ESTUDANTE CARNEIRO

Cálculo Diferencial
e Integral I

Exercícios Resolvidos *sobre* Funções

Resumos de alguns temas
+ 100 Exercícios Resolvidos

ESCR
Editora digital

Material de Cálculo Diferencial e Integral I

Tema: Exercícios resolvidos sobre Funções

Autores: José Coio, Sara Bastos, Valdemiro Bento, Marco Aurélio e Raimundo N'gunza.

Edição e design: José Coio

Prefácio

Ficha de José Maria Samuco com exercícios resolvidos sobre **Funções** pelo ESCR com o intuito de ajudar os estudantes a terem uma visão geral de como resolver exercícios relacionados a funções, domínio, paridade, gráficos, imagem das funções entre outros conceitos sobre funções.

Conselho para o estudante: não decore os exercícios pratique, repita e entenda as formas de resolver os exercício. O mais prático é saberes milhares de métodos e formas de resolver um exercício do que decorar pensando que ele vem na prova.

A REPETIÇÃO É A MÃE DA CIÊNCIA

Em caso de dúvida entre em contacto com o ESCR estaremos dispostos a ajudar.

Estudante Carneiro- encontre o seu sucesso estudantil aqui

Clique nos ícones para acessar as nossas redes sociais:

Estudante carneiro

@estudante_carneiro

Recomendada para estudantes do ISPTEC.

Agradecimentos

Agradecemos ao professor Luís Alberto e ao Augusto Oril por terem ajudado na elaboração do mesmo verificando e certificando uma margem mínima de erros fazendo com que os nossos materiais sejam credíveis e ajudem mais e mais estudantes.

ESTUDANTE CARNEIRO

Estudante Carneiro- "Encontre o seu sucesso estudantil aqui"

Bases Matemáticas

Produtos Notáveis

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = a^2 + 2ab + b^2$

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = a^2 - 2ab + b^2$

$\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} = (a+b)^2 - 2ab$

$\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} = (a+b)(a-b)$

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}} = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}} + \boldsymbol{b}^{\mathbf{3}} = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}} - \boldsymbol{b}^{\mathbf{3}} = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\boldsymbol{a}^{\mathbf{4}} - \boldsymbol{b}^{\mathbf{4}} = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

Jogo de Sinais

$(+) \times (+) = +$

$(-) \times (+) = -$

$(-) \times (-) = +$

Simbologia Matemática

$\geq \longrightarrow$ maior ou igual a ...

$\leq \longrightarrow$ menor ou igual a...

$> \longrightarrow$ maior que...

$< \longrightarrow$ menor que...

$\Longrightarrow \ \longrightarrow$ implica que

$\infty \ \longrightarrow$ Infinito

$\forall \longrightarrow$ Para todo

$\mathbb{R} \longrightarrow$ Conjunto dos números reais

$\mathbb{Z} \longrightarrow$ Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{R}^* \longrightarrow$ Todos os reais excepto zero (0)

$\mathbb{R}_+ \longrightarrow$ Todos os reais a direita de zero

$\mathbb{R}_- \longrightarrow$ Todos os reais a esquerda de zero

S.S $\longrightarrow$ Sem solução para todo $\mathbb{R}$

$\nexists \longrightarrow$ Não existe

$\cup \longrightarrow$ União

$\in \longrightarrow$ Pertence

$\bullet \longrightarrow$ Fechado

$\circ \longrightarrow$ Aberto

Sobre Funções

Função Polinomial

As funções polinomiais são apresentadas na forma:

$f(x) = ax + b$ *(Polinómio de grau 1)*

$f(x) = ax^2 + bx + c$ *(Polinómio de grau 2)*

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ *(Polinómio de grau 3)*

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

(Polinómio de grau n)

O domínio de uma função polinomial é sempre $\mathbb{R}$, então:

$$\boldsymbol{D_{f(polinomial)}} = \mathbb{R}$$

Exemplos: determine o domínio.

$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$

$g(x) = x^{20} + 100x \Rightarrow \boldsymbol{D_g} = \mathbb{R}$

$h(x) = x^3 + x^2 + x \Rightarrow \boldsymbol{D_h} = \mathbb{R}$

Função Racional

As funções racionais (o termo racional indica raiz) são apresentadas na forma:

$f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^{10}}$...

Quando se fala de uma raiz, temos a raiz de índice par e a raiz de índice ímpar. Então o domínio apresenta uma notação diferente para cada uma delas:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{h(x)}}$$

- Se n for par: $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{h(x)} \geq \boldsymbol{0}\}$
- Se n for ímpar: $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} \Leftrightarrow$ h for função polinomial, caso não, o domínio nem sempre será R.

Exemplos: determine o domínio.

$f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow$ Índice par (n=2).

Condição: $\boldsymbol{x + 1 \geq 0} \rightarrow \boldsymbol{x \geq -1}$

Então: $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{-1}\}$ ou $[\boldsymbol{-1}; +\infty[$

Função Fraccionária

As funções fraccionárias são apresentadas na forma:

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

Alguns exemplos:

$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$, $g(x) = \frac{3x+1}{x+5}$, $h(x) = \frac{4}{x+20}$

O domínio de uma função fraccionária é:

$\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\}}$

Onde g(x) é o denominador. Perguntas frequentes são: porque que o denominador deve ser diferente de 0 (zero)?

Resposta: deve ser diferente de zero para que não seja igual a Infinito, sabe-se que: $\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{0}} = +\infty$ e $-\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{0}} = -\infty$.

O objetivo do domínio é achar os valores em todo $\mathbb{R}$ que façam a função existir e não existir ao mesmo tempo. Isso funciona porque acha-se uma expressão que diz quais são os valores que deve-se substituir para a função existir e automaticamente tem-se os valores que fazem a função não existir também em todo $\mathbb{R}$.

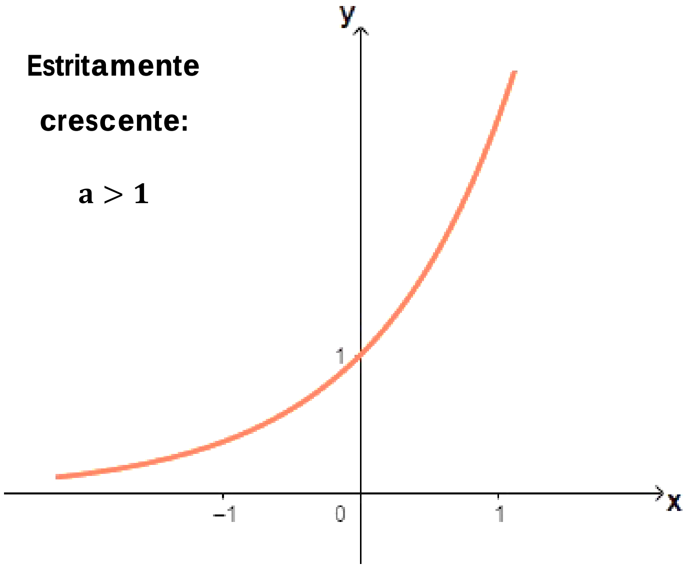
Exemplos: determine o domínio.

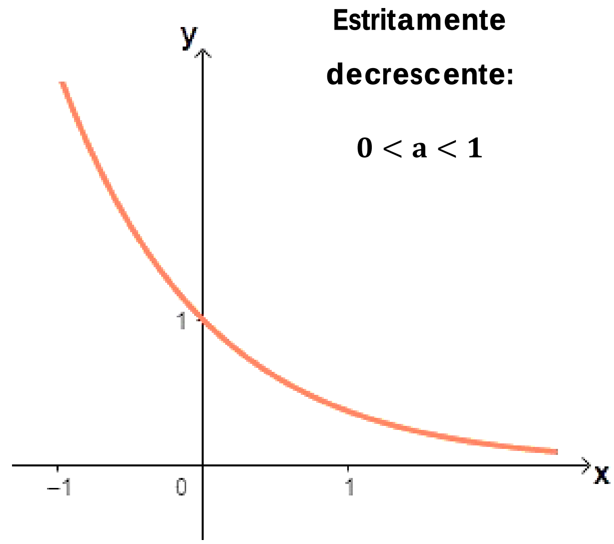
$f(x) = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow \boldsymbol{x + 2 \neq 0} \Rightarrow \boldsymbol{x \neq -2}$

$$\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq -2\}}$$

Função Exponencial

GRÁFICO





Algumas regras de Potenciação:

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ *e* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ $\mathbf{x, y} \in \mathbb{R}$

Regra	Exemplo
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{\mathbf{2^8}}{\mathbf{4}} = \frac{2^8}{2^2} = 2^{8-2} = 2^6$
$a^x \times a^y = a^{x+y}$	$\mathbf{2^8} \times \mathbf{2^2} = 2^{8+2} = 2^{10}$
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\frac{\mathbf{2^3}}{\mathbf{5^3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$
$a^x \times b^x = (ab)^x$	$\mathbf{9^5} \times \mathbf{2^5} = (9 \times 2)^5 = 18^5$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$(5^3)^3 = 5^{3\times3} = 5^9$
$a^0 = 1 \Leftrightarrow a \neq 0$	$(19999)^0 = 1$

As funções exponenciais são apresentadas na forma:

$$\boldsymbol{f(x) = a^x}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\mathbf{1}\}$$

Domínio: $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$

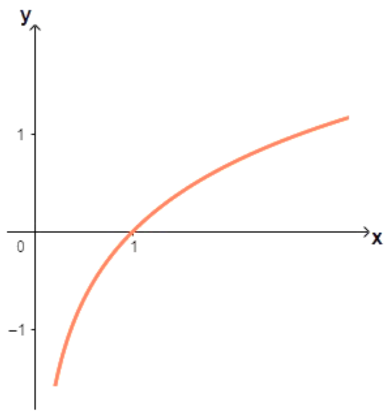
Conjunto imagem: $]0;\ +\infty[$

Monotonia: Crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$

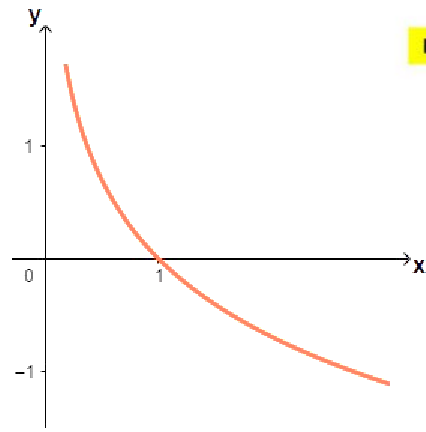
Intercessão com Oy (0, 1)

Função Logarítmica

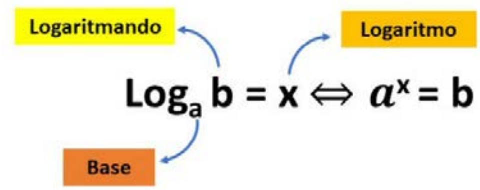
GRÁFICO



Crescente



Decrescente



As funções logarítmicas são apresentadas na forma: $f(x) = log_a^{\color{red}{h(x)}}$

Tendo: $\log_a^{(h(x))} = c \implies h(x) = a^c \iff h(x) > 0$, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

O domínio de uma função logarítmica é: $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \color{red}{\boldsymbol{h(x)}} > \boldsymbol{0}\}$

Propriedades Logarítmicas

$\color{red}{\mathbf{a > 0 \;\; e \; b > 0 \;\; e \; c \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}}}$

1) $\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$; para $xy > 0$; para $a > 0$ e $a \neq 1$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a|x| - \log_a|y|$; para $\frac{x}{y} > 0$; para $a > 0$ e $a \neq 1$

3) $\log_a x^n = n \log_a|x|$; para n par e $\log_a x^n = n \log_a x$; para n ímpar $\iff a > 0$ e $a \neq 1$;

4) $\log_{a^n}(x) = \frac{1}{n}\log_{|a|} x$; para n par e $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$; para n ímpar $\iff a > 0$ e $a \neq 1$;

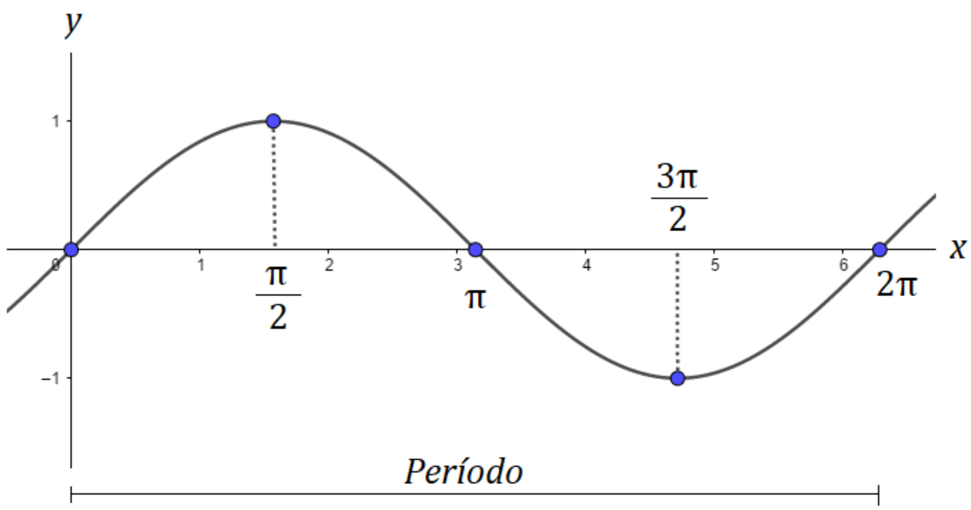
5) $\log_a(b) = \frac{\log_k(b)}{\log_k(a)} = \frac{1}{\log_b(a)}$; $b > 0,\; k \neq 1 \; e \; k > 0$

6) $\log_a(a) = 1$; $a > 0 \;\; e \; a \neq 1$

7) $\ln(a) = \log_e(a)$, onde **ln** significa logarítmo natural ou logaritimo neperiano e ***e*** indica euler **e** é igual à : $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \approx 2{,}7182.$

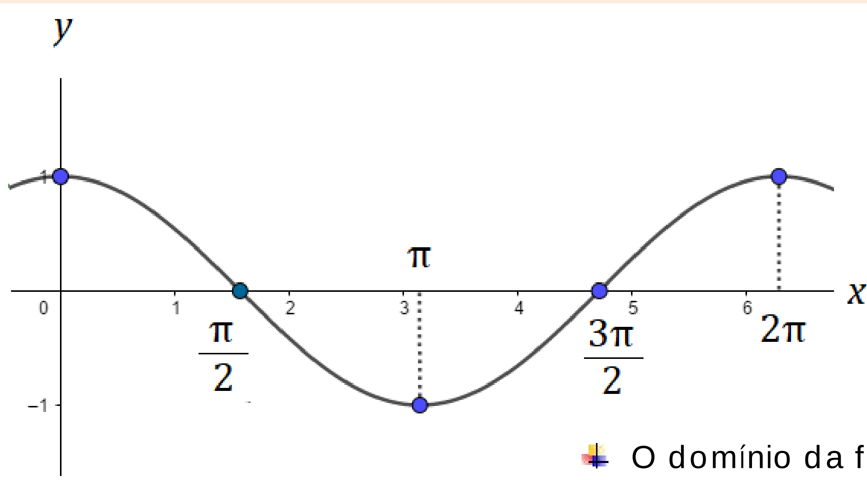
Funções trigonométricas

$f(x) = \mathbf{sen}(x)$



- O domínio da função: $\mathbb{R}$
- Imagem da função: $[-1; 1]$
- A função é ímpar, já que: $\mathbf{sen(-x) = -sen(x)}$;

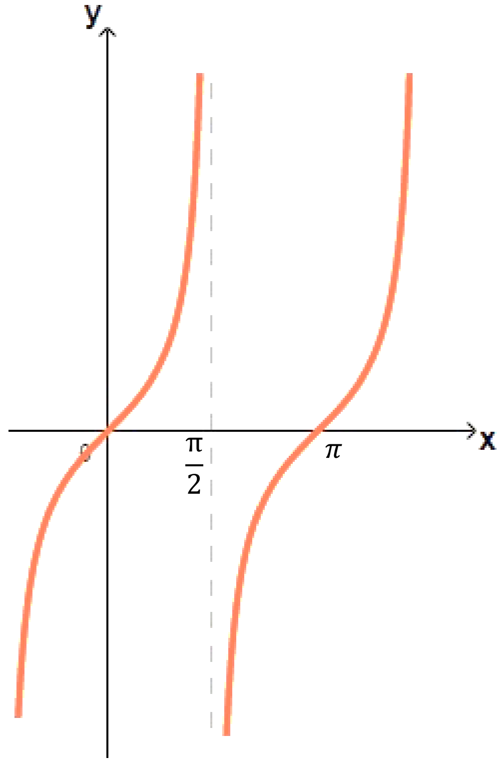
$f(x) = \mathbf{cos}(x)$



- O domínio da função: $\mathbb{R}$
- Imagem da função: $[-1; 1]$
- A função é par, já que: $\mathbf{cos(-x) = cos(x)}$;

Funções trigonométricas

$f(x) = \tan(x)$



- O domínio da função:

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \right\}$$

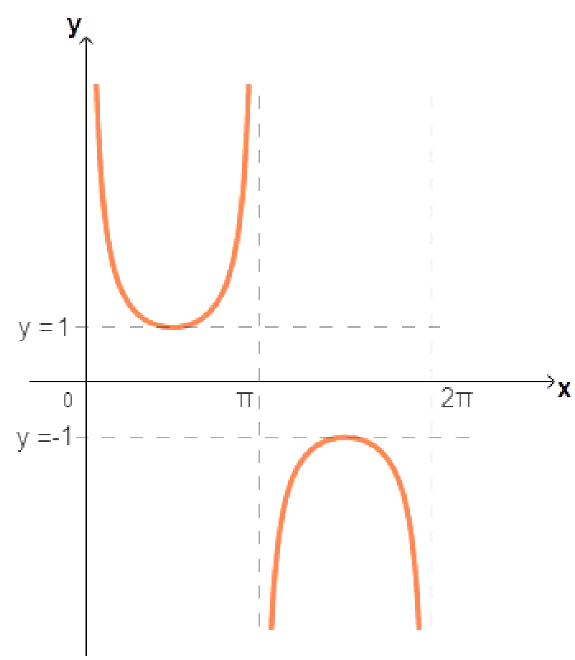
- Imagem da função: $[-1; 1]$
- A função é ímpar, já que:
- $\tan(-x) = -\tan(x)$;

$f(x) = \mathrm{Cossec}(x)$

- O domínio da função:

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \{ k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \}$$

- Imagem da função: $[-1; 1]$
- A função é ímpar, já que:
- $\mathrm{cossec}(-x) = -\mathrm{cossec}(x)$;



Função Modular

As funções modulares são apresentadas na forma:

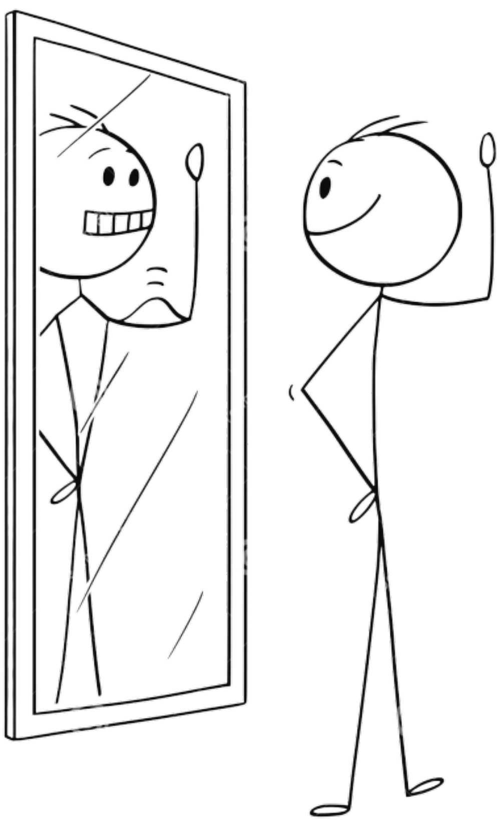
$$f(x) = |h(x)|$$

Define-se uma função modular como:

Seja uma função f:ℝ→ ℝ e dada por *f(x)* = |h(x)| então:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & se \;\; h(x) \geq 0 \\ \\ -h(x) & se \;\; h(x) < 0 \end{cases}$$

Uma alusão interessante para as funções modulares é que podemos imaginar que o eixo *x* é um **espelho** para o gráfico das funções.

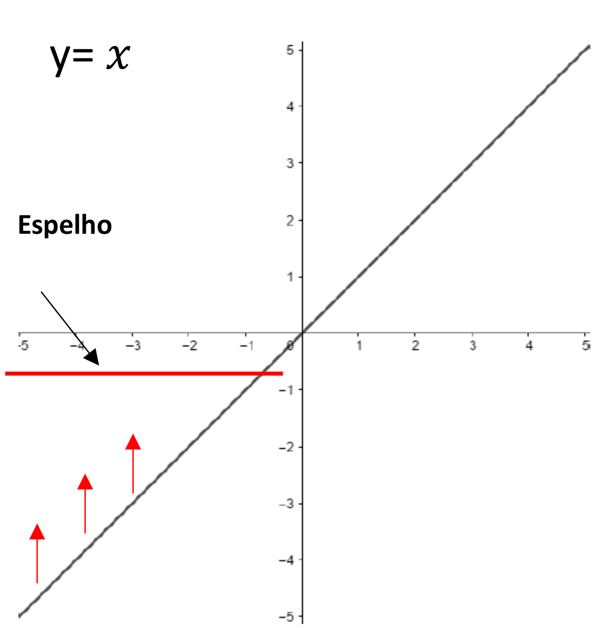


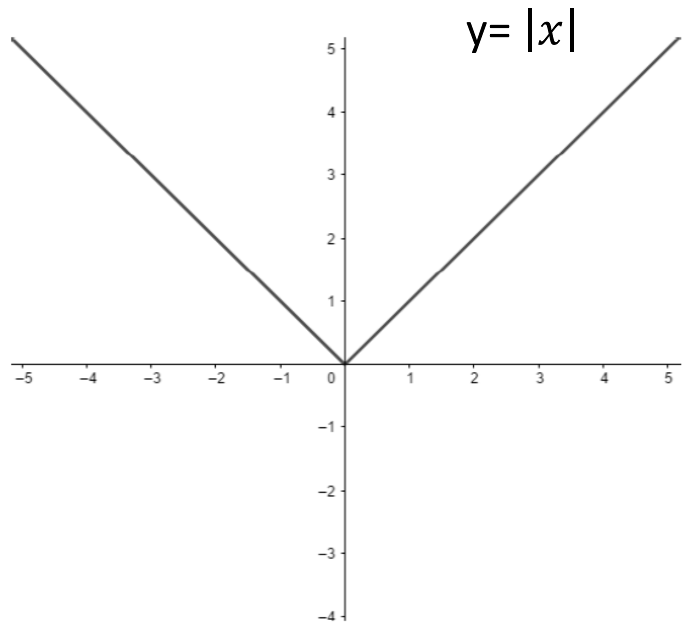
Espelho, espelho, espelho meu existe alguma função mais ímpar do que eu?

Então como já referido acima é possível analisar uma função modular imaginando um espelho no eixo x.

Tudo que está abaixo da origem do plano cartesiano no eixo *y*, ou seja, valores negativos de *y*, não assumirá valores.

Vejamos abaixo o exemplo de duas funções:





Considere as funções f e g definidas por $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 2}$ ***e*** $\boldsymbol{g(x) = \frac{x+1}{x-1}}$

Determine:

1.1 $f(0),\ f(-2), e\ f(3t), com\ t \in \mathbb{R}$

1.2 $g(20),\ g(\pi), e\ g(t^2 - 1), com\ t \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\ , \sqrt{2}\}$

1

Lógica de Resolução: Este tipo de exercícios consiste em substituir o valor de x na função dada, assim sendo:

1.1 (a)- Tendo a função dada no exercício: $f(x) = 3x^2 - 2$, calculando o $f(0)$ temos que:

$$f(0) = 3(0)^2 - 2 = 0 - 2 = \mathbf{-2}$$

(basta substituir 0 (zero) no lugar de x, e essa lógica funciona para as alíneas restantes.

1.1 (b)- $\boldsymbol{f(-2)}$

$$f(-2) = 3(-2)^2 - 2 = (3 \times 4) - 2 = 12 - 2 = 10$$

1.1 (c)- $\boldsymbol{f(3t)\ , com\ t\ \in\ \mathbb{R}}$

$$f(3t) = 3(3\mathrm{t})^2 - 2 = (3 \times 9\mathrm{t}^2) - 2 = 27\mathrm{t}^2 - 2$$

1.2 (a)- Tendo a função dada no exercício: $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, calculando o $g(20)$ temos que:

$$g(20) = \frac{20 + 1}{20 - 1} = \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{19}}$$

1.2 (b)- $\boldsymbol{g(\pi)}$ $\rightarrow$ $\mathrm{g}(\pi) = \frac{\pi+1}{\pi-1}$

1.2 (c)- $\boldsymbol{g(t^2-1)}$

$$\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1} \rightarrow \mathrm{g}(\mathrm{t}^2-1) = \frac{\mathrm{t}^2 - \cancel{1} + \cancel{1}}{\mathrm{t}^2-1-1} = \frac{\mathrm{t}^2}{\mathrm{t}^2-2}\text{ , com t } \in \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\}$$

2

Considere as funções f e g definidas por $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ ***e*** $\boldsymbol{g(x)=x^3+1}$

Determine:

2.1- $f(g(2))$

2.2- $g(g(0)),\ g(\pi), e\ g(t^2-1), com\ t\ \epsilon\ \mathbb{R}$

2.1- Tendo a função dada no exercício: $f(x)=\sqrt{x}\ e\ g(x)=x^3+1$, calculando o $f(g(2))$:

Temos: $f(g(2))$

Função externa **Função interna**

Lógica de Resolução: resolver o exercício de dentro para fora, ou seja, da função interna para a função externa, resolvendo temos:

$g(2) = (2)^3 + 1 = 8 + 1 = 9 \quad \Rightarrow \quad sendo\ g(2) = 9\ então\ \ f(g(2)) = f(9)$

$$f(9) = \sqrt{9} = \mathbf{3}$$

2.2- (a) $\boldsymbol{g(g(0))}$ $\Rightarrow$

$1^{\underline{o}}\ passo$: calcular $\mathrm{g}(0) = (\mathrm{o})^3 + 1 = 1$

$2^{\underline{o}}\ passo$: calcular $\mathrm{g}(1) = (1)^3 + 1 = 1 + 1 = 2$

2.2- (b) $\boldsymbol{g(\pi)} = ? \quad \Longrightarrow \quad g(\pi) = \pi^3 + 1$

2.2- (c) $\boldsymbol{g(t^2 - 1)} \quad \Longrightarrow \quad g(t^2 - 1) = (t^2 - 1)^3 + 1$

Para desfazer $(t^2 - 1)^3$ usa-se conceitos básicos de álgebra - produtos notáveis como: ***(a-b)³=a³-3a² b+3ab²-b³***, onde a=t² e b=1.

$$(t^2 - 1)^3 = (t^2)^3 - 3(t^2)^2(1) + 3(t^2)(1)^2 - (1)^3 = \boldsymbol{t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1}$$

Juntando temos:

$$g(t^2 - 1) = (t^2 - 1)^3 + 1 = t^6 - 3t^4 + 3t^2 - \cancel{1} + \cancel{1}$$

$$g(t^2 - 1) = (t^2 - 1)^3 + 1 = t^6 - 3t^4 + 3t^2\,, \qquad com\, t\ \in\ \mathbb{R}$$

Seja h a função definida, em $\mathbb{R}$ por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & se\quad x < 3 \\ \\ \sqrt{x+1}, & x > 3 \end{cases}$$

Determine: $h(-20),\ h(8), e\ h(24)$

3

Lógica de Resolução: analisar os valores de x e ver se cumpre com a condição de alguma função presente no exercício, caso for verdadeira substituir o valor de x na função.

h (-20) =? Então x= -20

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & se\quad x < 3 \\ \\ \sqrt{x+1}, & x > 2 \end{cases} \Rightarrow h(-20) = \begin{cases} -\dfrac{1}{20}, & se\ -20 < 3\ \ (\textbf{verdadeira}) \\ \\ \sqrt{-20+1}, & -20 > 3\ \ (\textbf{falsa}) \end{cases}$$

Então $\boldsymbol{h(-20)} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{20}}$

h (8) *=? Sendo x >3 então* $h(x) = \sqrt{x+1}$

$h\,(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

h (24) *=? Sendo 24>3 então* $h(x) = \sqrt{x+1}$

$h\,(24) = \sqrt{24+1} = \sqrt{25} = 5$

4- *Determine o domínio da função f definida por:*

O que é o domínio de uma função?

O domínio de uma função é o conjunto de números que podem entrar em uma determinada função. Em outras palavras, é o conjunto de valores x que você pode colocar em uma função. O conjunto de possíveis valores y é chamado de intervalo . Se você deseja saber como encontrar o domínio de uma função em várias situações, basta seguir estas etapas.

Notação para escrever um domínio corretamente

A notação adequada para o domínio é fácil de aprender, e é importante que você a escreva corretamente para expressar a resposta correta e obter pontos completos em tarefas e testes. Aqui estão algumas coisas que você precisa saber sobre como escrever o domínio de uma função:

Por exemplo, [-1,5). Isso significa que o domínio vai de -1 a 5.

- **Use colchetes como [e] para indicar que um número está incluído no domínio.**

Portanto, no exemplo [-1,5), o domínio inclui -1.

- **Use parênteses como (e) para indicar que um número não está incluído no domínio.** Portanto, no exemplo, [-1,5), 5 não está incluído no domínio. O domínio para arbitrariamente aquém de 5, ou seja, 4.999...
- **Use "U" (que significa "união") para conectar partes do domínio que são separadas por uma lacuna. '**

Por exemplo, [-1,5) U (5,10]. Isso significa que o domínio vai de -1 a 10, inclusive, mas que existe uma lacuna no domínio em 5.

Por exemplo, uma função com "x - 5" no denominador.

Você pode usar quantos símbolos "U" forem necessários se o domínio tiver várias lacunas.

- **Use sinais de infinito e infinito negativo para expressar que o domínio continua infinitamente em qualquer direção.**

Sempre use ( ), não [ ], com símbolos infinitos.

Nota: Podemos usar também] [para descrever intervalos abertos, exemplo:

- (0, 1) pode ser escrito como]0, 1[;
- [0, +∞) pode ser escrito como [0, +∞[.

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

4.1

Recapitulação: Domínio é a condição de existência de uma função em todo $\mathbb{R}$.

Passos para determinação do domínio:

1º Passo: analisar o tipo de função

2º Passo: saber a condição de existência desta função;

OBS: condições da existência de função na página

3º Passo: determinar/ escrever o domínio.

Então: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

- É uma função fraccionária na forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, onde $g(x)$ é uma constante e $h(x)$ uma função polinomial de grau 1.
- A condição de existência para uma função deste tipo é $h(x) \neq 0$ então:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad \rightarrow \quad x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

- $\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 3\}}$

4.2

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

- É uma função fraccionária na forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
- Condição de existência: $h(x) \neq 0$ então:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad \rightarrow \quad x \neq 0$$

- $\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}}$ **ou** $\mathbb{R}^*$

4.3

$$f(x) = \frac{1}{1 - sen(x)}$$

- É uma função fraccionária na forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, onde $g(x)$ é uma constante e $h(x)$ função trigonométrica.
- Condição de existência: $h(x) \neq 0$ então:

$$f(x) = \frac{1}{1 - sen(x)} \quad \rightarrow \quad 1 - sen(x) \neq 0$$

$$-sen(x) \neq -1 \quad /\times (-1) \qquad sen(x) \neq 1$$

$sen(x) \neq 1$, é uma equação trigonométrica o processo de resolução é o mesmo de quando temos $\boldsymbol{sen(x) = 1}$ e para a resolução usa-se:

Quando temos sen(x) = sen (a) $\rightarrow \boldsymbol{x = a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

$$\boldsymbol{sen(x) \neq 1 \quad \rightarrow \quad sen(x) \neq sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

- $\boldsymbol{D_f} = \left\{\boldsymbol{x \in} \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

4.4

$$f(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 8}$$

- É uma função fraccionária na forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
- Condição de existência: $h(x) \neq 0$ então:

$$f(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 8} \quad \rightarrow \quad 3x - 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq \frac{8}{3}$$

- $\boldsymbol{D_f} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x \neq \frac{8}{3}}\right\}$

4.5

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$$

- É uma função fraccionária na forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

- Condição de existência: $h(x) \neq 0$ então:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+1} \quad \rightarrow \quad x^2 + 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq -1 \quad \Longrightarrow \quad x \neq \sqrt{-1} \nexists \forall \mathbb{R}$$

É possível ver que não existe um valor em todo $\mathbb{R}$ que anule o denominador ou seja h(x).

- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$

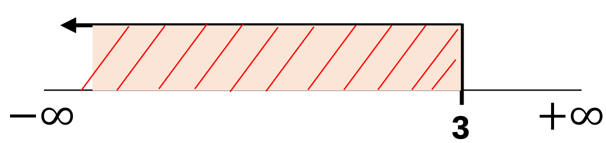
4.6

$$f(x) = \sqrt{3-x}$$

- É uma função racional na forma $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ onde n é par ***(n=2);***

- Condição de existência quando n é par: $h(x) \geq 0$ então:

$$f(x) = \sqrt{3-x} \quad \rightarrow \quad 3 - x \geq 0 \quad \rightarrow \quad -x \geq -3 / \times (-\mathbf{1}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} \leq \mathbf{3}$$



- $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$ ou $]-\infty; \mathbf{3}]$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$	**4.7**

- É uma função racional na forma $f(x) = \sqrt{h(x)}$
- Condição de existência: $h(x) \geq 0$ então:
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \rightarrow$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$
$$\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & -1 \\ \hline \end{array}$$
$$(x - 3)(x - 1) = 0$$
$$\boldsymbol{x \leq 1 \quad ou \quad x \geq 3}$$

- $\boldsymbol{D_f} =]-\infty; \mathbf{1}] \cup [\mathbf{3}; +\infty[$

4.8	$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$

- É uma função racional na forma $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ onde n é par *(n=2);*

  $h(x) = 1 - \sqrt{x}$, então é possível ver que temos outra raiz dentro da raiz.

  $g(x) = \sqrt{x}$.
- Condição de existência para este tipo de função: $h(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ então:
- $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \sqrt{x} \geq 0 \quad e \quad x \geq 0$

$$-\sqrt{x} \geq -1 / \times (-1) \quad e \quad x \geq 0$$
$$x \leq 1 \quad e \quad x \geq 0$$

Juntando temos: $0 \leq x \leq 1$

- $\boldsymbol{D_f} = [\mathbf{0} ; \mathbf{1}]$

$f(x) = 3 + \sqrt{x}$	**4.9**

- É uma função racional na forma $f(x) = a + \sqrt[n]{h(x)}$ onde n é par ***(n=2);***
- Condição de existência quando n é par: $h(x) \geq 0$ então:

$f(x) = 3 + \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad x \geq 0$

- $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} \geq 0\}$ ou $[\mathbf{0}; +\infty[$

4.10	$f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$

- É uma função racional na forma $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$onde n é par ***(n=2);***
- Condição de existência quando n é par: $h(x) \geq 0$ então:
- $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6} \rightarrow \qquad -x^2 + 5x - 6 \geq 0$

Quando se usa este método para a resolução da equação do 2º grau, como provar se o método está certo ou se aplica para este caso?

R.: é simples basta:

$$-x^2 + 5x - 6 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc} x & -2 \\ -x & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$(x - 2)(-x + 3) = 0$$

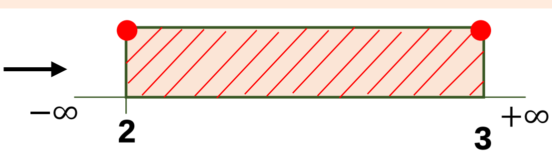
Basta fazer o sistema cruzado multiplicando

$(-x) \times (-2) = \mathbf{2x}$ $\qquad$ $(x) \times (3) = \mathbf{3x}$

A soma deve ser igual ao b na equação ax²+bx+c=0

Então somando 2x+3x= 5x (está correto)

Então $-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \ \Rightarrow x \geq 2 \ ou \ x \leq 3 \ \longrightarrow$



- $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \mathbf{2} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{3}\}$ ou $[\mathbf{2}; \mathbf{3}]$

4.11

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

- É uma função racional na forma $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ onde n é par ***(n=2);***
- Condição de existência quando n é par: $h(x) \geq 0$ então:
- $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \rightarrow \quad 4 - x^2 \geq 0$

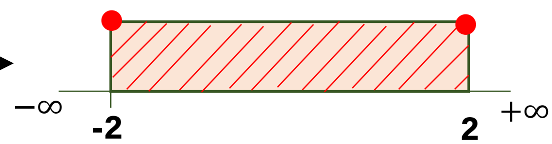
$$-x^2 \geq -4 \quad /\times(-1)$$

$$x^2 \leq 4$$

$$x \leq \pm\sqrt{4} \quad \Longrightarrow x \leq \pm 2$$

$$\boldsymbol{-2 \leq x \leq 2}$$

Então $4 - x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow x \geq -2 \; ou \; x \leq 2 \longrightarrow$



- $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{-2 \leq x \leq 2}\}$ ou $[\boldsymbol{-2; 2}]$

4.12

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x + 1}}$$

- É uma função racional na forma $f(x) = \sqrt[n]{\frac{h(x)}{g(x)}}$, onde n é par ***(n=2);***
- Condição de existência quando n é par: $\frac{h(x)}{g(x)} \geq 0$ com $g(x) \neq 0$ então:

$$\boldsymbol{\frac{x^2 - 4}{x + 1}} \geq 0 \quad e \quad \boldsymbol{x + 1 \neq 0} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x \neq -1}$$

Para casos como este o primeiro passo deve ser achar os zeros do numerador e o domínio desta função fraccionária: $\boldsymbol{x^2 - 4 = 0} \;\Longrightarrow\; \boldsymbol{x^2 = 4} \;\Longrightarrow \boldsymbol{x = \pm\sqrt{4}}$ **,** $\boldsymbol{x = \pm 2}$

Próximo passo é construir a tabela de sinais usando todos os pontos achados tanto os zeros do denominador como também o domínio.

Mais antes disso deve-se saber como construir esta tabela.

A construção desta tabela varia de bibliografia para bibliografia o que é muito normal, o importante é saber como construí-la para poder achar o domínio deste tipo de funções.

1º Passo: achar o domínio da função fraccionada dentro da raiz;

2ªPasso: achar os zeros do numerador: isso implica igualar a função a zero e resolvê--la.

3ªPasso: construir a tabela.

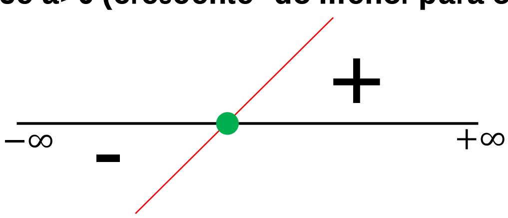
x	$-\infty$	**Zeros do numerador e o domínio**						$+\infty$
Função do numerador								
Função do denominador								
Função geral								

A tabela deve ser preenchida tendo em conta o tipo da função.

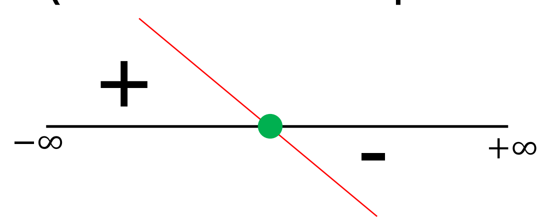
E o jogo de sinais deve ser efectuado para as colunas após o preenchimento.

Função do 1º grau, tem a forma: ax+b=0

Se a>0 (crescente- do menor para o maior)

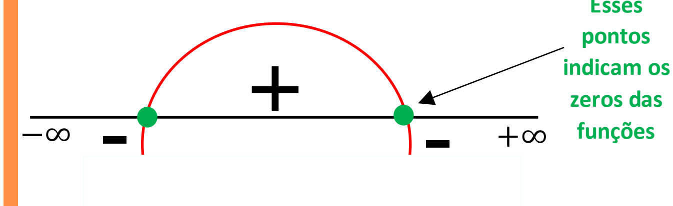


Se a<0 (decrescente- do maior para o menor)

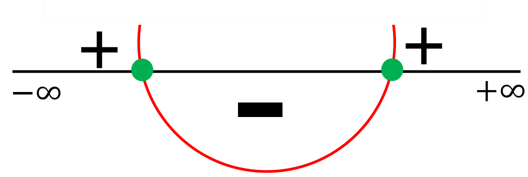


Função do 2º grau, tem a forma: ax²+bx+c=0

Se a<0 (Parábola voltada para baixo)



Se a>0 (Parábola voltada para cima)



Então aplicando a tabela para o exercício temos:

X	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-		-	0	+	
x+1		-		-	0	+		+	
f(x)		-	0	+	IND	-	0	+	

Como o exercício está explícito a função racional deve ser sempre maior ou igual a zero para a mesma existir em todos os reais, então na tabela o que está pintado de laranja indica o sinal da função quando ela é positiva.

- $\mathbf{D_f} = [\mathbf{-2};\ \mathbf{-1}[\ \cup\ [\mathbf{2};\ +\infty[$

$$f(x) = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+2}}$$

4.13

- É uma função racional na forma $f(x) = \sqrt[n]{\frac{h(x)}{g(x)}}$, onde n é par ***(n=6);***

- Condição de existência quando *n* é par: $\frac{h(x)}{g(x)} \geq 0$ e $g(x) \neq 0$ então:

$$\frac{\boldsymbol{x-3}}{\boldsymbol{x+2}} \geq 0 \quad e \quad \boldsymbol{x+2 \neq 0} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{x \neq -2}$$

Zeros do numerador: $\boldsymbol{x-3=0} \;\longrightarrow \boldsymbol{x=3}$

Tabela de sinais

X	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x-3		-		-	0	+	
x+2		-	0	+		+	
f(x)		+	IND	-	0	+	

- $\mathbf{D_f} =]-\infty; \mathbf{-2}[\ \cup\ [\mathbf{3};\ +\infty[$

4.14

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

- É uma função fraccionária na forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
- Condição de existência: $h(x) \neq 0$ então:

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \quad \longrightarrow \quad x \geq 0$$

$$\mathbf{D_f} = [\mathbf{0}; +\infty[$$

4.15

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x-5}$$

- F(x) é a soma de funções fraccionárias;
- Condição de existência: $h(x) \neq 0$ então:

$\sqrt{x-1} \neq 0$ $\qquad$ $\sqrt{x-1} \geq 0$ e $x - 5 \neq 0$

$(\cancel{\sqrt{x-1}})^{\cancel{2}} \neq (0)^2$ $\qquad$ $x \geq 1$ e $x \neq 5$

$x \neq 1$ $\qquad$ $x \geq 1$ e $x \neq 5$

Juntando e analisando se temos que $x \neq 1$ então não podemos manter $x \geq 1$, porque há condição de igualdade aqui, então alterando ficamos com x >1.

Analisando o $x \neq 5$ é possível escrevê-lo de uma outra forma se aqui temos x diferente de 5 então: $x > 5$ e : $x < 5$. Então:

- $\mathbf{D_f} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}\text{: }]1; 5[\cup]\mathbf{5}; +\infty[\}$

4.16 $$f(x) = \frac{\sqrt{|x-4|-8}}{\sqrt{-|x|+9}}$$

Para este exercício:

1º Passo: encontrar os valores não negativos para radicais neste caso:

- $\sqrt{|x-4|-8} \overset{\text{Condição}}{\Longrightarrow} |x-4|-8 \geq 0 \Longrightarrow |x-4| \geq 8$

Propriedade

Aplicar propriedades do valor absoluto $|u| \geq a \; , a > 0 \longrightarrow u \leq -a \;\; ou \;\; u \geq a$

$$|x-4| \geq 8 \Longrightarrow x-4 \leq -8 \quad \text{ou} \quad x-4 \geq 8 \Longrightarrow x \leq -4 \text{ ou } x \geq 12$$

- $\sqrt{-|x|+9} \overset{\text{Condição}}{\Longrightarrow} -|x|+9 \geq 0 \Longrightarrow -|x| \geq -9$

$$-|x| \geq -9 \;\; /\times(-1) \Longrightarrow |x| \leq 9$$

Propriedade

Aplicar propriedades do valor absoluto $|u| \leq a \; , a > 0 \longrightarrow -a \leq u \leq a$

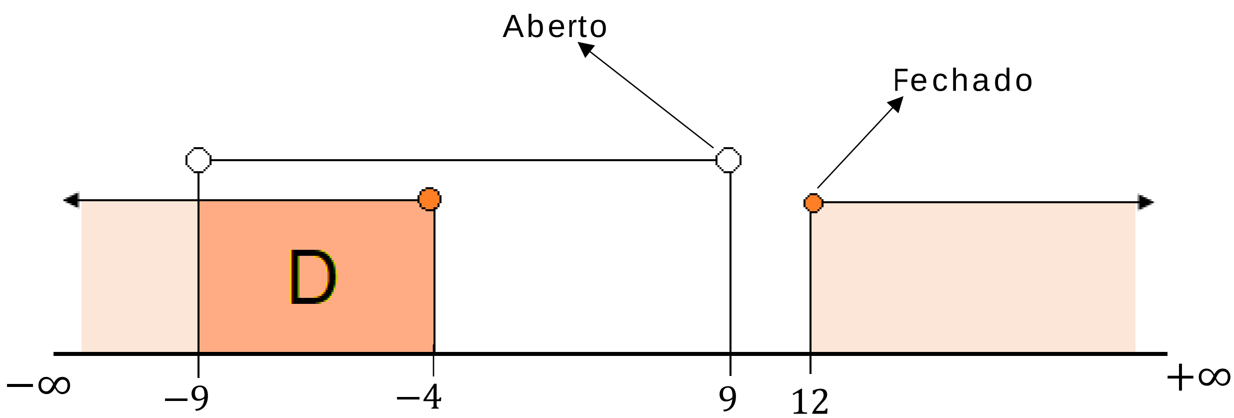
$$|x| \leq 9 \Longrightarrow -9 \leq x \leq 9$$

Como estamos presentes a uma função na forma: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ então $\mathbf{h(x)} \neq \mathbf{0}$ sendo que a função h no exercício é: $h(x) = \sqrt{-|x|+9} \longrightarrow \sqrt{-|x|+9} \neq 0 \Longrightarrow \mathbf{x \neq 9 \text{ ou } x \neq -9}$ quando se obtém esses valores deve-se analisar o seguinte:

Temos $-9 \leq x \leq 9$ e sendo $x \neq 9$ ou $x \neq -9$ altera a condição para:

$-9 < x < 9$, isto porque x não pode ser igual a 9 ou -9 para não indefinir a função.

Tendo as rectas: $-9 < x < 9$, $x \leq -4$ ou $x \geq 12$ construir a reta real e combinar as regiões reais para obter o domínio final da função:



- $\mathbf{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \ \mathbf{-9} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{-4}\}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$$

4.17

- É uma função racional na forma $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ com n ímpar ***(n=3);***
- Condição de existência quando n é ímpar: Permite qualquer número em todo $\mathbb{R}$;
- $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$

Gráficos De Funções

Como esboçar um gráfico?

Para fazer a construção de gráficos deve-se ter noção básica dos gráficos, noções do comportamento de cada função, e isso pode ser encontrado na página

Passos para a construção de um gráfico:

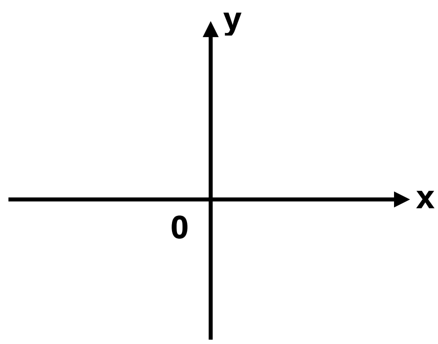
1º Passo: analisar qual é o tipo de função, o tipo de função varia porque ela pode ser: polinomial do 1º grau, polinomial do n-ésimo grau, exponencial, trigonométrica, entre outras;

2º Passo: determinar o domínio da função. A determinação do domínio da função é muito importante porque o domínio dará a informação dos valores que poderão ser substituídos na tabela para a construção do gráfico;

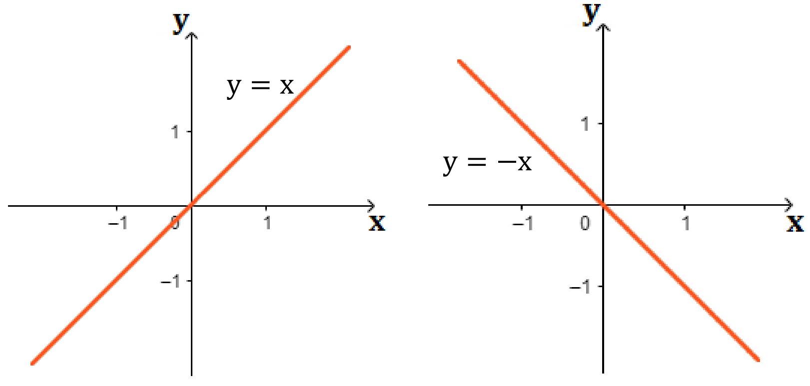
3º Passo: construir a tabela fazendo a atribuição de valores:

x	**y**

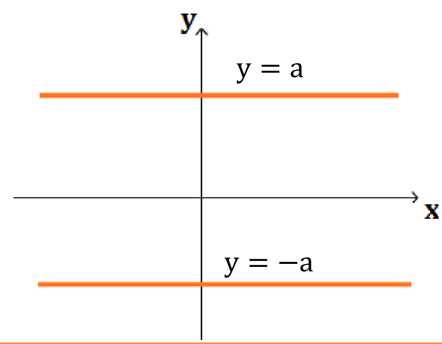
4º Passo: esboçar o gráfico no plano cartesiano de acordo com os valores encontrado na tabela para cada valor de **x** há uma imagem **y** desse valor que em coordenadas tem-se um ponto (x; y).



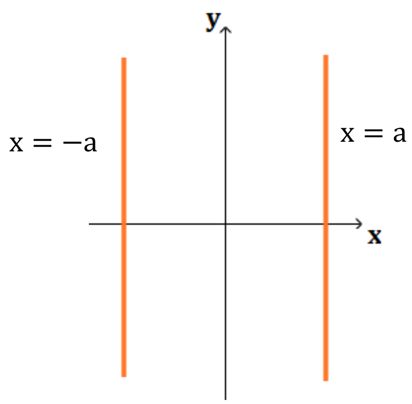
GRÁFICOS DE FUNÇÕES



Reta na forma: $y = ax + b$ | Dominio: $\mathbb{R}$; Imagem: $\mathbb{R}$



Reta: $y = a$ e $y = -a$

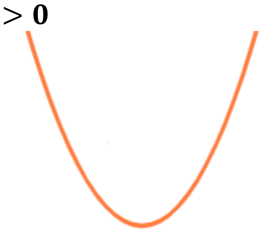


Reta: $x = a$ e $x = -a$

Para construir o gráfico de uma **função do segundo grau (parábola)** na forma: : $y = ax^2 + bx + c$ devemos analisar:

(1) O coeficiente "a" de uma função do segundo grau indica a concavidade:

$\mathbf{a > 0}$



A parábola é voltada para cima.

$\mathbf{a < 0}$

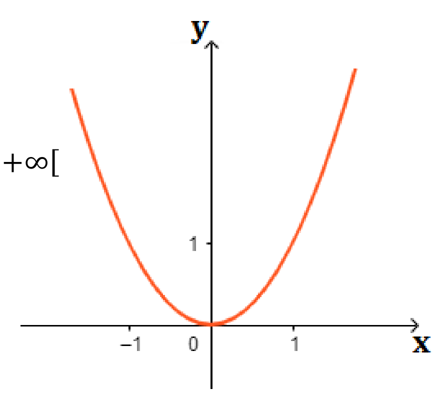
A parábola é voltada para baixo.

(2) achar o vértice e a intercessão com os eixos. Fórmula para o Vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\mathbf{a > 0}$

$\mathbf{y = x^2}$

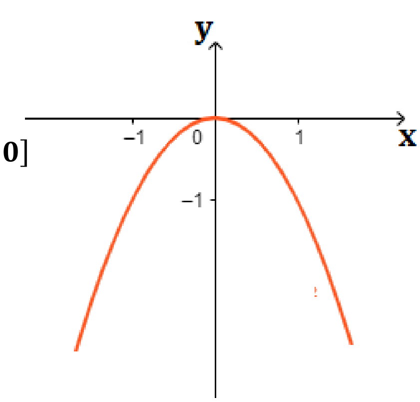
$\mathbf{Img} = \ [\mathbf{0}, +\infty[$



$\mathbf{a < 0}$

$\mathbf{y = -x^2}$

$\mathbf{Img} = \ ]-\infty, \mathbf{0}]$



Parábola: $y = ax^2 + bx + c$ | Dominio: $\mathbb{R}$

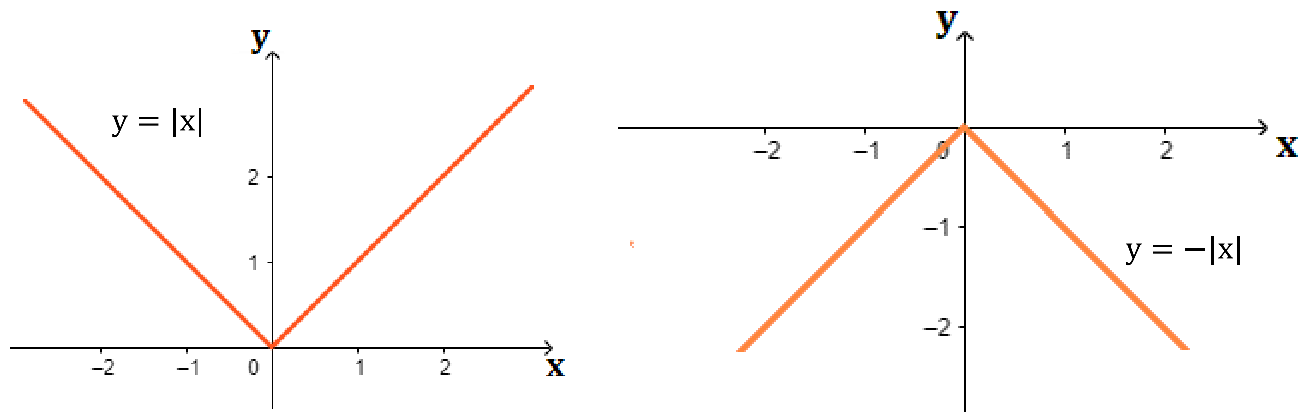
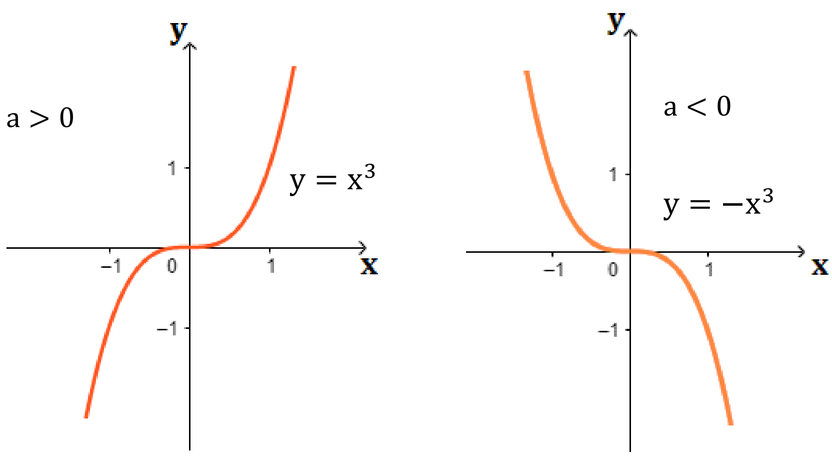
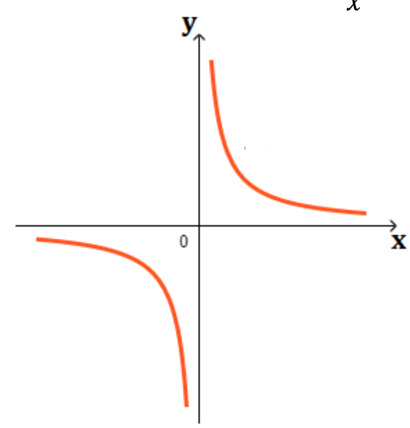


Gráfico de função modular na forma: $y = a|x| + b$ | Dominio: $\mathbb{R}$

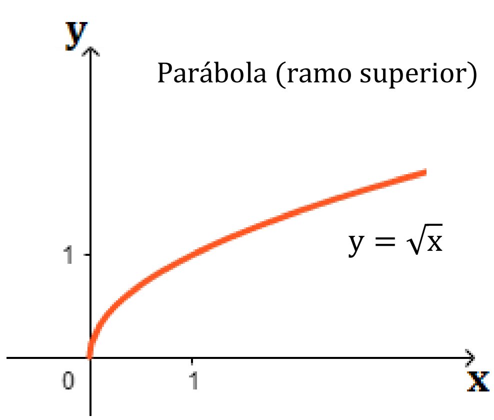


Parábola Cúbica: $y = ax^3$ | Dominio: $\mathbb{R}$ e Imagem: $\mathbb{R}$

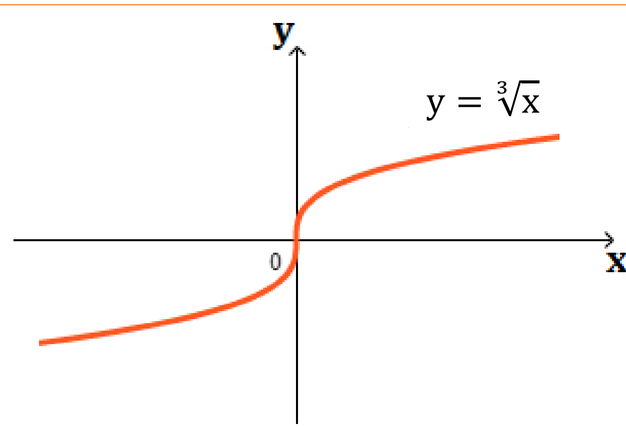
Hipérbole equiaxial: $y = \frac{1}{x}$



Dominio e Imagem: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

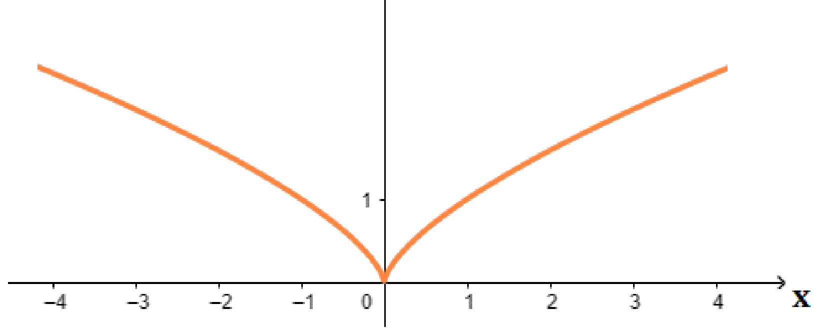


Dominio: $\mathbb{R}$ e Imagem: $\mathbb{R}$



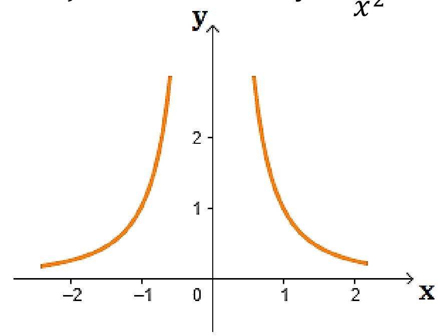
$y = \sqrt[3]{x}$ | Dominio: $\mathbb{R}$ e Imagem: $\mathbb{R}$

Parábola de Neile: $y = x^{\frac{2}{3}}$



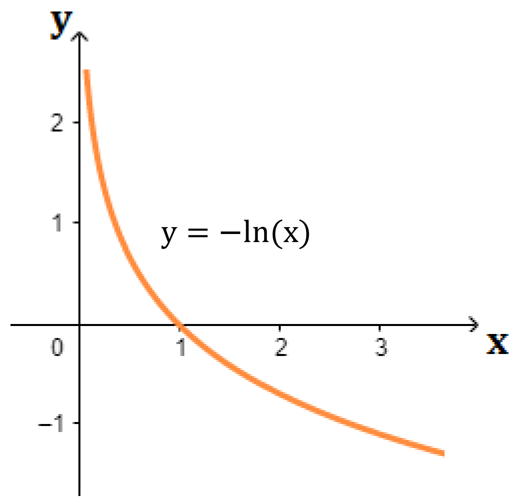
Dominio: $\mathbb{R}$ e Imagem: $[0, +\infty[$

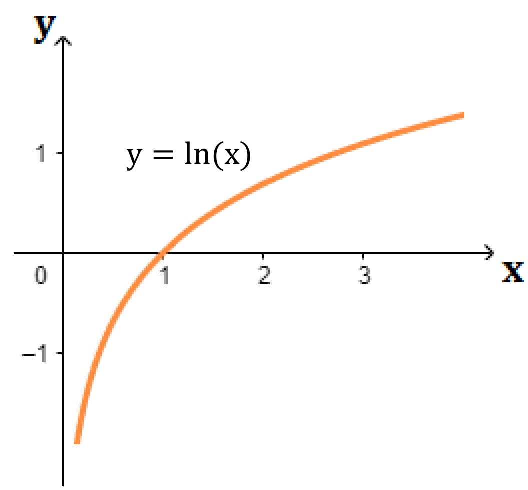
Função fraccionária: $y = \frac{1}{x^2}$



Dominio: $\mathbb{R}$ e Imagem: $]0, +\infty[$

Gráfico de função logaritimica: ln(logaritmo natural)

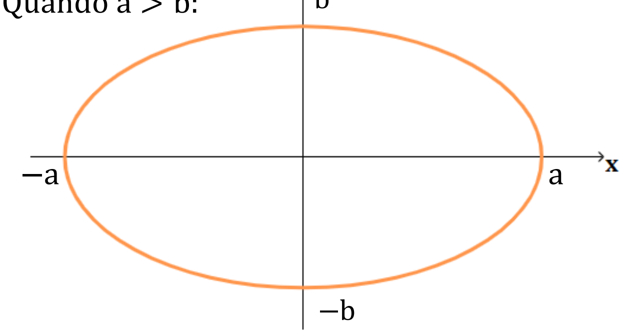




$y = a\ln(x)$ | Dominio: $[0, +\infty[$ e Imagem: $\mathbb{R}$

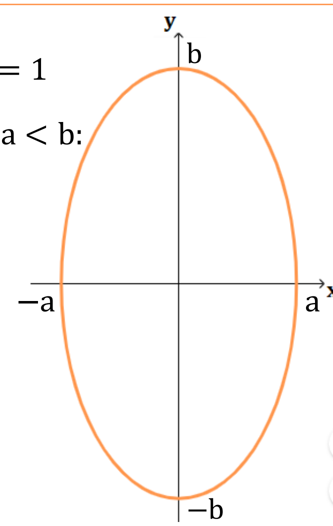
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quando $a > b$:



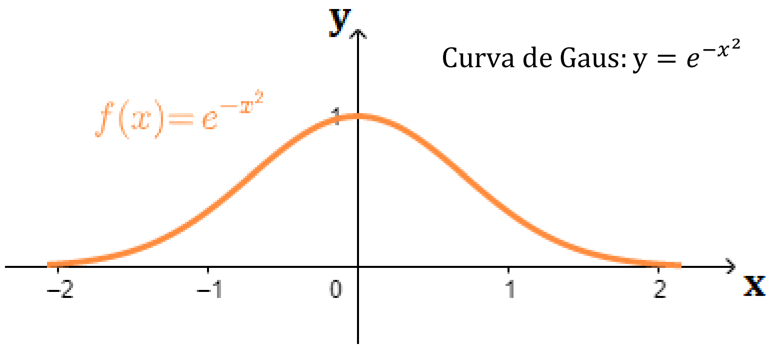
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quando $a < b$:



Elipse

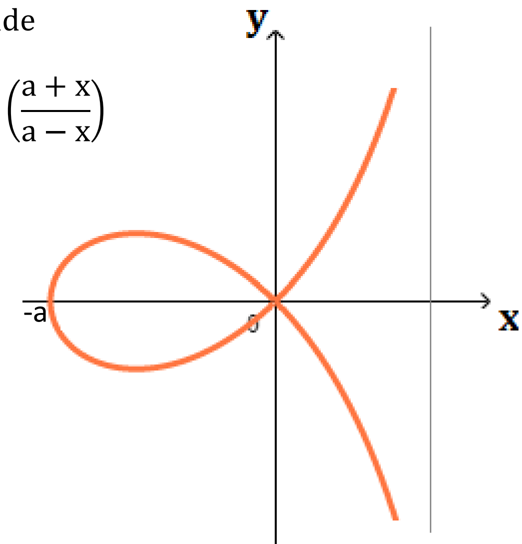
Curva de Gaus: $y = e^{-x^2}$



Dominio: $\mathbb{R}$ e Imagem: $]0, 1]$

Estrofóide

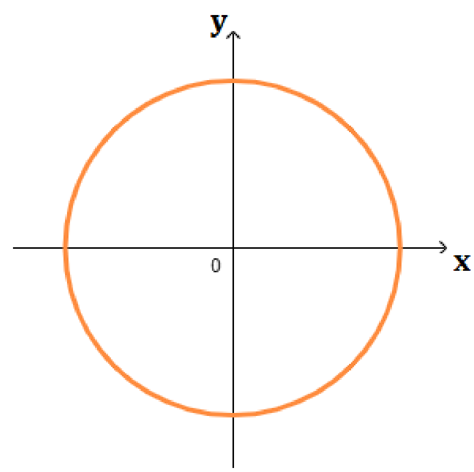
$$y^2 = x^2\left(\frac{a + x}{a - x}\right)$$



Dominio: $\mathbb{R}$ e Imagem: $[-1,1]$

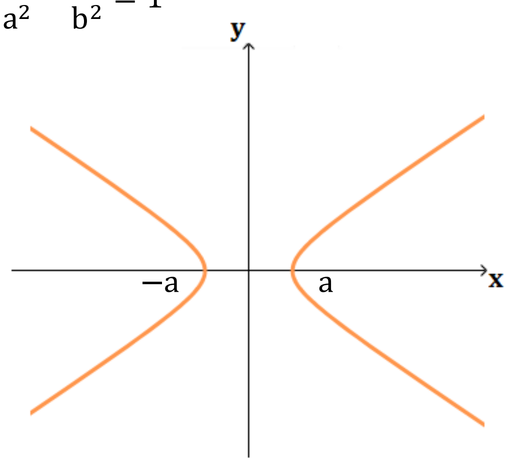
Circunferência

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo desse mesmo plano, denominado centro da circunferência.

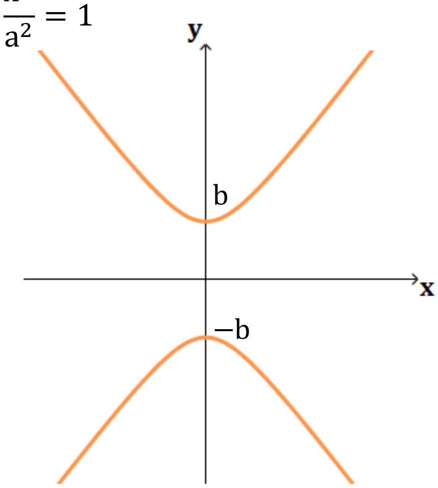


$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$,onde centro $C(h, k)$. Quando estamos com o centro C(0,0) temos a seguinte equação: $x^2 + y^2 = a^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



Hipérbole

Esboce o gráfico da função h definida por: **5**

5.1 $h(x) = x^2$

- Função quadrática (2º grau) incompleta - na forma ax^2 onde a=1;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(então podemos substituir qualquer valor em todo $\mathbb{R}$);**
- Temos $y = h(x) \implies y = x^2$:

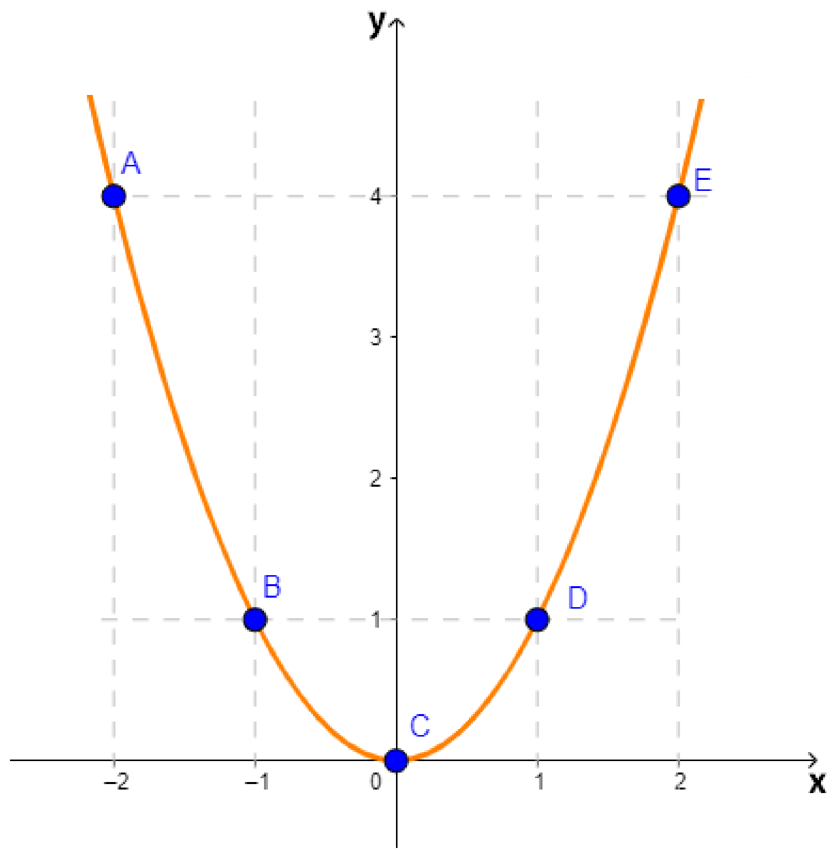
x	y
-2	**4**
-1	1
0	0
1	1
2	4

Basta substituir estes valores na função, exemplificando:

$$y = h(x) = x^2 \text{ se } x = -2$$

$$\mathbf{y = h(-2) = (-2)^2 = 4}$$

Gráfico



$h(x) = x^2 + 1$ **5.2**

- Função quadrática (2º grau) incompleta - na forma $ax^2 + c$ onde a=1 e c=1;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(então podemos substituir qualquer valor em todo $\mathbb{R}$);**
- Temos $y = h(x) \implies y = x^2 + 1$:

Ponto	x	y
A	**-2**	**5**
B	-1	2
C	0	1
D	1	2
E	2	5

Basta substituir estes valores na função, exemplificando:

$$y = h(x) = x^2 + 1 \text{ se } x = -2$$

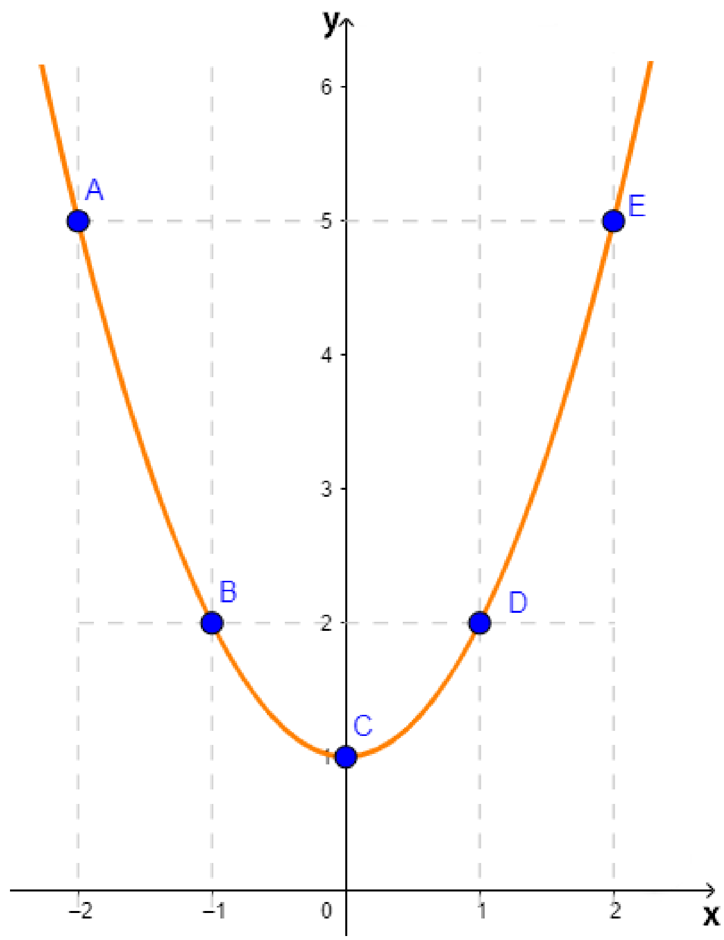
$$\boldsymbol{y = h(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5}$$

Gráfico

Sempre que tiveres uma equação do tipo $y = ax^2 + b$ onde a é uma constante, então para achar o vértice igualando x a zero (x=0) e achar o valor de y. Ou seja (0, valor de y).

Tendo $y = ax^2 + b$:

se a> 0 curva voltada para cima:



5.3 $h(x) = (x-1)^2$

- Função quadrática na forma $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$. Onde a=1;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(então podemos substituir qualquer valor em todo $\mathbb{R}$);**
- Temos $y = h(x) \implies y = (x-1)^2$:

Ponto	x	y
A	**-2**	**9**
B	-1	4
V(vértice)	0	1
D	1	0
E	2	1

Basta substituir estes valores na função, exemplificando:

$y = h(x) = (x-1)^2$ se $x = -2$

$$\boldsymbol{y = h(-2) = (-2-1)^2 = (-3)^2 = 9}$$

Quando estamos presentes a uma equação do segundo grau e pretende-se construir o gráfico deve-se achar o vértice e a intercessão com o eixo x e o eixo y. Fórmula para o Vértice:

$$V = \left(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}, -\frac{\Delta}{\boldsymbol{4a}}\right)$$

Intercessão com os eixos:

Com o eixo x: basta supor que x=0 e calcular o valor de y, e a coordenada o ponto será

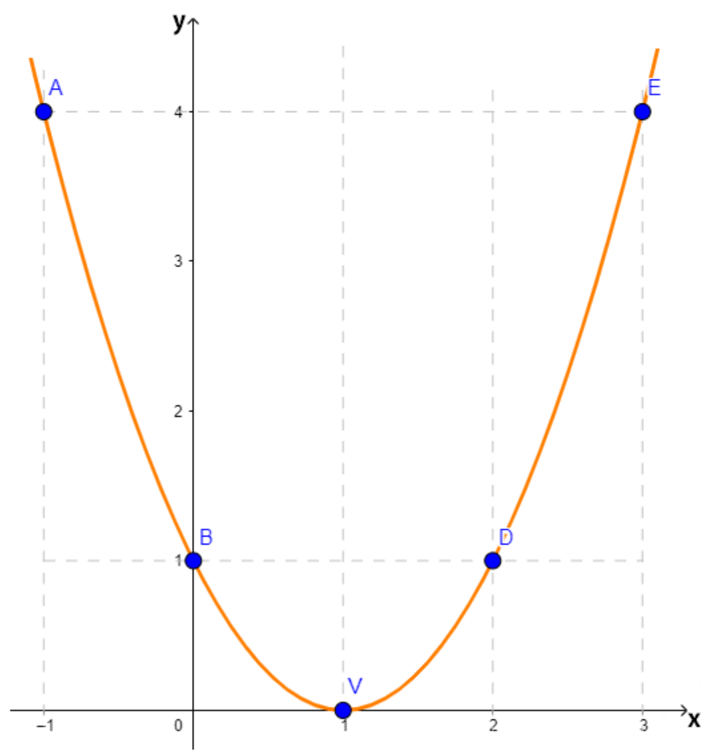
(0, valor de y calculado)

Com o eixo y: basta supor que y=0 e calcular o valor de y, e a coordenada o ponto será

(valor de x calculado, 0)

Intercessão com eixo x: (0, 1)
Intercessão com eixo y: (1, 0)

Gráfico



No gráfico é possível observar que foram calculados o vértice e as intercessões com os eixos. Tendo:

$h(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ aqui o $\Delta = 0$, $b = -2, a = 1$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{(-2)}{2(1)}, -\frac{0}{4(1)}\right) = (1, 0)$$

$h(x) = |x| + 1$ **5.4**

- Função modular;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(então podemos substituir qualquer valor em todo $\mathbb{R}$);**
- Temos $y = h(x) \implies y = |x| + 1$:

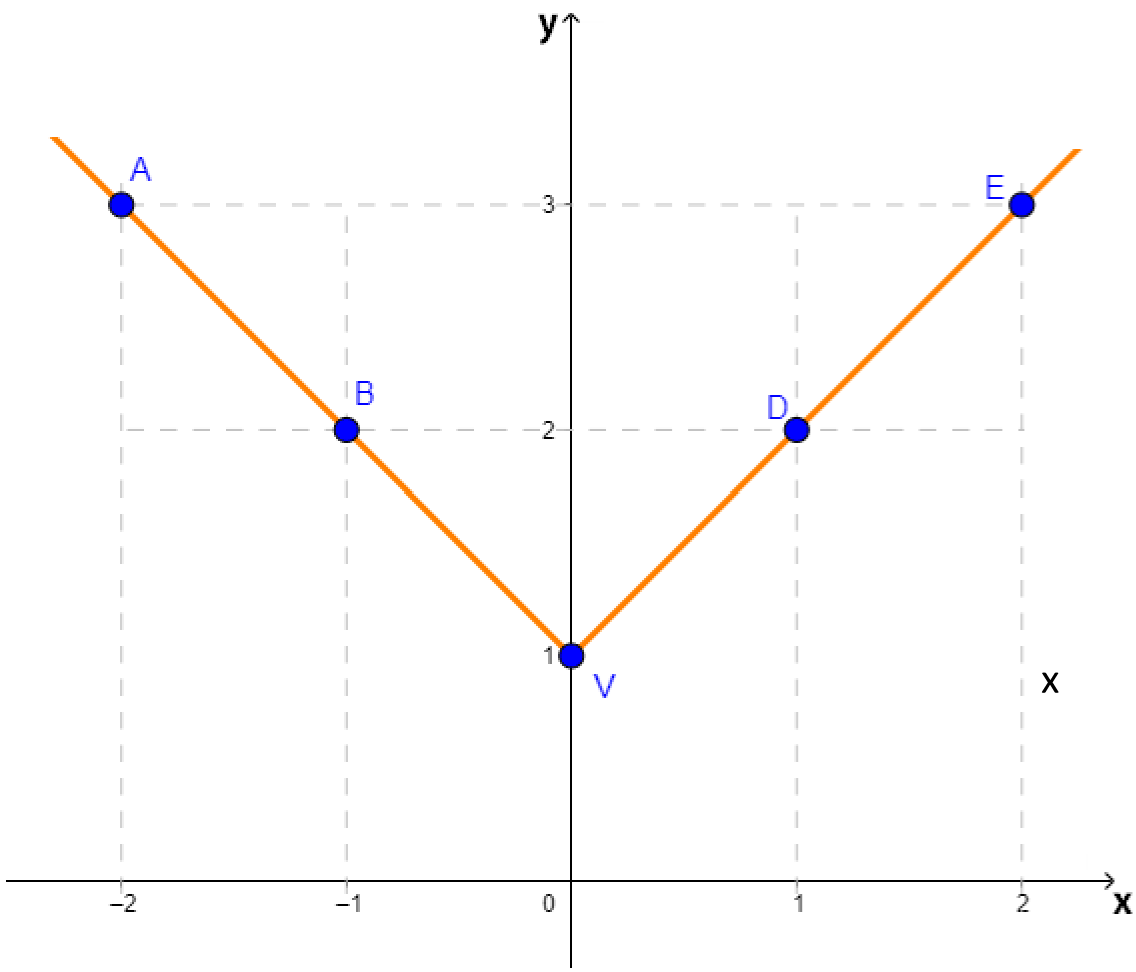
Ponto	x	y
A	**-2**	**3**
B	-1	2
V(vértice)	0	1
D	1	2
E	2	3

Basta substituir estes valores na função, exemplificando:

$y = h(x) = |x| + 1$ se $x = -2$

$$\boldsymbol{y = h(-2) = |-2| + 1 = 2 + 1 = 3}$$

Gráfico



Outra forma de analisar o exercício

Exercício 5.4

Nos casos em que temos uma função modular podemos abrir a função modular de modo a ver quais serão as rectas resultantes. Então sabendo que: $h(x) = |x| + 1 \rightarrow$

1º Passo: abrir a parte modular

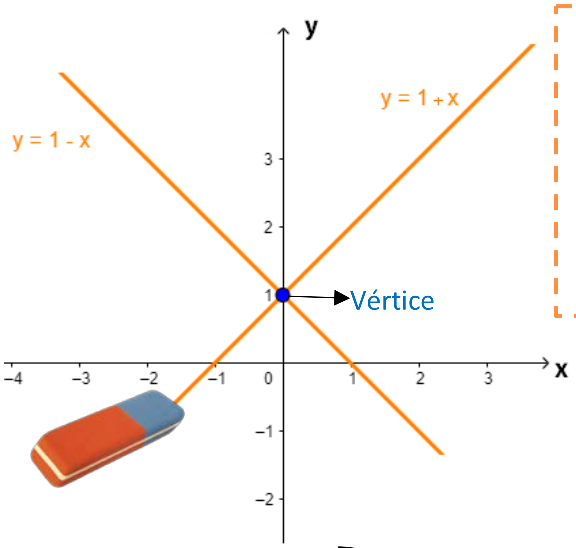
$$h(x) = |x| + 1 = \begin{cases} x + 1 & se \;\; x \geq 0 \\ -x + 1 & se \;\; x < 0 \end{cases}$$

Temos as rectas:

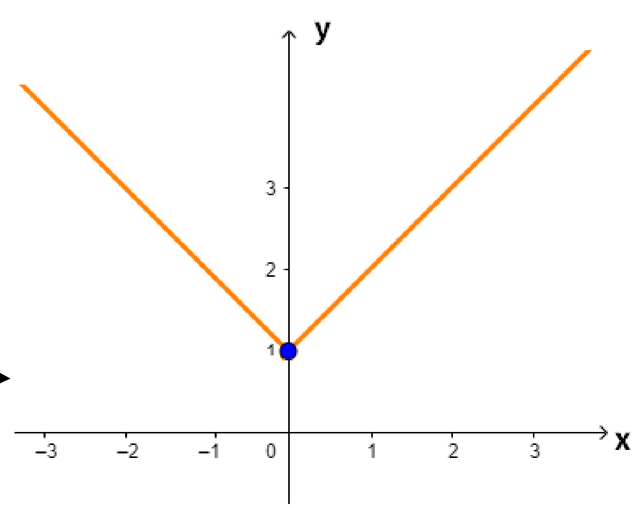
$h(x) = x + 1 \; se \; x \geq 0$ e

$h(x) = -x + 1 \; se \; x < 0$

2º Passo: traçar as rectas



Depois de traçar as linhas/rectas, apaga-se as partes que não correspondem ao intervalo da respectiva recta, por exemplo $\mathrm{h(x) = x + 1,\; x \geq 0}$, então a parte $x < 0$ será apagada e $\mathrm{h(x) = -x + 1, x < 0}$, a parte $x > 0$ será apagada.



5.5 $h(x) = x|x|$

- Função modular;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(então podemos substituir qualquer valor em todo $\mathbb{R}$);**
- Temos $y = h(x) \implies y = x|x|$:

Tendo conceitos de função modular então temos que:

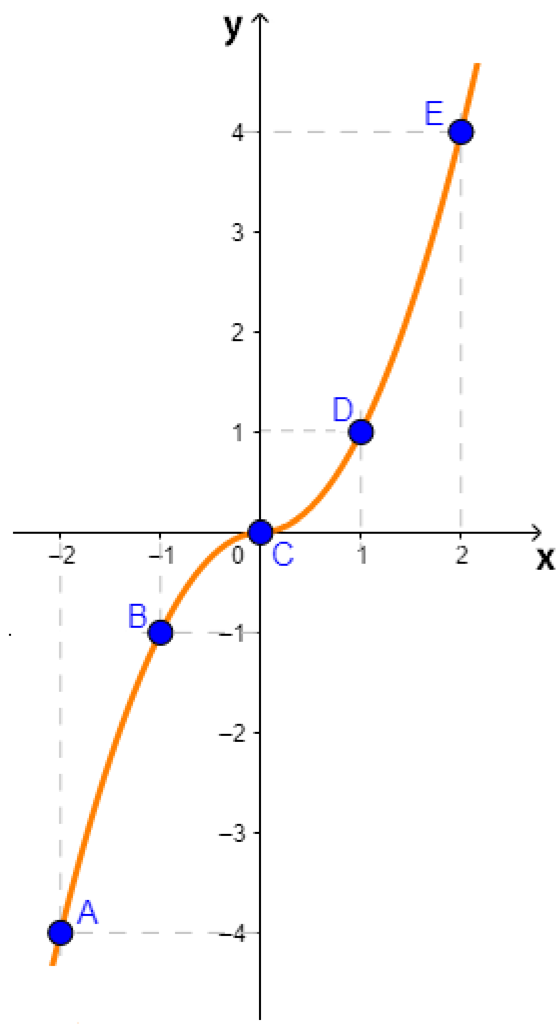
Ponto	x	y
A	**-2**	**-4**
B	-1	-1
C	0	0
D	1	1
E	2	4

Basta substituir estes valores na função, exemplificando:

$$y = h(x) = x|x| \text{ se } x = -2$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(-\mathbf{2}) = -2|-2| = -\mathbf{2}(\mathbf{2}) = -\mathbf{4}$$

Gráfico



Outra forma de analisar o exercício

Exercício 5.5

Nos casos em que temos uma função modular podemos abrir a função modular de modo a ver quais serão as rectas resultantes. Então sabendo que: $h(x) = x|x| \rightarrow$

1º Passo: abrir a parte modular

$$h(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) & se \ \ x \geq 0 \\ \\ x(-x) & se \ \ x < 0 \end{cases}$$

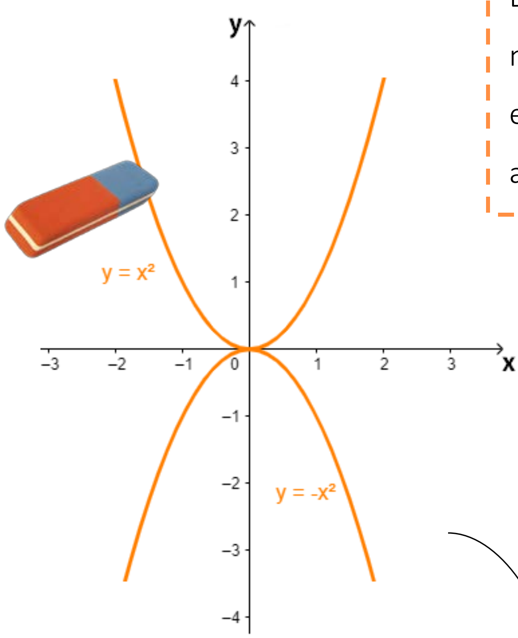
Temos as rectas:

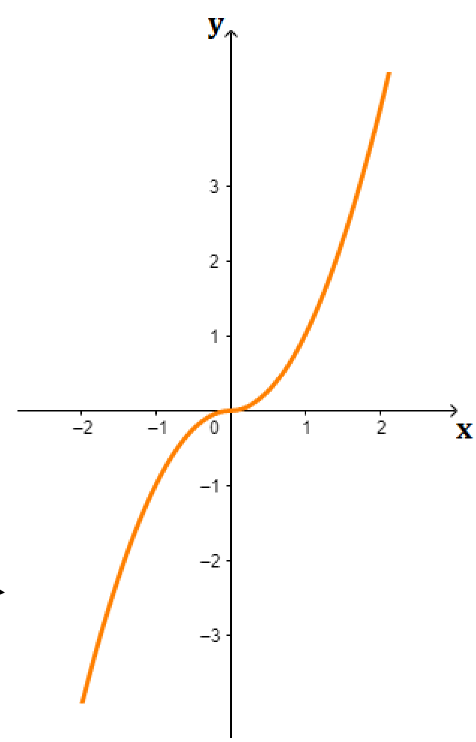
$h(x) = x^2 \ se \ x \geq 0$ e

$h(x) = -x^2 \ \ se \ x < 0$

2º Passo: traçar as rectas

Depois de traçar as linhas/rectas, apaga-se as partes que não correspondem com o intervalo da respectiva recta, por exemplo $\mathrm{h(x) = x^2,\ x \geq 0}$, então a parte $x < 0$ será apagada e $\mathrm{h(x) = -x^2, x < 0}$, a parte $x > 0$ será apagada.





$h(x) = \|x - 2\|$	**5.6**

- Função modular;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(então podemos substituir qualquer valor em todo $\mathbb{R}$);**
- Temos $y = h(x) \implies y = |x - 2|$:

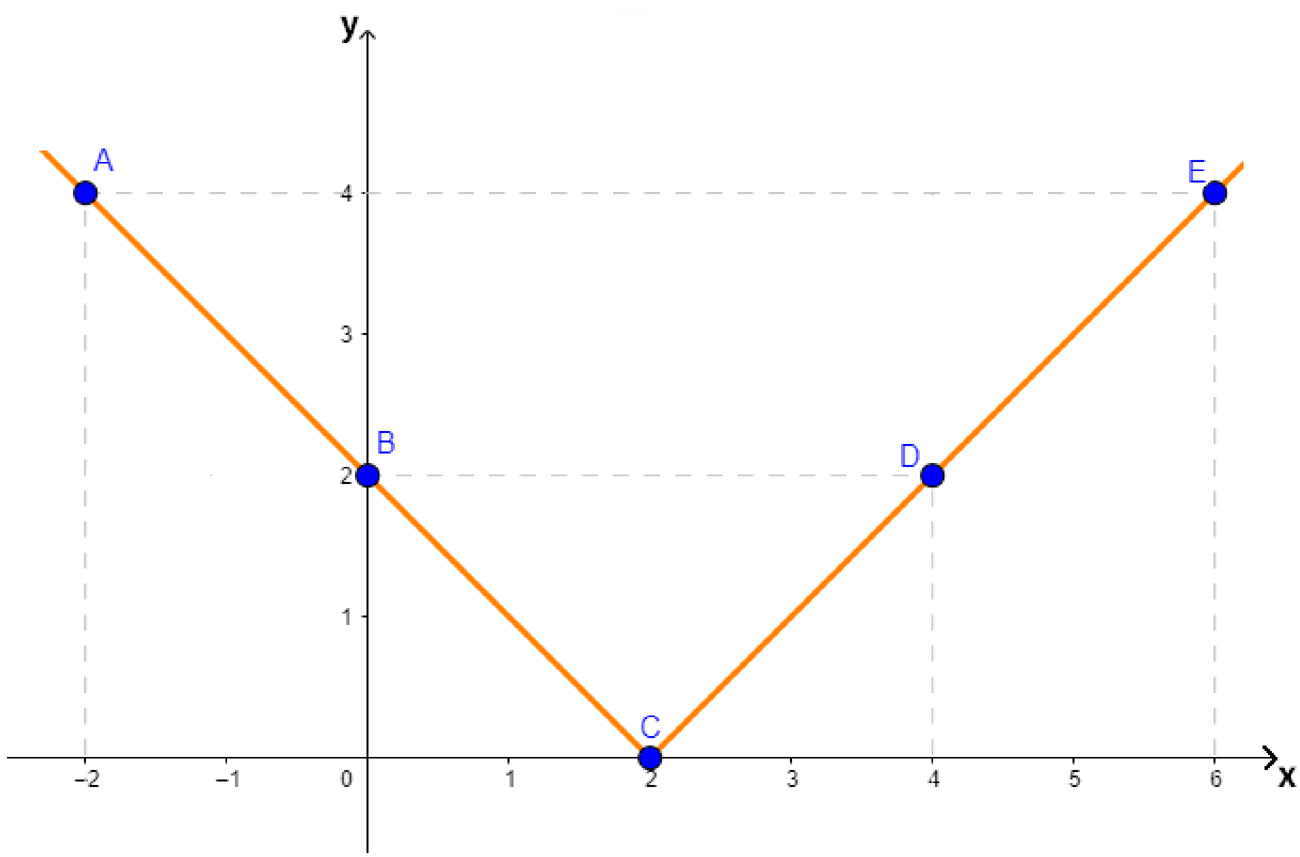
Ponto	x	y
A	**-2**	**4**
B	0	2
C	2	0
D	4	2
E	6	4

Basta substituir estes valores na função, exemplificando:

$y = h(x) = |x - 2|$ se $x = -2$

$$\boldsymbol{y = h(-2) = |-2 - 2| = |-4| = 4}$$

Gráfico



Outra forma de analisar o exercício

Exercício 5.6

Nos casos em que temos uma função modular podemos abrir a função modular de modo a ver quais serão as rectas resultantes. Então sabendo que: $h(x) = |x-2| \rightarrow$

1º Passo: abrir a parte modular

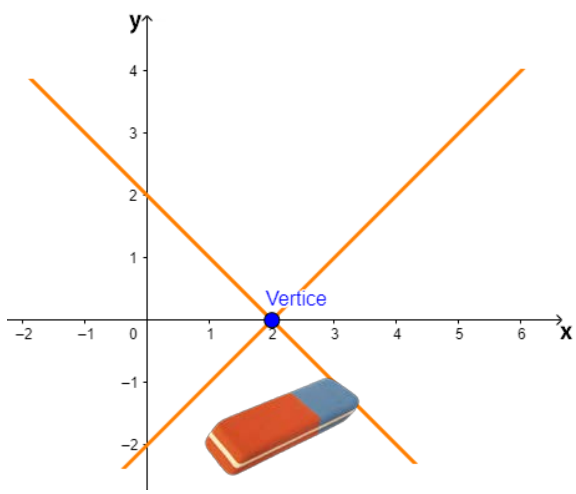
$$h(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 \quad se \;\; x-2 \geq 0 \\ \\ -(x-2) \;\; se \;\; x-2 < 0 \end{cases}$$

Temos as rectas:

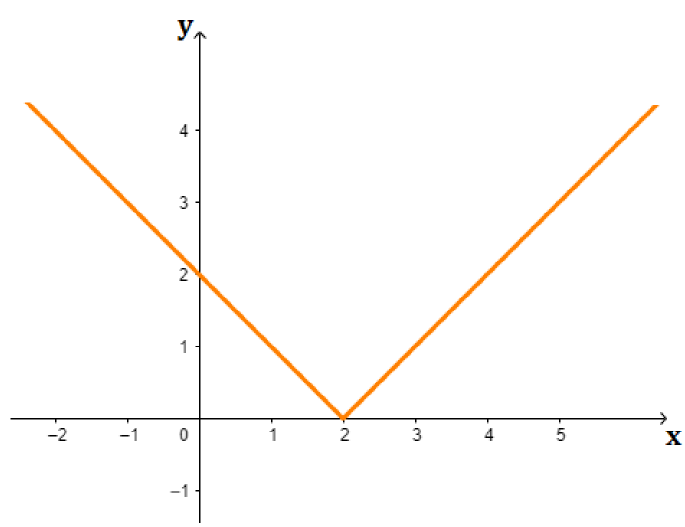
$h(x) = x - 2 \; se \; x \geq 2$ e

$h(x) = 2 - x \;\; se \; x < 2$

2º Passo: traçar as rectas



Depois de traçar as linhas/rectas, apaga-se as partes que não correspondem com o intervalo da respectiva recta, por exemplo $\mathrm{h(x) = x - 2,\;\; x \geq 2}$, então a parte $\mathrm{x < 2}$ será apagada e $\mathrm{h(x) = 2 - x, x < 2}$, a parte $x > 2$ será apagada.



5.7 $h(x) = 1 + x + |x|$

- Função modular;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(então podemos substituir qualquer valor em todo $\mathbb{R}$);**
- Temos $y = h(x) \implies y = 1 + x + |x|$:

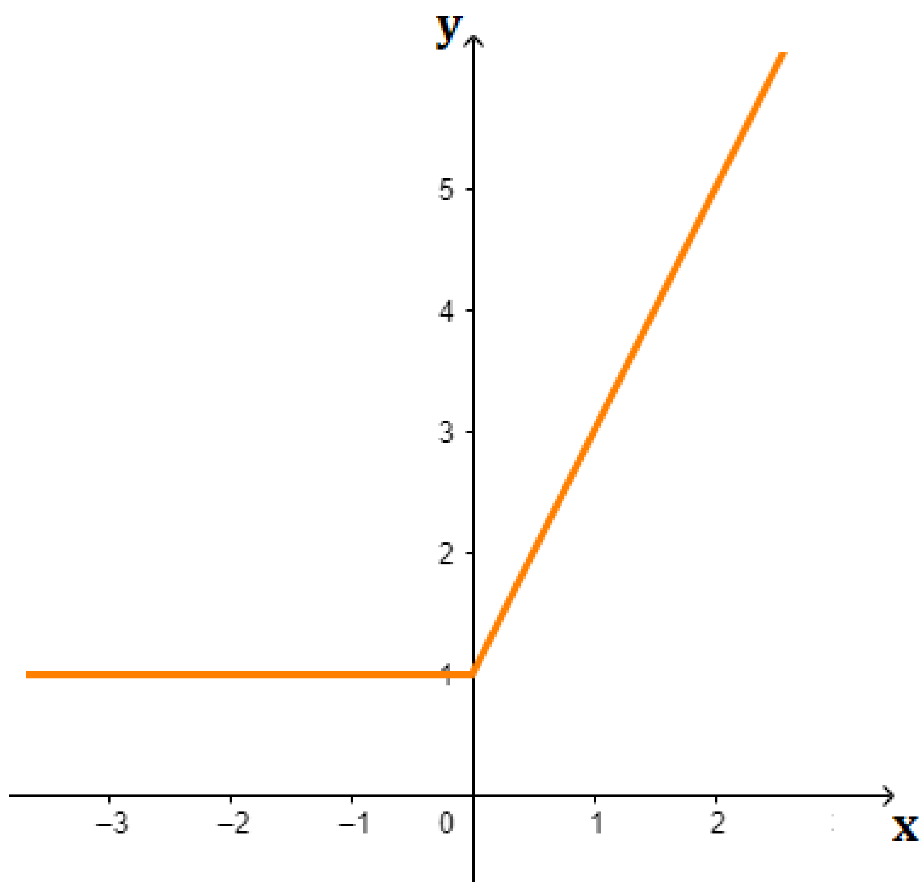
x	y
-2	**1**
-1	1
0	1
1	3
2	5

Basta substituir estes valores na função, exemplificando:

$y = h(x) = 1 + x + |x|$ se $x = -2$

$$\boldsymbol{y = h(-2) = 1 - 2 + |-2| = -1 + 2 = 1}$$

Gráfico



Outra forma de analisar o exercício

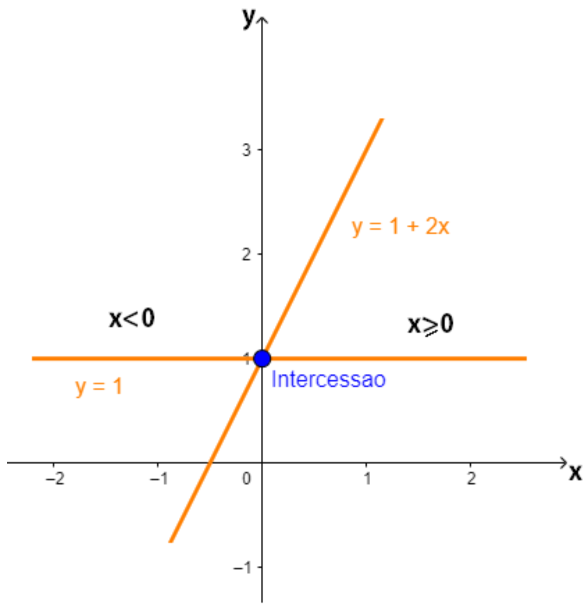
Exercício 5.7

Nos casos em que temos uma função modular podemos abrir a função modular de modo a ver quais serão as rectas resultantes. Então sabendo que: $h(x) = 1 + x + |x| \rightarrow$

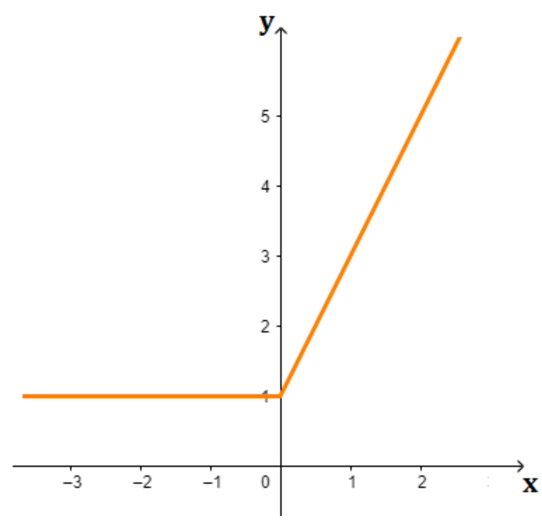
1º Passo: abrir a parte modular

$$h(x) = 1 + x + |x| = \begin{cases} x + x + 1 \quad se \;\; x \geq 0 \\ \\ -\cancel{x} + \cancel{x} + 1 \quad se \;\; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 \quad se \;\; x \geq 0 \\ \\ 1 \quad se \;\; x < 0 \end{cases}$$

2º Passo: traçar as rectas



Depois de traçar as linhas/rectas, apaga-se as partes que não correspondem com o intervalo da respectiva recta, por exemplo $\mathrm{h(x)} = 2\mathrm{x} + 1,\ \mathrm{x} \geq 0$, então a parte $x < 0$ será apagada e $\mathrm{h(x)} = 1, \mathrm{x} < 0$, a parte $x > 0$ será apagada.



$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ , & se \quad x \leq 0 \\ \\ 1\ , se & x > 0 \end{cases}$$

5.8

- Função definida por parâmetros;
- Temos $y = h(x) \implies y = \frac{1}{2}\ se\ x\ \leq 0 \quad e\ y = 1\ se\ x > 0$

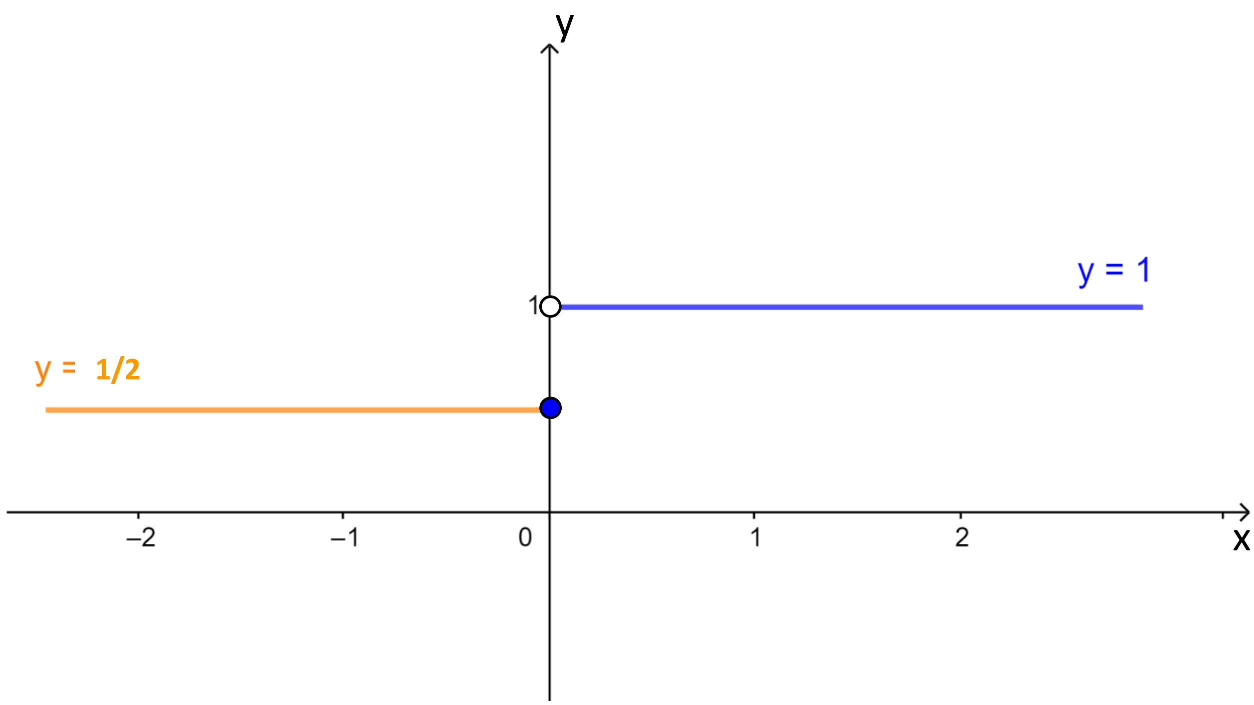
x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$
1	1

Basta substituir analisar

se $x = -2$ então $x\ \leq 0$ e o valor de y é $\frac{1}{2}$

se $x = 1$ então $x\ > 0$ e o valor de y é 1

Então para valores maiores que zero (0) y=1 e para valores menores e para o próprio zero y= $\frac{1}{2}$



5.9

$$h(x) = \begin{cases} -x\ , & se \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x\ , & se \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

- Função definida por parâmetros;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(então podemos substituir qualquer valor em todo $\mathbb{R}$);**
- Temos $y = \mathrm{h(x)} \implies \mathrm{y} = -\mathrm{x}$ se $-2 \leq \mathrm{x} \leq 0$ e $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ se $0 < \mathrm{x} < 2$

x	y
-2	**2**
-1	1
0	0
1	1
2	2

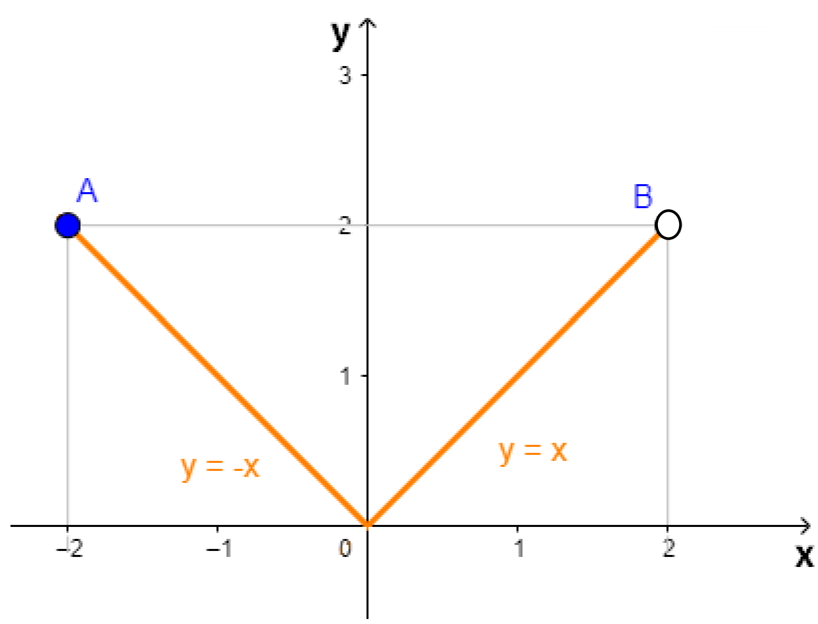
Basta substituir os valores nos intervalos mencionados. No qual, os valores no intervalo $[-2;0]$ devem ser substituídos em $h(x) = -x$ e os valores no intervalo $]0;2[$ devem ser substituídos em $h(x) = x$. Exemplo:

Se x=-2, sabendo que pertence em $-2 \leq \mathrm{x} \leq 0$ então

$$\boldsymbol{y = h(x) = -(-2) = 2}$$

Gráfico

Os gráficos para as funções devem obedecer às condições dadas, isto é, o gráfico da função $h(x) = -x$ deve estar em $[-2,0]$ e o da função $h(x) = x$ no intervalo $]0,2[$, fazendo com que seja limitado pelas rectas x=2, x=-2 e y=2.



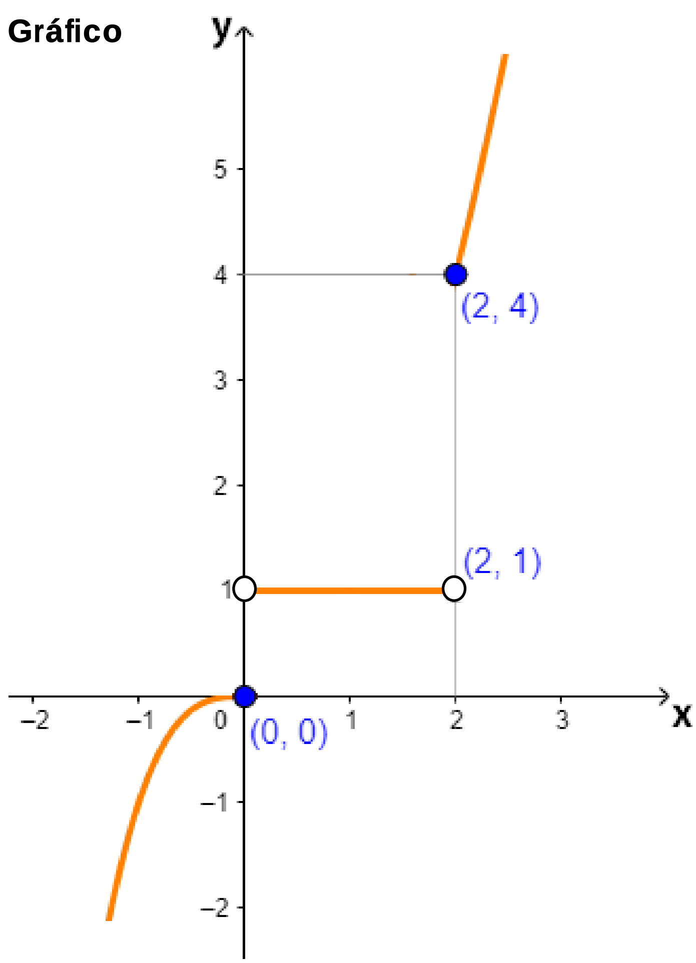
$$h(x) = \begin{cases} x^3, & se \quad x \leq 0 \\ 1, & se \quad 0 < x < 2 \\ x^2, & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

5.10

- Função definida por parâmetros;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(visto que as funções dentro do parâmetro são polinomiais);**
- Temos $y = h(x) \implies \mathrm{y = x^3 \;\; se\, x \; \leq 0,\;\; y = 1 \;\; se}\; 0 < \mathrm{x} < 2 \;\; \mathrm{e} \;\; \mathrm{y = x^2 \;\; se\, x} \geq 2$

x	y
-2	**-8**
-1	-1
0	1
1	1
2	1
3	9

Gráfico



5.11

$$h(x) = \begin{cases} -1 \,, & se \quad x < 0 \\ x^2 \,, & se \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Função definida por parâmetros;
- Domínio da função: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ **(visto que as funções dentro do parâmetro são polinomiais);**
- Temos $y = h(x) \implies y = -1$ se $x < 0$ e $y = x^2$ se $0 \leq x \leq 1$

x	y
-2	**-1**
-1	-1
0	0
1	1

Basta substituir os valores nos intervalos mencionados.

Os valores no intervalo $]-\infty; 0[$ são iguais a -1 e os valores no intervalo $[0; 1]$ devem ser substituídos em $h(x) = x^2$. Ex: se x=-2

$$\boldsymbol{y = h(-2) = -1}$$

Gráfico

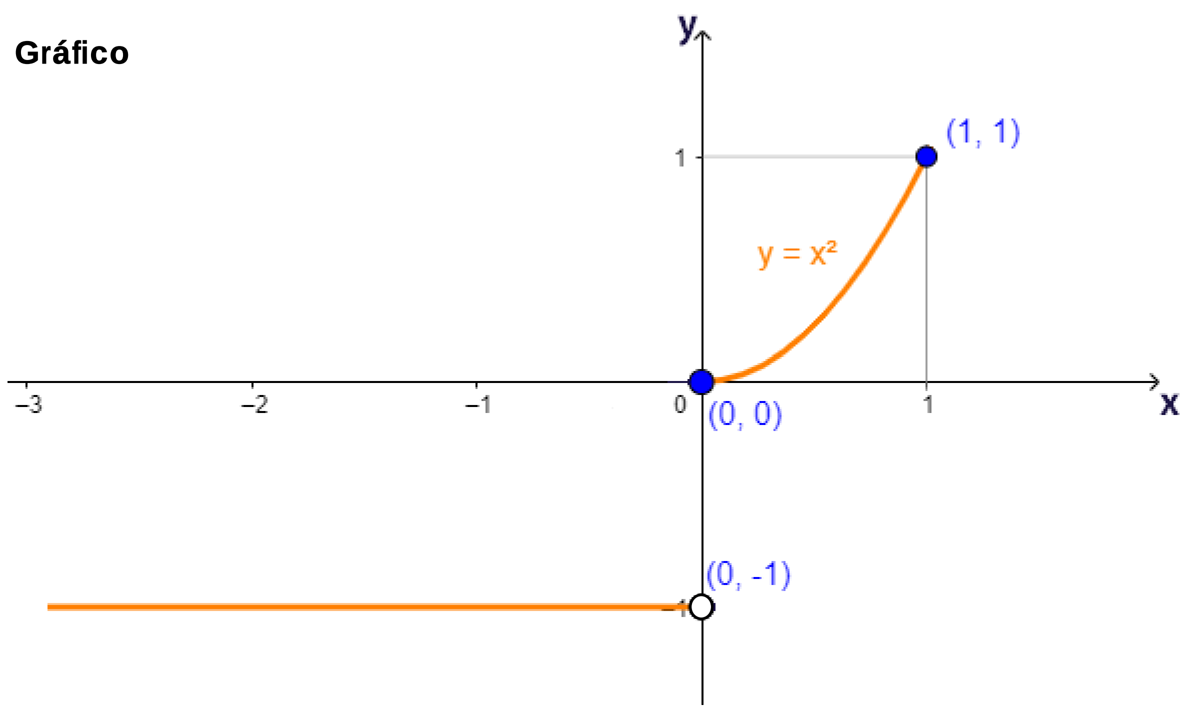
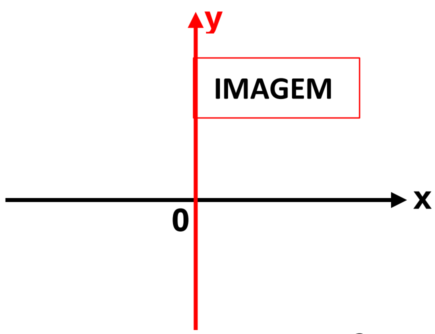


Imagem De Funções

Como determinar o conjunto imagem?

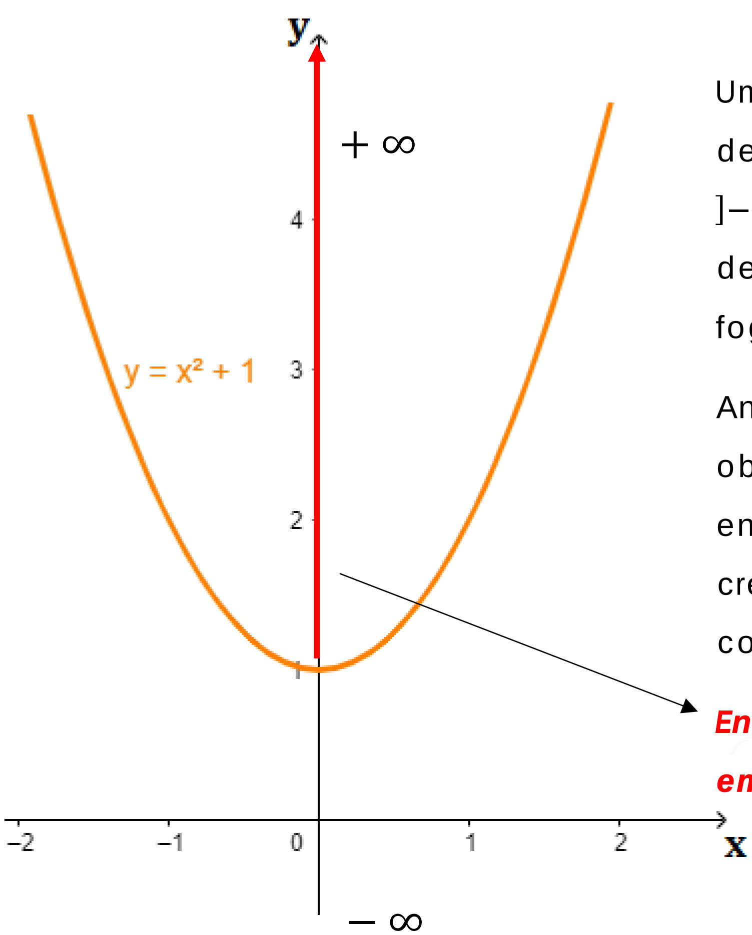
Diferente do domínio, a imagem de uma função é analisada no eixo y.



Para analisar ou determinar a imagem de uma função, graficamente basta analisar o comportamento do gráfico no eixo y.

Exemplos:

Temos a função $y = x^2+1$ e o seu gráfico abaixo:



Uma reta tem sempre uma variação de valores compreendidos de $]-\infty; +\infty[$ que em outras palavras é designado $\mathbb{R}$, então o eixo y não foge desta regra.

Analisando o gráfico é possível observar que o vértice está em (0, 1) então inicia em 1 para y e vai crescendo visto que o gráfico continua até $+\infty$.

Então é possível observar que inicia em 1 e vai ate $+\infty$***.*** Então:

$$Im_f = [1; +\infty[$$

6- *Determine o conjunto imagem da função g definida por*

Sobre imagem de uma função...

Imagem de uma função

Para entender muito bem qual é a imagem de uma função, deve primeiro saber claramente o que é o domínio de uma função.

Lembra que o domínio de uma função é o intervalo de valores de x para o qual existe f(x), ou seja, os valores de x, para os quais f(x) tem resultado.
Graficamente, o domínio é visto no eixo x, pois esses são os valores x para os quais a função existe, ou seja, a função é representada acima.

Como é calculada a imagem de uma função?

A imagem está intimamente relacionada ao domínio de uma função, pois para calcular a imagem, é necessário calcular o domínio antecipadamente. A maneira como é calculada dependerá do tipo de função.

Imagem de funções polinomiais

Nessas funções, o domínio é todo $\mathbb{R}$. Enquanto o domínio for todo $\mathbb{R}$, a imagem será todo R também, exceto as funções quadráticas (segundo grau).

$$Im = \mathbb{R} \quad \text{(excepto para funções quadráticas)}$$

Imagem de funções irracionais

Em funções irracionais como, por exemplo:

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Para calcular a imagem, primeiro precisamos calcular seu domínio. O domínio dessa função é:

$$D_{f(x)} = [-2, +\infty[$$

Depois de termos o domínio, calculamos o valor de f(x) para cada extremidade do domínio:

$$f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$$

$$f(+\infty) = \sqrt{+\infty + 2} = +\infty$$

Esses dois valores de f (x) correspondem aos fins do intervalo de valores na imagem; portanto, a imagem dessa função é:

$$Im = [0, +\infty[$$

Imagem de funções logarítmicas

A imagem das funções logarítmicas é toda $\mathbb{R}$, por definição, independentemente do seu domínio.

Imagem de funções racionais

O cálculo da imagem das funções racionais é um pouco mais complexo do que os casos anteriores. Para calcular o domínio de uma função racional, devemos primeiro calcular sua função inversa, que é designada como:

$$f^{-1}(x)$$

Entre uma função e sua inversa, essas duas condições são atendidas:

1- O domínio da função inversa é igual à imagem de f:

$$D_{f^{-1}(x)} = Im_{\,f(x)}$$

2- A imagem de f-1 é o domínio de f:

$$Im_{\,f^{-1}(x)} = D_{f(x)}$$

Portanto, uma vez obtida a função inversa, temos que calcular seu domínio, pois o domínio da função inversa será a imagem da função original.

Aqui está um exemplo passo a passo: Qual é a imagem da próxima função?

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Vamos calcular sua função inversa. O domínio da função inversa será a imagem dessa função.

Etapas para calcular o inverso de uma função:

Chamamos f(x)=y:

$$y = \frac{1}{1+x}$$

Agora devemos isolar o x, deixando-o sozinho no primeiro membro. Para fazer isso, passamos o denominador (1+x) para o membro a esquerda multiplicando o y, e este passa para o membro a direita como denominador do 1:

$$1 + x = \frac{1}{y}$$

Agora isolamos x:

$$x = \frac{1}{y} - 1$$

Depois de encontrar o x, trocamos: pelo x chamamos de $f^{-1}(x)$ e pelo y chamamos de x:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$$

Agora que temos a função reversa, podemos calcular seu domínio:

$$D_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

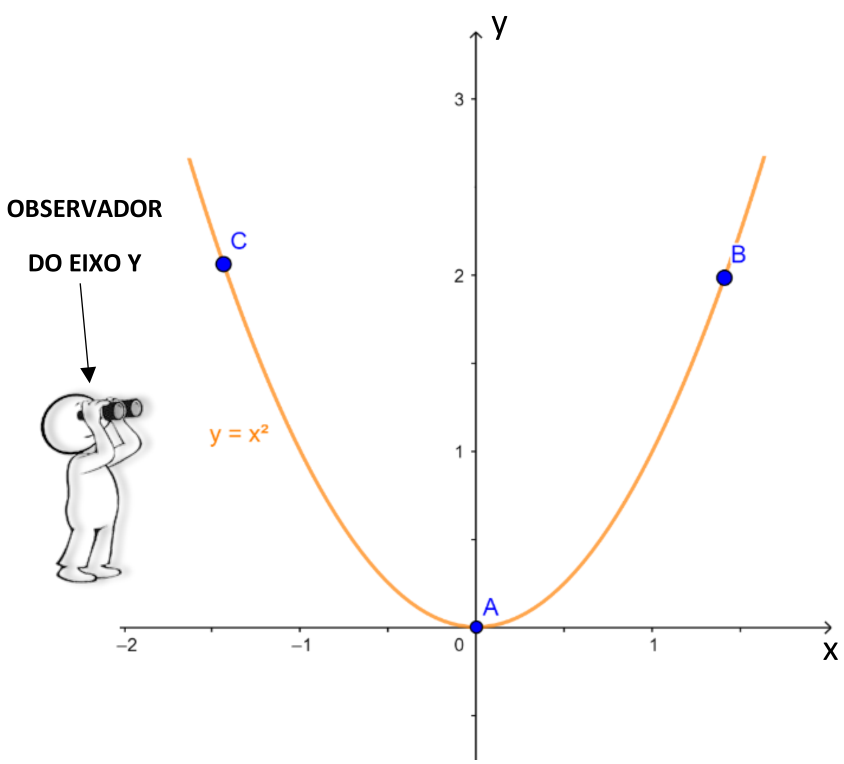
O domínio da função inversa é a imagem da função original:

$$Im_{\;f^{-1}(x)} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Observação

O conceito de inversa de uma função aqui é apenas para o estudante ter a noção que a partir da inversa de uma função racional podemos determinar a imagem.

6.1 $g(x) = x^2$



A função tem um início em y=0 e vai até $+\infty$ então a imagem da função é:

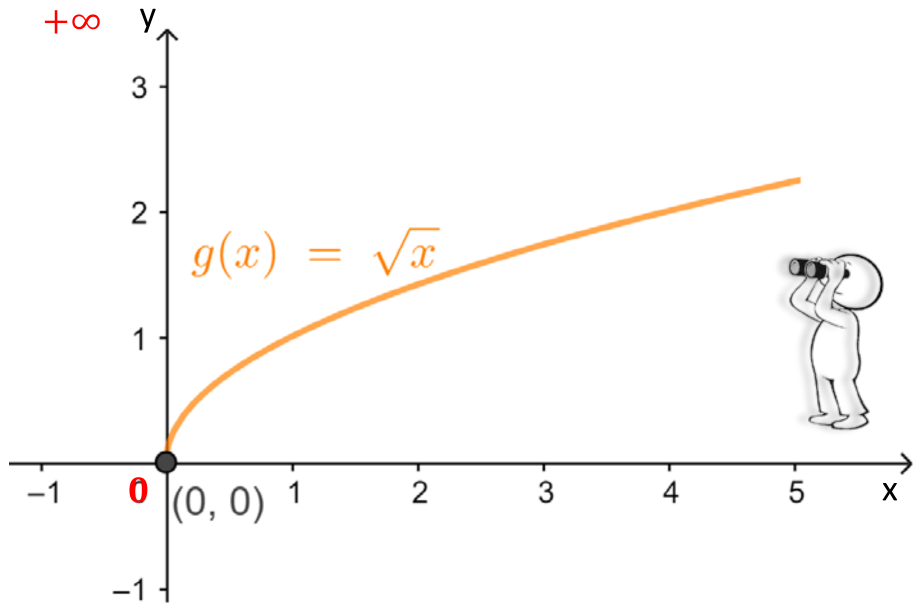
$$Im_g = [0; +\infty[$$

OBS: para construir o gráfico basta seguir os passos do exercício 5. Crie uma tabela para ajudar na construção do gráfico só depois analise a imagem.

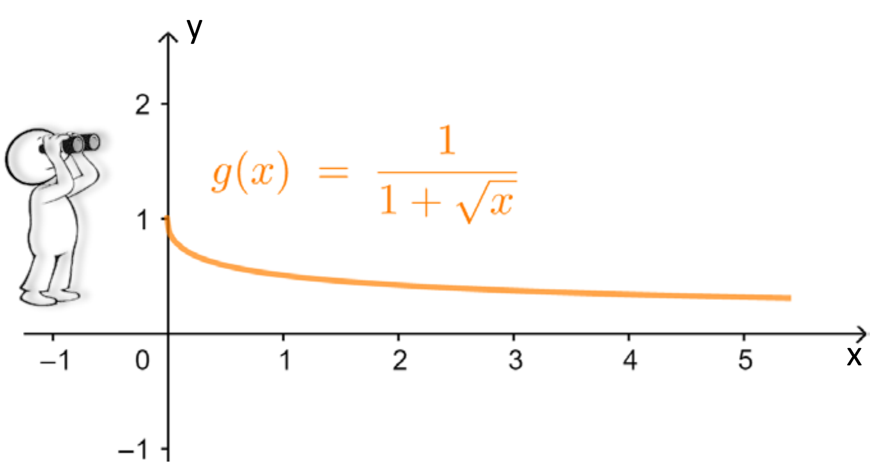
$g(x) = \sqrt{x}$ 6.2

A função tem um início em y=0 e vai até +∞ então a imagem da função é:

$$Im_g = [0; +\infty[$$



6.3 $g(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$



É possível observar no gráfico que a função vai decrescendo de y=1 até quase y≈0. Se construirmos uma tabela analisando quando supormos valores de x, y vai decrescendo e nunca se aproxima a zero.

Considerando o domínio da função que é $D_f = [0; +\infty[$ isso para x, então substituindo vários valores de x compreendido neste domínio y nunca vai dar zero sempre dará um valor aproximado de zero. Então temos início em **y=1.**

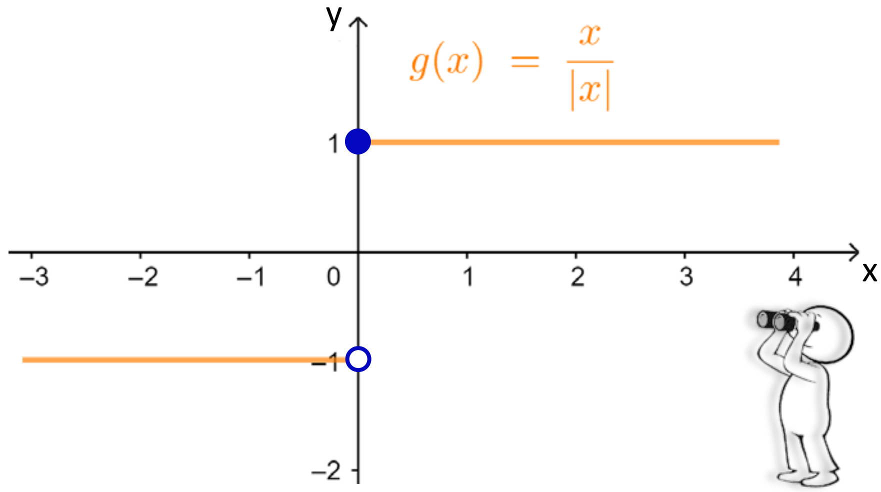
Então a imagem será: $Im_g =]0; 1]$

$g(x) = \frac{x}{|x|}$ 6.4

Temos uma função modular no denominador então:

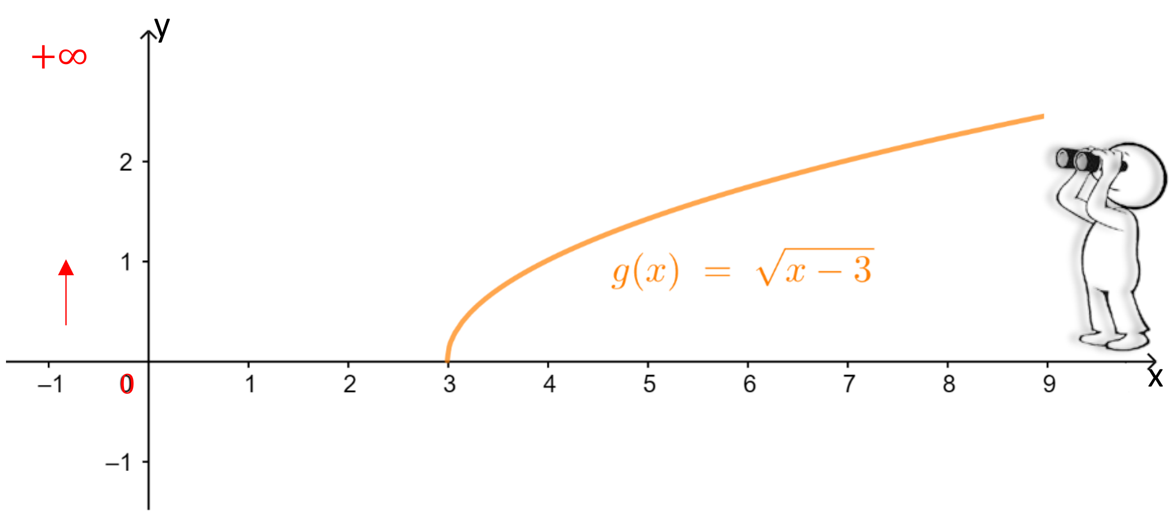
$$g(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} & se \quad x \geq 0 \\ \frac{x}{-x} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & se \quad x \geq 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$



Então quer dizer que substituindo qualquer valor de x na função o valor de y nunca ultrapassará o -1 e 1 então: $y = 1\ e\ y = -1.$

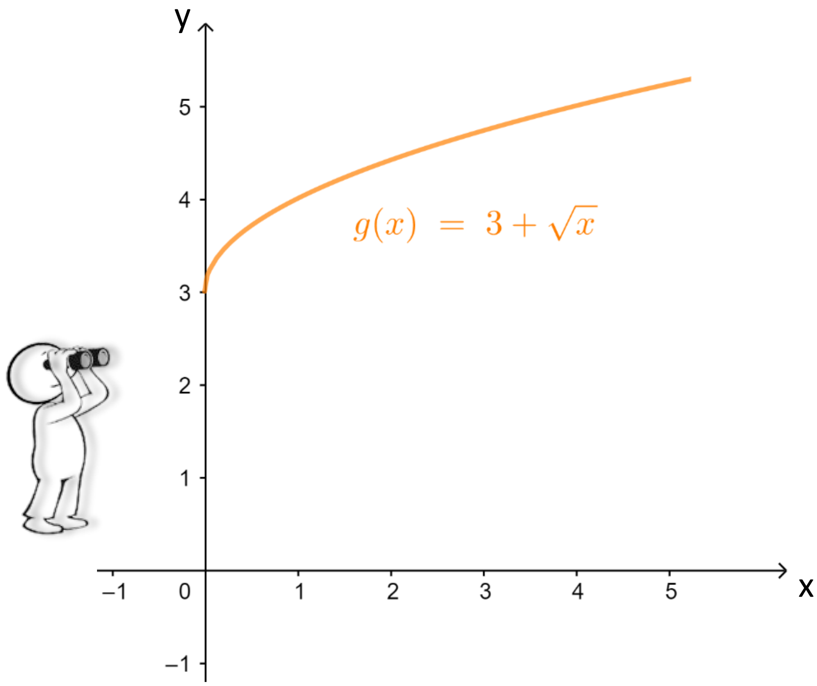
6.5 $g(x) = \sqrt{x-3}$



Olhando para o gráfico a função tem início em y=0 e cresce até $+\infty$ então:

$$Im_g = [0; +\infty[$$

$g(x) = 3 + \sqrt{x}$ 6.6



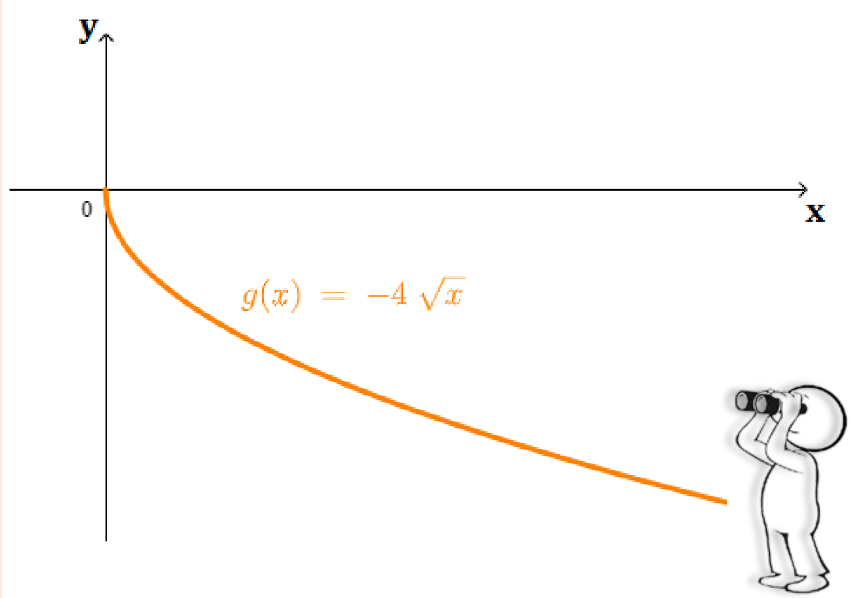
A função tem um início em y=3 e vai até $+\infty$ então a imagem da função é:

$$Im_g = [3; +\infty[$$

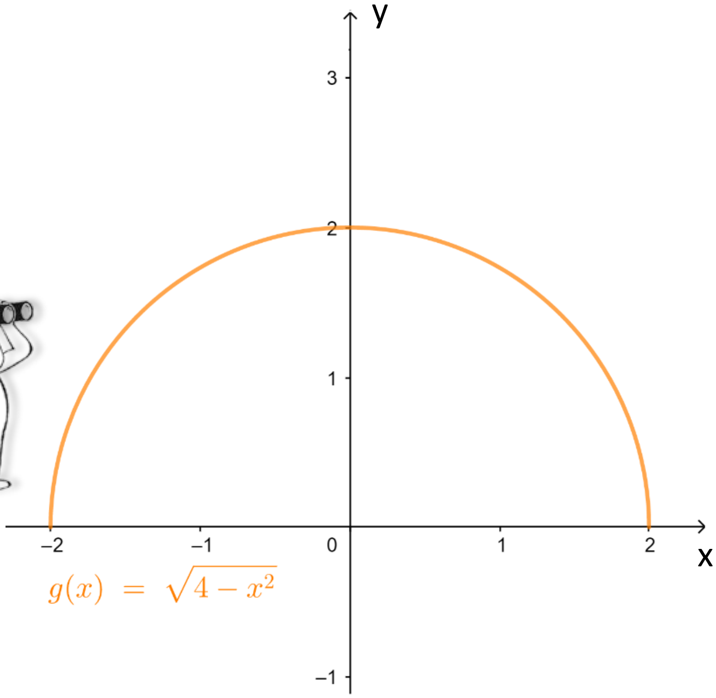
6.7 $g(x) = -4\sqrt{x}$

A função tem um início em y=0 e vai até $-\infty$. É possível observar isso olhando para o gráfico y sai de 0 e vai decrescendo, ou seja, vai tomando valores negativos, então a imagem da função é:

$$Im_g =]-\infty; 0]$$



$g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **6.8**



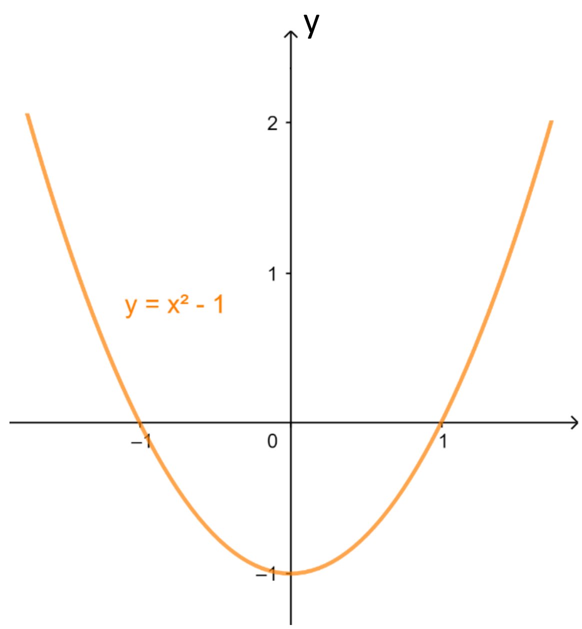
É possível observar que é uma semi-circunferência olhando para o gráfico especificamente no eixo y tem início em y=0 e fim em y=2 como os dois valores pertencem ao domínio da função então o intervalo será fechado, então a imagem será:

$$Im_g = [0; 2]$$

6.9 $g(x) = x^2 - 1$

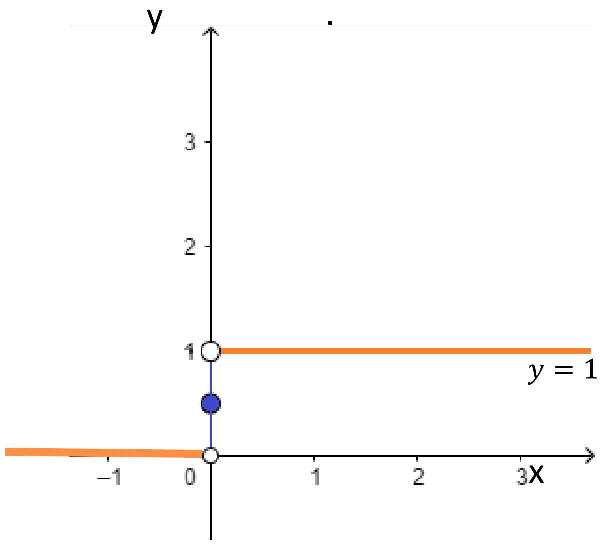
A função tem um início em y= -1 e vai até $+\infty$ então a imagem da função é:

$$Im_g = [-1;\ +\infty[$$



6.10

$$g(x) = \begin{cases} 0 \ , \ se & x < 0 \\ \dfrac{1}{2} \ , \ se & x = 0 \\ 1 \ , \ se & x > 0 \end{cases}$$



Nesta função para todos os valores de x, quando $x < 0$ o valor da função (y) é 0, quando $x > 0$ o valor de y é 1 e quando x igual à 0 y=$\frac{1}{2}$.

Portanto a imagem será:

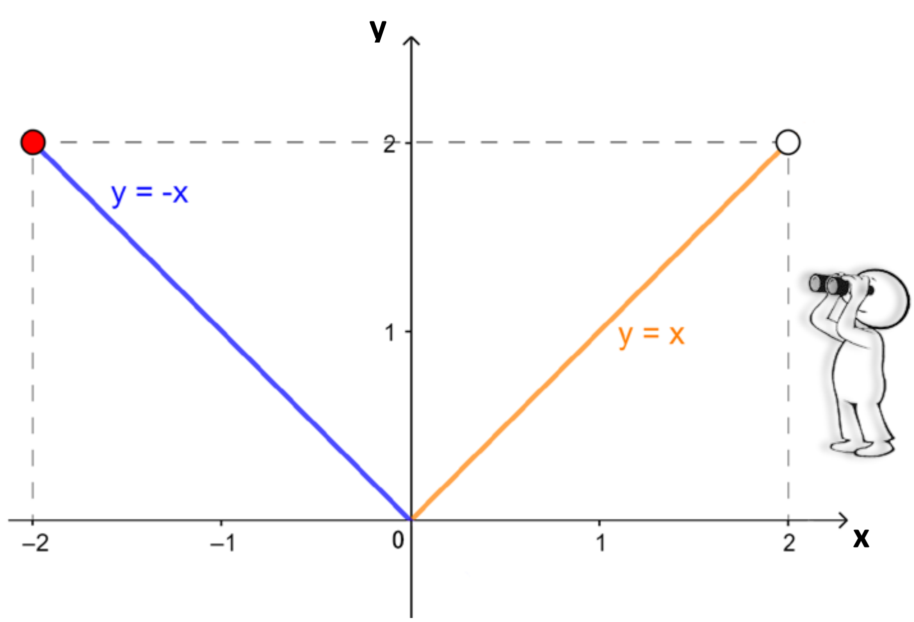
$$Im_g = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

6.11

$$g(x) = \begin{cases} -x \ , \ se & -2 \leq x \leq 0 \\ x \ , \ se & 0 < x < 2 \end{cases}$$

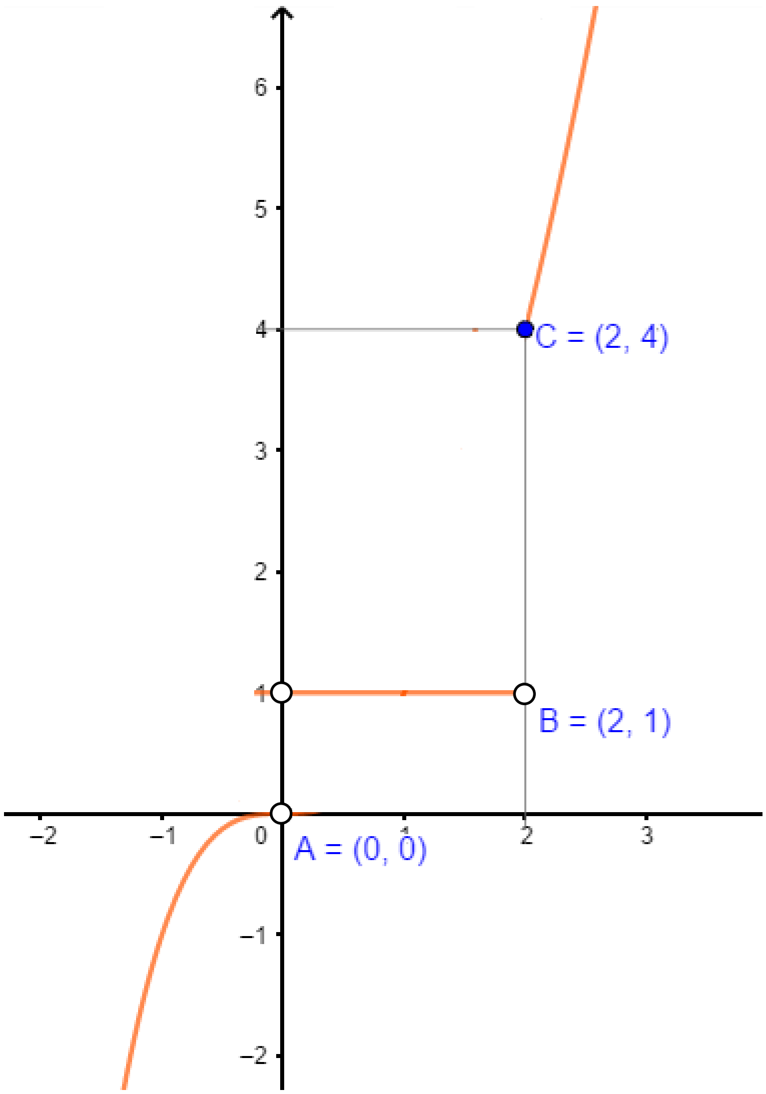
De 0 à 2 a nossa função é x e de -2 à 0 é –x, para x=2, y é 2 e para x=-2, y é 2 também, portanto a nossa imagem será:

$$Im_g = [0;\ 2]$$



$$g(x) = \begin{cases} x^3 \quad , \quad se \qquad\qquad x < 0 \\ 1 \quad , \quad se \qquad 2 < x < 0 \\ x^2 \quad , \quad se \qquad\qquad x \geq 2 \end{cases}$$

6.12

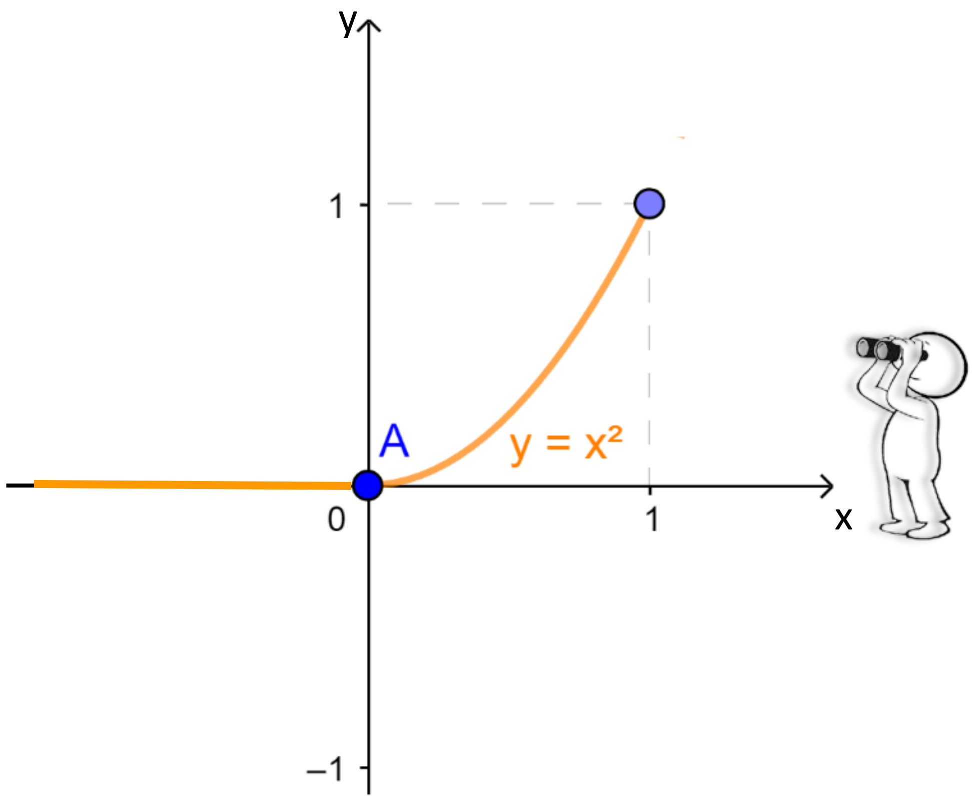


Para valores menores que 0, a função decresce para $-\infty$, no intervalo $]0;\ 2[$ a função tem valor 1, enquanto que para valores iguais ou maiores a 2, a função cresce. A imagem é:

$$Im_g =]-\infty;\ 0] \cup \{1\} \cup [4;\ +\infty[$$

6.13

$$g(x) = \begin{cases} 0 \ , \ se & x \leq 0 \\ x^2 \ , \ se & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



A função tem um início em y= 0 e vai até 1 então a imagem da função é:

$$Im_g = [0,1]$$

Observação

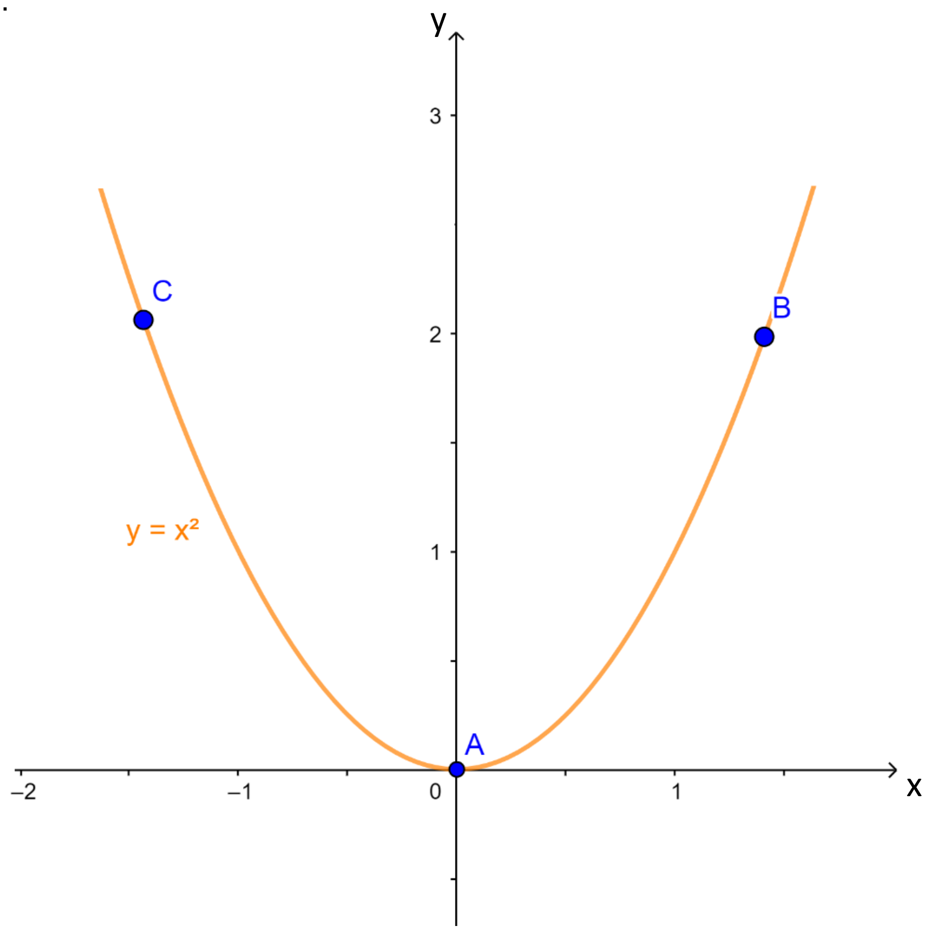
O gráfico ajuda muito na análise da imagem de uma função, bem como o comportamento dos valores quando construímos uma tabela.

Paridade De Funções

Como determinar a paridade de uma função?

Dada uma função f: A⟶ B, dizemos que f é **par** se, e somente se, ***f(x)=f(-x)*** para todo x ∈ A. Ou seja: os valores simétricos devem possuir a mesma imagem.

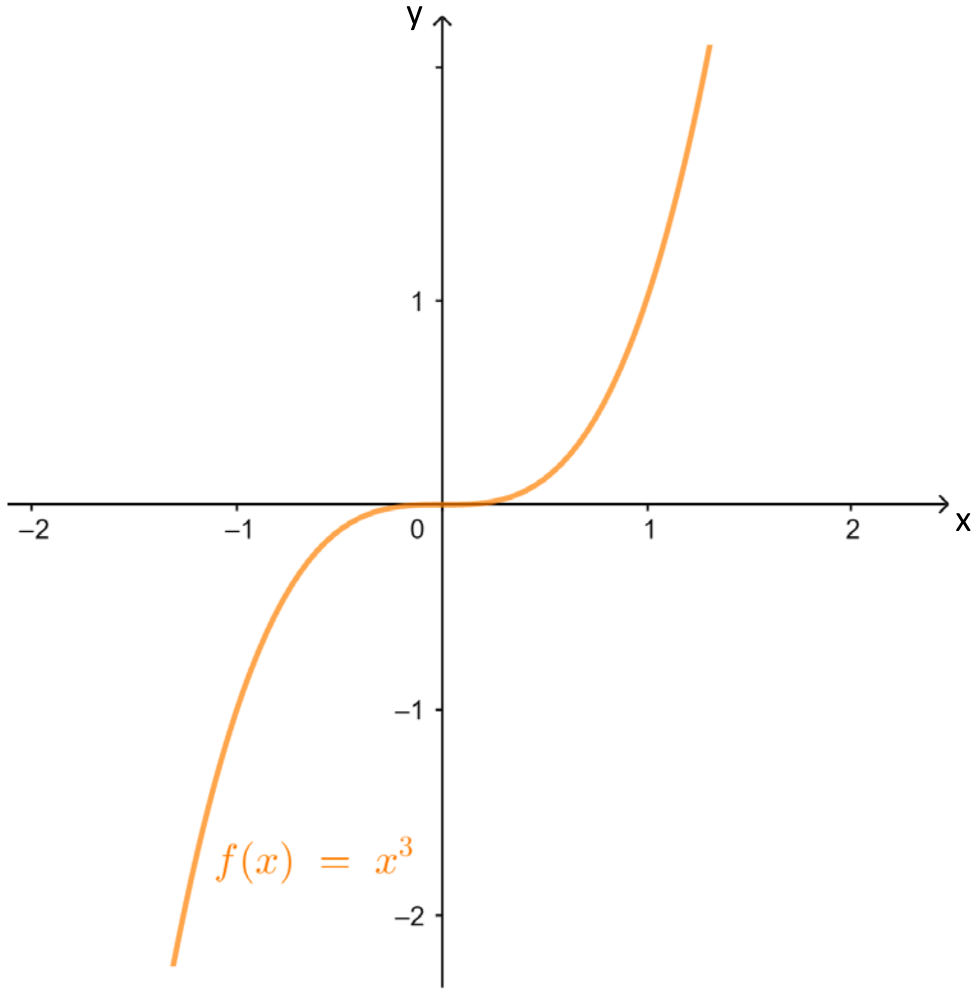
Por exemplo, a função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = x^2}$ é uma função par, pois $\mathbf{f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)}$. Podemos notar a paridade dessa função observando o seu gráfico:



Notamos no gráfico que existe uma simetria em relação ao eixo vertical. Elementos simétricos têm a mesma imagem. Os elementos 2 e –2, por exemplo, são simétricos e possuem a imagem 4.

Por outro lado, dada uma função f: A⟶B, dizemos que f é **ímpar** se, e somente se, ***f(-x)= -f(x)*** para todo x ∈ A. Ou seja: valores simétricos possuem imagens simétricas.

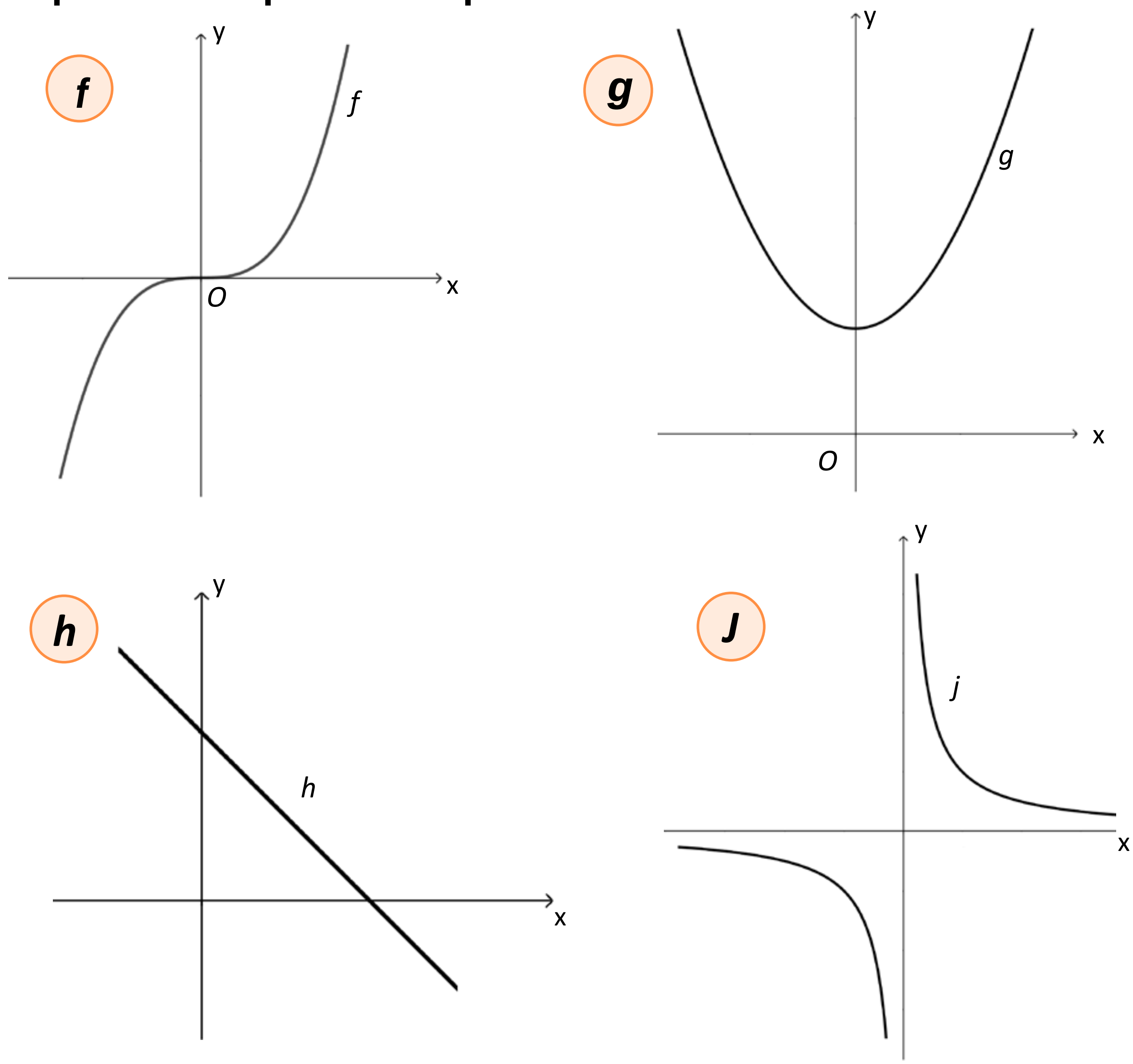
Por exemplo, a função f: IR→IR definida por $f(x) = x^3$ é uma função ímpar, **pois** $f(-x) = (-x)^3 = -f(x)$. Podemos notar que a função é ímpar observando o seu gráfico:



Notamos no gráfico que existe uma simetria em relação a origem 0. Elementos simétricos têm imagens simétricas. Os elementos 1 e –1, por exemplo, são simétricos e possuem imagens 1 e –1 (que também são simétricas).

***Obs: Uma função que não é par nem ímpar é chamada* função sem paridade.**

Classifique as funções representadas graficamente em par, ímpar ou nem par nem ímpar.



7

OBS: analise a paridade dos gráficos baseando-se nos conteúdos citados no tema PARIDADE DE FUNÇÕES.

Analisando:

- Para o gráfico **“ *f* ”** a função é ímpar;
- Para o gráfico **“ *g* ”** a função é par;
- Para o gráfico **“ *h* ”** a função não é par nem é ímpar;
- Para o gráfico **“ *j* ”** a função é ímpar.

Estude a paridade da função g definida por: 8

8.1 $$P(x) = |x|$$

Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$\mathrm{P}(-x) = |-x| = \boxed{x}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(-\mathbf{x}) = \boxed{\mathbf{P}(\mathbf{x})}} \longrightarrow \textbf{Função PAR, } \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

$$P(x) = x^3$$ **8.2**

Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$\mathrm{p}(-\mathrm{x}) = (-\mathrm{x})^3 = -\mathrm{x}^3$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

$$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = -\boxed{\mathbf{x}^3}\text{, sabendo que } \mathrm{p}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 \text{ então:}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(-\mathbf{x}) = -\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{x})}} \longrightarrow \textbf{Função ÍMPAR, } \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

8.3 $$P(x) = \frac{x^5 - x}{x^2 + 1}$$

Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = \frac{-\mathrm{x}^5 + \mathrm{x}}{\mathrm{x}^2 + 1} = \frac{-(\mathrm{x}^5 - \mathrm{x})}{\mathrm{x}^2 + 1}$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

$$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = -\boxed{\frac{(\mathbf{x}^5 - \mathbf{x})}{\mathbf{x}^2 + 1}}\text{, sabendo que } \mathrm{p}(\mathrm{x}) = \frac{(\mathrm{x}^5 - \mathrm{x})}{\mathrm{x}^2 + 1} \text{ então:}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(-\mathbf{x}) = -\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{x})}} \longrightarrow \textbf{Função ÍMPAR, } \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

$P(x) = 3x^6 - 4x^4 + 2$ **8.4**

- Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$P(-x) = 3(-x)^6 - 4(-x)^4 + 2 = 3x^6 - 4x^4 + 2$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

(OBS: não é necessário factorizar o sinal)

$$P(-x) = 3x^6 - 4x^4 + 2$$, sabendo que $p(x) = 3x^6 - 4x^4 + 2$ então:

$$\mathbf{P(-x) = P(x)}$$ $\longrightarrow$ **Função PAR, $\forall\ x \in \mathbb{R}$**

8.5 $P(x) = 5x^3 - 2x$

- Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$P(-x) = 5(-x)^5 - 2(-x) = -5x^5 + 2x$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

$$P(-x) = -5x^5 + 2x = -(5x^5 - 2x)$$

$$P(-x) = -\ \mathbf{(5x^5 - 2x)}$$, sabendo que $p(x) = 3x^6 - 4x^4 + 2$ então:

$$\mathbf{P(-x) = -\ P(x)}$$ $\longrightarrow$ **Função ÍMPAR, $\forall\ x \in \mathbb{R}$**

$$P(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$$ **8.6**

Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$P(-x) = \frac{3^{(-x)} + 3^{-(-x)}}{2} = \frac{3^{-x} + 3^{x}}{2}$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

$$P(-x) = \frac{3^{-x} + 3^{x}}{2}$$, sabendo que $p(x) = \frac{3^x+3^{-x}}{2}$ então:

$$\mathbf{P(-x) = P(x)}$$ ⟶ **Função PAR,** $\forall \ x \ \in \ \mathbb{R}$

8.7 $$P(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$$

Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$P(-x) = \sqrt{1 + (-x) + (-x)^2} - \sqrt{1 - (-x) + (-x)^2}$$

$$P(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2}$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

$$P(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2}$$

$$P(-x) = -\left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}\right)$$, sabendo que $\mathbf{p(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}}$ então:

$$\mathbf{P(-x) = -P(x)}$$ ⟶ **Função ÍMPAR,** $\forall \ x \ \mathbb{R}$

$$P(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$ **8.8**

Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = \sqrt[3]{(-\mathrm{x}+1)^2} - \sqrt[3]{(-\mathrm{x}-1)^2}$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

$$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = \sqrt[3]{(-\mathrm{x}+1)^2} - \sqrt[3]{(-\mathrm{x}-1)^2}$$

Factorizar (-1) dentro da raiz:

$$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = \sqrt[3]{[(-1)(\mathrm{x}-1)]^2} - \sqrt[3]{[(-1)(\mathrm{x}+1)]^2}$$

$$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = \sqrt[3]{(-1)^2(x-1)^2} - \sqrt[3]{(-1)^2(x+1)^2}$$

$$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$$

Factorizando o sinal:

$\mathrm{P}(-\mathrm{x}) = -\left[\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right]$, sabendo que $\mathbf{P(x)} = \sqrt[3]{\mathbf{(x+1)^2}} - \sqrt[3]{\mathbf{(x-1)^2}}$

$\boxed{\mathbf{P(-x)} = -\ \mathbf{P(x)}}$ ⟶ **Função ÍMPAR, $\forall\ \mathbf{x}\ \mathbb{R}$**

8.9 $P(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

Usando a regra de logaritmo:

$$\mathbf{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$$

$$\mathrm{P(x)} = \log\left(\frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}}\right)$$

$$\mathrm{P(x)} = \log\left(\frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}}\right) = \log(1+\mathrm{x}) - \log(1-\mathrm{x})$$

$$\mathrm{P(-x)} = \log(1+(-\mathrm{x})) - \log(1-(-\mathrm{x})) = \log(1-\mathrm{x}) - \log(1+\mathrm{x})$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

$$\mathrm{P(-x)} = \log(1-\mathrm{x}) - \log(1+\mathrm{x})$$

$$\mathrm{P(-x)} = -\boxed{[\log(1+\mathrm{x}) - \log(1-\mathrm{x})]}$$

$$\boxed{\mathbf{P(-x) = -P(x)}} \longrightarrow \textbf{Função ÍMPAR}, \forall\ \mathbf{x} \in]\mathbf{1}, -\mathbf{1}[$$

8.10 $P(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

Resolução:

1º Passo: calcular P(-x)

$$\mathrm{P(-x)} = \ln\left(-\mathrm{x} + \sqrt{1+(-\mathrm{x})^2}\right) = \ln\left(\sqrt{\mathrm{x}^2+1} - \mathrm{x}\right)$$

2º Passo: fatorizar o sinal de P(-x) se possível e analisar a paridade:

$$\mathrm{P(-x)} = \ln\left[\sqrt{\mathrm{x}^2+1} - \mathrm{x} \quad \times \frac{\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{1}}+\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{1}}+\mathbf{x}}\right] = \ln\left[\frac{\left(\sqrt{\mathrm{x}^2+1}-\mathrm{x}\right)\left(\sqrt{\mathrm{x}^2+1}+\mathrm{x}\right)}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}+\mathrm{x}}\right]$$

$$\mathrm{P(-x)} = \ln\left(\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}}^{\,2} - x^2}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}+\mathrm{x}}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}+\mathrm{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}+\mathrm{x}}\right)$$

$$P(-x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}\right]$$

Regra de logaritmo:

$\mathbf{\log(a)^b = b\log(a)}$

$P(-x) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, sabendo que $\mathbf{P(x)} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ então:

$\mathbf{P(-x) = -P(x)}$ $\longrightarrow$ **Função ÍMPAR, $\forall\ x \in \mathbb{R}$**

9- Caracterize as funções $f+g, f-g, \frac{f}{g}, f\times g$ determinando a expressão analítica e o domínio.

Sobre expressão analítica e o domínio...

f+g, f-g , fxg, f/g

Conceito: A função f + g é definida pela equação $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, no qual x deve pertencer tanto ao domínio de f quanto ao de g. Assim, se o domínio de f é o conjunto Df e o de g é Dg, o domínio de $f+g$ será a interseção dos domínios, $Df \cap Dg$. Analogamente, aplica-se também para $f-g$ e $f\times g$.

Para $\frac{f}{g}$, devemos lembrar que o denominador deve ser diferente de 0, então $g(x) = 0$, é um ponto que deve ser excluído do domínio.

9.1

$$f(x) = 2x \quad e \quad g(x) = x^2 + 2$$

Lógica de resolução

Primeiro devemos achar o domínio das funções. Se olharmos para as funções, elas são ambas polinomiais, por tanto o domínio será: $Df = \mathbb{R}\ e\ Dg = \mathbb{R}$

a) $f + g$

Propriedade

Aplicar a propriedade $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x)$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = 2\mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + 2$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}} = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

b) $f - g$

Propriedade

Aplicar a propriedade $(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x)$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = 2\mathrm{x} - (\mathrm{x}^2 + 2) = 2\mathrm{x} - (\mathrm{x}^2 + 2)$$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = 2\mathrm{x} - \mathrm{x}^2 - 2$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}} = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

c) $f \times g$

Propriedade

Aplicar a propriedade $(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x)$

$$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x) = 2\mathrm{x} \times (\mathrm{x}^2 + 2) = 2\mathrm{x}^3 + 4\mathrm{x}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}} = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

d) $\frac{f}{g}$

Propriedade

Aplicar a propriedade $\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)}$ com $g(x) \neq 0$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2 + 2}$$

$\boldsymbol{D}_{\frac{f}{g}} = \{x \in Df \cap Dg : g(x) \neq 0\} = \{x \in Df \cap Dg : x^2 + 2 \neq 0\}$;

Para $\mathrm{x}^2 + 2 \nexists$ não existe em todo $\mathbb{R}$ um número que anula esta equação, portanto:

$Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

9.2 $f(x) = 3x - 2 \quad e \quad g(x) = |x + 2|$

$\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}$ ***e*** $\boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}$

a) $f + g$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = 3\mathrm{x} - 2 + |\mathrm{x} + 2|$$

$$\boldsymbol{D}_{(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})} = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

b) $f - g$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = 3\mathrm{x} - 2 - |\mathrm{x} + 2|$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}} = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

c) $f \times g$

$$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x) = (3\mathrm{x} - 2)|\mathrm{x} + 2|$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}} = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \ \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

d) $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3\mathrm{x} - 2}{|\mathrm{x} + 2|}$$

$$\boldsymbol{D}_{\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}} = \{x \in Df \cap Dg : g(x) \neq 0\} = \{x \in Df \cap Dg : |x + 2| \neq 0\}$$

$$= \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} : x \neq -2 = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \backslash \{-2\} = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$$

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \quad e \quad g(x) = x^2 - 1$$ **9.3**

$\boldsymbol{Df} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{1} \geq \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{1}\} = [-\boldsymbol{1}; +\infty[\ \boldsymbol{e} \ \ \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}$

a) $f + g$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = \sqrt{\mathrm{x} + 1} + \mathrm{x}^2 - 1$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}} = Df \cap Dg = [-1, +\infty[\cap \ \mathbb{R} = [-1, +\infty[$$

b) $f - g$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = \sqrt{\mathrm{x} + 1} - \mathrm{x}^2 + 1$$

$$D_{f-g} = Df \cap Dg = [-1; +\infty[\cap \ \mathbb{R} = [-1; +\infty[$$

c) $f \times g$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \sqrt{x + 1} \times (x^2 - 1)$$

$$D_{f \times g} = Df \cap Dg = [-1; \ +\infty[\ \ \cap \ \mathbb{R} = [-1; \ +\infty[$$

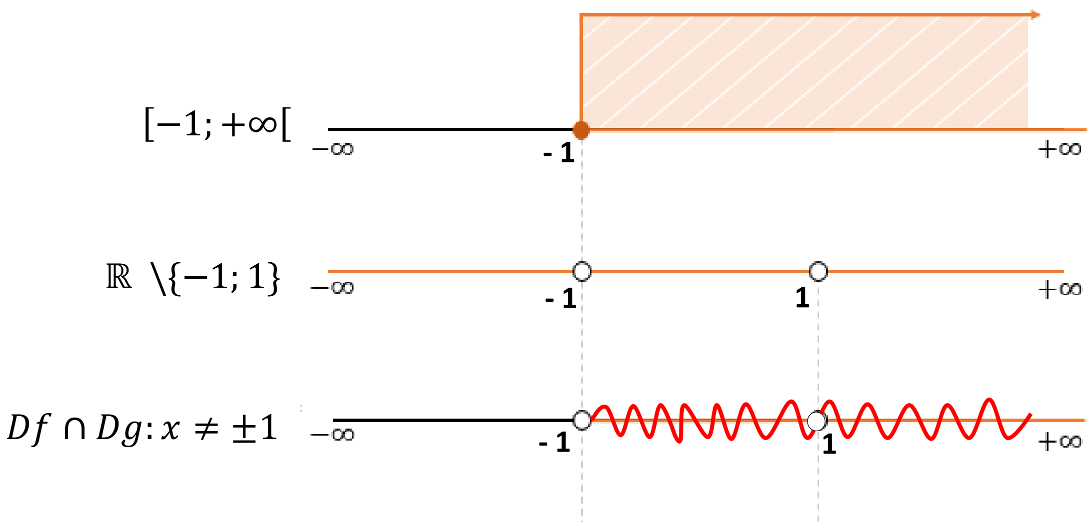
d) $\dfrac{f}{g}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{\mathrm{x}+1}}{\mathrm{x}^2-1}$$

$$\boldsymbol{D}_{\frac{f}{g}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg}: g(x) \neq 0\} = \{x \in Df \cap Dg: x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$= Df \cap Dg: x \neq \pm 1 = [-1; +\infty[\ \cap \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

A interseção para melhor entendimento pode ser representada por intervalos:



$$\boldsymbol{D}_{\frac{f}{g}} =]-1; +\infty[\ \setminus \{1\}$$

9.4 $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \sqrt{x+3}$

$Df = \{x \in R: x + 1 \geq 0\}$	$Dg = \{x \in R: x + 3 \geq 0\}$
$Df = \{x \in R: x \geq -1\}$	$Dg = \{x \in R: x \geq -3\}$
$\boldsymbol{Df} = [-1; +\infty[$	$\boldsymbol{Dg} = [-3; +\infty[$

a) $f + g$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = \sqrt{\mathrm{x}+1} + \sqrt{\mathrm{x}+3}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = [-1; +\infty[\cap [-3; +\infty[= [-1; +\infty[$$

b) $f - g$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}$$

$$\boldsymbol{D_{f+g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = [-1; +\infty[\cap [-3; +\infty[= [-1; +\infty[$$

c) $f \times g$

$$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x) = \sqrt{x+1} \times \sqrt{x+3} = \sqrt{(x+1)(x+3)}$$

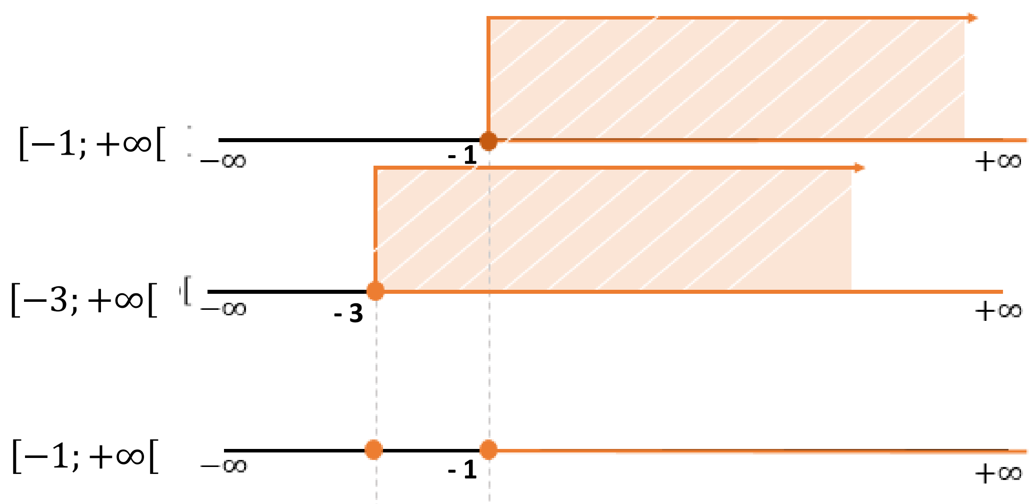
$$\boldsymbol{D_{f \times g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = [-1; +\infty[\cap [-3; +\infty[= [-1; +\infty[$$

d) $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$$

$$\boldsymbol{D_{\frac{f}{g}}} = \{x \in Df \cap Dg : g(x) \neq 0\} = \left\{x \in Df \cap Dg : \sqrt{x+3} \neq 0 \; e \; x+3 > 0\right\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in Df \cap Dg : x + 3 > 0 = [-1; +\infty[\cap]-3; +\infty[= [-1; +\infty[$$



$$\boldsymbol{D_{\frac{f}{g}}} = [-1; +\infty[$$

$$f(x) = x^4 \quad e \quad g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^4$$ **9.5**

$\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$

a) $f + g$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = \mathrm{x}^4 + \left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^4 = \frac{\mathrm{x}^8 + 1}{\mathrm{x}^4}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

b) $f - g$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = x^4 - \left(\frac{1}{x}\right)^4 = x^4 - \frac{1}{x^4} = \frac{x^8 - 1}{x^4}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

c) $f \times g$

$$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x) = \mathrm{x}^4 \times \left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^4 = \cancel{\mathrm{x}^4} \times \frac{1}{\cancel{\mathrm{x}^4}} = 1$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

d) $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{x}^4}{\left(\frac{1}{\mathrm{x}^4}\right)} = \mathrm{x}^8$$

$$\boldsymbol{D}_{\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg}\colon g(x) \neq 0\} = \left\{x \in Df \cap Dg\colon \frac{1}{x^4} \neq 0\right\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

9.6 $f(x) = \frac{1}{x} \quad e \quad g(x) = x^2$

$\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$ ***e*** $\boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}$

a) $f + g$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = \frac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{x}^2 = \frac{1 + \mathrm{x}^3}{\mathrm{x}}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

b) $f - g$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = \frac{1}{\mathrm{x}} - \mathrm{x}^2 = \frac{1}{\mathrm{x}} - \mathrm{x}^2 -= \frac{1 - \mathrm{x}^3}{\mathrm{x}}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

c) $f \times g$

$$x \in Df \cap Dg: (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x) = \frac{1}{\cancel{\mathrm{x}}} \times \cancel{\mathrm{x}}^2 = \mathrm{x}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

d) $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)}{\mathrm{x}^2} = \frac{1}{\mathrm{x}^3}$$

$$\boldsymbol{D}_{\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}} = \{g(x) \neq 0\} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg}: x^3 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$f(x) = x^3 + x^2 \quad e \quad g(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)^4$$ **9.7**

$\boldsymbol{Df} = \mathbb{R} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$

a) $f + g$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 + \left(\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right)^4 = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 + \frac{1}{\mathrm{x}^8} = \frac{\mathrm{x}^{11} + \mathrm{x}^{10} + 1}{\mathrm{x}^8}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus\{0\}$$

b) $f - g$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \left(\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right)^4 = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \frac{1}{\mathrm{x}^8} = \frac{\mathrm{x}^{11} + \mathrm{x}^{10} - 1}{\mathrm{x}^8}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}} = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus\{0\} = \mathbb{R} \setminus\{0\}$$

c) $f \times g$

$$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x) = (\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2) \times \left(\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right)^4 = (\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2)\frac{1}{\mathrm{x}^8} = \frac{1}{\mathrm{x}^5} + \frac{1}{\mathrm{x}^6}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

d) $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + x^2}{\left(\frac{1}{x^8}\right)} = \mathrm{x}^8(\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2) = \mathrm{x}^{11} + \mathrm{x}^{10}$$

$$\boldsymbol{D}_{\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg}: g(x) \neq 0\} = \left\{x \in Df \cap Dg: \frac{1}{x^8} \neq 0\right\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

9.8 $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad e \quad g(x) = x^2$

$\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}$

a) $f + g$

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = \frac{1}{\mathrm{x}^2} + \mathrm{x}^2 = \frac{1 + \mathrm{x}^4}{\mathrm{x}^2}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

b) $f - g$

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 = \frac{1}{x^2} - x^2 - = \frac{1 - x^4}{x^2}$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

c) $f \times g$

$$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x) = \frac{1}{\cancel{\mathrm{x}^2}} \times \cancel{\mathrm{x}^2} = 1$$

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}\ \backslash\{0\}$$

d) $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right)}{\mathrm{x}^2} = \frac{1}{\mathrm{x}^4}$$

$$\boldsymbol{D}_{\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}} = \{x \in Df \cap Dg : g(x) \neq 0\} = \{x \in Df \cap Dg : x^3 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad e \quad g(x) = \frac{1}{x}$$ **9.9**

$\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$

a) $f + g$

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) + g(x) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1} + \frac{1}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^2+1}{\mathrm{x}^3+\mathrm{x}} = \frac{2\mathrm{x}^2+1}{\mathrm{x}^3+\mathrm{x}}$$

$$D_{f+g} = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\ \backslash\{0\}$$

b) $f - g$

$$(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-x^2-1}{x^3+x} = -\frac{1}{x^3+x}$$

$$\boldsymbol{D_{f-g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\ \backslash\{0\}$$

c) $f \times g$

$$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = f(x) \times g(x) = \frac{x}{x^2+1} \times \frac{1}{x} = \frac{x}{x^3+x} = \frac{x}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\boldsymbol{D_{f\times g}} = \boldsymbol{Df} \cap \boldsymbol{Dg} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\ \backslash\{0\}$$

d) $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1}\right)}{\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)} = \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2+1}$$

$$\boldsymbol{D_{\frac{f}{g}}} = \{x \in Df \cap Dg : g(x) \neq 0\} = \left\{x \in Df \cap Dg : \frac{1}{x} \neq 0\right\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

10

Caracterize as funções fog e gof determinando a expressão analítica e o domínio:

A função composta de f com g é representada por fog e a função composta de g com f por gof.

10.1

$$f(x) = 2 + x \quad e \quad g(x) = 3x + 1$$

$Df = \mathbb{R} \quad e \quad Dg = \mathbb{R}$

Propriedade

Aplicar a propriedade $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 + g(x) = 2 + 3x + 1 = 3x + 3$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge \ g(x) \in D_f\} = \{\mathbb{R} \wedge (3x + 1) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Propriedade

Aplicar a propriedade $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$

$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(f(x)) + 1 = 3(2 + x) + 1 = 6 + 3x + 1 = 3x + 7$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{\mathbb{R} \wedge (2 + x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

10.2

$$f(x) = x^2 + 2 \quad e \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$Df = \mathbb{R} \ e \ Dg = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = [0\,; +\infty[$

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = (\cancel{\sqrt{}}\mathrm{x})^{\cancel{2}} + 2 = \mathrm{x} + 2$$

$$\mathbf{D_{f\circ g}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{[0;+\infty[\ \wedge \ \sqrt{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}\} = [0;+\infty[$$

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \sqrt{x^2+2}$$

$$\mathbf{D_{g\circ f}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{\mathbb{R} \wedge (x^2+2) \in [0;+\infty[\ \} = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad e \quad g(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

10.3

$$\boldsymbol{Df} = \{\boldsymbol{x} \ \in \mathbb{R}: \mathrm{x} \geq -1\} = [-1;+\infty[\qquad e \qquad Dg = \{x \ \in \mathbb{R}: x \neq 2\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

Propriedade

Aplicar a propriedade $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \sqrt{\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-2}+1} = \sqrt{\frac{\mathrm{x}+1+\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}-2}} = \sqrt{\frac{2\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}-2}}$$

$$\mathbf{D_{f\circ g}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \mathrm{x} \in \mathrm{D_g} \wedge \mathrm{g(x)} \in \mathrm{D_f}\} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \mathrm{x} \in \mathrm{R}\backslash\{2\} \ \wedge \ \frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-2} \in [-1;+\infty[\right\}$$

Sabendo que $\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-2} \in [-1;+\infty[$ devemos analisar: $\mathbf{\frac{x+1}{x-2} \geq -1}$

$$\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-2} \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-2}+1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-2} \geq 0$$

X	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
2x-1		**-**	**0**	**+**		**+**	
x-2		**-**		**-**	**0**	**+**	
$\frac{2\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-2}$		**+**	**0**	**-**	**IND**	**+**	

Solução: $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]2,+\infty\right[$

$$\mathbf{D_{f\circ g}} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \mathrm{R}\backslash\{2\} \ \wedge \ \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]2,+\infty\right[\right\} = \left]-\infty;-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right] \cup \left]\mathbf{2},+\infty\right[$$

Propriedade

Aplicar a propriedade $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$

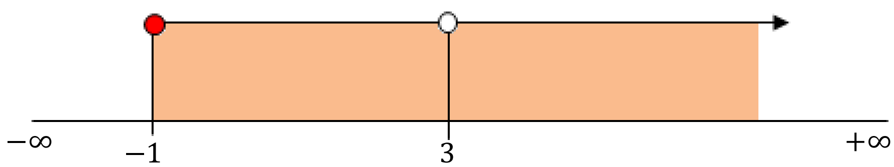
$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$\mathrm{D_{g \circ f}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \mathrm{x} \in \mathrm{D_f} \wedge \mathrm{f(x)} \in \mathrm{D_g}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \mathrm{x} \in [-1; +\infty[\ \wedge \sqrt{x+1} \in \ x \neq 2\}$$

Sabendo que $\sqrt{x+1} \in \ x \neq 2$ devemos analisar: $\boldsymbol{\sqrt{x+1} \neq 2} \implies x+1 \neq (2)^2 \implies \mathbf{x \neq 3}$

$$\mathrm{D_{g \circ f}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: [-1; +\infty[\ \ \wedge \ \ \mathbf{x \neq 3} \ \} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: [-1; +\infty[\ \ \wedge \ \ \mathbb{R}\backslash\{3\}\}$$



$$\mathbf{D_{g \circ f}} = [-1; 3[\ \cup\ ]3; +\infty[$$

10.4

$$f(x) = x+1 \quad e \quad g(x) = \frac{2}{x-2}$$

$$Df = \mathbb{R}\ e\ \ Dg = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 2\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \frac{2}{x-2} + 1 = \frac{\cancel{2} + x - \cancel{2}}{x-2} = \frac{x}{x-2}$$

$$\mathbf{D_{f \circ g}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: x \in \mathrm{D_g} \wedge \mathrm{g(x)} \in \mathrm{D_f}\} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \mathrm{x} \in \ \mathbb{R}\backslash\{2\} \wedge \frac{2}{\mathrm{x}-2} \in \ \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathbf{D_{f \circ g}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: x \neq 2\} = \boldsymbol{R}\backslash\{\mathbf{2}\}$$

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{2}{x+1-2} = \frac{2}{x-1}$$

$$\mathbf{D_{g \circ f}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: x \neq 1\} = \mathbb{R}\ \backslash\{1\}$$

$$f(x)=\frac{x}{x+1} \quad e \quad g(x)=\frac{x+1}{x-1}$$ **10.5**

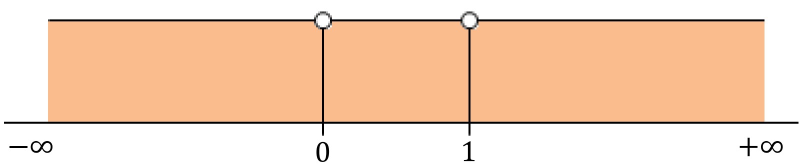
$Df=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ e $Dg=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1}}=\frac{x+1}{(x-1)\left(\frac{2}{x-1}\right)}=\frac{x+1}{2}$$

$$\boldsymbol{D_{f\circ g}}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\wedge\frac{x+1}{x-1}\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}\right\}=\mathbb{R}$$

Sabendo que $\frac{x+1}{x-1}\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ devemos analisar: $\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}}\neq\mathbf{-1}\Rightarrow x+1\neq-(x-1)\Rightarrow\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$

$$\boldsymbol{D_{f\circ g}}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}:\mathbb{R}\backslash\{1\}\ \wedge\ \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$$



$$\boldsymbol{D_{f\circ g}}=]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\frac{\left(\frac{x}{x+1}+1\right)}{\frac{x}{x+1}-1}=\frac{\left(\frac{x+x+1}{x+1}\right)}{\frac{x-x-1}{x+1}}=\frac{2x+1}{-1}=-2x-1$$

$$D_{g\circ f}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}: x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}\wedge\frac{x}{x+1}\in\mathbb{R}\backslash\{1\}\right\}$$

Sabendo que $\frac{x}{x+1}\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ devemos analisar: $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x+1}}\neq\mathbf{1}\Rightarrow x\neq x+1\Rightarrow\emptyset$

$$\mathbf{D_{g\circ f}}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\wedge\emptyset\}=\mathbb{R}\backslash\{-\mathbf{1}\}$$

10.6

$$f(x) = x^2 + 3 \quad e \quad g(x) = x^2 - 1$$

$Df = \mathbb{R}$ e $Dg = \mathbb{R}$

$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = (x^2 - 1)^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 1 + 3 = x^4 - 2x^2 + 4$

$\mathbf{D_{f \circ g}} = \mathbb{R}$

$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = (x^2 + 3)^2 - 1 = x^4 + 6x^2 + 9 - 1 = x^4 + 6x^2 + 8$

$\mathbf{D_{g \circ f}} = \mathbb{R}$

11

Indique as expressões analíticas de duas funções $f \circ g$ tais que

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}).$$

11.1

$$h(x) = (x^2 + 1)^4$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ **,** assim sendo temos:

$$f(x) = x^4 \quad e \quad g(x) = x^2 + 1$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^2 + 1$ então: $\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}(x^2 + 1) = (\boldsymbol{x^2} + \mathbf{1})^{\mathbf{4}}$

11.2

$$h(x) = \sqrt[4]{3x + 5}$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \quad e \quad g(x) = 3x + 5$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = \sqrt[4]{x}$ e $g(x) = 3x + 5$ então: $\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}(3x + 5) = \sqrt[4]{\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}}$

11.3

$$h(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

Resolução:

Aplicar: $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$f(x) = e^x \quad e \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = e^x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ então: $\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}$

11.4

$$h(x) = \mathrm{tg}(\ln x)$$

$$f(x) = \mathrm{tg}\ (x) \quad e \quad g(x) = \ln x$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ e $g(x) = \ln(x)$ então: $\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}(\ln(x)) = \mathrm{tg}(\ln x)$

11.5

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) = \ln(x) \quad e \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ e $g(x) = \ln(x)$ então: $\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}(\ln(x)) = \mathrm{tg}(\ln x)$

$$h(x) = \mathrm{sen}(3x)$$ **11.6**

$$f(x) = \mathrm{sen}\,\mathrm{x} \qquad e \qquad g(x) = 3\mathrm{x}$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = \mathrm{sen}(\mathrm{x})$ e $g(x) = 3\mathrm{x}$ então: $\boldsymbol{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x})\big) = \boldsymbol{f}(3\mathrm{x}) = \mathrm{sen}(3\mathrm{x})$

11.7 $$h(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) = \mathrm{tg}\,\mathrm{x} \qquad e \qquad g(x) = \frac{\mathrm{x}}{2}$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = \mathrm{tg}(\mathrm{x})$ e $g(x) = \frac{\mathrm{x}}{2}$ então: $\boldsymbol{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x})\big) = \boldsymbol{f}\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$h(x) = \frac{3}{5 + \cos x}$$ **11.8**

$$f(x) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5} + \boldsymbol{x}} \qquad e \qquad g(x) = \cos(\mathrm{x})$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}+\boldsymbol{x}}$ e $g(x) = \cos(\mathrm{x})$ então: $\boldsymbol{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x})\big) = \boldsymbol{f}(\cos(\mathrm{x})) = \frac{3}{5+\cos x}$

11.9

$$h(x) = 3\,\text{sen}^2(x) + 4\,\text{sen}(x)$$

$$f(x) = 3\text{x}^2 + 4\text{x} \quad e \quad g(x) = \text{sen(x)}$$

Verificando: Sabendo que $f(x) = 3\text{x}^2 + 4\text{x}$ e $g(x) = \text{sen(x)}$ então:

$\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}(sen(x)) = 3\,\text{sen}^2(x) + 4\,\text{sen}(x)$

11.10

$$h(x) = (1 + \text{sen}\,x^2)^3$$

$$f(x) = \text{x}^3 \quad e \quad g(x) = 1 + \text{sen}\,\text{x}^2$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = \text{x}^3$ e $g(x) = 1 + \text{sen}\,\text{x}^2$ então:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}(1 + \text{sen}\,\text{x}^2) = (1 + \text{sen}\,x^2)^3$$

11.11

$$h(x) = |x^2 - 3x + 5|$$

$$f(x) = |\text{x}| \quad e \quad g(x) = \text{x}^2 - 3\text{x} + 5$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = |\text{x}|$ e $g(x) = \text{x}^2 - 3\text{x} + 5$ então:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}(\text{x}^2 - 3\text{x} + 5) = \left|x^2 - 3x + 5\right|$$

$$h(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$$ **11.12**

$$f(x) = \sqrt{1 - \mathrm{x}} \qquad e \qquad g(x) = \sqrt[3]{\mathrm{x}}$$

Verificando:

Sabendo que $f(x) = \sqrt{1 - x}$ e $g(x) = 1 - \sqrt[3]{\mathrm{x}}$ então:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{f}(\sqrt[3]{x}) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$$

12

Sejam f e g duas funções ímpares. Mostre que:

f x g é par | **f + g é ímpar**

f / g é par | **f – g é ímpar**

Primeiramente segundo o enunciado do exercício sabe-se que f e g são funções ímpares então, condição funções ímpares:

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) & \forall\ x \in D_f \\ g(-x) = -g(x) & \forall\ x \in D_g \end{cases}$$

f x g é par — 12.1

$$\begin{cases} \boxed{f(-x)} = \boxed{-f(x)} \\ \quad\times \qquad\quad \times \\ \boxed{g(-x)} = \boxed{-g(x)} \end{cases}$$

Multiplicar verticalmente $f(-x) \times g(-x)$ e $-f(x) \times -g(x)$

$$f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times -g(x)$$

$\boldsymbol{f(-x)g(-x) = f(x)g(x)}$ ⟵ **condição de uma função PAR**

12.2 — f / g é par

$$\begin{cases} \boxed{f(-x)} = \boxed{-f(x)} \\ \quad\div \qquad\quad \div \\ \boxed{g(-x)} = \boxed{-g(x)} \end{cases}$$

$$\frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)}}$$

condição de uma função PAR

f + g é ímpar 12.3

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ + \qquad\quad + \\ g(-x) = -g(x) \end{cases}$$

$$f(-\mathrm{x}) + g(-\mathrm{x}) = -f(x) + [-g(x)]$$

$\boldsymbol{f}(-\mathbf{x}) + \boldsymbol{g}(-\mathbf{x}) = -[\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{g}(\mathbf{x})] \longleftarrow$ **condição de uma função ÍMPAR**

12.4 f - g é ímpar

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ - \qquad\quad - \\ g(-x) = -g(x) \end{cases}$$

$$f(-\mathrm{x}) - g(-\mathrm{x}) = -f(x) - [-g(x)]$$

$\boldsymbol{f}(-\mathbf{x}) - \boldsymbol{g}(-\mathbf{x}) = -f(x) + g(x) \rightarrow$ Factorizar o sinal negativo

$\boldsymbol{f}(-\mathbf{x}) - \boldsymbol{g}(-\mathbf{x}) = -[f(x) - g(x)] \longleftarrow$ **condição de uma função ÍMPAR**

Seja *f* uma função real de variável real qualquer, de domínio R. Mostre que *f* pode ser escrita como a soma de uma função par e de uma função ímpar.

Sugestão: comece por mostrar que a função *f1* definida por:

$$\boldsymbol{f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}}$$ **é par**

e que a função *f2* definida por:

$$\boldsymbol{f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}}$$ **é ímpar**

13

Tendo a função f_1 então:

f_1 será par se e somente se: $\boldsymbol{f_1(x) = f_1(-x) \quad \forall\, x \in D_f}$

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$f_1(-x) = \frac{f(-x) + f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$\boldsymbol{f_1(x) = f_1(-x)}$ A condição é cumprida então $f_1(x)$ é par.

Tendo a função f_2 então:

f_2 será par se e somente se: $\boldsymbol{-f_2(x) = f_2(-x) \quad \forall\, x \in D_f}$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$f_2(-x) = \frac{f(-x) - f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{[f(x) - f(-x)]}{2}$$

$\boldsymbol{f_2(x) = f_2(-x)}$ A condição é cumprida então $f_1(x)$ é par.

$f_1(x) + f_2(x)$

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

Função Inversa

Como determinar a função inversa?

Para determinar a inversa de uma função basta seguir os seguintes passos:

1º PASSO: igualar f(x) a y: $\mathrm{f}(x) = \mathrm{y}$;

2º PASSO: isolar x na função;

3º PASSO: substituir na função: $\mathrm{x} = f^{-1}(x)$ e $\mathrm{y} = \mathrm{x}$;

4º PASSO: determinar o domínio da função inversa: $\boldsymbol{D_{f^{-1}}}$;

Exemplo: determine a função inversa e estime o domínio da função.

a) $\boldsymbol{f(x) = x + 2}$

1º passo: $f(x) = y$ então: $y = x + 2$

2º passo: $y = x + 2 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{y - 2 = x}$

3º passo: $\mathrm{x} = f^{-1}(x)$ e $\mathrm{y} = \mathrm{x}$

Então: se $\boldsymbol{x = y - 2} \quad \longrightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x)} = x - 2$

4º passo: $\boldsymbol{D_{f^{-1}}} = \mathbb{R}$

OBS: para os exercícios que pedem para calcular a inversa da função basta seguir estes passos e o problema estará resolvido;

14 Caracterize a função inversa de f, determinando a expressão analítica e o domínio, sabendo que:

14.1

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1º Passo: $f(x) = y$

2º Passo: $y = \frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x \neq 0}$

Isto significa que podemos isolar x se o mesmo for diferente de zero o que é o indicativo do seu domínio. A troca só é feita quando a variável x satisfaz o domínio da função inicialmente calculado.

3º Passo: $\mathrm{x} = f^{-1}(x)$ e $\mathrm{y} = \mathrm{x}$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{y}} \quad \longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

4º Passo:

$$D_{f(x)^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$$

14.2

$$f(x) = \frac{\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}+1}$$

1º Passo: $f(x) = y$

2º Passo: $y = \frac{x+2}{x+1} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{y(x+1) = x+2}$

$$\mathrm{xy + y = x + 2}$$

$$\mathrm{xy - x = 2 - y} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{x\,(y-1) = 2 - y}$$

$$\mathbf{x = \frac{2-y}{y-1}}$$

3º Passo: $\mathrm{x} = f^{-1}(x)$ e $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ $\quad \longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x-1}$

4º Passo:

$$D_{f(x)^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = x^4 \quad , \qquad x > 0$$ **14.3**

1º Passo: $f(x) = y$

2º Passo: $y = x^4 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x = \sqrt[4]{y}}$

3º Passo: $\mathrm{x} = f^{-1}(x)$ e $\mathrm{y} = \mathrm{x} \quad \longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$

4º Passo: $D_{f(x)^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq 0\}$ Analisando a condição inicial termos:

$\boldsymbol{D_{f(x)^{-1}}} = \mathbb{R}^+$ ou escrito de outra forma: $]0;\ +\infty[$.

O domínio é este por causa da condição inicial x > 0.

14.4 $$f(x) = 2 + \frac{3}{\mathrm{x}+1}$$

- $\boldsymbol{f(x) = 2 + \frac{3}{x+1}}$
- **f(x)=y**
- $\mathrm{y} = 2 + \frac{3}{x+1} \qquad \longrightarrow \quad y - 2 = \frac{3}{x+1}$

$$x + 1 = \frac{3}{y-2}$$

$$x \quad = \frac{3}{y-2} - 1$$

- $\mathbf{x} = \boldsymbol{f^{-1}(x)}$ **e** $\mathbf{y} = \mathbf{x}$

$$f^{-1}(x) = \frac{3}{x-2} - 1$$

- $D_{f^{-1}(x)} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x - 2 \neq 0\}; \quad x - 2 \neq 0; \quad x \neq 2$

$$D_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ **14.5**

A função admite inversa $\forall\, x \in \mathbb{R}$, então tem-se:

- $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{f(x) = y}$

- $y = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}} \quad \longrightarrow \quad y^2 = \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad y^2 = \frac{\mathbf{x}^2}{\left(\cancel{\sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}}\right)^{\cancel{2}}}$

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \quad \longrightarrow \quad y^2(x^2+1) = x^2 \quad \longrightarrow \quad y^2x^2 + y^2 = x^2$$

$$y^2x^2 - x^2 = -y^2 \quad \longrightarrow \quad x^2(y^2-1) = -y^2 \quad \longrightarrow \quad x^2 = \frac{-y^2}{y^2-1} \quad \longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-y^2}{y^2-1}}$$

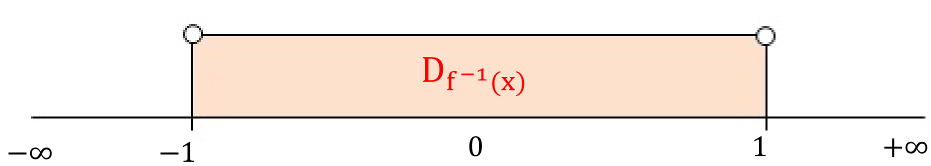
$$x = \pm\sqrt{\frac{-y^2}{-(1-y^2)}} \quad \longrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{1-y^2}} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\pm|y|}{\sqrt{1-y^2}}$$

- $\mathbf{x} = \boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{x})$ **e** $\mathbf{y = x} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{\pm|x|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

- $D_{f^{-1}(x)} = \{x \in \mathbb{R} |\ \mathbf{1} - \boldsymbol{x^2} > \mathbf{0}\}$

Resolvendo: $1 - x^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad -x^2 > -1 \quad \Longrightarrow \quad -x^2 > -1\ /x(-1) \quad \Longrightarrow \quad x^2 < 1$

Regra: Para $x^n < a$, se n é par então $-\sqrt[n]{a} < x < \sqrt[n]{a}$	$\mathbf{x^2 < 1 \implies -1 < x < 1}$



$$D_{f^{-1}(x)} =]-1; 1[$$

14.6	$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} \quad , x \leq 0$

Para $x \leq 0$ tem-se:

- $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2}{x^2+1}$, $\mathbf{f(x) = y}$

- $y = \frac{x^2}{x^2+1} \quad \longrightarrow \quad y\,(x^2+1) = x^2 \quad \longrightarrow \quad yx^2 + y = x^2$

$$yx^2 - x^2 = -y \quad \longrightarrow \quad x^2(y-1) = -y \quad \longrightarrow \quad x^2 = \frac{-y}{y-1}$$

$$x^2 = \frac{-y}{-(1-y)} \quad \longrightarrow \quad x^2 = \frac{y}{1-y} \quad \longrightarrow x = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

- $\mathbf{x} = \boldsymbol{f^{-1}(x)}$ **e** $\mathbf{y = x}$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

- $D_{f^{-1}(x)} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{x}{1-x} \geq 0\right\};$

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\mathbf{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathbf{1-x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$\boldsymbol{f^{-1}(x)}$		$-$	0	$+$	IND	$-$	

$$D_{f^{-1}(x)} = [0;\ 1[$$

$f(x) = 1 + \log_2 x$ 14.7

- $f(x) = 1 + \log_2 x$
- **f(x) = y**
- $y = 1 + \log_2^x \longrightarrow y - 1 = \log_2^x$

Para resolver esse problema usa-se a regra:

$\log_a^b = c\,; \Rightarrow b = a^c$

$$y - 1 = \log_2^x \longrightarrow x = 2^{y-1}$$

- $\mathbf{x} = \boldsymbol{f^{-1}(x)}$ **e** $\mathbf{y = x}$

$$f^{-1}(x) = 2^{x-1}$$

- $D_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R}$

14.8 $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

- $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
- **f(x) = y**
- $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \longrightarrow 2y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Para resolver esse problema usa-se a regra:

$ln\ a = \log_e^a$

e

$\log_a^b = c\,; \Rightarrow b = a^c$

$$2y = \log_e\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$e^{2y} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right) \longrightarrow e^{2y}(x-1) = x + 1$$

$$xe^{2y} - e^{2y} = x + 1 \longrightarrow xe^{2y} - x = 1 + e^{2y}$$

$$x(e^{2y} - 1) = e^{2y} + 1 \longrightarrow x = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}$$

- $\mathbf{x = f^{-1}(x)}$ **e** $\mathbf{y = x}$

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

- $D_{f^{-1}(x)} = \{x \in \mathbb{R} \setminus e^{2x} - 1 \neq 0\}$

Obs: $e^0 = 1$

$$e^{2x} - 1 \neq 0 \longrightarrow e^{2x} \neq 1 \longrightarrow e^{\mathbf{2x}} \neq e^{\mathbf{0}} \longrightarrow 2x \neq 0 \longrightarrow x \neq \frac{0}{2} \longrightarrow x \neq 0$$

$$D_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \sqrt{x + 3}$$ **14.9**

- $f(x) = \sqrt{x + 3}$
- $\mathbf{f(x) = y}$

$$y = \sqrt{x + 3} \longrightarrow (y)^2 = \left(\cancel{\sqrt{}}x + 3\right)^{\cancel{2}} \longrightarrow y^2 = x + 3$$

$$x = y^2 - 3$$

- $\mathbf{x = f^{-1}(x)}$ **e** $\mathbf{y = x}$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

- $D_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R}$

14.10 $$f(x) = -\sqrt{3 - 2x}$$

- $f(x) = -\sqrt{3 - 2x}$
- $\mathbf{f(x) = y}$

$$y = -\sqrt{3 - 2x} \longrightarrow \text{Para } y \leq o \text{, tem} - \text{se: } (y)^2 = \left(-\sqrt{3 - 2x}\right)^2$$

$$\longrightarrow y^2 = 3 - 2x \longrightarrow y^2 - 3 = -2x /\times (-1) \longrightarrow 3 - y^2 = 2x$$

$$x = \frac{3 - y^2}{2}$$

- $\boldsymbol{x = f^{-1}(x)}$ **e** $\boldsymbol{y = x}$

$$f^{-1}(x) = \frac{3 - x^2}{2} \quad ; \quad x \leq 0$$

- $D_{f^{-1}(x)} =]-\infty, 0]$

$$f(x) = \sqrt[5]{4x + 2}$$ **14.11**

- $f(x) = \sqrt[5]{4x + 2}$
- $\boldsymbol{f(x) = y}$

$$y = \sqrt[5]{4x + 2} \quad \longrightarrow \quad (y)^5 = \left(\sqrt[5]{4x + 2}\right)^5 \quad \longrightarrow \quad y^5 = 4x + 2$$

$$y^5 - 2 = 4x \quad \longrightarrow \quad x = \frac{y^5 - 2}{4}$$

- $\boldsymbol{x = f^{-1}(x)}$ **e** $\boldsymbol{y = x}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^5 - 2}{4}$$

- $D_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R}$

14.12 $$f(x) = x^2 - 2x, \qquad x > 1$$

- $\boldsymbol{f(x) = y}$

$$y = x^2 - 2x \quad \longrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = y + 1 \quad \longrightarrow \quad (x - 1)^2 = y + 1$$

$x - 1 = \pm\sqrt{y + 1}$ Como x>1 então x é positivo: $x - 1 = \sqrt{y + 1}$

$$\longrightarrow \; x = \sqrt{y+1} + 1 \quad ; \; \mathbf{y > -1}$$

- $\mathbf{x} = \boldsymbol{f^{-1}(x)}$ **e** $\mathbf{y = x}$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1$$

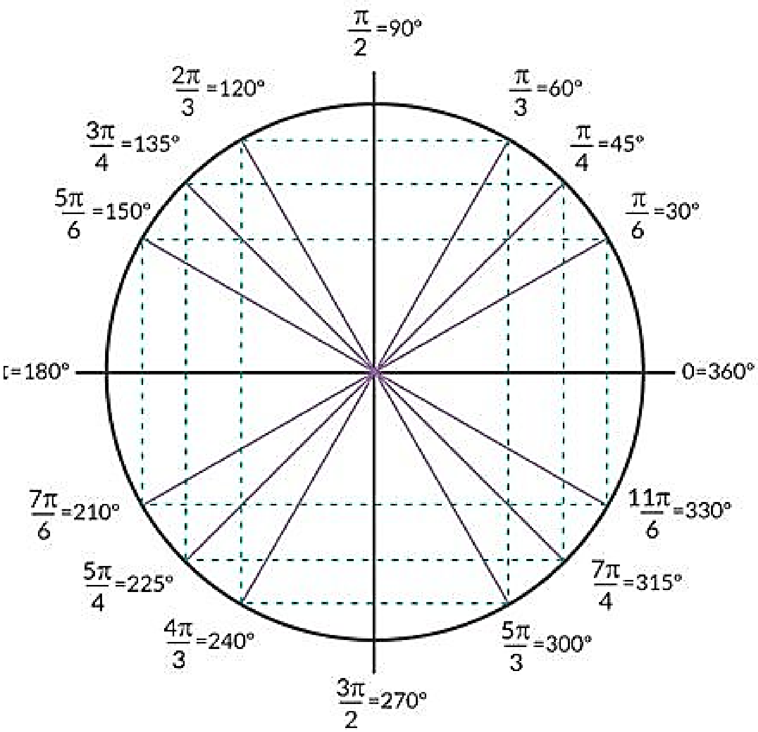
- $D_{f^{-1}(x)} = \{x \in \mathbb{R} \setminus x + 1 \geq 0\}$

$$\boldsymbol{x \geq -1}$$

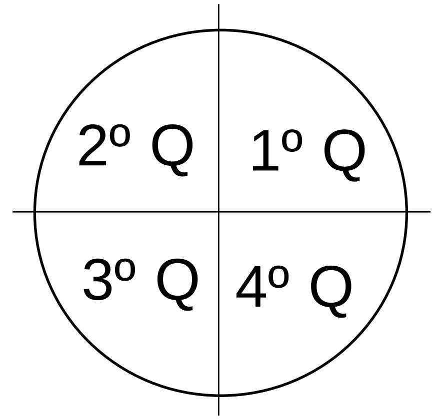
$$D_{f^{-1}(x)} = [-1; +\infty[$$

Trigonometria

Círculo Trigonométrico

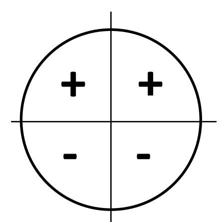


Quadrantes

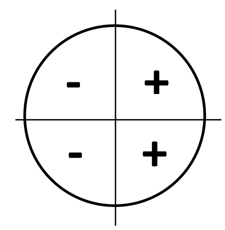


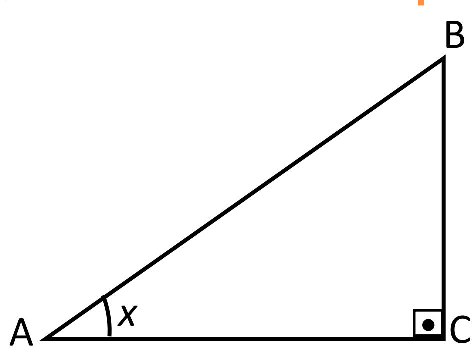
Sinais

Seno



Cosseno





$$\text{sen x} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{cosec x} = \frac{1}{\text{sen x}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{cos x} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{sec x} = \frac{1}{\text{cos x}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tg x} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{cotg x} = \frac{1}{\text{sen x}} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{AC}{BC}$$

Tabela dos arcos notáveis

Quadrante	Rad	Grau	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
0	0	0°	0	1	0	$+\infty$	1	$+\infty$
1º	$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
	$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
	$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	$+\infty$	0	$+\infty$	1
2º	$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
	$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\boldsymbol{\pi}$	π	180°	0	-1	0	$-\infty$	-1	$+\infty$
3º	$\frac{7\pi}{6}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
	$\frac{5\pi}{4}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
	$\frac{4\pi}{3}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	$-\infty$	0	$+\infty$	-1
4º	$\frac{5\pi}{3}$	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	$\frac{7\pi}{4}$	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
	$\frac{11\pi}{6}$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	2	-2
$\boldsymbol{2\pi}$	2π	360°	0	1	0	$+\infty$	1	$+\infty$

Equações Trigonométricas

As equações fundamentais podem ser solucionadas por meio de fórmulas, que são obtidas fazendo uso do ciclo trigonométrico.

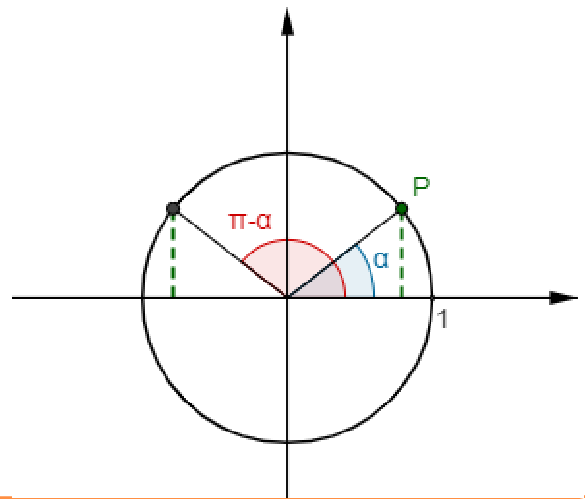
Sen (x) = Sen (a)

Considerando a aplicação ao lado podemos alterar a amplitude de α, movendo o ponto P, e verificar as soluções deste tipo de equação para qualquer ângulo α.

Facilmente se verifica que as soluções da equação $\mathrm{sen}\, x = \mathrm{sen}\, \alpha$ são:

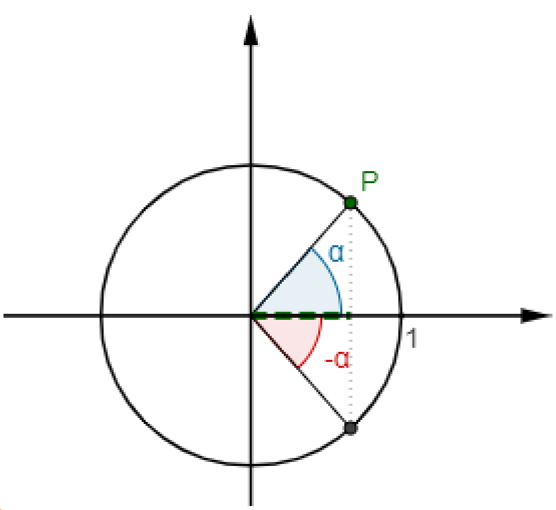
$x = \alpha + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$ ou

$x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$



Cos (x) = Cos (a)

Considerando a aplicação podemos alterar a amplitude de α, movendo o ponto P, e verificar as soluções deste tipo de equação para qualquer ângulo α.



Facilmente se verifica que as soluções da equação $\cos x = \cos \alpha$ são:

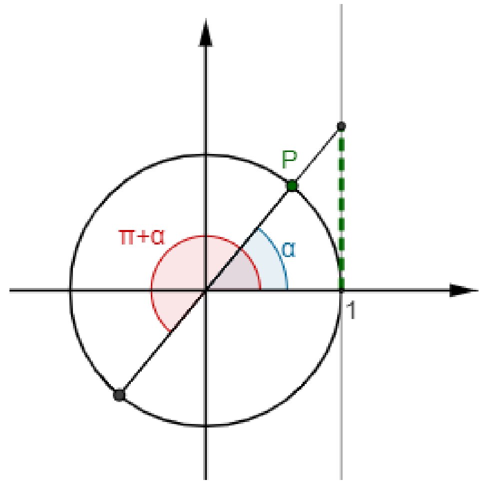
$x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$

Ou ainda de forma condensada:

$x = \pm \alpha + 2k\pi \, , k \in \mathbb{Z}$

tg (x) = tg (a)

Considerando a aplicação ao lado podemos alterar a amplitude de α, movendo o ponto P, e verificar as soluções deste tipo de equação para qualquer ângulo α.



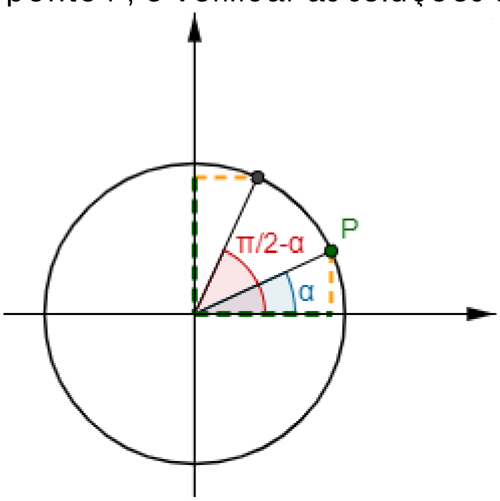
Facilmente se verifica que as soluções da equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$ são:

$$x = \alpha + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou}$$

$$x = (\pi + \alpha) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Sen x = Cos (a) e Cos x = Sen (a)

Considerando a aplicação podemos alterar a amplitude de α, movendo o ponto P, e verificar as soluções deste tipo de equação para qualquer ângulo α.



Facilmente se observa na aplicação que:

$\cos \alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e que $\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Portanto a resolução de uma equação do tipo $\operatorname{sen} x = \cos \alpha$ é equivalente à resolução da equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ Usando o referido num dos pontos anteriores as soluções são:

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \ \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$$

Já a resolução de uma equação do tipo $\cos x = \operatorname{sen} \alpha$ é equivalente à resolução da equação $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Usando o referido num dos pontos anteriores as soluções são: $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$.

Inversas trigonométricas

Função arcseno

A função seno não é injectiva em todo R.

Gráfico

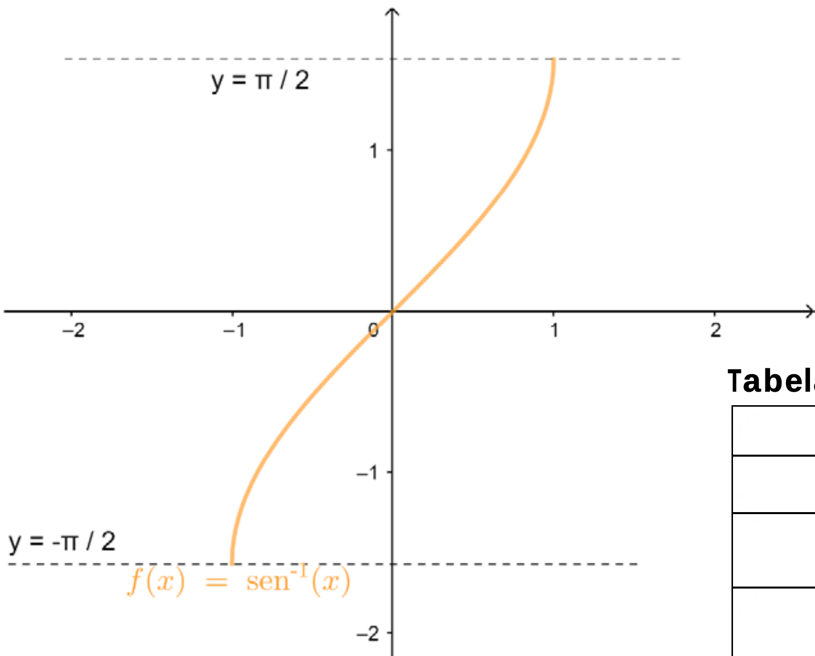


Tabela para arcseno

x	$\arcsin(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{2}$

$$D_{f(arcsenx)} = [-1, 1]$$

$$I_{m(arcsenx)} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

A função arcseno é inversa da função seno de x se e somente se:

$$\mathbf{y = sen(x) \iff x = arcsen(y)}\ , \quad \forall\, \mathbf{y} \in [-1, 1] \text{ e } \mathbf{x} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathbf{sen(arcsen(y))} = \boldsymbol{y} \quad \forall\, \mathbf{y} \in [-1, 1]$$

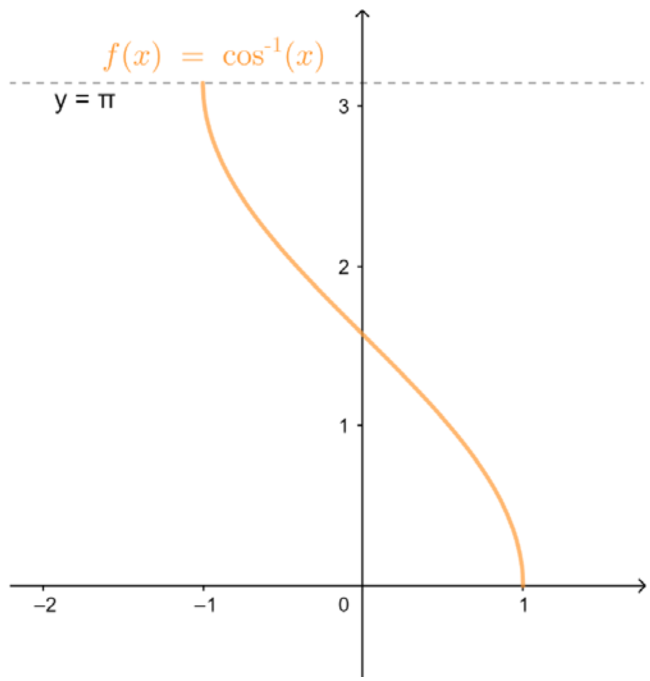
$$\mathbf{arcsen(sen(x))} = \boldsymbol{x} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Função arccosseno

Tabela para arccosseno

x	$\arccos(x)$
-1	π
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
1	0

Gráfico



$$D_{f(arccosx)} = [-1, 1]$$

$$I_{m(arccosx)} = [0, \pi]$$

A função arco cosseno é inversa da função cosseno de x se e somente se:

$$y = \cos(x) \iff x = \arccos(y), \quad \forall\, y \in [-1, 1] \text{ e } x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos(y)) = y \quad \forall\, y \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall\, x \in [0, \pi]$$

Função arctangente

Gráfico

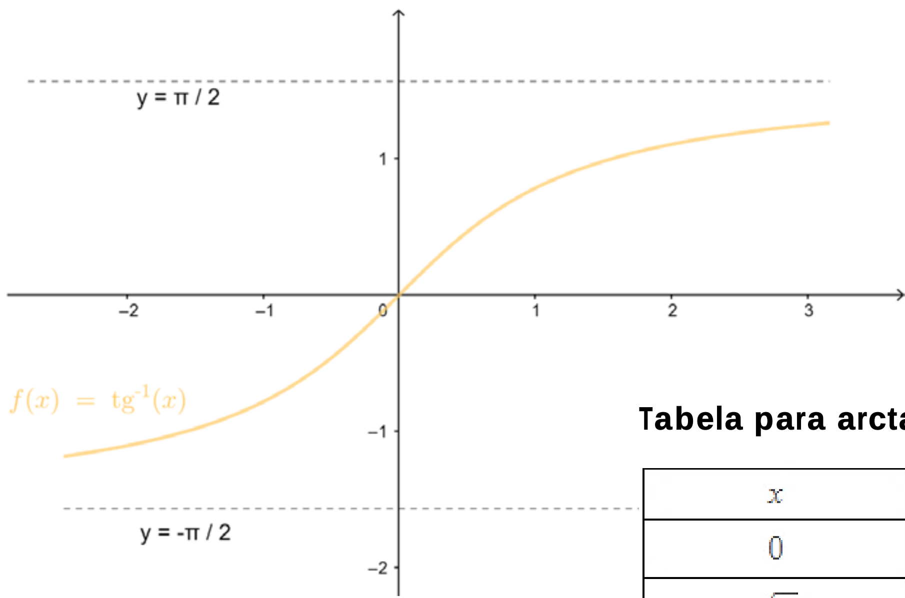


Tabela para arctan

x	$\arctan(x)$
0	0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$

$$D_{f(arctgx)} = \mathbb{R}$$

$$I_{m(arctgx)} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

A função arco tangente é o inverso da função tangente de x, se e somente se:

$$\mathbf{y = tg(x)} \iff \mathbf{x = arctg(y)}\ , \quad \forall\ \mathbf{y} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ \mathbf{e\ x} \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{g(arctg(y))} = \boldsymbol{y} \quad \forall\, \mathbf{y} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\mathbf{arctg(tg(x))} = \boldsymbol{x} \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

15 Calcule:

15.1 $\arccos(0)$

Forma de resolver: uma forma de resolução é igualar o que nos foi dado a uma variável qualquer (por exemplo **x**), depois fazer a inversa da função em estudo.

$\arccos(0) = y \longrightarrow 0 = \cos(y)$, conhecendo a trigonometria é possível saber que a função cosseno no intervalo de $[0,\ 2\pi]$ só anula em $\left(\frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{3\pi}{2}\right)$ e como a função arccosseno tem como domínio $[0,\ \pi]$ então:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \longrightarrow y = \frac{\pi}{2}$ daí resulta $\boldsymbol{\arccos(0) = \frac{\pi}{2}}$

15.2 $\arctan(1)$

Propriedade

Aplicar $\arctan(y) = x \iff y = tan(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R} \ \ e \ \ \forall\, y \in \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$

$\arctan(1) = x \longrightarrow 1 = \tan(x)$

Resolver a equação trigonométrica:

Aplicar

$\tan(x) = \tan(a) \longrightarrow x = a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\tan(x) = 1 \longrightarrow \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Então: $x = \frac{\pi}{4}$ e este valor cumpre com a condição porque $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$

$\arctan(1) = x \longrightarrow \boldsymbol{\arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$

$\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$ 15.3

$$\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = ??$$

Propriedade

Aplicar $\text{arcsen}\,(y) = x \iff y = sen(x)\,,\ \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\ e\ \forall\, y \in \left]-1,\ 1\right[$

$$\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = x \quad \longrightarrow \quad sen(x) = \frac{1}{2}$$

Aplicar

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(a) \quad \longrightarrow \quad x = a + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

$$sen(x) = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ou} \quad sen(x) = sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$$

Então temos dois valores possíveis de x mais deve-se analisar:

$x = \frac{5\pi}{6}$ e este valor não cumpre com a condição porque $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

$x = \frac{\pi}{6}$ e este valor cumpre com a condição porque $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ então:

$$\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = x \quad \longrightarrow \quad \mathbf{arcsen}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$$

15.4 $\arctan(\sqrt{3})$

$\arctan\left(\sqrt{3}\right) = ??$

Propriedade

Aplicar $\arctan(y) = x \iff y = tan(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad e \quad \forall\, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\arctan\left(\sqrt{3}\right) = x \quad \longrightarrow \quad \sqrt{3} = \tan(x)$

Resolver a equação trigonométrica:

Aplicar

$\tan(x) = \tan(a) \quad \longrightarrow \quad x = a + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

$\tan(x) = \sqrt{3} \quad \longrightarrow \quad \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

Então: $x = \frac{\pi}{3}$ e este valor cumpre com a condição porque $\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\arctan\left(\sqrt{3}\right) = x \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}}$

Caso tenha dúvida poderá consultar as tabelas encontradas no tema INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS este valor está tabelado.

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ 15.5

Propriedade

Aplicar $\arccos(y) = x \iff y = cos(x)\,,\ \forall\, x \in [0,\pi] \quad e \quad \forall\, y \in [-1,\ 1]$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = x \quad \longrightarrow \quad cos(x) = -\frac{1}{2}$$

Aplicar

Regra: $\cos(x) = \cos(a) \quad \longrightarrow \quad x = \pm a + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

$$cos(x) = -\frac{1}{2} \quad \longrightarrow cos(x) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{ou} \quad cos(x) = cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Então temos dois valores possíveis de x mais deve-se analisar:

$x = \frac{4\pi}{3}$ e este valor não cumpre com a condição porque $\frac{4\pi}{3} \notin [0,\pi]$

$x = \frac{2\pi}{3}$ e este valor cumpre com a condição porque $\frac{2\pi}{3} \in [0,\pi]$ então:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = x \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}}$$

15.6 $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\ \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Utilizou-se:

$\arctan(-x) = -\arctan(x)$

Propriedade

Aplicar $\arctan(y) = x \iff y = tan(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \ e\ \ \forall\, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$-\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x \longrightarrow \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -x \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(-x)$$

Resolver a equação trigonométrica:

Aplicar

Regra: $\tan(-x) = \tan(a) \longrightarrow -x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(-x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow \tan(-x) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Então: $x = -\frac{\pi}{6}$ e este valor cumpre com a condição porque $-\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x \longrightarrow \boldsymbol{\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}}$$

$\arctan\left(tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ **15.7**

$$\arctan\left(tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = x \quad \longrightarrow \quad tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan(x)$$

Regra: $\tan(x) = \tan(a) \quad \longrightarrow x = a + k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \,, k \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{\arctan\left(tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}}$$

15.8 $\arccos\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Regra: $\arccos(\cos(x)) = x \quad , \forall \; x \in \; [0, \; \pi]$

$$\arccos\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = x \quad \longrightarrow \quad cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(x)$$

Regra: $\cos(x) = \cos(a) \quad \longrightarrow x = \pm a + k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Então temos dois valores possíveis de x mais deve-se analisar:

$x = \frac{4\pi}{3}$ e este valor não cumpre com a condição porque $\frac{4\pi}{3} \notin [0, \pi]$

$x = \frac{2\pi}{3}$ e este valor cumpre com a condição porque $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$ então:

$$\boldsymbol{\arccos\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{arcsen}\left(sen\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$ **15.9**

Regra: $\text{arcsen}(\text{sen}(x)) = x \quad , \forall\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Sabendo que sen $\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{arcsen}\left(\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$-\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \quad \longrightarrow \quad sen(-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen(-x) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{ou} \quad sen(-x) = sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Regra: $\text{sen}(x) = \text{sen}(a) \quad \longrightarrow x = a + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$

$$-x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad -x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} - 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{2\pi}{3} - 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Então temos dois valores possíveis de x mais deve-se analisar:

$x = -\frac{\pi}{3}$ e este valor não cumpre com a condição porque $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$x = -\frac{2\pi}{3}$ e este valor cumpre com a condição porque $-\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$então:

$$\text{arcsen}\left(sen\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

15.10 $\arctan\left(tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Sabendo que $tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ então:

$$\arctan\left(tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right)$$

$\arctan\left(\sqrt{3}\right)$ já foi calculado no exercício 15.4

$\boldsymbol{\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}}$, então:

$$\boldsymbol{\arctan\left(tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}}$$

15.11 $\arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Aplicar

Regra: $\arccos(\cos(x)) = x \quad , \forall \ x \in \ [0, \ \pi]$

$$\arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = x \quad \longrightarrow \quad cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos(x)$$

Aplicar

Regra: $\cos(x) = \cos(a) \quad \longrightarrow \ x = \pm a + k\pi \, , k \in \ \mathbb{Z}$

$$x = \pm\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \ 2k\pi \quad \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \ 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \ 2k\pi = \frac{11\pi}{6} + \ 2k\pi \end{cases} \quad k \in \ \mathbb{Z}$$

Então temos dois valores possíveis de x mais deve-se analisar:

$x = \frac{11\pi}{6}$ e este valor não cumpre com a condição porque $\frac{11\pi}{6} \notin [0, \pi]$

$x = \frac{\pi}{6}$ e este valor cumpre com a condição porque $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ então:

$$\mathbf{arccos}\left(\boldsymbol{cos}\left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)\right) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$$

15.12 $\quad \text{arcsen}\left(sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Sabendo que sen $\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\text{arcsen}\left(\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$ já foi calculado no exercício 15.4

$\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, então:

$$\text{arcsen}\left(sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$$

16 Determine o domínio da função f definida por:

$$f(x) = arccos(\sqrt{x})$$ **16.1**

Essa função é uma função do tipo composta na qual temos uma função racional dentro de uma inversa trigonométrica.

Para a função do tipo:

$$g(x) = arccos(f(x))$$

Então o domínio da função é:

$$\boldsymbol{D_{f(x)} = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq f(x) \leq 1\}}$$

Então sendo:

$$f(x) = arccos(\sqrt{x})$$

$$-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$$

$$-1 \leq \sqrt{x} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x} \leq 1$$

Como estamos presente a um caso de uma função composta e a função $\sqrt{x}$ também apresenta uma condição de existência (domínio) para $\mathbb{R}$, então:

$$f(x) = arccos(\sqrt{x})$$

Função interna: $h(x) = \sqrt{x}$

$$x \geq 0$$

Após obter os valores, devemos juntar os valores de x e analisar:

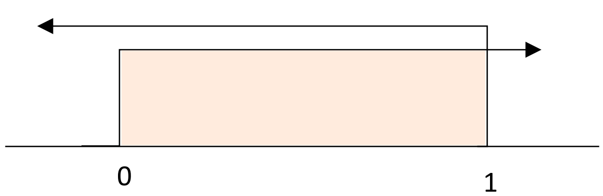
Juntando: $-1 \leq \sqrt{x}$ e $x \geq 0$

$\sqrt{x} \geq -1$ condição falsa visto que não cumpre com a condição de uma função racional:

$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ então quando n é par $f(x) \geq 0$, então se $g(x) = \sqrt{x}$, $\sqrt{x} \geq 0$ então nuca poderá ser $\sqrt{x} \geq -1$.

No que resulta apenas $x \geq 0$.

Unindo: $x \leq 1$ e $x \geq 0$



Então: $D_{f(x)} = [0, 1]$

16.2 $f(x) = arctan(\ln x)$

$$f(x) = \underbrace{arctan}_{\text{externa}}(\overbrace{\ln x}^{\text{interna}})$$

Essa função é uma função do tipo composta na qual temos uma função logarítmica dentro de uma inversa trigonométrica.

Para a função do tipo:

$$g(x) = arctan(h(x))$$

Caso $h(x)$ seja contínua em todo $\mathbb{R}$ então:

$$\boldsymbol{D_{g(x)}} = \mathbb{R}$$

Exemplo: $g(x) = arctan(x)$

$$\boldsymbol{D_{g(x)}} = \mathbb{R}$$

A função interna é $h(x) = \ln(x)$ então:

$$D_{h(x)} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$$

Então é possível concluir que: como a função arco-tangente tem domínio todo R mais a função interna não o domínio resulta em:

$$\boldsymbol{D_{f(x)}} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]\boldsymbol{0}, +\infty[$$

16.3 $f(x) = arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f(x) = \underbrace{arcsen}_{\text{externa}}\overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{\text{interna}}$$

Essa função é uma função do tipo composta na qual temos uma função fraccionária dentro de uma inversa trigonométrica.

Para a função do tipo: $g(x) = arcsen(h(x))$

Caso $h(x)$ seja contínua em todo $\mathbb{R}$ então: $\boldsymbol{D_{g(x)}} = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq h(x) \leq 1\}$

Então: $g(x) = arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$

$\boldsymbol{D_{g(x)}} = \left\{x \in \mathbb{R}: -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1\right\}$ deste domínio origina: $-1 \leq \frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x} \leq 1$

- $-1 \leq \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{x} \geq 0$

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\mathbf{x}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{x+1}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathbf{\frac{x+1}{x}}$		$+$		$-$	IND	$+$	

Então: $x \leq -1$ ou $x > 0$

- $\frac{1}{x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-x}{x} \geq 0$

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\mathbf{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathbf{1-x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$\mathbf{\frac{1-x}{x}}$		$-$	IND	$+$		$-$	

Então: $x < 0$ ou $x \geq 1$

Combinando os intervalos

(1) $x \leq -1$ com $x < 0 \Rightarrow \mathbf{x \leq -1}$

(2) $x \leq -1$ com $x \geq 1 \Rightarrow \emptyset$

(3) $x > 0$ com $x < 0 \Rightarrow \emptyset$

(4) $x > 0$ com $x \geq 1 \Rightarrow \mathbf{x \geq 1}$

Temos o seguinte domínio: $\boldsymbol{D_{f(x)}} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

16.4

$$f(x) = \ln(5-x) + \frac{1}{x}$$

Temos uma função do tipo $f(x) = g(x) + h(x)$

No qual a função: $g(x) = \ln(5-x)$ e $h(x) = \frac{1}{x}$

Domínio de $g(x)$. Cumprindo com a condição do logaritmo:

$\boldsymbol{D_{g(x)}} = \{x \in \mathbb{R}: 5 - x > 0\}$

$\boldsymbol{D_{g(x)}} = \{x \in \mathbb{R}:\ x < 5\}$

Domínio de $h(x)$

$\boldsymbol{D_{h(x)}} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$

$$\boldsymbol{D_{f(x)}} = \{x \in \mathbb{R}: x < 5\ e\ x \neq 0\}$$

$$\boldsymbol{D_{f(x)}} =]-\infty; 5[\ \setminus\ \{0\}$$

16.5

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x + 1}$$

$x^2 - 2x + 1 \neq 0$

$(x-1)^2 \neq 0$

$x - 1 \neq \sqrt{0}, \qquad x \neq 1$

$$Df = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

16.6

$$f(x) = log_2(x-3)$$

É uma função logarítmica e para determinar o seu domínio o argumento (logaritimando) deve ser maior que zero, então:

$x - 3 > \implies x > 3$

$$Df =]3, +\infty[$$

$f(x) = arccos(x + 5)$ 16.7

Para o Cálculo do domínio desta função deve-se saber que a função arco-cosseno tem o seu domínio no intervalo fechado de -1 a 1:

y=arccos(h(x)) o seu domínio é: $-1 \leq f(x) \leq 1$ então f(x) a função interna f(x) é x+5, assim sendo temos:

$$-1 \leq x + 5 \leq 1 \text{ (basta isolar x)}$$

$$-1 - 5 \leq x \leq 1 - 5$$

$$-6 \leq x \leq -4$$

$$Df = [-6; -4]$$

16.8 $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

A função é logarítmica então o zero argumento deve ser maior que, então temos:

$x^2 - 1 > 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 > 1$

Regra: Para $x^n > a\, , se\ n$ é $par\ então\ x < -\sqrt[n]{a}$ ou $x > \sqrt[n]{a}$

Então: $x < -\sqrt{1} \quad ou \ \ x > \sqrt{1}$ o que resulta: $x < -1\ ou\ x > 1$ agora basta unir, e teremos:

$$Df =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{tg\,(x)}$$ **16.9**

Temos uma função exponencial na forma *f(x)= a^f(x)^*, normalmente o domínio de uma função exponencial é todo R quando a função que está no seu expoente é uma função contínua em todo R, mais neste cado h(x)=tg(x). Então o domínio da função será determinado pela função que se encontra no expoente. O próximo passo é saber o domínio de função tg(x), assim sendo:

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

16.10 $$f(x) = \sqrt{\ln(x)}$$

$lnx \geq 0$ e $x > 0$

Trabalhando $lnx \geq 0$ temos: $x \geq e^0 \implies \mathrm{x} \geq 1$, assim temos:

$\mathrm{x} \geq 1 \quad e \quad x > 0 \quad \implies Df = [1, +\infty[$

$$f(x) = sen\left(\frac{1}{x^2}\right)$$ **16.11**

Temos uma função do tipo y=sen(h(x)) e $h(x) = \frac{1}{x^2}$ que resulta:

$$x^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 0 \qquad \implies \qquad Df = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

16.12 $$f(x) = tg\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$Df = \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \;,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Uma observação importante: caso substituirmos x=0 na função, a função existirá:

$$\boldsymbol{f(0)} = tg\left(\frac{1}{0}\right) = tg(\infty) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$$

$$f(x) = arcsen\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$ **16.13**

$$-1 \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 1$$

$$\frac{x+1}{x+2} \geq -1 \quad \wedge \quad \frac{x+1}{x+2} \leq 1$$

$$\frac{x+1}{x+2} + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x+1}{x+2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x + 3}{x + 2} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{-1}{x + 2} \leq 0 \;\; / \times (-1)$$

$$\frac{2x + 3}{x + 2} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{x + 2} \geq 0$$

- $\frac{2x+3}{x+2} \geq 0$

	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\mathbf{2x+3}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{x + 2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathbf{\frac{2x+3}{x+2}}$		$+$	IND	$-$		$+$	

Então: $x < 2$ ou $x \geq -\frac{3}{2}$

- $\frac{1}{x+2} \geq 0$

	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\mathbf{x + 2}$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{\frac{2x+3}{x+2}}$		$-$	IND	$+$	

Então: $x > 2$

Combinando os intervalos

(1) $x < 2$ com $x > 2 \implies \emptyset$

(2) $x \geq -\frac{3}{2}$ com $x > 2 \implies \mathbf{x \geq -\frac{3}{2}}$

Temos o seguinte domínio:

$$Df = \left]-\infty\ ,-\frac{3}{2}\right]$$

16.14 $f(x) = arcsen(x^2)$

$$-1 \leq x^2 \leq 1$$

$x^2 \geq -1 \quad \wedge \quad x^2 \leq 1$

$\mathbb{R} \quad \wedge \quad x^2 \leq 1 \longrightarrow$ Regra: $x^n \leq a \longrightarrow -\sqrt[n]{a} \leq x \leq \sqrt[n]{a}$

Resulta: $-\sqrt{1} \leq x \leq \sqrt{1} \implies -1 \leq x \leq 1$

$$D_f = [-1\ ,1]$$

16.15 $f(x) = arccos\left(\frac{3x}{x+1}\right)$

$$-1 \leq \frac{3x}{x+1} \leq 1$$

$\frac{3x}{x+1} \geq -1 \quad \wedge \quad \frac{3x}{x+1} \leq 1$

$\frac{3x}{x+1} + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{3x}{x+1} - 1 \leq 0$

$$\frac{4x+1}{x+1} \geq 0 \qquad \wedge \qquad \frac{2x-1}{x+1} \leq 0$$

- $\dfrac{4x+1}{x+1} \geq 0$

	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$\mathbf{4x+1}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{x+1}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathbf{\frac{4x+1}{x+1}}$		$+$	IND	$-$		$+$	

Então: $x < -1$ ou $x \geq -\frac{1}{4}$

- $\dfrac{2x-1}{x+1} \leq 0$

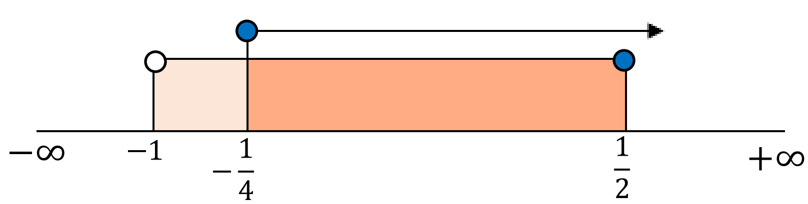
	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\mathbf{2x-1}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{x+1}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathbf{\frac{2x-1}{x+1}}$		$+$	IND	$-$		$+$	

Então: $-1 < x \leq \frac{1}{2}$

Combinando os intervalos:

(1) $x < -1$ com $-1 < x \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \emptyset$

(2) $x \geq -\frac{1}{4}$ com $-1 < x \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{4} < \mathbf{x} \leq \frac{1}{2}$



Temos o seguinte domínio:

$$D_f = \left[-\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{2}\right]$$

16.16 $f(x) = arctg(x^2 + 2)$

A função não tem pontos indefinidos nem restrições de domínio. Portanto, o domínio é: $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = arcsen(\sqrt[3]{x})$ 16.17

$$-1 \leq \sqrt[3]{x} \leq 1 \implies \sqrt[3]{x} \geq -1 \ \wedge \ \sqrt[3]{x} \leq 1 \implies x \geq -1 \quad \wedge \quad x \leq 1$$

$$\boldsymbol{D_f = [-1\ ,1]}$$

16.18 $f(x) = \log_5[x(x^2 - 2)(x^2 - 3)]$

Usar a condição de existência para esta função em R na qual o logaritimando deve ser maior que zero, assim sendo: $x(x^2 - 2)(x^2 - 3) > 0$.

Para saber os valores maior que zero iremos resumir em uma tabela, mas antes deve-se achar os pontos que irão para a tabela:

$$x(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0 \implies x = 0\ , x = \pm\sqrt{2}\ , x = \pm\sqrt{3}$$

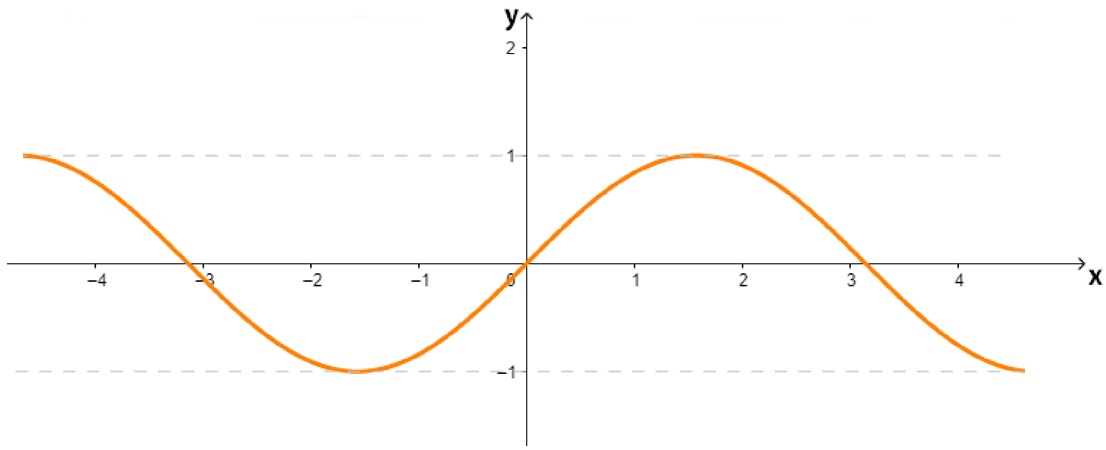
	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$		$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$		$+$	
f		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

$$D_f = \left]-\sqrt{3}\ , -\sqrt{2}\right[\ \cup \ \left]0\ , \sqrt{2}\right[\ \cup \ \left]\sqrt{3}\ , +\infty\right[$$

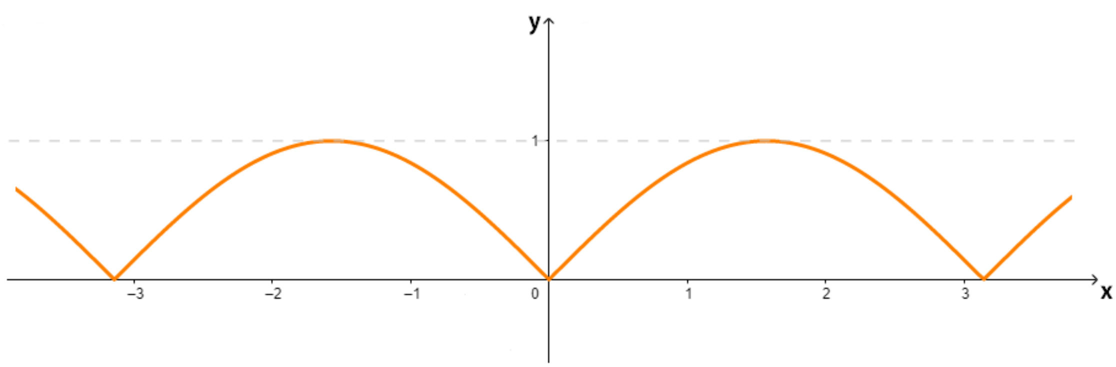
17 ***Determine o conjunto imagem da função f definida por:***

$$f(x) = |sen(x)|$$ **17.1**

A função seno tem imagem que varia em -1 e 1 então como temos o módulo de seno de x a parte negativa da função desaparece mantendo assim a parte positiva que varia de 0 e 1. Esta é o gráfico da função seno, olhando para o eixo y que é o eixo que nos da a informação sobre a imagem da função os valores da função variam de -1 a 1.



Esta é o gráfico da função modulo de seno, esta função por estar no módulo só apresentará imagens positivas, então olhando para o eixo de y a função varia de 0 até 1.



$$I_m = 0 \leq y \leq 1 \quad \longrightarrow [0,1]$$

17.2 $f(x) = 2 + sen(2x - 3)$

Para achar a imagem desta função basta analisar que a função seno a sua imagem varia de -1 a 1:

Fazendo y= 2+sen(2x-3) então:

$-1 \leq sen(2x-3) \leq 1$ o objectivo é fazer com que a função seno limitada entre -1 e 1 fique parecida com a função dada no início, então para isso basta adicionar 2 em todos os termos:

$$-1 \leq 2 + sen(2x-3) \leq 1 + 2$$

No início igualamos y=3+sen(2x-3) então:

$$1 \leq y \leq 3$$

$$I_m = [1,3]$$

17.3 $f(x) = 2 + \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Fazendo: $y = 2 + \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \quad \longrightarrow \quad -1 \times \left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \times \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{2} + 2 \leq 2 + \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{2} + 2$$

$$\frac{3}{2} \leq 2 + \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{5}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$$

f(x) = y, então:

$$I_m = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

17.4

$$f(x) = 1 - \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m = \mathbb{R}$$

17.5

$$f(x) = \frac{2}{3} - \arctan(x + \pi)$$

Para achar a imagem desta função basta analisar que a função "arco-tangente" a sua imagem varia no intervalo aberto de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$:

Fazendo y= $\frac{2}{3} - \arctan(x + \pi)$ então:

$$-\frac{\pi}{2} < -\arctan(x+\pi) < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} < \frac{2}{3} - \arctan(x+\pi) < \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4-3\pi}{6} < \frac{2}{3} - \arctan(x+\pi) < \frac{4+3\pi}{6} \longrightarrow \frac{4-3\pi}{6} < f(x) < \frac{4+3\pi}{6}$$

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{y}$, então:

$$I_m = \left]\frac{4-3\pi}{6}, \frac{4+3\pi}{6}\right[$$

17.6

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(4x + 2)$$

Fazendo: y = $\frac{1}{2}\mathrm{sen}(4x + 2)$

$$-1 \le \mathrm{sen}(4x+2) \le 1 \longrightarrow -1\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2}\mathrm{sen}(4x+2) \le 1\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\mathrm{sen}(4x+2) \le \frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \le \mathrm{f(x)} \le \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I_m = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$$

$$f(x) = \sqrt{3}\,\text{arcsen}(3x+1)$$ **17.7**

Para achar a imagem desta função basta analisar que a função "arco-seno" a sua imagem varia no intervalo fechado de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$:

Fazendo: y=$\sqrt{3}\,\text{arcsen}(3x+1)$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}(3x+1) \leq \frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2}\sqrt{3} \leq \sqrt{3}\ \text{arcsen}(3x+1) \leq \sqrt{3}\ \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2} \leq \sqrt{3}\ \text{arcsen}(3x+1) \leq \frac{\sqrt{3}\,\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}$$

$$I_m = \left[-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right]$$

17.8 $$f(x) = -2 + \frac{1}{2}\cos(3x)$$

Fazendo: $y = -2 + \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1 \longrightarrow -1 \times \left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \times \cos(3x) \leq 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos(3x) \leq \frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2} - 2 \leq -2 + \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{2} - 2$$

$$-\frac{5}{2} \leq -2 + \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq -\frac{3}{2} \longrightarrow -\frac{5}{2} \leq f(x) \leq -\frac{3}{2}$$

$f(x) = y$, então:

$$I_m = \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$$

$$f(x) = \frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1)$$ **17.9**

Para achar a imagem desta função basta analisar que a função "arco-cosseno" a sua imagem varia no intervalo fechado de 0 a $\boldsymbol{\pi}$.

Fazendo y= $\frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1)$ então:

$$0 \leq \arccos(x+1) \leq \pi \ /\times(-2) \quad \longrightarrow \quad -2\pi \leq -2\arccos(x+1) \leq -2(0)$$

$$-2\pi \leq -2\arccos(x+1) \leq 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi}{3} - 2\pi \leq \frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1) \leq \frac{\pi}{3} + 0$$

$$-\frac{5\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} - 2\arccos(x+1) \leq \frac{\pi}{3} \quad \longrightarrow \quad -\frac{5\pi}{3} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{3}$$

f(x) = y, então:

$$I_m = \left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

17.10 $$f(x) = \frac{\pi}{3} + \arctan(2x)$$

Fazendo y= $\frac{\pi}{3} + \arctan(2x)$ então:

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(2x) < \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} + \arctan(2x) < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{2}{3} - \arctan(2x) < \frac{5\pi}{6} \quad \longrightarrow \quad -\frac{\pi}{6} < f(x) < \frac{5\pi}{6}$$

f(x) = y, então:

$$I_m = \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$$ **17.11**

$$I_m = \mathbb{R}$$

17.12 $$f(x) = \frac{2}{3}cot\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$I_m = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4}arccos\left(\frac{4x+1}{4}\right)$$ **17.13**

Para achar a imagem desta função basta analisar que a função "arco-cosseno" a sua imagem varia no intervalo aberto de 0 a $\boldsymbol{\pi}$ **:**

Fazendo y = $\frac{\pi}{4}arccos\left(\frac{4x+1}{4}\right)$ então:

$$0 < \arccos\left(\frac{4x+1}{4}\right) < \pi \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi}{4}(0) < \frac{\pi}{4}\arccos\left(\frac{4x+1}{4}\right) < \frac{\pi}{4}(\pi)$$

$$0 < \frac{\pi}{4}\arccos\left(\frac{4x+1}{4}\right) < \frac{\pi^2}{4} \quad \longrightarrow \quad 0 < f(x) < \frac{\pi^2}{4}$$

$\text{f(x)} = \text{y}$, então:

$$I_m = \left]0\ ,\frac{\pi^2}{4}\right[$$

17.14 $$f(x) = 4 - \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

A imagem de uma função exponencial na forma: $-c.n^{ax+b} + k$ é $]-\infty, k[$ Assim sendo: $I_m =]-\infty\,,4\,[$.

Outra forma de fazer é achando a inversa desta função, pois o domínio da inversa é a imagem da função.

Fazendo: $\mathbf{f(x) = y}$:

$$y = 4 - \left(\frac{1}{5}\right)^x \quad \rightarrow \quad \mathrm{y} - 4 = -\left(\frac{1}{5}\right)^x \quad /\times(-1) \quad \rightarrow \quad 4 - \mathrm{y} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

É possível aplicar logaritmo natural (ln) em ambos os lados:

$$\ln(4-\mathrm{y}) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)^x$$ Aplicar a propriedade: $\ln(a)^b = b\ln(a)$

$$\ln(4-\mathrm{y}) = \mathrm{x}\ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad \rightarrow \quad \ln(4-\mathrm{y}) = \mathrm{x}(\ln 1 - \ln 5) \quad \rightarrow \quad \ln(4-\mathrm{y}) = -\mathrm{x}\ln(5)$$

$$\mathrm{x} = \frac{\ln(4-\mathrm{y})}{-\ln(5)}$$

- $\mathbf{y = x \ \ e\ x = f^{-1}(x)}$

$$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}) = \frac{\ln(4-\mathrm{x})}{-\ln(5)}$$

$$D_{\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})} = \{x \in \mathbb{R} |\ 4 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} |\ -x > -4\} = \{x \in \mathbb{R} |\ x < 4\}$$

$$\boldsymbol{D_{\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})} = I_m =]-\infty, 4[}$$

$$f(x) = e^{x-2x^2}$$ **17.15**

Neste exercício a lógica de resolução é achar a inversa da função, porque a imagem da função é o domínio combinado das funções inversas.

$$y = e^{x-2x^2}$$

$$lny = ln(e^{x-2x^2})$$

$$lny = x - 2x^2 \longrightarrow x - 2x^2 - lny = 0$$

Resolver como equação do segundo grau:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(-lny)}}{2(-2)} \longrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8\ln y}}{4}$$

Agora basta analisar o domínio desata inversa que será:

$$1 - 8lny \geq 0 \ , \quad Onde: y > 0$$

$$-8lny \geq -1 \ /.(-1) \longrightarrow 8lny \leq 1$$

Isolando y:

$$y \leq e^{\frac{1}{8}} \longrightarrow y \leq \sqrt[8]{e}$$

$$I_m =]\, 0\, , \sqrt[8]{e}\,]$$

18 **Sejam** $f(x) = \frac{4^x+4^{-x}}{2}$ **,** $g(x) = \frac{4^x-4^{-x}}{2}$ e $h(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ **mostre que:**

$$\boldsymbol{f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)}$$ **18.1**

Se $f(x) = \frac{4^x+4^{-x}}{2}$, então:

Em f(x) basta substituir x=***x+y***

$$f(x+y) = \frac{4^{x+y} + 4^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x) = \frac{4^x+4^{-x}}{2} \quad , \quad f(y) = \frac{4^y+4^{-y}}{2}$$

$$g(x) = \frac{4^x-4^{-x}}{2} \quad , \quad g(y) = \frac{4^y-4^{-y}}{2}$$

Demonstremos então que $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$

$$\frac{4^{x+y} + 4^{-(x+y)}}{2} = \left(\frac{4^x + 4^{-x}}{2} \times \frac{4^y + 4^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{4^x - 4^{-x}}{2} \times \frac{4^y - 4^{-y}}{2}\right)$$

$$\frac{4^{x+y} + 4^{-(x+y)}}{2} = \frac{(4^x + 4^{-x}) \times (4^y + 4^{-y})}{2 \times 2} + \frac{(4^x - 4^{-x}) \times (4^y - 4^{-y})}{2 \times 2}$$

$$\frac{4^{x+y} + 4^{-(x+y)}}{2} = \frac{(4^{x+y} + 4^{x-y} + 4^{-x+y} + 4^{-x-y}) + (4^{x+y} - 4^{x-y} - 4^{-x+y} + 4^{-x-y})}{4}$$

$$\frac{4^{x+y} + 4^{-(x+y)}}{2} = \frac{2 \times 4^{x+y} + 2 \times 4^{-x-y}}{4} = \frac{2}{4} \times \left(4^{x+y} + 4^{-(x+y)}\right)$$

$$\frac{4^{x+y} + 4^{-(x+y)}}{2} = \frac{4^{x+y} + 4^{-(x+y)}}{2} \quad \text{(verificado)}$$

18.2 $$\boldsymbol{g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)}$$

Se $g(x) = \frac{4^x-4^{-x}}{2}$, então:

Em f(x) basta substituir x=***x+y***

$$g(x+y) = \frac{4^{x+y} - 4^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x) = \frac{4^x+4^{-x}}{2} \quad , \quad f(y) = \frac{4^y+4^{-y}}{2}$$

$$g(x) = \frac{4^x-4^{-x}}{2} \quad , \quad g(y) = \frac{4^y-4^{-y}}{2}$$

Demonstremos então que $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$:

$$\frac{4^{x+y} - 4^{-(x+y)}}{2} = \left(\frac{4^x + 4^{-x}}{2} \times \frac{4^y - 4^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{4^x - 4^{-x}}{2} \times \frac{4^y + 4^{-y}}{2}\right)$$

$$\frac{4^{x+y} - 4^{-(x+y)}}{2} = \frac{4^{x+y} - 4^{x-y} + 4^{-x+y} - 4^{-x-y} + 4^{x+y} + 4^{x-y} - 4^{-x+y} - 4^{-x-y}}{4}$$

$$\frac{4^{x+y} - 4^{-(x+y)}}{2} = \frac{2}{4} \times \left(4^{x+y} - 4^{-(x+y)}\right) = \frac{4^{x+y} - 4^{-(x+y)}}{2}$$

$$\frac{4^{x+y} - 4^{-(x+y)}}{2} = \frac{4^{x+y} - 4^{-(x+y)}}{2} \quad \text{(verificado)}$$

$\boldsymbol{h(x) + h(y) = \mathbf{h}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)}$ 18.3

$$h(y) = \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$$

$$h(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$\mathrm{h}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \ln\left[\frac{1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)}{1 + \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)}\right] = \frac{\frac{1+xy-x-y}{1+xy}}{\frac{1+xy+x+y}{1+xy}}$$

$$= \frac{(1-x) - y(1-x)}{(1+x) + y(1+x)}$$

$$\mathbf{h}\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\mathbf{1}+\mathbf{xy}}\right) = \mathbf{ln}\left[\frac{(\mathbf{1}-\mathbf{x})(\mathbf{1}-\mathbf{y})}{(\mathbf{1}+\mathbf{x})(\mathbf{1}+\mathbf{y})}\right]$$

Demonstremos então que $h(x) + h(y) = \mathrm{h}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$:

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = \ln\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}$$

por regra $\mathbf{\ln a + \ln b = \ln(ab)}$, então:

$$\ln\left[\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}\right] = \ln\left[\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}\right]$$

$$\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} \qquad \text{(verificado)}$$

19 Mostre que:

19.1 $\boldsymbol{\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)}$

Aplicar as regras

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

$\arccos(\cos(a)) = a$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

$$\cos(\arccos(-x)) = \cos(\pi - \arccos(x))$$

$$-\mathrm{x} = \cos(\pi)\arccos(\cos(\mathrm{x})) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\arccos(\mathrm{x}))$$

$$-\mathrm{x} = -\mathrm{x}$$

$\boldsymbol{\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, com\ |x| \leq 1}$ 19.2

$$\operatorname{sen}(\arccos \mathrm{x}) = \sqrt{1-\mathrm{x}^2}, \mathrm{com}\ |\mathrm{x}| \leq 1$$

Fazendo $\arccos \mathrm{x} = \mathrm{a} \iff \cos \mathrm{a} = \mathrm{x}$. Calculamos então $\sin \mathrm{a}$:

$$\sin \mathrm{a} = \sqrt{1-(\cos \mathrm{a})^2} \implies \sqrt{1-\mathrm{x}^2} = \operatorname{sen}(\arccos \mathrm{x})$$

$$\sqrt{1-\mathrm{x}^2} = \sqrt{1-\mathrm{x}^2} \quad , \mathrm{com}\ |\mathrm{x}| \leq 1$$

19.3 $\boldsymbol{\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right), com\ |x| \geq 1}$

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right), com\ |x| \geq 1$$

$$\sec(\operatorname{arcsec}(x)) = \sec\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \implies x = \sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

Se $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = a$, então $\cos a = \frac{1}{x} \implies \sec(x) = x$, sustituindo:

$$x = x$$

$$\mathbf{arccosec}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{arcsen}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)$$ **19.4**

$$\operatorname{arccosec} x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\operatorname{cosec}(\operatorname{arccosec}(x)) = \operatorname{cosec}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to x = \csc\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$Fazendo\ \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) = a \to \sin a = \frac{1}{x}\ e\ \csc x = x\,.\,Logo:$$

$$x = x$$

19.5 $$\mathbf{arcotg}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{arctg}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) & \boldsymbol{se\ x > 0} \\ \boldsymbol{\pi} + \mathbf{arctg}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) & \boldsymbol{se\ x < 0} \end{cases}$$

$$\operatorname{arcotg}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$(1)\ \operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{x}\right)\ se\ x > 0 \to x = \operatorname{cotg}\left(\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) se\ x > 0$$

$$\text{Fazendo}\ \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{x}\right) = \text{a, buscamos}\ \ \operatorname{cotg}\left(\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = \operatorname{cotg} a:$$

$$\frac{1}{x} = \operatorname{tg}(a) \to \cot a = x.\ Assim\ sendo\ \cot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x$$

$$(2)\ \operatorname{arccotg}(x) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\ se\ x < 0 \to \operatorname{arccotg}(x) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \pi,$$

$$se\ x < 0$$

$$Supondo\ que\ \operatorname{arccotg}(x) = a\ e\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = b, \qquad com\ x < 0\ vem$$

$$\begin{cases} x = \cot a \\ \dfrac{1}{x} = \tan b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \cot a \\ x = \cot b \end{cases}$$

$$(I)\ 1 + \cot a^2 = \frac{1}{\sin a^2} \Longrightarrow \sin a = \pm\sqrt{\frac{1}{1+x^2}},\ portanto\ \sin a = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\Longrightarrow \cos a = \pm\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}},como\ x < 0\ então\ \cos a = -\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$(II)\ 1 + \cot b^2 = \frac{1}{\sin b^2} \Rightarrow \sin b = \pm\sqrt{\frac{1}{1+x^2}},\ portanto\ \sin b = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\Longrightarrow \cos b = \pm\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}},como\ x < 0\ então\ \cos b = -\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$a - b = \pi, aplicando \cos membro\ a\ membro\ temos\ que: \sin(a-b) = \sin(\pi);$$

$$\Longrightarrow \sin a\ cosb - senbcosb = 0$$

$$-\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \times \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} - \left(-\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \times \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\right) = 0$$

$$-\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$0 = 0$$

Numa pandemia de gripe, o número de pessoas infectadas, ao fim de *t* dias, é dado por:

$$L(t) = \frac{90000}{1 + 1990e^{-0,5t}}$$

20

20.1 Quantas pessoas foram infectadas ao fim de 10 dias?

$$L(t) = \frac{90000}{1 + 1990e^{-0,5t}} \quad , \ t = 10\ dias$$

$$L(10) = \frac{90000}{1+1990e^{-0,5 \times 10}} \cong 6246 \text{ foram infectadas}$$

Em quantos dias 50.000 pessoas ficaram com gripe? **20.2**

$$L(t) = \frac{90000}{1 + 1990e^{-0,5t}}$$

$$P/\ L(t) = 50000\ infectados\ \ em\ t_{\ dias}:$$

$$50000 = \frac{90000}{1+1990e^{-0,5t}} \rightarrow \frac{90000}{50000} = 1 + 1990e^{-0,5t} \rightarrow 1,8 - 1 = 1990e^{-0,5t}$$

$$\frac{1}{e^{0,5t}} = \frac{0,8}{1990} \rightarrow \ln e^{0,5t} = \ln 2487,5 \rightarrow t \cong 16 \text{ dias}$$

21

A magnitude de um terremoto na Escala Richter é dada por:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Onde *E* é a energia liberada pelo terremoto, em joules, e E_0=$10^{4,4}$Joules.

Nota: $0 \leq M \leq 8,9$, onde 8,9 é a magnitude do maior terremoto registado.

O terremoto de São Francisco nos EUA, em 1906, liberou aproximadamente $5,95\text{x}10^{16}$Joules. Qual foi sua magnitude? **21.1**

$$E = 5,95 \times 10^{16} J \qquad \Longrightarrow \qquad M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{5,95 \times 10^{16}}{10^{4,4}}\right) \cong 8,2$$

Então: $0 \leq \mathbf{8,2} \leq 8,9$

21.2 Sabendo que o terremoto de Koebe, no Japão, teve uma magnitude de 7,1, determine a energia libertada.

$$\mathrm{M_{koebe}} = 7,1, \text{a energia liberada é:}$$

$$7,1 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right) \rightarrow \frac{7,1 \times 3}{2} = \log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right) \rightarrow \frac{E}{10^{4,4}} = 10^{10,65}$$

$$E = 10^{15,05} J$$

22

O nível N de um som, medido em **decibéis**, é função da sua intensidade I (I>0), medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade:

$$N = 10\log(10^{12}I)$$

22.1

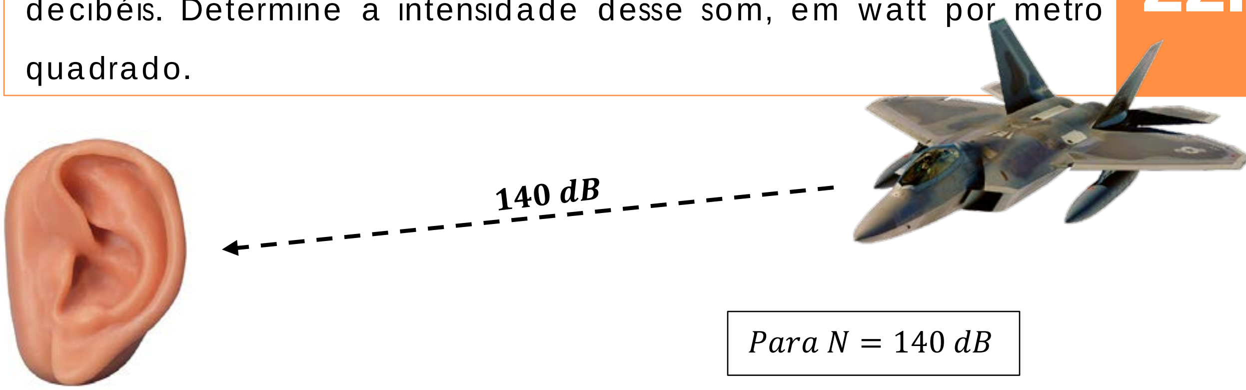
Verifique que $N = 120 + 10\log(I)$

$$N = 10\log(10^{12}I) \quad \Longrightarrow \quad N = 10(\log 10^{12} + \log I)$$

$$N = 10(12 + \log I) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{N = 120 + 10\log(I)}$$

22.2

Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis. Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.



$\boxed{Para\ N = 140\ dB}$

$$140 = 120 + 10\log(I) \rightarrow \frac{140-120}{10} = \log(I) \rightarrow I = 10^2\ Watts$$

23

A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu pH, que é dado por: $pH = -\log x$ onde x designa a concentração de iões H_3O^+, medida em mol/dm^3. Admita que o pH do sangue arterial humano é 7,4.

23.1

Qual é a concentração (em mol/dm^3) de iões H_3O^+, no sangue arterial humano? Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e "a" entre 1 e 10. Apresente o valor de "a" arredondado às unidades.

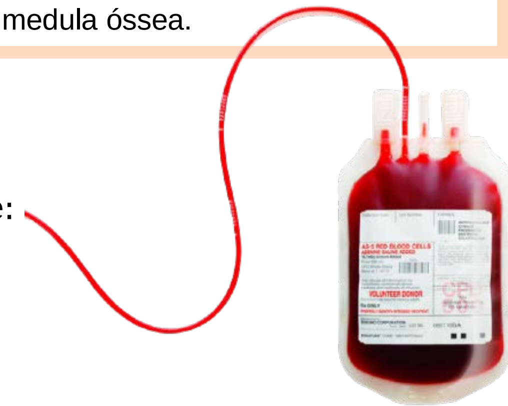
----------------- Sobre o sangue -----------------

O sangue é um fluido corporal que percorre o sistema circulatório em animais vertebrados; formado por uma porção celular de natureza diversificada - pelos "elementos figurados" do sangue - que circula em suspensão em meio fluido, o plasma. Em animais vertebrados o sangue, tipicamente vermelho, é geralmente produzido na medula óssea.

$$\mathrm{pH} = -\log \mathrm{x} \implies \mathrm{x} = [\mathrm{H_3O^+}] = 10^{-\mathrm{pH}}$$

$\mathrm{pH} = 7{,}4$ a concentração de $[\mathrm{H_3O^+}]$ no **sangue** é:

$$[\mathrm{H_3O^+}] = 10^{-7{,}4} \cong 4 \times 10^{-8}\, \mathrm{mol}/\mathrm{dm^3}$$



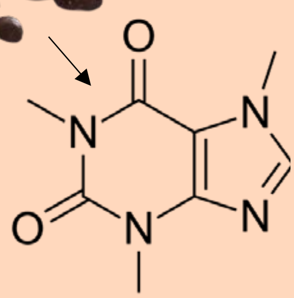
23.2

A concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite. Qual é a diferença ente o pH do leite e o pH do café? Apresente o resultado arredondando às décimas.

O **café** é uma bebida produzida a partir dos grãos torrados do fruto do cafeeiro. É servido tradicionalmente quente, mas também pode ser consumido gelado. O café é um estimulante, por possuir cafeína - geralmente 80 a 140 mg para cada 207 ml dependendo do método de preparação.

Cafeína

($C_8H_{10}N_4O_2$)



Leite é uma secreção nutritiva de cor esbranquiçada e opaca produzida pelas glândulas mamárias das fêmeas dos mamíferos. O líquido é produzido pelas células secretoras das glândulas mamárias ou mamas. A secreção láctea de uma fêmea dias antes e depois do parto se chama colostro.

$$[H_3O^+] = y_{\text{café}} \Rightarrow \frac{[H_3O^+]}{3} = y_{\text{leite}}$$

$$pH_{\text{leite}} - pH_{\text{café}} = -\log y_{\text{leite}} - (-\log y_{\text{café}})$$

$$pH_{\text{leite}} - pH_{\text{café}} = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{3}\right) + \log([H_3O^+])$$

$$pH_{\text{leite}} - pH_{\text{café}} = -\cancel{\log([H_3O^+])} + \log(3) + \cancel{\log([H_3O^+])}$$

$$pH_{\text{leite}} - pH_{\text{café}} = \log(3) \cong 0{,}5$$

24

O carbono-14 é um material radioativo utilizado na datação de fósseis e achados arqueológicos.

Datação

A **datação** radiométrica ou datação radioativa é a determinação da idade de um objeto a partir das substâncias radioativas nele contidas e dos produtos do decaimento radioativo.

Esta substância permanece numa quantidade estável num organismo vivo, deixando de haver reposição a partir da sua morte, iniciando-se assim um processo de decrescimento da quantidade de carbono-14 nesse organismo. Admita que a quantidade $\boldsymbol{Q}$ de carbono-14, em gramas, presente num dado organismo, $\boldsymbol{t}$ anos após a sua morte é dada por:

$$\boldsymbol{Q(t) = Q_0 e^{-0{,}000121t}}$$

24.1 No processo de desintegração, a semivida de uma substância radioativa é o período de tempo que a quantidade inicial demora a reduzir-se a metade. Determine a semivida do carbono-14.

$$Q(t_{semivida}) = Q_0 e^{-0{,}000121t}, \text{no tempo de meia vida } \frac{Q_0}{2} = Q(t_{semivida})$$

$$\Longrightarrow \frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-0{,}000121t} \Longrightarrow \ln(0{,}5) = \ln e^{-0{,}000121t}$$

$$\frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}000121} = t_{semivida} \cong 5728$$

24.2

Realizou-se uma descoberta arqueológica onde foi encontrado um organismo com 53 mg de carbono-14. Sabe-se que um exemplar vivo desse organismo possui 350 mg de carbono-14. Quanto tempo terá decorrido desde a morte desse organismo?

$$Q(t) = 53mg \qquad \Longrightarrow \qquad 53 = 350 \times e^{-0{,}000121t}$$

$$\ln\left(\frac{53}{350}\right) = -0{,}000121\mathrm{t} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{t} \cong \ 15600\ anos$$

24.3

Um fóssil (de um animal) com 20.000 anos foi encontrado contendo 12mg de carbono-14.

Que quantidade de carbono-14 teria o animal antes de morrer?

$$12 = Q_0 \times e^{-0{,}000121*20000}$$

$$Q_0 = \frac{12}{e^{-0{,}000121\times 20000}} = 134{,}95\ mg$$

Exercícios Propostos

Após acompanhar a resolução de cada exercício, temos aqui exercícios propostos para o estudante resolver e aperfeiçoar as formas e métodos de resolução de cada tema. Os exercícios foram retirados de livros, uns foram adaptados pelo ESCR e alguns de provas, fichas e exames de **Cálculo 1** do ISPTEC. BOA SORTE!

1- Construa o gráfico das seguintes funções:

$(1.a)\ y = x^2 + x + 1$ $(1.b)\ y = x^3 - 3x + 2$ $(1.c)\ y = x^4$

$(1.d)\ y = -x^2 + 2x + 1$ $(1.e)\ y = x^3 - 6x^2 + 9x$ $(1.f)\ y = \ln(x) + 2$

$(1.g)\ y = e^x + 2$ $(1.h)\ y = |\ln(x)|$ $(1.i)\ y = |x| + x$

$(1.j)\ y = x^2 + x$ $(1.k)\ y = \log_{\sqrt{2}}|x|$ $(1.l)\ y = \frac{x+|x|}{2}$

$(1.m)\ y = \sqrt{3+x}$ $(1.n)\ y = 3 - \sqrt{x}$ $(1.o)\ y = 2^{x+3}$

$(1.p)\ y = -2^x + 3$ $(1.q)\ y = \frac{x^2-4}{x-2}$ $(1.r)\ y = 2x^2 + 7x + 6$

$(1.s)\ y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ $(1.t)\ y = \begin{cases} e^{|x|}, & x \leq -3 \\ x^2 + x, & -3 < x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$

2- Determine o domínio das seguintes funções:

$(2.a)\ y = \sqrt{-x} + \frac{4}{\sqrt{(x+3)(1-|x|)}}$ $(2.b)\ y = \operatorname{arctg}(x^2)\frac{\ln(9-x^2)}{\sqrt{x+1}}$ $(2.c)\ y = \ln(\sqrt{x})$

$(2.d)\ y = \sqrt[3]{x} + \ln(x-1)$ $(2.e)\ y = \sqrt{2+x-x^2} - \sqrt{x|x-1|}$

$(2.f)\ y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$ $(2.g)\ y = \log(x^2) + \log(4-x^2)$

$(2.h)\ y = \sqrt{\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ $(2.i)\ y = \sqrt{\frac{3}{x^2-5x+4}}$ $(2.j)\ y = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x-2}$

$(2.k)\ y = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+4}}\right)$ $(2.l)\ y = 4^{\log(2x^2-5x-3)}$ $(2.m)\ y = \arccos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$(2.n)\ y = \operatorname{arccot}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)$ $(2.o)\ y = \arccos(3x+2) + \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

$(2.q)\ y = -\frac{1}{\ln(2x-x^2)}$ $(2.r)\ y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-5}$ $(2.s)\ y = \frac{2x-5}{x^3-16x}$

$(2.t)\ y = \frac{\log_2 x^2}{-2+\sqrt{x+1}}$ $(2.u)\ y = 4 + 4\operatorname{arcsen}(4x+4)$

$(2.v)\ y = -\frac{1}{\ln(2x-x^2)}$ $(2.w)\ y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-5}$ $(2.x)\ y = \frac{2x-5}{x^3-16x}$

$(2.y)\ y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{2}\right) - \log_2(4x^2 - x^2)$ $(2.z)\ y = \frac{arcsen(4x) - \ln(x+1)}{x}$

3- Determine a imagem das seguintes funções:

$(3.a)\ y = \sqrt{-x} + \frac{4}{\sqrt{(x+3)(1-|x|)}}$ $(3.b)\ y = \operatorname{arctg}(x^2)\frac{\ln(9-x^2)}{\sqrt{x+1}}$ $(2.c)\ y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$(3.d)\ y = \sqrt[3]{x} + \ln(x-1)$ $(3.e)\ y = \sqrt{2+x-x^2} - \sqrt{x|x-1|}$

$(3.f)\ y = \sqrt{-x} + \frac{4}{\sqrt{(x+3)(1-|x|)}}$ $(3.g)\ y = \operatorname{arctg}(x^2)\frac{\ln(9-x^2)}{\sqrt{x+1}}$ $(3.h)\ y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

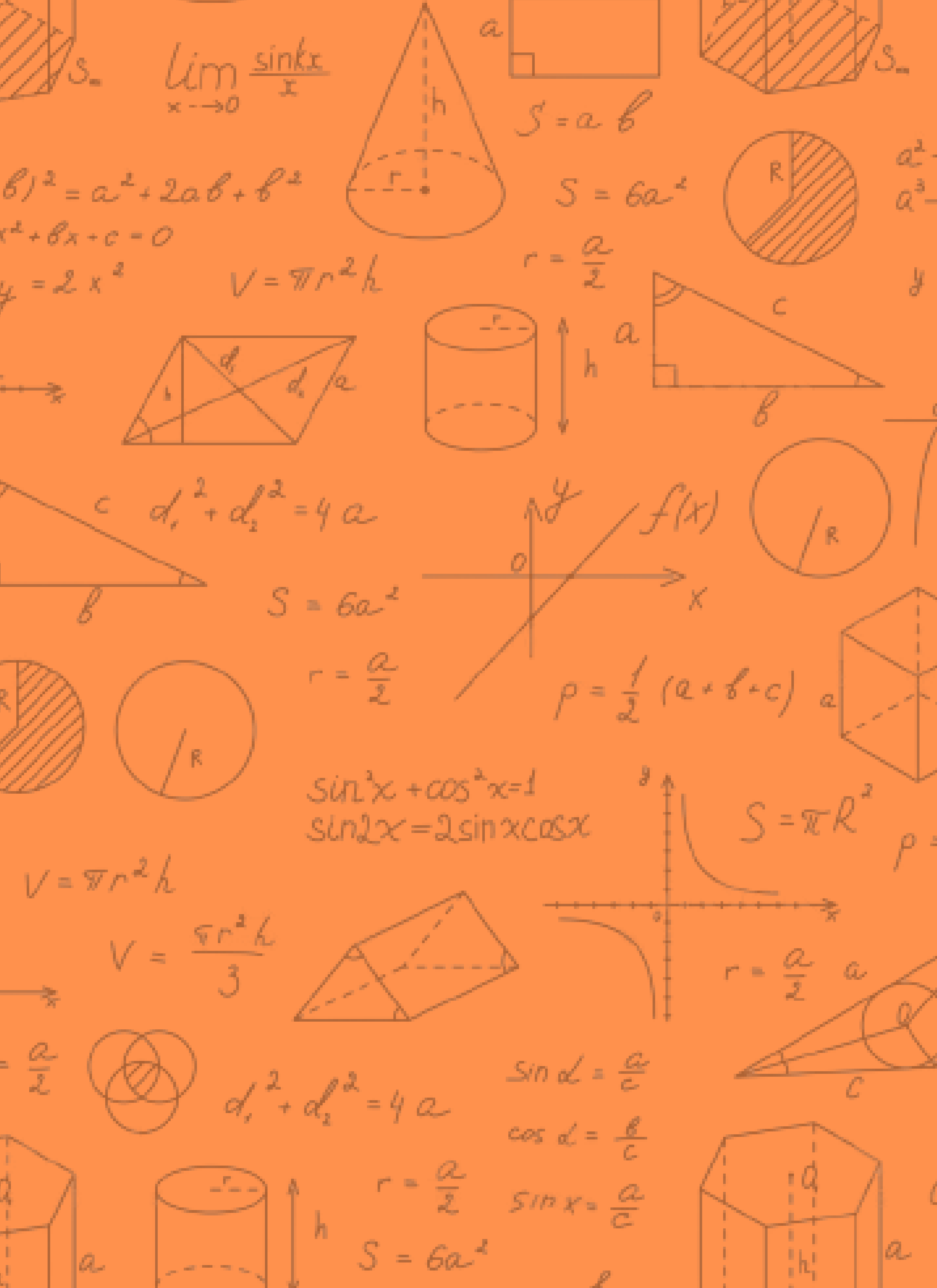
4- Analise a paridade das seguintes funções:

$(4.a)\ y = \frac{1}{(3+x)(1-|x|)}$ $(4.b)\ y = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ $(4.c)\ y = \frac{1-\cos(x)}{x}$

$(4.d)\ y = -3 + \sqrt{-x} + \log_2(4-x)$ $(4.e)\ y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$(4.g)\ y = \ln(x-3) + \ln(x)$ $(4.h)\ y = e^{-x}$

$(4.j)\ y = x^2 + x$ $(4.k)\ y = 3x - 4$ $(4.l)\ y = x + 1$


S = ab
S = 6a²
V = πr²h
f(x)
sin²x + cos²x = 1
sin2x = 2sinxcosx
S = πR²
p = 1/2 (a + b + c)
d₁² + d₂² = 4a
r = a/2
sin α = a/c
cos α = b/c