представляется возможным.

Методы решения задач на проведение касательных, с одной стороны, и методы вычисления площадей фигур и объемов тел — с другой, первоначально развивались независимо друг от друга. Общим для них было лишь использование в обоих случаях инфинитезимальных идей. Поворотным моментом для создания дифференциального и интегрального исчислений явилось осознание того, что как те, так и другие задачи тесно связаны между собой, более того, они в определенном смысле являются обратными друг к другу.

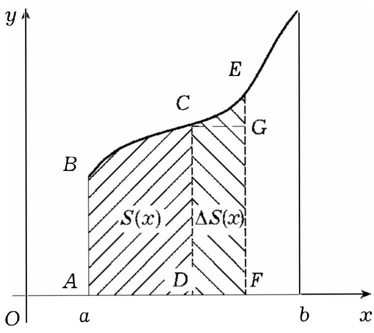

Рис. 207

Суть этой связи состоит в следующем. Во-первых, задача построения касательной к кривой, являющейся графиком функции, равносильна нахождению производной этой функции, так как значение производной равно тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс. Во-вторых, если на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $f(x)$ и если $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 207), ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси абсцисс и двумя отрезками, параллельными оси ординат, $a \leqslant x \leqslant b$, то задача нахождения площади $S(x)$ равносильна вычислению интеграла

$$\int_a^x f(t)\,dt = S(x).$$

Приращение $\Delta S(x)$ площади $S(x)$, соответствующее приращению Δx аргумента x, $a \leqslant x + \Delta x \leqslant b$, т. е.

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$$

равно площади криволинейной трапеции $DCEF$. Эта площадь с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx, равна площади $f(x)\Delta x$ прямоугольника $DCGF$, поэтому

$$\frac{dS(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

т. е. операция дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$ и операция интегрирования $\int\limits_a^x$ взаимно обратны.

В тот период, когда еще четко не оформились понятия производной и интеграла, связь между операциями дифференцирования и интегрирования формулировалась в виде, далеком от современного (Э. Торичелли, Дж. Грегори (1638–1675), И. Барроу). Наиболее полно эта связь описана в сочинениях английского богослова и математика И. Барроу, в которых он приводит как кинематическое, так и геометрическое ее обоснование.

Введение основных понятий дифференциального и интегрального исчислений — производной и интеграла, открытие основных связывающих их закономерностей и создание на основе этого нового метода математических исследований принадлежат английскому механику, физику, математику и теологу И. Ньютону (1643–1727) и немецкому философу, физику, математику, историку, дипломату Г. Лейбницу (1646–1716). Полное понимание связи дифференцирования и интегрирования стало прозрачно ясным лишь после того, как Ньютон и Лейбниц дали аналитические определения производной и интеграла. Именно Ньютон и Лейбниц разработали новый метод решения задач, основанный на понятиях производной и интеграла, осознали его принципиальную важность и решили с его помощью много как чисто математических, так и прикладных задач, прежде всего задач механики. Поэтому они по праву считаются создателями дифференциального и интегрального исчислений, или, как говорят, *анализа бесконечно малых.*

Свои открытия Ньютон и Лейбниц сделали независимо друг от друга и почти одновременно. Оба они создали законченные теории и разработали алгоритмы для ее применения. Однако подходы к ним у них были разными.

Для Ньютона основными понятиями являлись понятие исходной непрерывной переменной величины “флюенты”, представляющей собой абстракцию от различных видов механического движения, и ее “флюксии” — скорости ее изменения (производной — в нашей терминологии). Общим аргументом флюент у Ньютона являлось время — некоторая отвлеченная равномерно текущая переменная. Он рассматривал прямую задачу отыскания флюксий по заданным соотношениям между флюентами (т. е. задачу дифференцирования сложных функций) и обратную задачу отыскания флюент по заданным соотношениям между флюксиями (т. е. задачу интегрирования дифференциальных уравнений). Таким образом, задача отыскания флюенты (первообразной) по заданной флюксии (производной) являлась частным случаем интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Большую роль в этих исследованиях Ньютона играли не только механические, но также геометрические и аналитические методы. Ему принадлежат и глубокие исследования по теории бесконечных рядов, алгебре и теории интерполяции функций. Для него основным методом решения дифференциальных уравнений был метод разложения функций в степенные и дробно-степенные ряды, потому что под флюентой он фактически понимал переменную величину, представимую степенным или дробно-степенным рядом. Он не ставил вопроса о сходимости получающихся у него рядов (тогда еще не было четко сформулированного понятия предела, хотя сам термин уже употреблялся), но все ряды, которые он рассматривал, были сходящимися. Он открыл ряды, получившие впоследствии имя его ученика Б. Тейлора (1685–1731), и нашел разложения в степенные ряды всех основных элементарных функций. Не случайно одно из его сочинений носит название “Метод флюксий и бесконечных рядов”. Развитое Ньютоном новое исчисление он с большим успехом применил к решению многих математических и физических задач, не поддававшихся решению известными ранее методами.

Научная деятельность Ньютона была очень разнообразной. Он занимался оптикой, создал первый в мире зеркальный телескоп — рефлектор, развил новую теорию света и цветов, создал единую и стройную систему земной и небесной механики на основе открытого им закона всемирного тяготения и трех законов механики, носящих ныне его имя. Много занимался Ньютон алхимией и теологией. Не все было гладко в его жизни. Ему приходилось отстаивать приоритет ряда своих научных открытий. Например, Р. Гук (1635–1703) выступил с притензиями на приоритет в теории света, изложенной Ньютоном на заседании Лондонского королевского общества, и в открытии закона всемирного тяготения. Отношения между ними обострились до такой степени, что, став в 1703 г. президентом Лондонского королевского общества, Ньютон после смерти Гука приказал уничтожить все его портреты. Это было выполнено столь добросовестно, что до нас не дошло ни одного подлинного портрета Гука. Свой метод флюксий и флюент Ньютон опубликовал не сразу после его создания, а лишь в 1686 г. в сочинении “Математические начала натуральной философии”. Лейбниц же опубликовал свое исчисление бесконечно малых на два года раньше, что дало повод ему и его ученикам претендовать на приоритет в создании дифференциального и интегрального исчислений. Спор о приоритете между Ньютоном и Лейбницем длился многие годы и принимал иногда весьма резкий характер.

У Лейбница в основе построенной им теории лежат бесконечно малые. Он определил интеграл как бесконечную сумму соответствующих бесконечно малых, а дифференциал — как бесконечно малое приращение переменной величины. У Лейбница анализ бесконечно малых, в отличие от Ньютона, излагается как формальное алгебраическое учение. Ему принадлежат современные обозначения интеграла и дифференциала. Он установил, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны, нашел правило вычисления дифференциалов и интегралов, в частности, доказал формулу для многократного дифференцирования произведения функций, получил необходимые и достаточные условия локального экстремума функции, указал способ нахождения точек перегиба с помощью производных, положил начало интегрированию рациональных дробей, нашел методы интегрирования ряда дифференциальных уравнении. Он так же, как и Ньютон, придавал большое значение разложению рассматриваемых функций в степенные ряды при решении дифференциальных уравнений. Лейбниц изобрел счетную машину и разрабатывал методы графического интегрирования. Развитую им теорию Лейбниц применял к решению различных физических и математических задач.

Деятельность Лейбница была необычайно многогранна. В физике он ввел в качестве меры движения живую силу (кинетическую энергию), доказал закон сохранения живых сил, сформулировал принцип наименьшего действия, получившего впоследствии название *принципа Мопертюи* (П. Мопертюи, 1698–1759) и получил много других важных результатов. Большое значение имеют труды Лейбница для развития логики и философии. Он неоднократно встречался с русские царем Петром I и, по его просьбе, разработал ряд проектов по развитию образования и государственного устройства в России.

Ньютон и Лейбниц пришли к созданию дифференциального и интегрального исчислений разными путями: у Ньютона в основе лежали кинематические соображения, а у Лейбница — алгебраические и геометрические. В результате же получились равносильные исчисления.

Наглядно разница в построении их исчислений хорошо видна на примере формулы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{$*$}$$

где

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

носящей по праву название *формула Ньютона–Лейбница.* С точки зрения теории Ньютона эта формула является просто определением интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (он исходил из того, что интеграл равен пути, пройденному телом при заданной его скорости), а то, что этот интеграл представляет собой предел интегральных сумм, требует доказательства. С точки же зрения теории Лейбница этот интеграл уже по определению является указанным пределом, а нуждается в доказательстве сама формула $(*)$.

После открытий Ньютона и Лейбница началось бурное развитие дифференциального и интегрального исчислений и их приложений. В XVIII веке оно связано прежде всего с именами швейцарских математиков Л. Эйлера (1707–1783) и представителей трех поколений семейства Бернулли [братьев Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748), их племянника Николая (1687–1759), сыновей Иоганна Николая (1695–1726) и Даниила (1700–1782), внуков Иоганна Иоганна младшего (1744–1807) и Якоба младшего (1759–1789)], французских математиков Ж. Даламбера (1717–1783), А. Клеро (1713–1765), Ж. Лагранжа (1736–1813), П. Лапласа (1749–1817), английского математика Б. Тейлора и шотландского математика К. Маклорена (1698–1746).

Братья Якоб и Иоганн Бернулли успешно применили методы дифференциального и интегрального исчислений к решению многих проблем геометрии, механики и физики. Вместе с Эйлером, Лейбницем и Лагранжем они заложили основы вариационного исчисления. Лагранжем, в частности, в 1797 г. был предложен метод множителей для решения задач на относительный экстремум функции и функционалов. Ныне этот метод носит его имя. Якоб и Даниил Бернулли получили основополагающие результаты по теории вероятностей. Иоганн, Даниил и Иоганн младший были иностранными почетными членами, а племянник Якоба и Иоганна Николай и Якоб младший Бернулли — действительными членами Санкт-Петербургской Академии наук.

Эйлер оставил огромное научное наследство. Он значительно расширил рамки математического анализа, рассматривая функции комплексного аргумента, выяснил некоторые основные свойства этих функций, вывел так называемое теперь уравнение Эйлера–Даламбера (его называют также уравнением Коши–Римана), являющееся критерием аналитичности функции комплексного переменного, исследовал свойства основных элементарных функций в комплексной области, в частности, вывел формулы, связывающие тригонометрические функции (он ввел для них обозначения, которые употребляются в настоящее время) с показательной (формулы Эйлера), он получил необходимое условие для экстремума функционалов интегрального вида (уравнение Эйлера), создал как самостоятельную дисциплину теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и заложил основы теории уравнений с частными производными. Большой вклад внес Эйлер и в теорию рядов. Он ввел в математику новые важные типы рядов (например, тригонометрические ряды), в том числе и расходящихся, нашел суммы большого числа конкретных рядов, получил разложения элементарных функций в комплексной области в ряды и бесконечные произведения.

Расходящиеся ряды встречались в работах математиков и раньше. Например, еще в 1703 г. монах Ганди, расставляя по-разному скобки в расходящемся ряде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, получал его сумму равной то нулю, то единице. Он видел в этом подтверждение возможности создание Богом мира из ничего.

Эйлер считал целесообразным использование в математике расходящихся рядов и предложил метод их обобщенного суммирования. Эйлер является и основоположником теории специальных функций. Им создана теория гамма- и бета-функций, исследованы свойства эллиптических интегралов, гиперболических и цилиндрических функций, дзета-функции, некоторых тэта-функций, интегрального логарифма и важных классов специальных многочленов. Он положил начало всем главным направлениям теории чисел. Огромны заслуги Эйлера и в других разделах математики и ее приложений.

Он был академиком Санкт-Петербургской Академии наук и работал в России в 1727–1741 гг. и с 1766 г. до своей смерти (в тревожное время регенства в России императрицы Анны Леопольдовны Эйлер уехал в Берлин, где проработал в Академии наук с 1741 г. до 1766 г.).

Наряду с большим успехом, который сопутствовал применению методов анализа бесконечно малых в XVIII веке к решению многих актуальных задач, иногда возникали ситуации, когда использование этих методов приводило к неверным результатам. Это было связано с тем, что существенным недостатком исчисления бесконечно малых в тот период являлось отсутствие четких определений, лежащих в основе этого исчисления, прежде всего в отсутствии четкого определения предела функции, что не позволяло установить четкую границу корректного применения метода бесконечно малых. В результате интуитивное понимание предела приводило иногда к неправомерному его применению, влекущему за собой неверные выводы, противоречащие здравому смыслу.

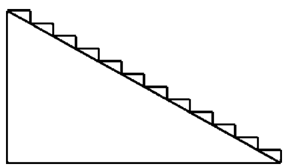

Рис. 208

Затруднения, возникающие при интуитивном использовании понятия предела в отсутствии его четкого определения, легко усмотреть на примере ломаной со звеньями, параллельными катетам, и вершинами, лежащими через одну на гипотенузе заданного прямоугольного треугольника (рис. 208). При неограниченном измельчении звеньев этой ломаной она неограниченно приближается к гипотенузе, и могло бы показаться, что ее длина должна стремиться к длине гипотенузы. Однако это не так: длина ломаных, очевидно, все вре мя остается равной сумме длин катетов, и поэтому предел их длин также равен сумме длин катетов, а поэтому он строго больше длины гипотенузы.

Предлагались разные теории для обоснований действий с бесконечно малыми, например, теория компенсации ошибок, которая, однако, сама требовала обоснования. Лишь в XIX веке методы математического анализа получили логическое обоснование на основе четкого определения предела функции. Это было проделано прежде всего в работах французского математика О. Коши (1789–1857), чешского Б. Больцано (1781–1848) и немецких Л. Дирихле (1805–1859), К. Вейерштрасса (1815–1897) и Б. Римана (1826–1866). После их работ математический анализ освободился от внутренних противоречий (во всяком случае, от замеченных в то время), он стал доступен значительно большему кругу исследователей и начал быстро развиваться.

Первое корректное определение предела последовательности было дано Больцано в 1817 г. и Коши в 1821 г. Коши получил критерий сходимости последовательности (который носит теперь его имя), основанный на принципе вложенных отрезков, который он считал очевидным. Коши и Больцано дали также определения предела функции, ввели понятие непрерывных функций и доказали ряд их основных свойств, в частности, теорему о промежуточных значениях. К сожалению, большая часть математических результатов Больцано не была опубликована при его жизни, а те результаты, которые были опубликованы, прошли незамеченными многими математиками того времени. По-настоящему его работы стали известны лишь в нашем веке. Например, первый пример непрерывной на всей числовой оси функции, не имеющей во всех точках конечной производной, впервые был указан Больцано в 1830 г., а опубликован он был лишь столетие спустя, в 1930 г. Поэтому более известным является подобный пример, построенный независимо Вейерштрассом в 1860 г. и опубликованный им в 1872 г.

Несмотря на четкое определение предела функции, данное Больцано и Коши, и после этого далеко не все обстояло благополучно с его применением. Например, не аккуратно применяя свое определение предела, Коши пришел к неверному утверждению, что сумма сходящегося ряда непрерывных функций является непрерывной функцией.

Весьма важное понятие равномерной сходимости последовательности функций появилось лишь в середине XIX века сначала в работе английского математика и физика Дж. Стокса (1819–1903) и немецкого математика Л. Зейделя (1821–1896), а затем и у Коши в 1853 г.

Даже понятие функции, воспринимавшейся как зависимая переменная величина, долго не имело строгого логического определения и интуитивно, как всякое изменение чего-то, связывалось с представлением о пространстве и времени.

Большую роль для выяснения того, что представляет собой понятие функции, сыграл спор по этому вопросу между Эйлером, Д'Аламбером и Даниилом Бернулли о природе решения дифференциального уравнения колебания струны. Эйлер считал, что функция — это произвольно начерченная кривая, Д'Аламбер — что аналитическое выражение, Д. Бернули же получил решение в виде тригонометрического ряда и высказал мысль о том, что любая периодическая функция (в то время под функциями интуитивно понималась непрерывная функция) раскладывается в тригонометрический ряд, правда, он еще не имел формул для коэффициентов этого ряда. Д'Аламбер сомневался в справедливости этого и использовал в своих работах только степенные ряды.

В 1805 г. французский математик Фурье (1768–1830) снова высказал утверждение Д. Бернулли о возможности разложения периодической функции в тригонометрический ряд и указал формулы для коэффициентов этого ряда, получившие его имя (эти формулы были известны еще Эйлеру). Несколько позже Фурье ввел представление функций с помощью интеграла, также получившего его имя. Лишь в 1829 г. французский математик Дирихле (1805–1859) впервые доказал сходимость ряда Фурье для кусочно монотонных непрерывных функций.

Теорему об ограниченности непрерывных на отрезке функций и достижимости ими экстремальных значений получил Вейерштрасс около 1860 г. Немецкий математик Гейне (1821–1881) в 1870 г. сформулировал понятие равномерной непрерывности функции и доказал равномерную непрерывность функции, непрерывной на отрезке.

Современная теория действительных чисел ведет свое начало от работ Гаусса, Больцано, Коши и окончательно оформилась в работах немецких математиков Дедекинда (1831–1916), Вейерштрасса и Кантора (1845–1918). Аксиомы действительных чисел были впервые сформулированы Дедекиндом в 1888 г. и итальянским математиком Пеано (1858–1932) в 1891 г.

Одним из источников современной алгебры явились работы Абеля (1802–1829) и Галуа (1811–1832) по теории алгебраических уравнений.

В 1823 г. Коши дал корректное определение определенного интеграла для непрерывных функций с помощью предела интегральных сумм. Подобные определения интегралов для более широких, чем непрерывные, классов функций дали Риман в 1853 г., а затем французские математики Дарбу (1842–1917) в 1879 г. и Жордан (1838–1922) в 1892 г. Новые идеи в понятие интеграла вложили нидерландский математик Стилтьес (1856–1894), французские математики Борель

(1871–1956), Лебег (1875–1941), Данжуа (1884–1974) и др.

Общее определение числовой функции как произвольного однозначного соответствия было по существу сформулировано еще Л. Эйлером. Эти определения, данные в терминах зависимых переменных величин, отделили общее понятие функции от все расширяющегося в связи с развитием математики понятия аналитического выражения. Правда, в дальнейшем для действительных функций действительного аргумента в определенном смысле точки зрения на функцию как на соответствие и как на аналитическое выражение оказались равносильными: в 1940 г. Д.Е. Меньшов (1892–1988) доказал, что всякую измеримую почти всюду конечную функцию можно представить сходящимся к ней почти всюду тригонометрическим рядом. Ранее существенные результаты по вопросу представимости функций тригонометрическими рядами получили Риман, Вейерштрасс, Лебег, Н.Н. Лузин (1883–1950), А.Н. Колмогоров (1903–1987) и др.

Первое корректное доказательство существования интеграла от непрерывной функции было дано Дарбу (ранее предложенное Коши доказательство было некорректным, так как в то время у Коши не было еще понятия равномерной непрерывности). Различные необходимые и достаточные условия интегрируемости разрывной функции были даны немецкими математиками Риманом и Дюбуа–Реймоном (1831–1889), а затем французским математиком Лебегом.

Многие конкретные несобственные интегралы были вычислены математиками еще в XVIII веке, но только Коши в 1821 г. дал строгое определение сходимости несобственных интегралов и указал общие методы их вычислений. Абсолютно сходящиеся интегралы ввел Дирихле в 1854 г., а равномерно сходящиеся — бельгийский математик Валле Пуссен (1866–1962) в 1892 г., понятие равномерной сходимости появилось в работах английского физика и математика Стокса (1819–1903) и немецкого математика Зейделя (1821–1896) в 1847–1848 гг., а затем у Коши в 1853 г.

Двойной интеграл впервые появился еще у Эйлера в 1770 г., он дал и способ его вычисления путем сведения к повторному. Лагранж рассматривал уже не только двойные, но и тройные интегралы. Правило замены переменного в двойных и тройных интегралах было получено М.В. Остроградским (1801–1861) в 1836 г., а для интеграла любой кратности — немецким математиком Якоби (1804–1851) в 1841 г. При замене переменных в кратном интеграле Якоби впервые ввел функциональные определители, получившие впоследствии его имя.

Формула Грина была получена Эйлером в 1771–1772 гг., а затем независимо английским математиком Грином (1793–1841) в 1828 г. Формула Гаусса–Остроградского была получена Гауссом в 1813 г. для одного частного случая, когда в тройном интеграле, входящем в эту формулу, подынтегральная функция равна 1, а в общем случае —

М.В. Остроградским в 1828–1834 гг. для функций любого числа переменных. Формулу Стокса впервые получил в 1849 г. английский физик и математик Томсон (1824–1907), а Стокс впервые включил ее в программу студенческих экзаменов. Многомерное обобщение формулы Стокса было получено в 1889 г. французским математиком Пуанкаре (1854–1912), а в современном виде — в 1899 г. французским математиком Картаном (1869–1951) в терминах созданной им теории внешних дифференциальных форм.

Современная теория аналитических функций комплексного переменного ведет свое начало от работ Коши, который начал систематически развивать эту теорию (ему принадлежат интегральные представления аналитических функций, теория вычетов и т. п.). Термин *аналитическая функция* был предложен Лагранжем.

В теории функций комплексного переменного большую роль играет теория эллиптических функций, разработанная Эйлером, Абелем, Вейерштрассом и французским математиком Эрмитом (1822–1901).

В теорию рядов фундаментальный вклад внесли работы Абеля, Фурье, Дирихле, Харди (1877–1947), Г. Вейля (1885–1955).

Много сделал Коши и в теории дифференциальных уравнений (основные теоремы существования решений, методы интегрирования уравнений, постановка так называемой задачи Коши и т. д.). Его исследования по дифференциальным уравнениям получили развитие в работах ученицы Вейерштрасса С.В. Ковалевской (1850–1891) (теорема Коши–Ковалевской).

Большой вклад в математический анализ внес Гаусс, особенно в изучение рядов и эллиптических функций.

Некорректное использование расходящихся рядов часто приводило к ошибочным результатам, что, естественно, подрывало доверие к ним. В результате работ Коши по обоснованию анализа на основе четкого понятия предела расходящиеся ряды были надолго "изгнаны" из математики. Только в конце XIX — начале XX веков в работах итальянского математика Чезаро (1859–1906), русского математика Г.Ф. Вороного (1868–1908), немецкого математика Теплица (1881–1940) и др. была создана логически строгая теория расходящихся рядов и было найдено много ее полезных применений в различных вопросах математического анализа. Первый пример ряда Фурье непрерывной функции, расходящегося в некоторых точках, был построен в 1876 г. Дюбуа-Реймоном.

Многие методы современного математического анализа ведут свое начало от трудов Пуанкаре. Он ввел понятие асимптотического ряда, разработал асимптотические и качественные методы в теории дифференциальных уравнений, построил теорию автоморфных функций.

Векторное исчисление появилось у ирландского математика и астронома Гамильтона (1805–1865), построившего теорию кватернионов. Абстрактное линейное пространство было введено в 1888 г. Пеано.

Пространства непрерывных функций изучались итальянскими учеными Вольтерра (1860–1940), Асколи (1840–1896), Арцела (1847–1912), Дини (1845–1918), английскими математиками Харди (1877–1947), Литлвудом (1885–1977) и многими другими. Вольтерра и шведский математик Фредгольм (1866–1927) построили теорию линейных интегральных уравнений. Немецкие математики Гильберт (1862–1943) и Шмидт (1876–1959) в 1902–1907 гг. разработали спектральную теорию интегральных уравнений, а общая спектральная теория дифференциальных операторов ведет свое начало от работ Г. Вейля. Аксиоматическая теория гильбертовых пространств была построена американским математиком Стоуном (р. 1903) и немецким математиком фон Нейманом (1903–1957) в конце 20-х годов нашего столетия. Абстрактное определение линейных нормированных пространств появилось в начале 20-х годов в работах польского математика Банаха (1892–1945), австрийского математика Хана (1879–1934) и американского математика Винера (1894–1964). Понятие метрического пространства было введено в 1906 г. французским математиком Фреше (1878–1973).

Большое влияние на развитие математического анализа оказала теория чисел, ведущая свое начало от работ Евклида, Диофанта (III век) и получившая свое развитие в трудах Ферма, Эйлера, Гаусса, Дирихле, Чебышева (1821–1894), Харди, Литлвуда, Адамара (1865–1963), Виноградова (1891–1983) и многих других. Большой вклад в развитие методов математического анализа внесли русские математики. В теорию функций — П.Л. Чебышев (1821–1894), А.А. Марков (1856–1922), С.Н. Бернштейн (1880–1968), Д.Ф. Егоров (1869–1931), А.Н. Колмогоров (1903–1987), Н.Н. Лузин (1883–1950) и др. (Н.Н. Лузин вместе со своим учителем Д.Ф. Егоровым создал московскую школу теории функций). В теорию дифференциальных уравнений — А.А. Ляпунов (1857–1918), создавший теорию устойчивости решений, И.Г. Петровский (1901–1973), М.А. Лаврентьев (1900–1980), М.В. Келдыш (1911–1978). Качественно новым шагом в развитии вариационного исчисления явилась построенная Л.С. Понтрягиным (1908–1988) теория оптимальных процессов.

Большим достижением математики XX века явилось создание теории обобщенных функций. Впервые они появились в работах С.Л. Соболева (1908–1989), а их систематическая теория была развита в работах французского математика Шварца (р. 1915).

Конечно, далеко не всех математиков, работы которых имели существенное значение для развития математического анализа, возможно даже просто упомянуть в таком кратком очерке.

Интересно посмотреть на развитие математического анализа с точки зрения философских категорий. Как и математика вообще, математической анализ является наукой, изучающей определенного рода логические структуры, у которых описаны определенные соотношения между их элементами. Эти структуры, называемые математическими, представляют собой объективную реальность как элементы информационного поля и интересны как сами по себе, так и в связи с их применением для создания математических моделей, описывающих реально протекающие в мире процессы: механические, физические, биологические, экономические, социальные и др. Математика является абстрактной наукой. В этом состоит ее сила, универсализм и общность, а вместе с тем и трудность ее применения к изучению прикладных задач. Математический язык является языком, на котором описываются реальные явления и закономерности, которым они подчиняются, а математические методы — плодотворными методами их изучения. Можно сказать, что математика изучает космические законы, а эти законы вечны. Поэтому математические утверждения являются абсолютными и вечными истинами, не зависящими от физического состояния мира и нашего его восприятия. Так, за последние две тысячи лет наши представления об окружающем нас мире и об управляющих им закономерностях претерпели существенные изменения, а, например, теорема Пифагора осталась и останется всегда такой же, какой она была в Древней Греции.

"Ни тридцать лет, ни тридцать столетий не оказывают никакого влияния на ясность или красоту геометрических истин, — писал английский математик и писатель Л. Кэрролл (1832–1898). — Такая теорема, как "квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов", столь же ослепительно прекрасна сегодня, как и в тот день, когда Пифагор впервые открыл ее, отпраздновав, по преданию, свое открытие закланием сотни быков".

Иногда в математических понятиях усматриваются противоречия, которых на самом деле в них нет. Чтобы в этом убедиться, надо исходить из точных определений и правильно разобраться в рассматриваемом понятии. Например, в определении числа $i = \sqrt{-1}$ при правильном понимании символа $\sqrt{-1}$ не существует никакого единства противоречий, о котором писали некоторые философы. Указанные противоречия, казалось бы, состоят в том, что, с одной стороны, число i — это квадратный корень, поэтому его квадрат равен подкоренному выражению, т. е. в данном случае отрицателен, а с другой стороны — квадрат всякого числа, не равного нулю, положителен. Это кажущееся противоречие получается в результате того, что к элементу i, не являющемуся действительным числом, было применено правило, установленное для действительных чисел, и не было никаких оснований предполагать, что оно должно быть верным при расширении множества действительных чисел до множества комплексных чисел. Отсутствие противоречия в равенстве $i^2 = -1$ делается особенно наглядным, если ввести комплексные числа z как пары (x, y) действительных чисел x и y (геометрически, как двумерный вектор), т. е. положить $z = (x, y)$, а операцию произведения комплексных чисел

$z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ определить равенством

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

При таком определении комплексных чисел числом i называется пара $(0,1)$. Ясно, что никакого единства противоречий в равенстве $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$ нет.

Да и по существу никакого противоречия не может быть в том, что некоторым свойством, присущим элементам данного множества (в рассматриваемом случае — множества действительных чисел), не обладают элементы, дополнительно присоединенные к исходному множеству (существенно комплексные числа).

Иногда в математических понятиях усматривается переход количества в качество, которого они на самом деле не содержат. В качестве примера перехода количества в качество часто указывается понятие определенного интеграла. Именно, если на некотором отрезке $[a,b]$ задана ограниченная действительная функция f, то при определении интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ по Риману отрезок дробится на все более и более мелкие отрезки. Для получающихся разбиений отрезка $[a,b]$ составляются интегральные суммы, все слагаемые которых в процессе указанного дробления делаются исчезающе малыми. Однако в силу того, что число слагаемых неограниченно увеличивается, соответствующие интегральные суммы могут неограниченно приближаться к некоторому числу. Если это имеет место, то указанное число называется *интегралом Римана* от заданной функции f по отрезку $[a,b]$ и говорится, что интеграл в результате количественных изменений бесконечно малых слагаемых интегральных сумм при указанном предельном переходе (играющем в данном случае роль диалектического процесса) является примером превращения сумм бесконечно малых в новое качество — интеграл.

Однако тот же интеграл можно определить и безо всякого предельного перехода, как, например, верхнюю грань совокупности всех значений нижних сумм Дарбу рассматриваемой функции f при всевозможных разбиениях отрезка $[a,b]$, а не только при “достаточно мелких”. Эта совокупность значений является вполне определенным фиксированным множеством на оси действительных чисел, однозначно определенным функцией f, и оно имеет вполне определенную точную грань. При таком определении интеграла отсутствует какой-либо “процесс”, и поэтому говорить о каком-либо переходе количества в качество не представляется возможным. Считать же, что при одном определении интеграла он является результатом перехода количества в качество при некотором диалектическом процессе, а при другом определении не является таковым, конечно, нельзя. Да и первое определение интеграла при помощи предела интегральных сумм не является по своей сущности диалектическим процессом, так как таковым не является предельный переход. Это особенно хорошо видно, если рассматривать функции как соответствия множеств, в которых ничего не меняется, а понятие предела сформулировать в терминах окрестностей. В этом случае в "предельном переходе" нет никакого "движения" — переход к пределу оказывается "стационарным явлением".

Вместе с тем, законы диалектики хорошо видны при анализе исторического развития математики, т. е. не в содержании самих математических понятий (они представляют собой объективную реальность, являющуюся, как это отмечалось выше, абсолютной и вечной истиной, а поэтому не изменяются), а в процессе их осознания и последовательного описания. Проиллюстрируем это на понятии функции, играющем весьма важную роль в математике.

Понятие функции стало выкристаллизовываться после того как Декарт ввел понятие переменной величины. Ньютон рассматривал переменные величины флюенты, зависящие от времени. Он всегда предполагал, что все они представляются сходящимися степенными рядами, т. е. фактически понимал под функцией некоторое аналитическое выражение. Термин *функция* был впервые введен Лейбницем для обозначения переменных величин, зависящих от других переменных. Первая попытка сформулировать четкое определение функции принадлежит Эйлеру: "Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, если x обозначает постоянное количество, то все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями..." Интересно заметить, что из пояснения, сделанного Эйлером: "Все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им ...", — следует, что он понимал, что функция — это просто соответствие между элементами числовых множеств.

Эта идея довольно четко отражена в определении понятия функции, сформулированном в учебнике Лакруа 1806 г.: "Для того чтобы выразить, что некоторое количество зависит от одного или нескольких других либо как некоторая операция, либо даже как связь, которую невозможно выразить алгебраически, но которая существует и определяется некоторыми условиями, говорят, что первое есть функция остальных". Кстати, этим учебником пользовался Н.И. Лобачевский при прохождении со студентами курса дифференциального и интегрального исчисления.

Большая часть математиков в XVIII–XIX веках связывала понятие функции с понятием переменной величины и, тем самым, с понятием времени и пространства, без которых немыслимо какое-либо изменение. Так, И. Бернулли формулировал определение функции следующим образом: "Функцией переменной величины ... называется количество, составленное каким угодно способом из переменной величины и постоянных". Как это уже было отмечено выше, в результате различия подходов к понятию функции Эйлера и Д'Аламбера при обсуждении решения волнового уравнения между ними возникла длительная полемика, так как Д'Аламбер считал, что решение уравнения должно задаваться аналитическим выражением. Полемика усложнилась, когда Д. Бернулли получил другую формулу, отличную от той, которая была у Д'Аламбера, для решения уравнения струны, а именно формулу в виде тригонометрического ряда.

Точка зрения на функцию как на объект, не обязательно задаваемый аналитическим выражением, а как на зависимость одной переменной величины от другой развивалась в работах Коши, Больцано, Фурье, Дирихле. В конце концов определение функции приняло следующий вид: переменная величина y является функцией переменной величины x, если при изменении переменной величины x переменная y меняется по определенному закону. Переменная y называется *зависимой*, а переменная x — *независимой*. На первый взгляд, в приведенном определении нет явных неясностей, однако при более тщательном анализе нетрудно увидеть, что это определение требует дополнительных разъяснений. Дело в том, что термин "переменная" в интуитивном смысле, как всякое изменение, связан с понятиями пространства и времени. На самом деле эти пространственные и временные представления не являются существенными в данном случае и, более того, лишними. Нуждаются в разъяснении и понятия "величина" и "закон", в чем на самом деле нет никакой необходимости.

Понятие функции можно описать, используя лишь понятия множества и соответствия. Определение функции как соответствия между элементами двух произвольных, не обязательно числовых множеств, было сформулировано в 1887 г. Дедекиндом. Пусть заданы два множества (произвольной природы) X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только одни элемент $y \in Y$, обозначенный $y = f(x)$, и если каждый элемент $y \in Y$ оказывается поставленным в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, то это соответствие называется *функцией* $y = f(x)$, определенной на множестве X и имеющей множество Y множеством своих значений.

В этом описании функции нет понятия переменных величин и, следовательно, нет никакого "движения": оно является описанием "стационарного явления" — определенного соответствия между элементами заданных множеств.

Таким образом, при изучении понятия функции был проделан длинный путь от зависимых переменных величин, от понятия движения и от аналитических выражений через отрицание движения к стационарному понятию соответствия между элементами множеств. Интересно отметить еще раз, что согласно вышеупомянутой теореме Д.Е. Меньшова для числовых функций весьма широкого класса точка зрения на функцию как на соответствие равносильна в определенном смысле заданию функции аналитическим выражением (тригонометрическим рядом, т. е. с помощью только основных тригонометрических функций и предельного перехода). Таким образом, в результате постепенного процесса познания понятия функции мы пришли к первоначальной точке зрения на функцию как на объект, задаваемый аналитическим выражением, но на более высокой ступени наших знаний, т. е. вкладывая в это понятие гораздо более глубокое и точное содержание, чем раньше.

При описании функции как определенного соответствия возникает, конечно, вопрос: что такое соответствие? Понятие соответствия можно свести к более простым понятиям элемента и множества. Однако следует заметить, что уже в самих этих понятиях неявно присутствует понятие соответствия: для того чтобы можно было установить, принадлежит некоторый элемент к данному множеству или нет, надо, чтобы каждому элементу рассматриваемого множества было поставлено в соответствие какое-то свойство, по которому можно было бы судить о принадлежности элемента к этому множеству. В этом смысле понятие соответствия является первичным понятием. Эту мысль хорошо выразил американский математик Чёрч: “В конечном итоге понятие функции или какое-либо сходное понятие, например, понятие класса, приходится считать первоначальным, или неопределимым”.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ