B.Sc. 3rd Semester (Pass) (New Scheme)

Examination, November–2018

MATHEMATICS

Paper–BM-232

Partial Differential Equations

U3971502
U381766

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 40*

Note : *Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each unit. **Question No. 9 is compulsory.***

नोट : *प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। **प्रश्न सं. 9 अनिवार्य है।***

Unit–I

इकाई–I

(4+3=7 Marks)

1. (a) Prove that the partial differential equation of the set of all cones having their vertex at the origin is $px + qy = z$

(b) Solve $y^2 p + x^2 q = x^2 y^2 z^2$

(क) सिद्ध कीजिए कि सभी शंकुओं जिनका शीर्ष मूल पर है, के समुच्चय का आंशिक अवकल समीकरण $px + qy = z$ है।

(ख) हल कीजिए $y^2 p + x^2 q = x^2 y^2 z^2$

2. (a) Find the complete integral, general integral and the singular integral of $2(z + xp + yq) = yp^2$

(b) Solve the partial differential equation

$$q^2 = z^2 (1-p^2) p^2$$

(क) $2(z + xp + yq) = yp^2$ का सम्पूर्ण समाकल, साधारण समाकल तथा एकल समाकल ज्ञात कीजिए।

(ख) आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$q^2 = z^2 (1-p^2) p^2$$

Unit–II

इकाई–II

(4+3=7 Marks)

3. (a) Solve $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + xy + y^2$

(b) Solve $(D^2 + DD' - 2D'^2) z = (y + 1)e^x$

(क) हल कीजिए $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + xy + y^2$

(ख) हल कीजिए $(D^2 + DD' - 2D'^2) z = (y + 1)e^x$

4. (a) Solve

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4y \frac{\partial}{\partial y} - z = x^2 y^2$$

(b) Solve

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)\, z = 4e^{x+y} \cos(x + y)$$

(क) हल कीजिए

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4y \frac{\partial}{\partial y} - z = x^2 y^2$$

(ख) हल कीजिए

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)\, z = 4e^{x+y} \cos(x + y)$$

Unit–III

इकाई–III

(4+3=7 Marks)

5. (a) Classify and reduce the equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$ into canonical form.

(b) Classify and reduce the equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y$$ to canonical form.

(क) समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ को नियमित रूप से वर्गीकृत तथा समानयित कीजिए।

(ख) समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y$ को नियमित रूप से वर्गीकृत तथा समानयित कीजिए।

6. (a) Solve $r + 5s + 6t = 0$

(b) Solve $r + 3s + t + (rt - s^2) = 1$ using Monge's Method.

(क) हल कीजिए $r + 5s + 6t = 0$

(ख) मोंगे की विधि का उपयोग करते हुए

$r + 3s + t + (rt - s^2) = 1$ को हल कीजिए।

Unit–IV

इकाई–IV

(7 Marks)

7. Solve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ satisfying the conditions $u(0, t) = u(a, t) = 0 \; \forall \; t$, $u(x, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a}$ and $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$.

शर्तों $u(0, t) = u(a, t) = 0 \; \forall \; t$, $u(x, 0) = u_0 \sin \frac{\pi x}{a}$ तथा $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$ को परितुष्ट करते हुए $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ को हल कीजिए।

8. Solve the one dimensional diffusion equation

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ in the region $0 \le x \le \pi, t \ge 0$ Subject to the conditions

(i) $u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \; \forall \; t$

(ii) $u \to$ finite as $t \to \infty$

(iii) $u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$

क्षेत्र $0 \le x \le \pi, t \ge 0$ में एक आयामी विसरण समीकरण

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ को हल कीजिए।

निम्न शर्तों के अधीन :

(i) $u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \; \forall \; t$

(ii) $u \to t \to \infty$ के रूप में परिमित

(iii) $u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$

Unit–V

इकाई–V

(6×2=12 Marks)

9. (a) Form the p.d.e. by eliminating arbitrary constants 'a' and 'b' from the equation

$z = ax + by + a^2 + b^2$

समीकरण $z = ax + by + a^2 + b^2$ से स्वेच्छाचारी स्थिरांकों 'a' तथा 'b' के विलोपन द्वारा p.d.e. का निर्माण कीजिए।

(b) Examine whether the equations $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x - 7y$ and

$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 8y$ are compatible or not.

परीक्षण कीजिए क्या समीकरण $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x - 7y$ तथा

$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 8y$ सहवर्तनीय हैं अथवा नहीं।

(c) Solve $p^2 + q^2 = 1$

हल कीजिए $p^2 + q^2 = 1$

(d) Describe one dimensional wave equation and Laplace equation.

एक आयामी तरंग समीकरण तथा लाप्लास समीकरण का वर्णन कीजिए।

(e) Solve $(D^2 - D'^2 + D - D')\, z = 0$

हल कीजिए $(D^2 - D'^2 + D - D')\, z = 0$

(f) Classify the following partial differential equations

(i) $r + t = 0$

(ii) $y^2 r - t + 4z = 0$

निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों को वर्गीकृत कीजिए

(i) $r + t = 0$

(ii) $y^2 r - t + 4z = 0$