EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CONCURSO CALCULUS OPEN

Indicaciones:

• Muestra el procedimiento de todos los ejercicios y justifica tu respuesta.

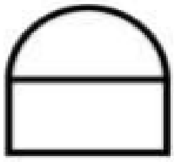
• Toma en cuenta la notación y las unidades.

TEMAS:

1. **LIMITES**
    a. **LÍMITE GRÁFICO**
    b. **LIMITES ANALITICOS (TIPO $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $(\infty - \infty)$; $\left(\frac{0}{0}\right)$ Y $\left(\frac{a}{0}\right)$)**
    c. **PENDIENTE Y ECUACIÓN DE LÍNEA TANGENTE**
    d. **ASÍNTOTAS HORIZONTALES, ASÍNTOTAS VERTICALES Y PUNTOS HUECOS DE FUNCIONES RACIONALES**
2. **DERIVADAS**
    a. **DERIVADAS USANDO TABLITA (PARA SACAR LEY DE PRODUCTO, LEY DE COCIENTE, LEY DE CADENA Y SEGUNDA DERIVADA)**
    b. **DERIVADAS BÁSICAS (DIRECTAS, LEY DE PRODUCTO, LEY DE COCIENTE, LEY DE CADENA)**
3. **APLICACIONES DE LAS DERIVADAS**
    a. **PROBLEMAS DE CINEMÁTICA**
    b. **CONEXIÓN ENTRE FUNCIONES Y SUS DERIVADAS**
    c. **PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN**
    d. **RAZÓN DE CAMBIO**
4. **ANTIDERIVADAS**
    a. **ANTIDERIVADAS GENERALES**
    b. **ANTIDERIVADAS PARTICULARES**
    c. **PROBLEMAS DE CINEMÁTICA**
    d. **INTEGRALES DEFINIDAS**
    e. **METODOS DE INTEGRACIÓN (SUSTITUCIÓN Y POR PARTES)**
5. **APLICACIONES DE INTEGRAL DEFINIDA**
    a. **ÁREA BAJO UNA CURVA**
    b. **ÁREA ENTRE CURVAS**
    c. **VOLUMEN UTILIZANDO EL MÉTODO DE DISCO**

Elaborado: ing. Tiberiu Hrabak 2025

1. Una ventana normanda tiene el contorno de un semicírculo en la parte superior de un rectángulo como se muestra en la figura. (Usa también la separación entre las dos figuras geométricas en el perímetro total)



Suponga que hay 16 + 2π pies de molduras de madera disponibles para los 4 lados del rectángulo y el semicírculo. Encuentra las dimensiones del rectángulo (y por lo tanto del semicírculo) que maximizarán el área de la ventana. Justifica tu respuesta.

Respuesta: **La base del rectángulo mide 4 pies y la altura 4 pies, por lo que el radio del semicírculo es 2 pies.**

2. Un trozo de alambre recto de 10 pies de largo se dobla en forma de L. ¿Cuál es la distancia más corta posible entre los extremos?

Respuesta: **La distancia más corta posible es cortar por la mitad el cable, obteniendo una distancia mínima de 7.07 pies.**

3. Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$. Calcula las coordenadas de punto mínimo, punto máximo y punto de inflexión (si existen). Decida los intervalos, para x, donde la función aumenta, disminuye, es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Explique su trabajo y muestre todos los procedimientos necesarios.

Respuesta:

Punto máximo en (-0.549,0.631); Punto mínimo en (1.215,-2.113);

Punto de inflexión en (0.333,-0.741);

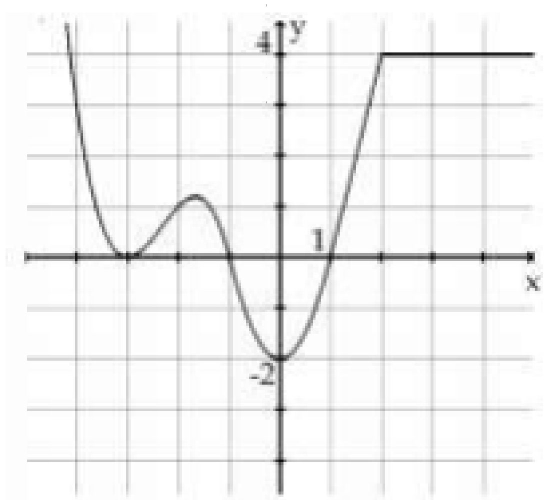
Intervalo creciente $x \in (-\infty, -\mathbf{0.549}) \cup (\mathbf{1.215}, \infty)$;

Intervalo decreciente $x \in (-\mathbf{0.549}, \mathbf{1.215})$;

Intervalo de concavidad hacia abajo $x \in (-\infty, \mathbf{0.333})$;

Intervalo de concavidad hacia arriba $x \in (\mathbf{0.333}, \infty)$

4. Dada la gráfica siguiente de la derivada de una función f´(x).



Determina los intervalos donde y = f(x) aumenta, disminuye, es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. También determine la coordenada x de cualquier punto crítico o de inflexión. Muestre todos los procedimientos necesarios.

Respuesta:

Puntos críticos en x = -3, x = -1 y x = 1;

puntos de inflexión en x = -3, x = -1.75 y x = 0,

Intervalo donde la función es creciente $\boldsymbol{x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (1, \infty)}$**;**

Intervalo donde la función es decreciente $\boldsymbol{x \in (-1, 1)}$**;**

Intervalo de concavidad hacia abajo $\boldsymbol{x \in (-\infty, -3) \cup (-1.75, 0)}$**;**

Intervalo de concavidad hacia arriba $\boldsymbol{x \in (-3, -1.75) \cup (0, \infty)}$**.**

5. Halla la pendiente de la línea tangente a la función $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$ en x=3. ^

Respuesta: **m=-5**

6. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $y = \sqrt{7 - 3x^2}$ en x=1.

Respuesta: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}}$

7. Si la posición de una hormiga que viaja a lo largo de una trayectoria horizontal en el tiempo t es $3t^2$ +1, ¿cuál es la velocidad promedio de la hormiga desde t = 1 hasta t = 6?

Respuesta: **v=21**

8. La función de posición de una partícula que se mueve en línea recta es $S(t) = 2t^3 - 10t^2 + 5$. ¿La velocidad de la partícula aumenta o disminuye en t = 3? ¿Y en t = 10?

Respuesta: **En t = 3 la velocidad es decreciente dado que v(3) = -6 < 0 ya(3)=16 > 0. En t = 10, la velocidad aumenta dado que v(10)=400 y a(10) = 100.**

9. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies/s desde la parte superior de un edificio que tiene 96 pies de altura. Calcula la altura máxima que alcanza la pelota y la velocidad de impacto de la pelota con el suelo.

Respuesta: **S_{max}=196 ft, $v_{impacto}$=-112 pies/s**

10. Calcula el área entre y = sin(x), x = 0 y x = 5π. Haz un boceto y sombrea el área. Escribe la integral correspondiente para obtener el área. Usa la integración y luego usa el primer teorema del cálculo para obtener el valor del área.

Respuesta: **A=10 unidades de área**

11. Calcula el área entre $y = 16 - x^2$, el eje x, x = -3 y x = 5. Haz un boceto y sombrea el área. Escribe la integral correspondiente para obtener el área. Usa la integración y luego usa el primer teorema del cálculo para obtener el valor del área.

Respuesta: **A=86 unidades de área**

12. Calcula el área entre $x = y^2 - 2$ y y=x-4 Haz un boceto y sombrea el área. Calcule matemáticamente los puntos de intersección. Escribe la integral correspondiente para obtener el área. Usa la integración y luego usa el primer teorema del cálculo para obtener el valor del área.

Respuesta: **A=20.833 unidades de área**

13. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ y $2y + x = 0$. Elabora un boceto y sombree el área. Calcule matemáticamente los puntos de intersección. Escribe la integral correspondiente para obtener el área. Usa la integración y luego usa el primer teorema del cálculo para obtener el valor del área.

Respuesta: **A=22 unidades de área**

14. Calcule el volumen del sólido de revolución girado sobre el eje x y delimitado por $y = \frac{1}{x}$,el eje x, x=1 y x=e. Haga un boceto y sombree la región que se rotará. Escribe la integral correspondiente para obtener el volumen. Use la integración y luego use el primer teorema del cálculo para obtener el valor del volumen.

Respuesta: **V=1.985 unidades de volumen**

15. Calcule el volumen del sólido de revolución, si la región delimitada por $y = x^3$, el eje x y x=3 se rota alrededor del eje x. Haga un boceto y sombree la región que se rotará. Escribe la integral correspondiente para obtener el volumen. Use la integración y luego use el primer teorema del cálculo para obtener el valor del volumen.

Respuesta: **V=981.523 unidades de volumen**

16. Se da la siguiente tabla de valores:

x	f	f´	f´´	g	g´	g´´
-1	3	1	-3	5	2	5
0	2	3	2	1	-2	2
3	3	4	3	1	2	3
5	3	2	1	-2	0	4

Calcula:

$(f(x)\cdot g(x))'_{(3)} =$	10
$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'_{(0)} =$	-7/4
$(f(g(x)))''_{(-1)} =$	14
$(\ln(f(x)))''_{(5)} =$	-1/9

17. Se da la función: $f(x) = \frac{3x^3-3x}{x^3-4x^2+3x}$

Decide las ecuaciones de las asíntotas verticales, asíntotas horizontales y coordenadas de puntos huecos, si existen.

Respuesta: A(0,-1) – punto hueco; B(1,-3) – punto hueco; x=3 Asíntota vertical; y=3 Asíntota horizontal

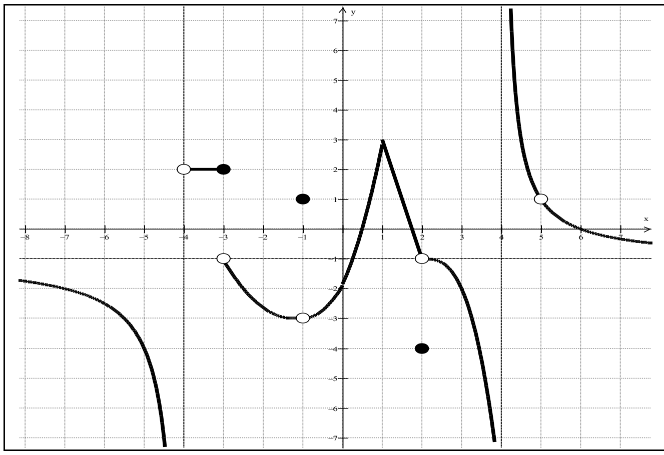
18. Se da la función $f(x) = \frac{2^{x+1}+4}{2^x-2}$- Decide todas las asíntotas de la función

Respuesta: y=2 Asíntota horizontal hacia +infinito; y=-2 Asíntota horizontal hacia -infinito; x=1 Asíntota vertical

19. Se da la función $f(x) = \frac{ax^2-4}{x^3-bx}$. Decide los parámetros reales a y b de tal manera, que la función tenga dos puntos de intersección con el eje x de coordenadas A(-1,0) y B(1,0) y 3 asíntotas verticales en x=0, x=-4 y x=4.

Respuesta: a=4 y b=16

20. Decide los límites o valor de función, en base de la gráfica siguiente:



	$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -1$
	$\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$
	$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1$
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ -1
	$f(5) =$ ∄

21. Calcula la siguiente integral, usando propiedades de algebra.
$$\int \frac{1 - 2x + 3\sqrt{x}}{5 \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx$$
Respuesta: $\boldsymbol{I = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{x^4} + \frac{18}{25}\sqrt[6]{x^5} + c}$

22. Calcula la antiderivada particular f(x), si sabemos que $f''(x) = 6x - 4$, $f(1) = 4$; $f(-1) = 2$
Respuesta: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + 5}$

23. Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m, y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a razón de 2 m^3/min, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.
Respuesta: El nivel de agua sube a una razón de cambio 0.28 m/min

24. Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. Con ¿qué rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?
Respuesta: El faro gira con una rapidez de 0.128 rad/s.

25. Si se conectan dos resistencias R1 y R2 en paralelo, como se muestra en la figura, entonces la resistencia total R, medida en ohms (Ω) está dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Si R1 y R2 se incrementan a razón de 0.3 Ω/s y 0.2 Ω /s, respectivamente, que tan rápido cambia R cuando R1=80 Ω y R2 =100 Ω?
Respuesta: $\boldsymbol{\frac{dR}{dt} = 0.132\Omega/s}$

26. Calcula los siguientes límites:
   a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{2-3x^2}$ **Respuesta:** $L = -\frac{1}{3}$
   b. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{4-x^2}$ **Respuesta:** $L = -\frac{1}{4}$
   c. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+5}{6-3x}$ **Respuesta:** $L = -\infty$
   d. $\lim\limits_{x\to -\infty} (2 - x^2 - x^3)$ **Respuesta:** $L = +\infty$
   e. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-2^3}{h}$ **Respuesta:** $L = 12$

27. Calcula las siguientes derivadas:
   a. $f(x) = \frac{2x\cdot\sqrt[4]{x}-3x}{x^2}$ **Respuesta:** $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt[4]{x^7}} + \frac{3}{x^2}$
   b. $f(x) = x^4 \cdot secx$ **Respuesta:** $f'(x) = x^3 secx \cdot (4 + x \cdot tanx)$
   c. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3-4x}$ **Respuesta:** $f'(x) = -\frac{x^4+13x^2-12}{(x^3-4x)^2}$
   d. $f(x) = \ln(4x) - \tan(\pi x)$ **Respuesta:** $f'(x) = \frac{1}{x} - \pi sec^2(\pi x)$
   e. $f(x) = \cot^5(\sin x)$ **Respuesta:** $f'(x) = -5cosx \cdot csc^2(sinx) \cdot cot^4(sinx)$

28. Calcula la siguiente derivada en el punto dado.
   a. $f(x) = \sin(3x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$ **Respuesta:** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
   b. $f(x) = e^{2x}$ en $x = ln2$ **Respuesta:** $f'(ln2) = 8$

29. Calcula las siguientes antiderivadas:
   a. $\int \frac{x-1}{x^2} dx$ **Respuesta:** $I = ln|x| + \frac{1}{x} + c$
   b. $\int \frac{sinx\cdot tanx}{cosx} dx$ **Respuesta:** $I = tanx - x + c$

30. Calcula las siguientes integrales definidas:
   a. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 2\right) dx$ **Respuesta:** $I = ln2 - 2$
   b. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (cosx) dx$ **Respuesta:** $I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

31. Calcula las siguientes derivadas de orden superior:
   a. Cuarta derivada de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 12$
      Respuesta: $f^{iv}_{(x)} = 0$
   b. Tercera derivada de la función $f(x) = e^{2x} - lnx$
      Respuesta: $f^{iii}_{(x)} = 8e^{2x} + \frac{2}{x^3}$
   c. Quinta derivada de la función $f(x) = \frac{3}{4x^2}$
      Respuesta: $f^{v}_{(x)} = -\frac{540}{x^7}$