AFEKA המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב אפקה
TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING

מס' נבחן

שם הקורס: אנליזה נומרית
קוד הקורס: 90925

הוראות לנבחן:
-חומר עזר שימושי לבחינה: הבחינה בחומר סגור. דפי נוסחאות מצורפים לטופס הבחינה.

-אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
-אין להשתמש בטלפון סלולארי
-אין להשתמש במחשב אישי או נייד
-אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
-אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

בחינת סמסטר: א
השנה: תשע"ח
מועד: ב

תאריך הבחינה: 4/3/18
שעת הבחינה: 17:00
משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: ד"ר בר-לוקיאנוב ולדימיר, ד"ר אלונה מוחוב, ד"ר אלכסנדר סגל, פרופ' דליה פישלוב, מר יניב דביר, מר ירון יגר, גב' אירינה נמירובסקי, מר חיים ריקס

***** שאלון הבחינה לא ייבדק ע"י המרצה, לא ייסרק ולא יישמר *****
***** לא יינתן ציון על תשובות אשר תיכתבנה בשאלון זה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

הבחינה כוללת 5 שאלות. יש לענות על 4 שאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. רק 4 השאלות הראשונות במחברת יבדקו!!
2. יש לרשום בתחילת מחברת הבחינה את מספרי השאלות שפתרתם.
3. יש להתחיל את התשובה לכל שאלה בעמוד חדש.
4. יש לנמק היטב כל תשובה!
5. דפי נוסחאות מצורפים לבחינה.
6. ניתן להשתמש במחשבון אישי לא גרפי ולעבוד בדיוק של 4 ספרות משמעותיות.

<u>שאלה 1 (25 נק')</u>

נתונה $f(x)$ המוגדרת בקטע $[0,h]$.

א. (6 נק') בנו פולינום אינטרפולציה המתלכד עם ערכי f בנקודות $\frac{h}{3}$, h וקרבו בעזרתו את $f\left(\frac{2h}{3}\right)$.

ב. (6 נק') נניח כי $f(x)$ בעלת נגזרת **מסדר ראשון** רציפה, העריכו שגיאה בקירוב $f\left(\frac{2h}{3}\right)$ מסעיף א'.

ג. (7 נק') קרבו $\int_0^h f(x)dx$ ע"י הנוסחה $Af(h)+Bf\left(\frac{h}{3}\right)$.

ד. (6 נק') נניח כי $f(x)$ בעלת **נגזרת רציפות מסדר כלשהו**, הוכיחו כי ביטוי השגיאה לקירוב שמצאתם בסעיף ג' נתון ע"י $\frac{f^{(3)}(d)}{3!}\int_0^h \left(x-\frac{h}{3}\right)^2(x-h)dx$.

<u>שאלה 2 (25 נקודות)</u> נניח כי $f(x)$ גזירה מכל סדר.

א. (3 נק') הראו כי אם מקרבים את $\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx$ על ידי נוסחה הנובעת מקירוב $f(x)$ ע"י פולינום אינטרפולציה ממעלה קטנה או שווה ל- n בנקודות האינטרפולציה $x_0,x_1,\ldots,x_n$ אז הקירוב לאינטגרל הוא $\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$.

ב. (10 נק') חשבו קירוב לאינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ באמצעות נוסחת גאוס עם פונקציית משקל $\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ המבוססת על שתי נקודות.

ג. (7 נק') רשמו את ביטוי השגיאה באינטגרציה (**חשבו את האינטגרל המופיע בנוסחת השגיאה**). **מה סדר הדיוק האלגברי של השיטה?** נמקו את תשובתכם.

ד. (5 נק') חשבו את הקירוב המתאים לאינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ וחסמו את השגיאה.

הערה: בשאלה זו ניתן להשתמש בנוסחאות:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3\pi}{8},\ \int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2},\ \int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$$

שאלה 3 (25 נקודות)

א. (4 נקי) תהי $g:[a,b]\to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בעלת נגזרת רציפה בעלת נקודת שבת α כך ש $g'(\alpha)>1$. נגדיר את האיטרציה $x_{n+1}=g(x_n)$. הראו שקיימת סביבה של α כך שלכל ניחוש התחלתי $x_0\neq\alpha$ בסביבה זו, מתקיים $|x_1-\alpha|>|x_0-\alpha|$ והסיקו שהשיטה לא מתכנסת.

הדרכה: השתמשו בעובדה הבאה. אם $u(x)$ רציפה בנקודה α ומקיימת $u(\alpha)>1$ אז קיימת סביבה של α בה לכל x מתקיים $u(x)>1$.

ב. (14 נקי) נתונה המשוואה $x^3=2$.

אילו מהשיטות הבאות מתכנסת לפתרון המשוואה?

a. $x_{n+1}=x_n^3+x_n-2$

b. $x_{n+1}=\dfrac{2+5x_n-x_n^3}{5}$

ג. (7 נקי) הראו ששיטת האיטרציה $x_{n+1}=\dfrac{(3b-x_n^2)x_n}{2b}$ מתכנסת ל $\sqrt{b}$,

כאשר נתון כי x_0 מספיק קרוב ל- $\sqrt{b}$.

מצאו את קצב ההתכנסות של השיטה.

שאלה 4 (25 נקודות)

רוצים לקרב פתרון של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax_1+x_2=5 \\ 2x_1+ax_2=6 \end{cases}$$

על ידי שיטת יעקובי.

א. (5 נקי) מהו תנאי מספיק עבור ערכי a **המבטיח כי** שיטת יעקובי תתכנס לפתרון לכל ערך התחלתי. **נמקו את תשובתכם וצטטו את המשפט המתאים.**

ב. (10 נקי) אם $a=4$ רשמו את נוסחת האיטרציות של יעקובי למערכת הנתונה.

רשמו את שיטת האיטרציה בצורה מטריציונית.

ג. (10 נקי) הניחו כי הניחוש ההתחלתי הוא:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וכי הפתרון המדויק של המערכת בסעיף ב' הוא $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

מצאו קירוב של פתרון המערכת על ידי נוסחת האיטרציה שבניתם בסעיף ב' כך שהשגיאה בנורמת אינסוף לא תעלה על $\varepsilon=10^{-1}$.

דף נוסחאות - אנליזה נומרית

1. נוסחת טיילור:

תהי $f(x)$ בעלת $n+1$ נגזרות רציפות בסביבה של הנקודה x_0 . אזי לכל x בסביבה של x_0 קיימת c בין x ל- x_0 כך שמתקיים

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}+\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. אינטרפולציה

2.1 לגרנג' (Lagrange) $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)\ ,\ l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$

2.2 ניוטון (Newton):

$$P_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+....+$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,...,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

2.3 הפרש מחולק

$$f[x_0,x_1,...,x_k]=\begin{cases}\dfrac{1}{x_k-x_0}\left(f[x_1,...,x_k]-f[x_0,...,x_{k-1}]\right) & ,x_0\neq x_k\\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & ,x_0=x_1=...=x_k\end{cases}$$

תכונות

$$;\frac{d}{dx}f[x_0,...,x_k,x]=f[x_0,...,x_k,x,x]\quad ,\quad f[x_0,...,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

כאשר ξ נקודה השייכת לקטע המכיל את הנקודות $x_0,...x_k$.

2.4 השגיאה באינטרפולציה

$$e(x)=f(x)-P_n(x)=f[x_0,...,x_n,x]\psi(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\psi(x)$$

כאשר $\psi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

2.5 אינטרפולצית צ'בישב

פולינומי צ'בישב: על $[-1,1]$. $T_n(t)=\cos n(\arccos t)$.

נוסחת נסיגה:

$$T_0(t)=1,\quad T_1(t)=t,\quad T_n(t)=2tT_{n-1}(t)-T_{n-2}(t),\quad n=1,2,3..$$

n שורשי צ'בישב: $t_i=\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$ עבור $i=0,1,2,...,n-1$.

נוסחת טרנספורמציה (שינוי משתנה) של $t\in[-1,1]$ ל- $x\in[a,b]$: $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$.

השגיאה המקסימלית של האינטרפולציה ב $n+1$ — נקודות צבישב:

יהי $P_n(x)$ פולינום אינטרפולציה דרך $n+1$ נקודות צ'בישב. אם f גזירה ברציפות $n+1$ פעמים בקטע $[a,b]$ אז:

$$|f(x)-P_n(x)|\le\frac{2(b-a)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

3. גזירה

א. גזירת פולינום האינטרפולציה

$$f'(x) = P_n'(x) + f\left[x_0,\dots,x_n,x,x\right]\psi(x) + f\left[x_0,\dots,x_n,x\right]\psi'(x)$$

השגיאה בנגזרת:

$$E(x) = f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\psi(x) + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\psi'(x),$$

$$\psi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

ב. גזירה נומרית באמצעות טורי טיילור $f^{(k)}(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) \dots + C_n f(x_n)$

נחשב את טור טיילור סביב הנקודה x_i עד לאיבר מסדר n-1 . נציב את כל אחת מהנקודות בטור ואז בנוסחה הנ"ל ונבצע השוואת מקדמים .

4. אינטגרציה

4.1 קירוב האינטגרל ע"י פולינום אינטרפולציה

$$\int_a^b f(x)dx = I(f) = I(P_n) + \int_a^b f\left[x_0,\dots,x_n,x\right]\psi_n(x)dx$$

כאשר $P_n(x)$ פולינום אינטרפולציה המבוסס על הנקודות $x_0,\dots,x_n$.

4.2 כללי אינטגרציה בסיסיים

שיטת המלבן (rectangle rule) $I(f) = (b-a)f(a) + f'(\xi)\frac{(b-a)^2}{2}$

שיטת נקודת אמצע (mid-point) $I(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$

שיטת הטרפז (trapezoidal) $I(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$

שיטת סימפסון (Simpson) $I(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$

4.3 כללי אינטגרציה מורכבים (composite),

נקודות שוות מרחק $x_i = a + ih,\ 0 \le i \le n$, $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$.

הטרפז המורכב $I(f) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) + E$

$$E = -(b-a)\frac{f''(\xi)}{12}h^2$$

כאשר כאשר ξ נקודה השייכת לקטע $[a,b]$

סימפסון המורכב

עבור n כלשהו:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}\left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right) + E(f)$$

$$E(f) = -\frac{1}{180}(b-a)\left(\frac{b-a}{2n}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

(שימו לב: מספר נקודות הדגימה הוא $2n+1$)

4.4. אינטגרציה של גאוס עבור $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j) + E(f),$$

$$E(f) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}\int_a^b (x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2\,\omega(x)dx.$$

הנקודות $\{x_j\}_0^n$ הינן שורשי $\phi_{n+1}(x)$ פולינומים אורתוגונליים ביחס לפונקצית המשקל $\omega(x)$,
$i \neq j \quad , \quad \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\omega(x)dx = 0$.

תהליך גרם- שמידט ליצירת פולינומים אורתוגונליים:

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_k(x) = x^k - \sum_{i=0}^{n} \frac{(x^k, \varphi_i(x))}{(\varphi_i(x), \varphi_i(x))}\varphi_i(x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

כאשר $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$ ו- $\omega(x) > 0$ פונקצית המשקל בקטע הנתון.

נוסחת העתקה של $t \in [a,b]$ **ל-** $x \in [c,d]$ היא

$$x = \frac{d-c}{b-a}t + \frac{bc-ad}{b-a}.$$

5. <u>פולינומים אורתוגונלים</u>

ביחס לפונקצית משקל $\omega(x)$ בקטע $[a,b]$.

5.1 לג'נדר (Legendre): $\omega(x) = 1,\ [a,b] = [-1,1]$

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

5.2 צ'בישב (Chebyshev): $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ [a,b] = [-1,1],\ n > 0$

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x)$$

נוסחת נסיגה:

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

שורשי $T_n(x)$ הם: $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2k}\pi\right), 1 \le i \le k$. המקדם העליון של $T_n(x)$ הוא 2^{n-1}.

<u>6. מד"ר</u> $y'(x) = f(x,y)\ ,\ y(x_0) = y_0$.

6.1 שיטת אוילר (Euler): נגדיר $x_n = x_0 + nh$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

6.2 שיטות טיילור – סדר גלובלי n:

$$y_{k+1} = y_k + d_1h + \frac{1}{2!}d_2h^2 + \frac{1}{3!}d_3h^3 + \frac{1}{4!}d_4h^4 + \ldots + \frac{1}{n!}d_nh^n, \quad d_n = y^{(n)}.$$

6.3 רונגה-קוטה (Runge-Kutta)

6.3.1 RK2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \ , \ k_1 = hf(x_n, y_n) \ , \ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

6.3.2 RK4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \qquad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \qquad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

6.4 שיטת הוין:

$$x_{k+1} = x_k + h$$

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})].$$

6.5 סכימות סתומות:

6.5.1 סכימת אוילר אחורית (Backwards-Euler) $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$.

6.5.2 סכימת טרפז סתומה (Crank-Nicholson) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$.

7. שיטות נומריות באלגברה הליניארית

7.1 נורמות של וקטורים

$$v = (v_1, \dots, v_n)^t \ , \ \| v \|_2 = (\sum v_i^2)^{1/2} \ , \quad \| v \|_1 = \sum | v_i | \ , \ \| v \|_\infty = \max | v_i |$$

7.2 נורמות של מטריצות

$$\| A \| = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\| Av \|}{\| v \|} \quad , \quad \| Av \| \leq \| A \| \| v \|$$

$$\| A \|_\infty = \max_i \{\sum_j | a_{ij} | \} \quad , \quad \| A \|_1 = \max_j \{\sum_i | a_{ij} |\} \quad , \quad \| A \|_2 = \{\rho(A^T A)\}^{1/2}$$

7.3 Condition Number $Cond(A)_p = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$

בדיקת יציבות מערכת לינארית באמצעות מספר המצב condition number

אם $A\underline{x} = \underline{b}$, $A(\underline{x} + \underline{\delta x}) = \underline{b} + \underline{\delta b}$,

אז: $\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\|\underline{\delta b}\|}{\|\underline{b}\|} \le \frac{\|\underline{\delta x}\|}{\|\underline{x}\|} \le \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\underline{\delta b}\|}{\|\underline{b}\|}$.

מספר המצב בנורמת אינסוף הוא $Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

חישוב מטריצה הופכית עבור A מסדר 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

פירוק LU

תהי A מטריצה ריבועית ומערכת משוואות : $Ax = b$.

פירוק LU הוא פירוק מהצורה:

$$A = LU, \quad \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y. \end{cases}$$

במידה והתבצעה החלפת שורות יש להתחשב במטריצת התמורה P.

ואז $PAx = Pb$: $PA = LU$.

7.4 פתרון מערכת משוואות ליגאריות $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

בהצגה מטריציונית: מסמנים $A = L + D + U$.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שיטת יעקובי (Jacobi)

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \quad i = 1,2,\ldots n.$$

בכתיב מטריציוני: $\underline{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\underline{x}^{(k)} + D^{-1}\underline{b} \quad , k = 0,1,2,\ldots$

נוסחת השגיאה: $\underline{e}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\underline{e}^{(k)} \quad , k = 0,1,2,\ldots$

כאשר $\underline{e}^{(k)} = \underline{x}^{(k)} - \underline{x} \quad , k = 0,1,2,\ldots$.

רישום נוסף: $e^k = x - x^k = (I - D^{-1}A)e^{k-1}$.

שיטת גאוס-זיידל (Gauss-Seidel)

$$x_i^{k+1}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{k}\right)\quad i=1,2,\ldots n.$$

בכתיב מטריציוני : $\underline{x}^{(k+1)}=-(L+D)^{-1}U\underline{x}^{(k)}+(L+D)^{-1}\underline{b}\quad ,k=0,1,2,\ldots$

נוסחת השגיאה: $\underline{e}^{(k+1)}=-(L+D)^{-1}U\underline{e}^{(k)}\quad ,k=0,1,2,\ldots$,

כאשר $\underline{e}^{(k)}=\underline{x}^{(k)}-\underline{x}\quad ,k=0,1,2,\ldots$

רישום נוסף: $e^k=x-x^k=\left(I-(D+L)^{-1}A\right)e^{k-1}$.

8 פתרון משוואות לא-לינאריות $f(x)=0$

שיטת מיתר (secant) $x_{n+1}=\dfrac{f(x_n)x_{n-1}-f(x_{n-1})x_n}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

שיטת ניוטון (Newton) $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

שיטת איטרציה $x_{n+1}=g(x_n)$.

משפטי התכנסות:

משפט 1: נניח כי $g:[a,b]\to[a,b]$ וכי $g(x)$ רציפה בקטע $I=[a,b]$. נניח כי קיים $K<1$ כך ש- $|g'(x)|\le K<1$ בקטע I. אזי, ל- $g(x)$ יש נקודת שבת יחידה בקטע I, וכן אם $x_0\in I$,
אז שיטת האיטרציה

$$x_{n+1}=g(x_n)\quad,\quad n=0,1,2,\ldots$$

מתכנסת לנקודת השבת.

משפט 3: נניח כי $g(x)$ גזירה ברציפות בקטע פתוח I המכיל את α. נניח כי $|g'(\alpha)|<1$.
אזי, קיים $\varepsilon>0$ כך שאם $|x_0-\alpha|\le\varepsilon$ אז שיטת האיטרציה

$$x_{n+1}=g(x_n)\quad,\quad n=0,1,2,\ldots$$

מתכנסת לנקודת השבת α.

סדר ההתכנסות:

1. אם $g'(\alpha)=g''(\alpha)=\ldots=g^{(p-1)}(\alpha)=0,\ g^{(p)}(\alpha)\ne0$ עבור $p\ge2$,
אז השיטה מסדר התכנסות p.
2. אם $0<|g'(\alpha)|<1$ אז סדר ההתכנסות הוא $p=1$.

:אינטגרלים בסיסיים

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

$$\int e^{x}dx=e^{x}+C$$

$$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C,\ a>0$$

$$\int\sin x dx=-\cos x+C$$

$$\int\cos x dx=\sin x+C$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$

$$\int\tan x\, dx=-\ln|\cos x|+C$$

$$\int\cot x\, dx=\ln|\sin x|+C$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$$

:אינטגרלים נוספים

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\ ,\quad a\neq0$$

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\ ,\quad a\neq0$$

$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C\ ,\quad a\neq0$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C\ ,\quad a>0$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C\ ,\quad a\neq0$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\ a>0$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{x(a+bx)}=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+bx}+C$$

:שיטת הצבה

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$$

:אינטגרציה בחלקים

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

אינטגרלים המכילים פונקציות טריגונומטריות ואקספוננטים

$$\int x\sin ax dx=\frac{1}{a^2}(\sin ax-ax\cos ax)+C$$

$$\int x\cos ax dx=\frac{1}{a^2}(\cos ax+ax\sin ax)+C$$

$$\int x^2\sin ax dx=\frac{1}{a^3}\left(2ax\sin ax+\left(2-(ax)^2\right)\cos ax\right)+C$$

$$\int x^2\cos ax dx=\frac{1}{a^3}\left(2ax\cos ax+\left((ax)^2-2\right)\sin ax\right)+C$$

$$\int e^{ax}\sin px dx=\frac{e^{ax}\left(a\sin px-p\cos px\right)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax}\cos px dx=\frac{e^{ax}\left(a\cos px+p\sin px\right)}{a^2+p^2}$$

$$\int\cos mx\cos nx dx=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int\sin mx\cos nx dx=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int\sin mx\sin nx dx=-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C$$

$$\int x^m e^{ax}dx=\frac{x^m e^{ax}}{a}-\frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}dx+C$$

:נוסחאות טריגונומטריות

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \qquad \sin(2\alpha)=2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \qquad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin(3\alpha)) \qquad \cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos(3\alpha))$$

$$\sin\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \qquad \cos\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \qquad \sin\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

:עבור k,n שלמים

$$\cos\pi n=(-1)^n\quad;\quad\sin\pi n=0$$

$$e^{i\pi n}=(-1)^n$$

$$\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k-1\\(-1)^k & n=2k\end{cases}$$

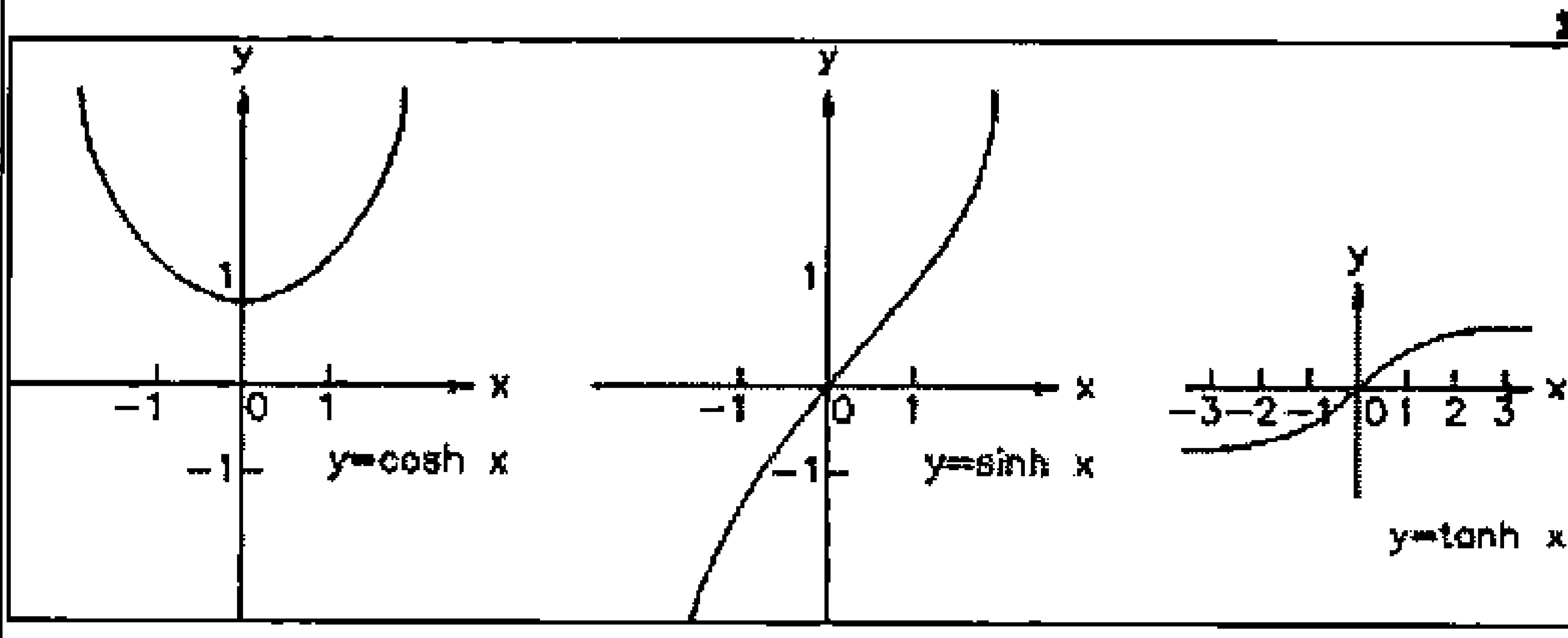
$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}(-1)^{k+1} & n=2k-1\\0 & n=2k\end{cases}$$

פונקציות היפרבוליות

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$



פתרון

AFEKA המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב אפקה
TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING

מס' נבחן

פתרון מועד ב

שם הקורס: אנליזה נומרית
קוד הקורס: 90925

הוראות לנבחן:
-חומר עזר שימושי לבחינה: הבחינה בחומר סגור. דפי נוסחאות מצורפים לטופס הבחינה.

-אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
-אין להשתמש בטלפון סלולארי
-אין להשתמש במחשב אישי או נייד
-אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
-אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

בחינת סמסטר: א
השנה: תשע"ח
מועד:

תאריך הבחינה:
שעת הבחינה:
משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: ד"ר בר-לוקיאנוב ולדימיר, ד"ר אלונה מוחוב, ד"ר אלכסנדר סגל, פרופ' דליה פישלוב, מר יניב דביר, מר ירון יגר, גב' אירינה נמירובסקי, מר חיים ריקס

פתרון הבחינה

***** שאלון הבחינה לא ייבדק ע"י המרצה, לא ייסרק ולא יישמר *****
***** לא יינתן ציון על תשובות אשר תיכתבנה בשאלון זה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

הבחינה כוללת 5 שאלות. יש לענות על 4 שאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. רק 4 השאלות הראשונות במחברת יבדקו!!
2. יש לרשום בתחילת מחברת הבחינה את מספרי השאלות שפתרתם.
3. יש להתחיל את התשובה לכל שאלה בעמוד חדש.
4. יש לנמק היטב כל תשובה!
5. דפי נוסחאות מצורפים לבחינה.
6. ניתן להשתמש במחשבון אישי לא גרפי ולעבוד בדיוק של 4 ספרות משמעותיות.

שאלה 1 (25 נק')

נתונה $f(x)$ המוגדרת בקטע $[0,h]$.

א. (6 נק') בנו פולינום אינטרפולציה המתלכד עם ערכי f בנקודות $\frac{h}{3}$, h וקרבו בעזרתו את $f\left(\frac{2h}{3}\right)$.

ב. (6 נק') נניח כי $f(x)$ בעלת נגזרת **מסדר ראשון** רציפה, העריכו שגיאה בקירוב $f\left(\frac{2h}{3}\right)$ מסעיף א'.

ג. (7 נק') קרבו $\int_0^h f(x)dx$ ע"י הנוסחה $Af(h)+Bf\left(\frac{h}{3}\right)$.

ד. (6 נק') נניח כי $f(x)$ בעלת **נגזרת רציפות מסדר כלשהו**, הוכיחו כי ביטוי השגיאה לקירוב שמצאתם בסעיף ג' נתון ע"י $\frac{f^{(3)}(d)}{3!}\int_0^h \left(x-\frac{h}{3}\right)^2 (x-h)dx$.

פתרון:

א. פולינום האינטרפולציה הינו

$$P_1(x)=f(h)+\frac{f(h/3)-f(h)}{(-2/3)h}(x-h).$$

מכאן

$$f(2h/3)\approx P_1(2h/3)=f(h)+\frac{f(h/3)-f(h)}{(-2h/3)}\underbrace{(2h/3-h)}_{-h/3}$$

$$=f(h)+\frac{1}{2}\left[f(h/3)-f(h)\right]=\frac{1}{2}f\left(\frac{h}{3}\right)+\frac{1}{2}f(h)$$

ב. ביטוי השגיאה נתון ע"י $e(x)=f\left[h,\frac{h}{3},x\right](x-h)\left(x-\frac{h}{3}\right)$.

לכן בנקודה $x=\frac{2h}{3}$ נקבל

$$|e(2h/3)|=f\left[h,\frac{h}{3},\frac{2h}{3}\right]\left(\frac{2h}{3}-h\right)\left(\frac{2h}{3}-\frac{h}{3}\right)$$

$$=\left|\frac{f[h/3,2h/3]-f[h,h/3]}{\cancel{2h/3-h}}\cancel{(2h/3-h)}(2h/3-h/3)\right|$$

כיוון ש $f'(x)$ רציפה לכן חסומה, כלומר ב- $[0,h]$ מתקיים $|f'(x)|\le M$.

מכאן נקבל

$$|e(2h/3)|=\left|\left(f[h/3,2h/3]-f[h,h/3]\right)h/3\right|=\left(|f'(c)|+|f'(d)|\right)\cdot h/3\le 2Mh/3.$$

ג. למציאת הקבועים A,B נדרוש שהכלל שיהיה מדויק עבור: $f(x)=1,x$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^h 1dx = A+B \Rightarrow A+B=h \\ \int_0^h xdx = Ah+B\frac{h}{3} \Rightarrow Ah+B\frac{h}{3}=\frac{h^2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{h}{4},\ B=\frac{3h}{4}\ \Rightarrow \int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{4}f(h)+\frac{3h}{4}f\left(\frac{h}{3}\right).$$

ניתן למצוא כמובן גם ע"י אינטגרציה של פולינום האינטרפולציה מסעיף א'.

ד. ביטוי השגיאה נתון ע"י $E=\int_0^h f[\frac{h}{3},h,x](x-\frac{h}{3})(x-h)dx$

מתקיים $\int_0^h (x-\frac{h}{3})(x-h)dx=\int_0^h\left(x^2-\frac{4h}{3}x+\frac{h^2}{3}\right)dx=\frac{h^3}{3}-\frac{4h}{3}\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{3}h=0$

לכן נבחר נקודה $\tilde{x}=\frac{h}{3}$, אז הפונקציה $\psi(x)(x-\frac{h}{3})=(x-\frac{h}{3})^2(x-h)\le 0$

לא משנה סימן בקטע $[0,h]$. לכן השגיאה נתונה ע"י

$$E=\int_0^h f[\frac{h}{3},h,x](x-\frac{h}{3})(x-h)dx=f[\frac{h}{3},\frac{h}{3},h,c]\int_0^h\left(x-\frac{h}{3}\right)^2(x-h)dx$$

$$=\int_0^h\left(x-\frac{h}{3}\right)^2(x-h)dx=\frac{f^{(3)}(d)}{3!}\int_0^h\left(x-\frac{h}{3}\right)^2(x-h)dx.$$

<u>שאלה 2 (25 נקודות)</u> נניח כי $f(x)$ גזירה מכל סדר.

א. (3 נק') הראו כי אם מקרבים את $\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)dx$ על ידי נוסחה הנובעת מקירוב $f(x)$ ע"י פולינום אינטרפולציה ממעלה קטנה או שווה ל- n בנקודות האינטרפולציה $x_0,x_1,...,x_n$ אז הקירוב לאינטגרל הוא $\sum_{i=0}^n w_i f(x_i)\approx\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)dx$.

ב. (10 נק') חשבו קירוב לאינטגרל $\int_{-1}^1\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ באמצעות נוסחת גאוס עם פונקציית משקל $\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ המבוססת על שתי נקודות.

ג. (7 נק') רשמו את ביטוי השגיאה באינטגרציה (**חשבו את האינטגרל המופיע בנוסחת השגיאה**). **מה סדר הדיוק האלגברי של השיטה?** נמקו את תשובתכם.

ד. (5 נק') חשבו את הקירוב המתאים לאינטגרל $\int_{-1}^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ וחסמו את השגיאה.

הערה: בשאלה זו ניתן להשתמש בנוסחאות:

$$\int_{-1}^1\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3\pi}{8}\ ,\int_{-1}^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\ ,\int_{-1}^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=0\ ,\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$$

פתרון

א. אם מקרבים את $f(x)$ על ידי פולינום אינטרפולציה ממעלה קטנה או שווה ל- n בנקודות האינטרפולציה $x_0, x_1, \ldots, x_n$, אז $f(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$, כאשר פה משתמשים בפולינום האינטרפולציה בצורת לגרנג'. נבצע אינטגרציה ונקבל כי

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx \approx \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)\omega(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} l_i(x)\omega(x)dx}_{w_i} = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

ב. מכיוון שהקטע הוא $[-1,1]$ ופונקצית המשקל היא $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ אז נקודות האינטגרציה הן שורשים של פולינום צ'בישב. מכיוון שמשתמשים בשתי נקודות, אז משתמשים בשורשים של פולינום צ'בישב ממעלה 2. נחשב את $T_2(x)$ לפי נוסחת הרקורסיה ונקבל $T_2(x) = 2x^2 - 1$. שתי הנקודות שעליהן מתבסס קירוב האינטגרל הן פתרונות המשוואה $T_2(x) = 2x^2 - 1 = 0$, כלומר $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. הנוסחה לקירוב האינטגרל היא

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx w_0 f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + w_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

נחשב את w_0, w_1 נדרוש שהנוסחה מדויקת עבור $f(x) = 1,\ f(x) = x$.

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = w_0 + w_1$$

$$0 = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} w_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} w_1$$

לכן, $w_0 = w_1 = \frac{\pi}{2}$. מכאן

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{2} f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

ג. נרשום את ביטוי השגיאה:

$$E(f) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \int_{-1}^{1} \frac{\psi^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \left(\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)$$

$$= \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \frac{\pi}{8}.$$

סדר הדיוק האלגברי של השיטה הוא 3. זאת מכיוון שבביטוי השגיאה מופיעה נגזרת רביעית של הפונקציה.

ד. $\int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pi\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2.3884$

נחסום את השגיאה עבור $f(x)=\cos x$. נגזור 4 פעמים ונקבל כי $f^{(4)}(x)=\cos x$
לכן,

$$\left|E(f(x)=\cos x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\frac{\pi}{8}\right|\le\frac{1}{4!}\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{192}\approx 0.0164.$$

__שאלה 3 (25 נקודות)__

א. (4 נק') תהי $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בעלת נגזרת רציפה בעלת נקודת שבת α כך ש $g'(\alpha)>1$. נגדיר את האיטרציה $x_{n+1}=g(x_n)$. הראו שקיימת סביבה של α כך שלכל ניחוש התחלתי $x_0\neq\alpha$ בסביבה זו, מתקיים $|x_1-\alpha|>|x_0-\alpha|$ והסיקו שהשיטה לא מתכנסת.

הדרכה: השתמשו בעובדה הבאה. אם $u(x)$ רציפה בנקודה α ומקיימת $u(\alpha)>1$ אז קיימת סביבה של α בה לכל x מתקיים $u(x)>1$.

ב. (14 נק') נתונה המשוואה $x^3=2$.

אילו מהשיטות הבאות מתכנסת לפתרון המשוואה?

a. $x_{n+1}=x_n^3+x_n-2$

b. $x_{n+1}=\frac{2+5x_n-x_n^3}{5}$

ג. (7 נק') הראו ששיטת האיטרציה $x_{n+1}=\frac{(3b-x_n^2)x_n}{2b}$ מתכנסת ל $\sqrt{b}$,

כאשר נתון כי x_0 מספיק קרוב ל- $\sqrt{b}$.

מצאו את קצב ההתכנסות של השיטה.

פתרון:

א. נשים לב ש- $g'(x)$ היא פונקציה רציפה, ולכן קיימת סביבה U של הנקודה α, כך שלכל $x\in U$ מתקיים $g'(x)>1$. לכן, לכל ניחוש התחלתי $x_0\in U$, לפי משפט לגרנזי מתקיים $|x_1-\alpha|=|g(x_0)-g(\alpha)|=|g'(c)||x_0-\alpha|>|x_0-\alpha|$,
כאשר c בין α ל- x_0 ובהכרח שייכת לסביבה U.

ב. נגדיר $f(x)=x^3-2$ ורוצים למצוא שורשים של $f(x)=x^3-2=0$.

a. נבדוק כי השיטה קונסיסטנטית. נגדיר $g(x)=x^3+x-2$.
אם $\alpha=g(\alpha)=\alpha^3+\alpha-2$ אז $\alpha^3-2=0$, כלומר $f(\alpha)=\alpha^3-2=0$.

נגזור את $g(x)=x^3+x-2$ ונקבל $g'(x)=3x^2+1>1$. קיבלנו שהנגזרת גדולה ממש מ-1 בכל נקודה, ולכן לפי סעיף א' השיטה לא מתכנסת.

b. נבדוק כי השיטה קונסיסטנטית. נגדיר $g(x)=\frac{2}{5}+x-\frac{x^3}{5}$.

אם $\alpha=g(\alpha)=\frac{2}{5}+\alpha-\frac{\alpha^3}{5}$ אז $\frac{2}{5}-\frac{\alpha^3}{5}=0$, כלומר $f(\alpha)=\alpha^3-2=0$.

נגזור את $g(x)=\frac{2}{5}+x-\frac{x^3}{5}$. נקבל $g'(x)=1-3\frac{x^2}{5}$.

קל לבדוק ש $\left|g'(2^{1/3})\right|=\left|1-\frac{3}{5}2^{2/3}\right|<1$ ולכן קיימת סביבה של נקודת השבת בה השיטה מתכנסת, וסדר ההתכנסות הוא 1.

ג. נגדיר $g(x)=\frac{3bx-x^3}{2b}$. נראה כי $\alpha=\sqrt{b}$ היא נקודת שבת של $g(x)=\frac{3bx-x^3}{2b}$.

אם α נקודת שבת של $g(x)=\frac{3bx-x^3}{2b}$ אז $\alpha=g(\alpha)=\frac{3b\alpha-\alpha^3}{2b}$

לכן, $2b\alpha=3b\alpha-\alpha^3$. זה גורר $b\alpha=\alpha^3$ ולכן, $b=\alpha^2$, כלומר $\alpha=\sqrt{b}$.

נשים לב ש

$$g'(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2b}x^2$$

$$g''(x)=-\frac{3}{b}x$$

ולכן

$$g'(\sqrt{b})=0$$

$$g''(\sqrt{b})\neq 0$$

זאת אומרת שקיימת סביבה של $\sqrt{b}$ כך שאם x_0 נמצא בסביבה זו אז השיטה מתכנסת, וסדר ההתכנסות הוא 2.

<u>**שאלה 4** (25 נקודות)</u>

רוצים לקרב פתרון של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax_1+x_2=5 \\ 2x_1+ax_2=6 \end{cases}$$

על ידי שיטת יעקובי.

א. (5 נקי) מהו תנאי מספיק עבור ערכי a **המבטיח כי** שיטת יעקובי תתכנס לפתרון לכל ערך התחלתי. **נמקו את תשובתכם וצטטו את המשפט המתאים.**

ב. (10 נקי) אם $a=4$ רשמו את נוסחת האיטרציות של יעקובי למערכת הנתונה.

רשמו את שיטת האיטרציה בצורה מטריציונית.

ג. (10 נקי) הניחו כי הניחוש ההתחלתי הוא:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וכי הפתרון המדויק של המערכת בסעיף ב׳ הוא $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

מצאו קירוב של פתרון המערכת על ידי נוסחת האיטרציה שבניתם בסעיף ב׳
כך שהשגיאה בנורמת אינסוף לא תעלה על $\varepsilon = 10^{-1}$.

פתרון:

א. כדי שיתקיים תנאי מספיק להתכנסות שיטת יעקובי למערכת הנתונה, יש לדרוש כי

$$\begin{cases} |a| > |1| = 1 \\ |a| > |2| = 2. \end{cases}$$

לכן התנאי הוא $|a| > 2$, כלומר $-2 < a < 2$.

אנו משתמשים כאן במשפט שאם למטריצת המקדמים של מערכת המשוואות יש אלכסון דומיננטי, אז שיטת יעקובי תתכנס לכל ניחוש התחלתי.

ב. עבור $a = 4$ המטריצה של מערכת המשוואות היא

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

נפרק את המטריצה הזו

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = L + D + U = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

מטריצת האיטרציה של שיטת יעקובי היא:

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{c}_J = -D^{-1}\underline{b} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

לכן, שיטת האיטרציה היא

$$\underline{x}^{(k+1)} = B_J \underline{x}^{(k)} + \underline{c}_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} -5/4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

ג. נשתמש בהערכת השגיאה

$$\left\|\underline{e}^{(k)}\right\|_\infty \le \left\|B_J\right\|_\infty^k \left\|\underline{e}^{(0)}\right\|_\infty.$$

כעת

$$\|B_J\|_\infty = \max\left\{|0| + \left|-\frac{1}{4}\right|, \left|-\frac{1}{2}\right| + |0|\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\|\underline{e}^{(0)}\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{1,1\} = 1$$

לכן, יש לדרוש כי

$$\|\underline{e}^{(k)}\|_\infty \le \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1 < 10^{-3}$$

זה גורר $k\ln(1/2) < -3\ln(10)$, כלומר $k > \dfrac{-3\ln(10)}{\ln(1/2)} \approx 9.96$.

לכן $k \ge 10$.

<u>שאלה 5 (25 נקודות)</u>

בשאלה זו נעסוק בבעיה הדיפרנציאלית :

$$\begin{cases} y' = -\lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

כך ש- $\lambda > 0$.

פתרונה המדויק של הבעיה הדיפרניאלית הוא $y(x) = e^{-\lambda x}$.

א. (7 נק') רשמו את שיטת **אוילר הקדמית** עבור הבעיה הדיפרנציאלית הזו.
מצאו נוסחה סגורה (כפונקציה של h,n) לפתרון המקורב בשיטת **אוילר הקדמית**.

ב. (7 נק') רשמו את שיטת **אוילר האחורית** עבור הבעיה הדיפרנציאלית הזו.
מצאו נוסחה סגורה (כפונקציה של h,n) לפתרון המקורב בשיטת **אוילר האחורית**.

ג. (7 נק') לאחר אינטגרציה של המשוואה הדיפרנציאלית מ- x_{n-1} ל- x_{n+1} מקבלים

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y'dx = -\lambda \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} ydx \, .$$

הראו כי הסכימה המתקבלת לפתרון המד"ר ע"י קירוב $\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} ydx$ באמצעות

כלל נקודת האמצע היא $y_{n+1} = y_{n-1} - 2h\lambda y_n$.

מהי שגיאת הקיטוע של הסכימה?

ד. (4 נק') מה סדר שגיאת הקיטוע (שגיאה מקומית) של הסכימה שבסעיף ג'. מה סדר השגיאה הגלובלית של הסכימה שבסעיף ג'?

פתרון:

א. שיטת אוילר קדמית עבור $y'=f(x,y)$ היא $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$.
כאן $f(x,y)=-\lambda y$, לכן שיטת אוילר למקרה זה היא:

$$y_{n+1}=y_n-\lambda hy_n, \quad y_0=1.$$

זה גורר $y_{n+1}=(1-\lambda h)y_n, \quad y_0=1$.

לכן,

$$y_n=(1-\lambda h)^n y_0=(1-\lambda h)^n, \quad n=0,1,\ldots$$

ב. שיטת אוילר אחורית עבור $y'=f(x,y)$ היא $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$.
כאן $f(x,y)=-\lambda y$, לכן שיטת אוילר האחורית למקרה זה היא:

$$y_{n+1}=y_n-\lambda hy_{n+1}, \quad y_0=1.$$

כלומר $(1+\lambda h)y_{n+1}=y_n, \quad y_0=1$

זה גורר $y_{n+1}=\frac{1}{1+\lambda h}y_n, \quad y_0=1$.

לכן,

$$y_n=\left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^n y_0=\left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)^n, \quad n=0,1,\ldots$$

ג. נקרב את $\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} ydx$ באמצעות שיטת נקודת האמצע

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} ydx\approx y_n\cdot(x_{n+1}-x_{n-1})=2hy_n.$$

תתקבל הסכימה

$$y_{n+1}=y_{n-1}-2h\lambda y_n.$$

שגיאת הקיטוע היא השגיאה בקירוב האינטגרל ע"י נוסחת נקודת האמצע.

השגיאה היא

כלומר,

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} ydx-y_n\cdot(x_{n+1}-x_{n-1})=\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} ydx-2hy_n=y''(\xi)\frac{(2h)^3}{24}=\frac{1}{3}h^3y''(\xi).$$

כאן השתמשנו בעובדה כי הפתרון המדויק הוא $y(x)=e^{-\lambda x}$ ולכן יש לו נגזרות מכל סדר.

ד. סדר שגיאת הקיטע של הסכימה בסעיף ג' הוא 3 כי בשגיאת הקיטוע מופיע h^3 וסדר השגיאה הגלובלית הוא 2.