AFEKA המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING אפקה

מס' נבחן

שם הקורס: אנליזה נומרית
קוד הקורס: 90925

הוראות לנבחן:
-חומר עזר שימושי לבחינה: הבחינה בחומר סגור. דפי נוסחאות מצורפים לטופס הבחינה.

-אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
-אין להשתמש בטלפון סלולארי
-אין להשתמש במחשב אישי או נייד
-אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
-אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

בחינת סמסטר: א
השנה: תשע"ח
מועד: א

תאריך הבחינה: 31/1/18
שעת הבחינה: 17:00
משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: ד"ר בר-לוקיאנוב ולדימיר, ד"ר אלונה מוחוב, ד"ר אלכסנדר סגל, פרופ' דליה פישלוב, מר יניב דביר, מר ירון יגר, גב' אירינה נמירובסקי, מר חיים ריקס

***** שאלון הבחינה לא ייבדק ע"י המרצה, לא ייסרק ולא יישמר *****
***** לא יינתן ציון על תשובות אשר תיכתבנה בשאלון זה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

הבחינה כוללת 5 שאלות. יש לענות על 4 שאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. רק 4 השאלות הראשונות במחברת יבדקו!!
2. יש לרשום בתחילת מחברת הבחינה את מספרי השאלות שפתרתם.
3. יש להתחיל את התשובה לכל שאלה בעמוד חדש.
4. יש לנמק היטב כל תשובה!
5. דפי נוסחאות מצורפים לבחינה.
6. ניתן להשתמש במחשבון אישי לא גרפי ולעבוד בדיוק של 4 ספרות משמעותיות.

<u>שאלה 1 (25 נקודות)</u>

נתונים ערכי פונקציה $f(x)$ בנקודות: $x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\dots$ ... , כאשר

$x_i=x_0+ih,\ i=0,\pm1,\pm2,\dots$.

א. (8 נק') בנו פולינום אינטרפולציה המבוסס על הערכים $f(x_{-2}),f(x_{-1}),f(x_2)$.

ב. (5 נק') מקרבים את $f(x_0)$ ע"י פולינום האינטרפולציה מסעיף א'. נניח כי $f(x)$ בעלת נגזרות רציפות מסדר כלשהו ב- $\mathbb{R}$.
מצאו ביטוי עבור שגיאת הקירוב.
מהו סדר הדיוק (האסימפטוטי) של הקרוב? מהו סדר הדיוק האלגברי?

ג. (6 נק') מקרבים את $f(x_0)$ ע"י פולינום אינטרפולציה מסעיף א'.
נניח כי $f(x)$ בעלת 2 נגזרות ב- $\mathbb{R}$. מתקיים $|f''(x)|\le M$.
העריכו את השגיאה בקירוב $f(x_0)$.
מהו סדר הדיוק (האסימפטוטי) של הקרוב? מהו סדר הדיוק האלגברי?

ד. (6 נק') מצאו קירוב ל- $f''(x_0)$ מהצורה
$f''(x_0)\approx A_{-2}f(x_{-2})+A_{-1}f(x_{-1})+A_2f(x_2)$.

<u>שאלה 2 (25 נקודות)</u> נניח כי $f(x)$ גזירה מכל סדר.

א. (3 נק') מקרבים את האינטגרל הנתון ע"י $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\cdot f(x)\,dx \approx$, כאשר $\omega(x)$

פונקציית משקל כך שהקירוב יהיה מדויק לפולינומים ממעלה כלשהי. הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i$$

ב. (10 נק') חשבו קירוב לאינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}\,dx$ באמצעות נוסחת גאוס

עם פונקציית משקל $w(x)=e^{-x^2}$ המבוססת על שתי נקודות.

קבוצת הפולינומים האורתוגונליים מקיימת את נוסחת הרקורסיה:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\ , \quad n = 1,2,\ldots$$
$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x\ .$$

ג. (7 נק') רשמו את ביטוי השגיאה באינטגרציה. **מה סדר הדיוק האלגברי** של השיטה? **נמקו את תשובתכם.**

ד. (5 נק') השתמשו בקירוב שקיבלתם כדי לקרב את האינטגרל

$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\, e^{-x^2}\,dx$ **וחסמו את השגיאה.**

הערה: בשאלה זו ניתן להשתמש בנוסחאות

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = 0\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\ .$$

<u>שאלה 3 (25 נקודות)</u>

יהי $0<K<1$ קבוע. נתונה פונקציה $g:[1,2]\to[1,2]$ רציפה המקיימת $|g(x)-g(y)|\le K|x-y|$ לכל x,y בקטע $[1,2]$.

א. (8 נק') הוכיחו שלפונקציה $g(x)$ יש נקודת שבת יחידה בקטע $[1,2]$ (שימו לב: לא נתון שהפונקציה גזירה).

ב. (5 נק') הוכיחו כי שיטת האיטרציה $x_{n+1}=g(x_n)$ מתכנסת לכל בחירה של $x_0\in[1,2]$.

ג. (9 נק') הראו שהאיטרציה $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{x_n}$ מתכנסת ל $\sqrt{2}$ לכל תנאי התחלה

$x_0\in[1,2]$.

ד. (3 נק') מהו סדר ההתכנסות של שיטת האיטרציה בסעיף ג?

שאלה 4 (25 נקודות)

Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

a. (10 p.) Find the LU decomposition of A.

Use simple fractions in your computation.

b. (3 p.) Show that the elementary operations that are performed on A are equivalent to a multiplication of A by a matrix M. What is the matrix M?

c. (5 p.) Use the LU decomposition of A in order to solve equation

$$Ax = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

d. (3 p.) Given the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{pmatrix}.$$

Compute A^{-1} and then $cond(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

e. (4 p.) Given the systems

$$\begin{cases} 1.01x_1 + 0.99x_2 = 2 \\ 0.99x_1 + 1.01x_2 = 2 \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} 1.01\tilde{x}_1 + 0.99\tilde{x}_2 = 2.02 \\ 0.99\tilde{x}_1 + 1.01\tilde{x}_2 = 1.98 \end{cases}.$$

Use the condition number to obtain a bound from above and from below

$$\frac{\|e\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

What can you say on the upper bound on the error?

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y' = -\lambda y, \quad y(0) = y_0.$ כאשר $\lambda > 0$.

נשים לב כי הפתרון המדויק למד"ר הוא $y(x) = y_0 e^{-\lambda x}$.

נתונות נקודות רשת שוות-מרחק $x_n = nh, \quad n = 0,1,2,...$.

נרשום את המשוואה בצורה האינטגרלית $y(x_{n+1}) - y(x_n) = -\lambda \int_{x_n}^{x_{n+1}} y(x)dx \quad (1)$.

א. (12 נק') מצאו ביטוי מהצורה $Ay(x_n) + By(x_{n-1})$, שמקרב את $\int_{x_n}^{x_{n+1}} y(x)dx$ בדיוק אלגברי גבוה ככל האפשר. חשבו את הקבועים A, B ורשמו את הסכימה שמתקבלת:

$$(2) \quad y_{n+1} - y_n = -\lambda[Ay_n + By_{n-1}], \quad n = 1,2,3,...$$

ב. (9 נק') מצאו ביטוי לשגיאה המקומית (שגיאת הקיטוע) של הסכימה, עבור $x_n, n \geq 2$, בהנחה ש- $y(x_0), y(x_1)$ ידועים.

ג. (4 נק') מהו סדר הדיוק האלגברי של קירוב האינטגרל שבסעיף א?

בהצלחה!

דף נוסחאות - אנליזה נומרית

1. נוסחת טיילור:

תהי $f(x)$ בעלת $n+1$ נגזרות רציפות בסביבה של הנקודה x_0 . אזי לכל x בסביבה של x_0 קיימת c בין x ל- x_0 כך שמתקיים

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!}+\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. אינטרפולציה

2.1 לגרנג' (Lagrange) $l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$, $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)$

2.2 ניוטון (Newton):

$$P_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

2.3 הפרש מחולק

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\begin{cases}\frac{1}{x_k-x_0}\left(f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]\right) & ,x_0\neq x_k\\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & ,x_0=x_1=\dots=x_k\end{cases}$$

תכונות

$$f[x_0,\dots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}\quad,\quad\frac{d}{dx}f[x_0,\dots,x_k,x]=f[x_0,\dots,x_k,x,x];$$

כאשר ξ נקודה השייכת לקטע המכיל את הנקודות $x_0,\dots x_k$.

2.4 השגיאה באינטרפולציה

$$e(x)=f(x)-P_n(x)=f[x_0,\dots,x_n,x]\psi(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\psi(x)$$

כאשר $\psi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

2.5 אינטרפולצית צ'בישב

פולינומי צ'בישב: על $[-1,1]$. $T_n(t)=\cos n(\arccos t)$.

נוסחת נסיגה:

$$T_0(t)=1,\quad T_1(t)=t,\quad T_n(t)=2tT_{n-1}(t)-T_{n-2}(t),\quad n=1,2,3..$$

n שורשי צ'בישב: $t_i=\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$ עבור $i=0,1,2,\dots,n-1$.

נוסחת טרנספורמציה (שינוי משתנה) של $t\in[-1,1]$ ל- $x\in[a,b]$: $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$.

השגיאה המקסימלית של האינטרפולציה ב $n+1$ נקודות צבישב:

יהי $P_n(x)$ פולינום אינטרפולציה דרך $n+1$ נקודות צ'בישב. אם f גזירה ברציפות $n+1$ פעמים בקטע $[a,b]$ אז:

$$|f(x)-P_n(x)|\le\frac{2(b-a)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

3. גזירה

א. גזירת פולינום האינטרפולציה

$$f'(x)=P_n'(x)+f[x_0,...,x_n,x,x]\psi(x)+f[x_0,...,x_n,x]\psi'(x)$$

השגיאה בנגזרת:

$$E(x)=f'(x)-P_n'(x)=\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\psi(x)+\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\psi'(x),$$

$$\psi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

ב. גזירה נומרית באמצעות טורי טיילור $f^{(k)}(x_i)=c_0f(x_0)+c_1f(x_1)...+C_nf(x_n)$

נחשב את טור טיילור סביב הנקודה x_i עד לאיבר מסדר n-1 . נציב את כל אחת מהנקודות בטור ואז בנוסחה הנ"ל ונבצע השוואת מקדמים .

4. אינטגרציה

4.1 קירוב האינטגרל ע"י פולינום אינטרפולציה

$$\int_a^b f(x)dx=I(f)=I(P_n)+\int_a^b f[x_0,...,x_n,x]\psi_n(x)dx$$

כאשר $P_n(x)$ פולינום אינטרפולציה המבוסס על הנקודות $x_0,...,x_n$.

4.2 **כללי אינטגרציה בסיסיים**

שיטת המלבן (rectangle rule) $I(f)=(b-a)f(a)+f'(\xi)\frac{(b-a)^2}{2}$

שיטת נקודת אמצע (mid-point) $I(f)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$

שיטת הטרפז (trapezoidal) $I(f)=\frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)-f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$

שיטת סימפסון (Simpson) $I(f)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$

4.3 **כללי אינטגרציה מורכבים (composite),**

נקודות שוות מרחק $x_i=a+ih,\ 0\le i\le n$, $h=\frac{b-a}{n}=x_i-x_{i-1}$.

הטרפז המורכב $I(f)=\frac{h}{2}\left(f_0+2\sum_{i=1}^{n-1}f_i+f_n\right)+E$

$$E=-(b-a)\frac{f''(\xi)}{12}h^2$$

כאשר כאשר ξ נקודה השייכת לקטע $[a,b]$

סימפסון המורכב

עבור n כלשהו:

$$I(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}\big(f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\big)+E(f)$$

$$E(f)=-\frac{1}{180}(b-a)\left(\frac{b-a}{2n}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

(שימו לב: מספר נקודות הדגימה הוא $2n+1$)

4.4.אינטגרציה של גאוס עבור $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx=\sum_{j=0}^{n}\omega_j f(x_j)+E(f),$$

$$E(f)=\frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}\int_a^b (x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2\omega(x)dx.$$

הנקודות $\{x_j\}_0^n$ הינן שורשי $\phi_{n+1}(x)$ פולינומים אורתוגונליים ביחס לפונקצית המשקל $\omega(x)$,

$i\neq j \quad , \quad \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\omega(x)dx=0$.

תהליך גרם- שמידט ליצירת פולינומים אורתוגונליים:

$$\varphi_0(x)=1$$

$$\varphi_k(x)=x^k-\sum_{i=0}^{n}\frac{(x^k,\varphi_i(x))}{(\varphi_i(x),\varphi_i(x))}\varphi_i(x),\quad k=1,2,\ldots$$

כאשר $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$ ו- $\omega(x)>0$ פונקצית המשקל בקטע הנתון.

נוסחת העתקה של $t\in[a,b]$ **ל-** $x\in[c,d]$ היא

$$x=\frac{d-c}{b-a}t+\frac{bc-ad}{b-a}.$$

5. __פולינומים אורתוגונלים__

ביחס לפונקצית משקל $\omega(x)$ בקטע $[a,b]$.

5.1 לג'נדר (Legendre): $\omega(x)=1,\ [a,b]=[-1,1]$

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$$

$$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

5.2 צ'בישב (Chebyshev): $\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ [a,b]=[-1,1],\ n>0$

$$T_n(x)=\cos n(\arccos x)$$

נוסחת נסיגה:

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x$$

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

שורשי $T_n(x)$ הם: $x_i=\cos\left(\frac{2i-1}{2k}\pi\right),1\le i\le k$. המקדם העליון של $T_n(x)$ הוא 2^{n-1}.

6. __מד"ר__ $y'(x)=f(x,y)\ ,\ y(x_0)=y_0$.

6.1 שיטת אוילר (Euler): נגדיר $x_n=x_0+nh$

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

6.2 שיטות טיילור – סדר גלובלי n:

$$y_{k+1}=y_k+d_1h+\frac{1}{2!}d_2h^2+\frac{1}{3!}d_3h^3+\frac{1}{4!}d_4h^4+\ldots+\frac{1}{n!}d_nh^n,\quad d_n=y^{(n)}.$$

6.3 רונגה-קוטה (Runge-Kutta)

6.3.1 RK2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\ ,\ \ k_1 = hf(x_n, y_n)\ ,\ \ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

6.3.2 RK4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \qquad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \qquad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

6.4 שיטת הוין:

$$x_{k+1} = x_k + h$$
$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})].$$

6.5 סכימות סתומות:

6.5.1 סכימת אוילר אחורית (Backwards-Euler) $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$.

6.5.2 סכימת טרפז סתומה (Crank-Nicholson) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$.

7. שיטות נומריות באלגברה הליניארית

7.1 נורמות של וקטורים

$$v = (v_1, \dots, v_n)^t\ ,\ \ \|v\|_2 = \left(\sum v_i^2\right)^{1/2}\ ,\quad \|v\|_1 = \sum |v_i|\ ,\ \ \|v\|_\infty = \max |v_i|$$

7.2 נורמות של מטריצות

$$\|A\| = \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}\ ,\qquad \|Av\| \le \|A\|\|v\|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i\{\sum_j |a_{ij}|\}\ ,\quad \|A\|_1 = \max_j\{\sum_i |a_{ij}|\}\ ,\quad \|A\|_2 = \{\rho(A^T A)\}^{1/2}$$

$Cond(A)_p = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$ Condition Number 7.3

בדיקת יציבות מערכת לינארית באמצעות מספר המצב condition number

אם $A\underline{x} = \underline{b}$, $A(\underline{x} + \delta x) = \underline{b} + \delta b$,

אז: $\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|\delta b\|}{\|\underline{b}\|} \le \frac{\|\delta x\|}{\|\underline{x}\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|\underline{b}\|}$.

מספר המצב בנורמת אינסוף הוא $Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

חישוב מטריצה הופכית עבור A מסדר 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

פירוק LU

תהי A מטריצה ריבועית ומערכת משוואות : $Ax = b$.

פירוק LU הוא פירוק מהצורה:

$$A = LU, \quad \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y. \end{cases}$$

במידה והתבצעה החלפת שורות יש להתחשב במטריצת התמורה P.

$PAx = Pb$ ואז : $PA = LU$.

7.4 פתרון מערכת משוואות לינאריות $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

בהצגה מטריציונית: מסמנים $A = L + D + U$.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שיטת יעקובי (Jacobi)

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

בכתיב מטריציוני : $\underline{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\underline{x}^{(k)} + D^{-1}\underline{b}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

נוסחת השגיאה: $\underline{e}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\underline{e}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

כאשר $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\underline{e}^{(k)} = \underline{x}^{(k)} - \underline{x}$.

דישום נוסף : $e^k = x - x^k = (I - D^{-1}A)e^{k-1}$.

שיטת גאוס-זיידל (Gauss-Seidel)

$$x_i^{k+1}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{k}\right)\quad i=1,2,\dots n.$$

בכתיב מטריציוני : $\underline{x}^{(k+1)}=-(L+D)^{-1}U\underline{x}^{(k)}+(L+D)^{-1}\underline{b}\quad ,k=0,1,2,\dots$

נוסחת השגיאה: $\underline{e}^{(k+1)}=-(L+D)^{-1}U\underline{e}^{(k)}\quad ,k=0,1,2,\dots$,

כאשר $\underline{e}^{(k)}=\underline{x}^{(k)}-\underline{x}\quad ,k=0,1,2,\dots$

רישום נוסף: $e^k=x-x^k=\left(I-\left(D+L\right)^{-1}A\right)e^{k-1}$.

8 פתרון משוואות לא-ליניאריות $f(x)=0$

שיטת מיתר (secant) $$x_{n+1}=\frac{f(x_n)x_{n-1}-f(x_{n-1})x_n}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

שיטת ניוטון (Newton) $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

שיטת איטרציה $x_{n+1}=g(x_n)$.

משפטי התכנסות:

משפט 1: נניח כי $g:[a,b]\to[a,b]$ וכי $g(x)$ רציפה בקטע $I=[a,b]$. נניח כי קיים $K<1$ כך ש- $|g'(x)|\le K<1$ בקטע I. אזי, ל- $g(x)$ יש נקודת שבת יחידה בקטע I, וכן אם $x_0\in I$,
אז שיטת האיטרציה

$$x_{n+1}=g(x_n)\quad,\quad n=0,1,2,\dots$$

מתכנסת לנקודת השבת.

משפט 3: נניח כי $g(x)$ גזירה ברציפות בקטע פתוח I המכיל את α . נניח כי $|g'(\alpha)|<1$.
אזי, קיים $\varepsilon>0$ כך שאם $|x_0-\alpha|\le\varepsilon$ אז שיטת האיטרציה

$$x_{n+1}=g(x_n)\quad,\quad n=0,1,2,\dots$$

מתכנסת לנקודת השבת α.

סדר ההתכנסות:

1. אם $g'(\alpha)=g''(\alpha)=\dots=g^{(p-1)}(\alpha)=0,\ g^{(p)}(\alpha)\ne0$ עבור $p\ge2$,
אז השיטה מסדר התכנסות p.
2. אם $0<|g'(\alpha)|<1$ אז סדר ההתכנסות הוא $p=1$.

אינטגרלים בסיסיים:

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\,,\alpha\neq-1$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

$$\int e^{x}dx=e^{x}+C$$

$$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\,,a>0$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$$

$$\int\tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C$$

$$\int\cot x\,dx=\ln|\sin x|+C$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$$

אינטגרלים נוספים:

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad,\quad a\neq0$$

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\quad,a\neq0$$

$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C\quad,\quad a\neq0$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad,\quad a>0$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C\quad,\quad a\neq0$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\,,a>0$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{x(a+bx)}=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+bx}+C$$

שיטת הצבה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

אינטגרלים המכילים פונקציות טריגונומטריות ואקספוננטים

$$\int x\sin ax\,dx=\frac{1}{a^2}(\sin ax-ax\cos ax)+C$$

$$\int x\cos ax\,dx=\frac{1}{a^2}(\cos ax+ax\sin ax)+C$$

$$\int x^2\sin ax\,dx=\frac{1}{a^3}\left(2ax\sin ax+\left(2-(ax)^2\right)\cos ax\right)+C$$

$$\int x^2\cos ax\,dx=\frac{1}{a^3}\left(2ax\cos ax+\left((ax)^2-2\right)\sin ax\right)+C$$

$$\int e^{ax}\sin px\,dx=\frac{e^{ax}\left(a\sin px-p\cos px\right)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax}\cos px\,dx=\frac{e^{ax}\left(a\cos px+p\sin px\right)}{a^2+p^2}$$

$$\int\cos mx\cos nx\,dx=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int\sin mx\cos nx\,dx=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C$$

$$\int x^{m}e^{ax}dx=\frac{x^{m}e^{ax}}{a}-\frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}dx+C$$

נוסחאות טריגונומטריות:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\sin(2\alpha)=2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\qquad\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\qquad1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin(3\alpha))$$

$$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos(3\alpha))$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

עבור k,n שלמים:

$$\cos\pi n=(-1)^n\quad;\quad\sin\pi n=0$$

$$e^{i\pi n}=(-1)^n$$

$$\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k-1\\(-1)^k & n=2k\end{cases}$$

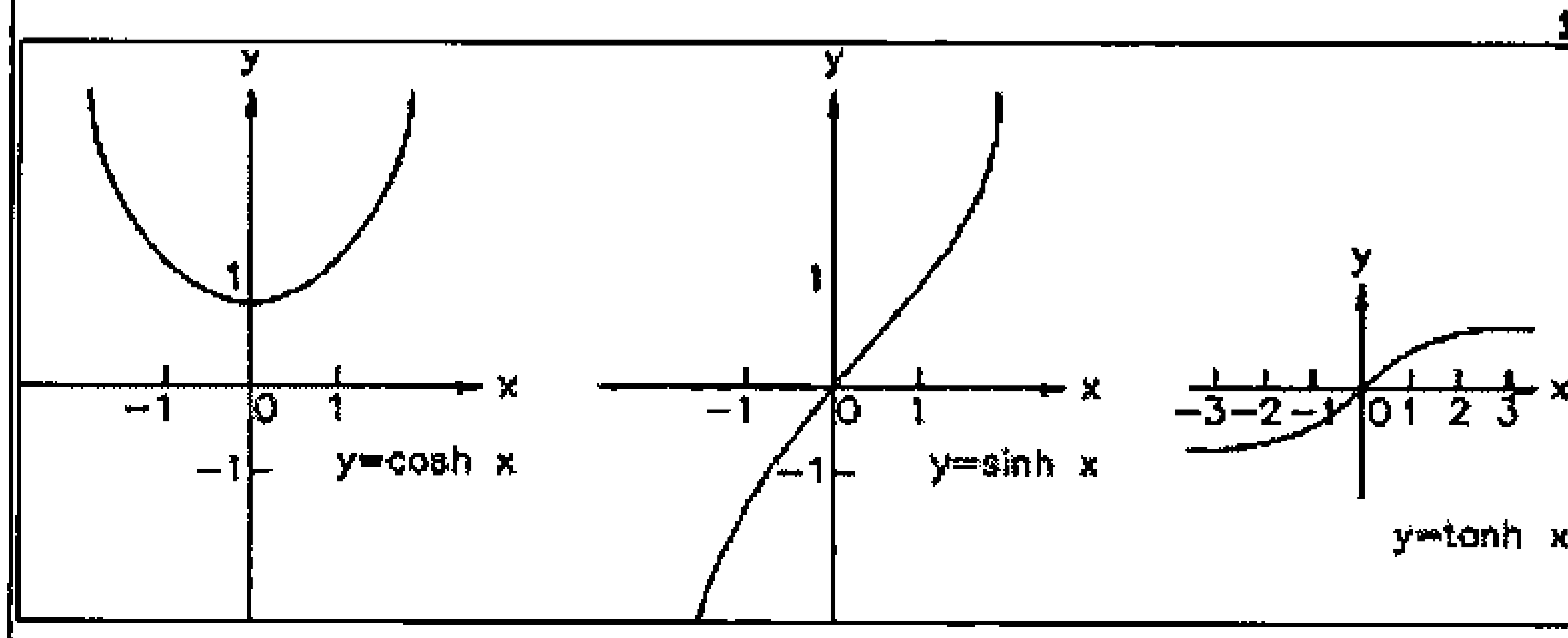
$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}(-1)^{k+1} & n=2k-1\\0 & n=2k\end{cases}$$

פונקציות היפרבוליות

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$



פתרון

פתרון מועד א

מס' נבחן

שם הקורס: אנליזה נומרית
קוד הקורס: 90925

הוראות לנבחן:
-חומר עזר שימושי לבחינה:
הבחינה בחומר סגור. דפי
נוסחאות מצורפים לטופס
הבחינה.

-אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
-אין להשתמש בטלפון סלולארי
-אין להשתמש במחשב אישי או נייד
-אין להשתמש בדיסק און קי ו/או
מכשיר מדיה אחר
-אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

בחינת סמסטר: א
השנה: תשע"ח
מועד:

תאריך הבחינה:
שעת הבחינה:
משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: ד"ר בר-לוקיאנוב ולדימיר, ד"ר אלונה מוחוב, ד"ר אלכסנדר סגל, פרופ' דליה פישלוב, מר יניב דביר, מר ירון יגר, גב' אירינה נמירובסקי, מר חיים ריקס

פתרון הבחינה

***** שאלון הבחינה לא ייבדק ע"י המרצה, לא ייסרק ולא יישמר *****
***** לא יינתן ציון על תשובות אשר תיכתבנה בשאלון זה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

הבחינה כוללת 5 שאלות. יש לענות על 4 שאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

1. רק 4 השאלות הראשונות במחברת יבדקו!!
2. יש לרשום בתחילת מחברת הבחינה את מספרי השאלות שפתרתם.
3. יש להתחיל את התשובה לכל שאלה בעמוד חדש.
4. יש לנמק היטב כל תשובה!
5. דפי נוסחאות מצורפים לבחינה.
6. ניתן להשתמש במחשבון אישי לא גרפי ולעבוד בדיוק של 4 ספרות משמעותיות.

<u>שאלה 1 (25 נקודות)</u>

נתונים ערכי פונקציה $f\left(x\right)$ בנקודות: $\dots x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\dots$, כאשר

$x_i=x_0+ih, i=0,\pm1,\pm2,\dots..$.

א. (8 נק') בנו פולינום אינטרפולציה המבוסס על הערכים $f\left(x_{-2}\right),f\left(x_{-1}\right),f\left(x_2\right)$.

ב. (5 נק') מקרבים את $f(x_0)$ ע"י פולינום האינטרפולציה מסעיף א'. נניח כי $f\left(x\right)$ בעלת נגזרות רציפות מסדר כלשהו ב- $\mathbb{R}$.

מצאו ביטוי עבור שגיאת הקירוב.

מהו סדר הדיוק (האסימפטוטי) של הקרוב? מהו סדר הדיוק האלגברי?

ג. (6 נק') מקרבים את $f(x_0)$ ע"י פולינום אינטרפולציה מסעיף א'.

נניח כי $f\left(x\right)$ בעלת 2 נגזרות ב- $\mathbb{R}$. מתקיים $|f''\left(x\right)|\le M$.

העריכו את השגיאה בקירוב $f\left(x_0\right)$.

מהו סדר הדיוק (האסימפטוטי) של הקרוב? מהו סדר הדיוק האלגברי?

ד. (6 נק') מצאו קירוב ל- $f''\left(x_0\right)$ מהצורה

$f''\left(x_0\right)\approx A_{-2}f\left(x_{-2}\right)+A_{-1}f\left(x_{-1}\right)+A_2f\left(x_2\right)$.

<u>פתרון:</u>

א.

x_i	$f(\cdot)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
x_{-2}	$f(x_{-2})$		
x_{-1}	$f(x_{-1})$	$\dfrac{f(x_{-1})-f(x_{-2})}{h}$	
x_2	$f(x_2)$	$\dfrac{f(x_2)-f(x_{-1})}{3h}$	$\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_{-1})}{3h}-\dfrac{f(x_{-1})-f(x_{-2})}{h}}{4h}=\dfrac{f(x_2)-4f(x_{-1})+3f(x_{-2})}{12h^2}$

$$P_2(x)=f(x_{-2})+\frac{f(x_{-1})-f(x_{-2})}{h}(x-x_{-2})$$
$$+\frac{f(x_2)-4f(x_{-1})+3f(x_{-2})}{12h^2}(x-x_{-2})(x-x_{-1})$$

ב. ביטוי השגיאה נתון ע"י $e(x)=f[x_{-2},x_{-1},x_2,x](x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_2)$. לכן,

$$e(x_0)=f[x_{-2},x_{-1},x_2,x_0](x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})(x_0-x_2)=\frac{f'''(c)}{3!}2h\cdot h\cdot 2h=\frac{2f'''(c)}{3}h^3$$

סדר הדיוק (האסימפטוטי) הוא 3 כי בביטוי השגיאה מופיע h^3.

סדר הדיוק האלגברי הוא 2 כי בביטוי השגיאה מופיע $f'''(c)$ ו- $f'''(c)$ מתאפס לכל פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-2..

ג.

$$\begin{aligned}e(x_0)&=f[x_{-2},x_{-1},x_2,x_0]\psi(x)\\&=\frac{f[x_{-1},x_2,x_0]-f[x_{-2},x_{-1},x_2]}{x_0-x_{-2}}(x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})(x_0-x_2)\end{aligned}$$

$$|e(x_0)|=\left|\frac{f[x_{-1},x_2,x_0]-f[x_{-2},x_{-1},x_2]}{\cancel{x_0-x_{-2}}}\cancel{(x_0-x_{-2})}(x_0-x_{-2})(x_0-x_{-1})(x_0-x_2)\right|=$$

$$=\left(\frac{|f''(c)|}{2!}+\frac{|f''(d)|}{2!}\right)\left|(x_0-x_{-1})(x_0-x_2)\right|\le M\cdot 2h\cdot h=2Mh^2$$

סדר הדיוק (האסימפטוטי) הוא 2 כי בחסם השגיאה מופיע h^2.

סדר הדיוק האלגברי הוא גם כן 2 , כי אם מקרבים פולינום ממעלה 2 ע"י פולינום אינטרפולציה ממעלה 2 אז מקבלים כי השגיאה היא אפס.

ד.

$$f''(x_0)\approx P_2''(x_0)=2\frac{f(x_2)-4f(x_{-1})+3f(x_{-2})}{12h^2}=\frac{1}{6h^2}\left(f(x_2)-4f(x_{-1})+3f(x_{-2})\right)$$

<u>שאלה 2 (25 נקודות)</u> נניח כי $f(x)$ גזירה מכל סדר.

א. (3 נק') מקרבים את האינטגרל הנתון ע"י $\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)\cdot f(x)\,dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)$, כאשר $\omega(x)$

פונקציית משקל כך שהקירוב יהיה מדויק לפולינומים ממעלה כלשהי. הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n}A_i$$

ב. (10 נק') חשבו קירוב לאינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-x^2}dx$ באמצעות נוסחת גאוס

עם פונקציית משקל $w(x)=e^{-x^2}$ המבוססת על שתי נקודות.

קבוצת הפולינומים האורתוגונליים מקיימת את נוסחת הרקורסיה:

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\ ,\quad n=1,2,...$$
$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x\ .$$

ג. (7 נקי) רשמו את ביטוי השגיאה באינטגרציה. **מה סדר הדיוק האלגברי** של השיטה? **נמקו את תשובתכם.**

ד. (5 נקי) השתמשו בקירוב שקיבלתם כדי לקרב את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\, e^{-x^2}\, dx$$ **וחסמו את השגיאה.**

הערה: בשאלה זו ניתן להשתמש בנוסחאות

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx=\sqrt{\pi}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx=0\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2} dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2} dx=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

פתרון

א. על פי הנתון הקירוב לאינטגרל מדויק לפולינומים ממעלה כלשהיא ובפרט מדויק עבור

$f(x)=1$ לכן חייב להתקיים $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\cdot 1\, dx=\sum_{i=0}^{n} A_i\cdot 1$

ב. נחשב את $H_2(x)$ מנוסחת הרקורסיה: $H_2(x)=2xH_1(x)-2H_0(x)=4x^2-2$.
שתי הנקודות שעליהן מתבסס קירוב האינטגרל הינן פתרונות המשוואה $H_2(x)=4x^2-2=0$, כלומר: $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. נוסחה לקירוב האינטגרל היא מהצורה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx\approx w_0 f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+w_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

נחשב את w_0,w_1. נדרוש שהנוסחה מדויקת עבור $f(x)=1,\ f(x)=x$.

$$\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot e^{-x^2}\, dx=w_0+w_1$$

$$0=\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}w_0+\frac{1}{\sqrt{2}}w_1.$$

לכן, $w_0=w_1=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. מכאן

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx\approx\frac{\sqrt{\pi}}{2}f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

ג. נרשום את ביטוי השגיאה:

$$E(f)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\psi^2(x)dx=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2}dx-\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

סדר הדיוק האלגברי של השיטה הוא 3. זאת מכיוון שבביטוי השגיאה מופיעה נגזרת רביעית של הפונקציה.

ד. נרשום את הקירוב לאינטגרל הנתון

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x)e^{-x^2}dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cong 1.3475.$$

נחסום את השגיאה עבור $f(x)=\cos x$. נגזור 4 פעמים ונקבל כי $f^{(4)}(x)=\cos x$.
לכן,

$$\left|E(\cos x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right|\le\frac{\sqrt{\pi}}{48}\cong 0.0369.$$

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $0<K<1$ קבוע. נתונה פונקציה $g:[1,2]\to[1,2]$ רציפה המקיימת
$|g(x)-g(y)|\le K|x-y|$ לכל x,y בקטע $[1,2]$.

א. (8 נקי) הוכיחו שלפונקציה $g(x)$ יש נקודת שבת יחידה בקטע $[1,2]$ (שימו לב: לא נתון שהפונקציה גזירה).

ב. (5 נקי) הוכיחו כי שיטת האיטרציה $x_{n+1}=g(x_n)$ מתכנסת לכל בחירה של $x_0\in[1,2]$.

ג. (9 נקי) הראו שהאיטרציה $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{x_n}$ מתכנסת ל $\sqrt{2}$ לכל תנאי התחלה $x_0\in[1,2]$.

ד. (3 נקי) מהו סדר ההתכנסות של שיטת האיטרציה בסעיף ג?

פתרון:

א. מכיוון שמתקיים $g:[a,b]\to[a,b]$ וכן $g(x)$ רציפה בקטע. יש לפחות נקודת שבת אחת. נניח של-g יש 2 נקודות שבת שונות α,β. אז בהכרח מתקיים

$|\alpha-\beta| \overset{K<1,\alpha\ne\beta}{<} K|\alpha-\beta| \ge |g(\alpha)-g(\beta)| = |\alpha-\beta|$ וזו סתירה לכך ש- $\alpha\ne\beta$.

ב. מסעיף אי נובע שאם השיטה מתכנסת, אז היא מתכנסת לנקודת השבת היחידה של $g(x)$. נסמנה ב- α. נשים לב כי

$|x_{n+1}-\alpha|=|g(x_n)-\alpha|=|g(x_n)-g(\alpha)|\le K|x_n-\alpha|\le\ldots\le K^{n+1}|x_0-\alpha|$.
נתון ש $K<1$ ולכן $\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0$, מה ששקול לטענה כי x_n מתכנסת ל α.

ג. נגדיר $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$. נראה כי $g:[1,2]\to[1,2]$, נגזור: $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$.
$0=g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$ כאשר $x=\pm\sqrt{2}$. $g(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ וכן,
$g(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$ וכן, $g(2)=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. מתקיים $1<g(\sqrt{2}),g(1),g(2)<2$
לכן, בתחום $[1,2]$ מתקיים $1<\sqrt{2}\le g(x)\le\frac{3}{2}<2$, כלומר $g:[1,2]\to[1,2]$.
בנוסף, מכיוון ש- $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$ אז בתחום $[1,2]$ מתקיים $-\frac{1}{2}\le g'(x)\le\frac{1}{4}$.
זאת אומרת ש- $|g'(x)|\le\frac{1}{2}<1$.

נשתמש במשפט האומר כי אם $g:[a,b]\to[a,b]$, ומתקיים כי $|g'(x)|\le K<1$
בקטע, אז השיטה $x_{n+1}=g(x_n)$ מתכנסת לנקודת השבת היחידה בקטע $[a,b]$.
לכן, השיטה מתכנסת לנקודת השבת היחידה של $g(x)$, שהיא $\sqrt{2}$.

ד. נבדוק את סדר ההתכנסות. $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$, לכן $g'(\alpha=\sqrt{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.
נבדוק $g''(x)=\frac{2}{x^3}$. מתקיים $g''(\alpha=\sqrt{2})=\frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\neq 0$.
לכן, סדר ההתכנסות הוא 2.

שאלה 4 (25 נקודות)

Consider the matrix

$$A=\begin{pmatrix}9&3&6\\4&6&1\\1&1&7\end{pmatrix}.$$

a. (10 p.) Find the LU decomposition of A.

Use simple fractions in your computation.

b. (3 p.) Show that the elementary operations that are performed on A are equivalent to a multiplication of A by a matrix M. What is the matrix M ?

c. (5 p.) Use the LU decomposition of A in order to solve equation

$$Ax=\begin{pmatrix}18\\11\\9\end{pmatrix}.$$

d. (3 p.) Given the matrix

$$A=\begin{pmatrix}1.01&0.99\\0.99&1.01\end{pmatrix}.$$

Compute A^{-1} and then $cond(A)_\infty=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$.

e. (4 p.) Given the systems

$$\begin{cases}1.01x_1+0.99x_2=2\\0.99x_1+1.01x_2=2\end{cases}$$

and

$$\begin{cases} 1.01\tilde{x}_1 + 0.99\tilde{x}_2 = 2.02 \\ 0.99\tilde{x}_1 + 1.01\tilde{x}_2 = 1.98 \end{cases}.$$

Use the condition number to obtain a bound from above and from below

$$\frac{\|e\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

What can you say on the upper bound on the error?

פתרון:

א. נדרג את המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to_{R_2 - \frac{4}{9}R_1, R_3 - \frac{1}{9}R_1} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & 14/3 & -5/3 \\ 0 & 2/3 & 19/3 \end{pmatrix} \to_{R_3 - \frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & 14/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 138/21 \end{pmatrix} = U$$

ו- $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1 & 0 \\ 1/9 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$.

לכן,

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1 & 0 \\ 1/9 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & 14/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 138/21 \end{pmatrix}$$

ב. אנו קיבלנו כי $A = LU$ לכן, $L^{-1}A = U$. לכן $M = L^{-1}$.

ג. כעת נותר לפתור את המערכות $Ly = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$ ו- $Ux = y$. קודם נפתור $Ly = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$,

כלומר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1 & 0 \\ 1/9 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

מכאן נובע $y_1 = 18$, $y_2 = 3$, $y_3 = 46/7$, כלומר $y = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 46/7 \end{pmatrix}$.

כעת נפתור $Ux = y$, כלומר

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & 14/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 138/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 46/7 \end{pmatrix}.$$

לכן $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. לכן $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ד. נתון כי $A=\begin{pmatrix}1.01 & 0.99\\ 0.99 & 1.01\end{pmatrix} \Leftarrow A^{-1}=\frac{1}{0.04}\begin{pmatrix}1.01 & -0.99\\ -0.99 & 1.01\end{pmatrix}$,
לכן

$$cond(A)_\infty=\|A\|_\infty\left\|A^{-1}\right\|_\infty=2\cdot\frac{2}{0.04}=100.$$

ה. נשתמש בחסם

$$\frac{1}{cond(A)_\infty}\frac{\|\underline{r}\|_\infty}{\|\underline{b}\|_\infty}\le\frac{\|\underline{e}\|_\infty}{\|\underline{x}\|_\infty}\le cond(A)_\infty\frac{\|\underline{r}\|_\infty}{\|\underline{b}\|_\infty}$$

כאשר

$\tilde{\underline{b}}=\begin{pmatrix}2.02\\ 1.98\end{pmatrix},\quad \underline{b}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$ ואז $\underline{r}=\tilde{\underline{b}}-\underline{b}=\begin{pmatrix}0.02\\ -0.02\end{pmatrix}$.

לכן, $\frac{\|\underline{r}\|_\infty}{\|\underline{b}\|_\infty}=\frac{0.02}{2}=0.01$. זה גורר

$$10^{-4}=\frac{1}{100}0.01\le\frac{\|\underline{e}\|_\infty}{\|\underline{x}\|_\infty}\le100\cdot0.01=1$$

חסם השגיאה היחסית הוא 1, שהוא מספר יחסית גדול לשגיאה היחסית באגף ימין (שנורמת האינסוף שלה היא 0.01). הסיבה לכל היא מספר המצב הגבוה יחסית- ששוה ל-100- של המטריצה.

שאלה 5 (25 נקודות)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y'=-\lambda y,\quad y(0)=y_0.$ כאשר $\lambda>0$.
נשים לב כי הפתרון המדויק למד"ר הוא $y(x)=y_0e^{-\lambda x}$.

נתונות נקודות רשת שוות-מרחק $x_n=nh,\quad n=0,1,2,...$.

נרשום את המשוואה בצורה האינטגרלית $y(x_{n+1})-y(x_n)=-\lambda\int_{x_n}^{x_{n+1}}y(x)dx \quad (1)$.

א. (12 נק') מצאו ביטוי מהצורה $Ay(x_n)+By(x_{n-1})$, שמקרב את $\int_{x_n}^{x_{n+1}}y(x)dx$ בדיוק אלגברי גבוה ככל האפשר. חשבו את הקבועים A, B ורשמו את הסכימה שמתקבלת:

$$(2)\quad y_{n+1}-y_n=-\lambda[Ay_n+By_{n-1}],\quad n=1,2,3,...$$

ב. (9 נק') מצאו ביטוי לשגיאה המקומית (שגיאת הקיטוע) של הסכימה, עבור $x_n, n\ge2$, בהנחה ש- $y(x_0), y(x_1)$ ידועים.

ג. (4 נק') מהו סדר הדיוק האלגברי של קירוב האינטגרל שבסעיף א?

פתרון:

א. נקרב את $y(x)$ ע"י פולינום אינטרפולציה עד מעלה ראשונה:

$$y(x)=y(x_n)+y[x_n,x_{n-1}](x-x_n)+e(x),$$
$$e(x)=y[x_n,x_{n-1},x](x-x_n)(x-x_{n-1}).$$

נקרב את $\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} y(x)dx$ ע"י

$$\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}\left[y(x_n)+y[x_n,x_{n-1}](x-x_n)\right]dx=y(x_n)(x_{n+1}-x_n)+y[x_n,x_{n-1}]\left[\frac{(x-x_n)^2}{2}\right]_{x_n}^{x_{n+1}}.$$
$$=h\,y(x_n)+\frac{y(x_n)-y(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\frac{h^2}{2}=h\left[\frac{3}{2}y(x_n)-\frac{1}{2}y(x_{n-1})\right].$$

לכן $A=\frac{3}{2}h,\ B=-\frac{1}{2}h$.

הסכימה המתקבלת היא

$$(2)\qquad y_{n+1}-y_n=-\lambda h\left[\frac{3}{2}y_n-\frac{1}{2}y_{n-1}\right]$$

ב. השגיאה המקומית היא אינטגרל של שגיאת האינטרפולציה:

$$\tau_n=\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} e(x)dx=\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} y[x_n,x_{n-1},x](x-x_n)(x-x_{n-1})dx.$$

מכיוון ש- $\psi(x)=(x-x_n)(x-x_{n-1})\geq 0$ בקטע $[x_n,x_{n+1}]$, נובע כי

$$\tau_n=\frac{y''(\xi_n)}{2!}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_n)(x-x_{n-1})dx=\frac{y''(\xi_n)}{2!}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_n)(x-x_n+x_n-x_{n-1})dx$$
$$=\frac{y''(\xi_n)}{2!}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}\left[(x-x_n)^2+(x-x_n)(x_n-x_{n-1}\right])dx$$
$$=\frac{y''(\xi_n)}{2!}\left[\frac{h^3}{3}+h\frac{h^2}{2}\right]=\frac{5h^3}{12}y''(\xi_n).$$

נשים לב כי לפתרון יש אינסוף נגזרות, לכן ביטוי השגיאה למטה תקף.

ג. הנוסחה מדויקת לפולינומים עד מעלה ראשונה, מכיוון שבביטוי השגיאה מופיעה נגזרת שנייה. לכן סדר הדיוק האלגברי הוא 1.

בהצלחה!